Rozprawa doktorska

LOKALNE WŁASNOŚCI STRUKTUR LOSOWYCH W TEORII UNIKANIA WZORCÓW I APROKSYMACJACH DIOFANTYCZNYCH

ADAM GĄGOL

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
W Lublinie

Promotor: prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Promotor pomocniczy: dr. Jakub Kozik

Lublin 2015

Spis treści

1. Wstęp

Niniejsza rozprawa poświęcona jest zastosowaniu metody probabilistycznej w dowodzeniu twierdzeń kombinatorycznych dotyczących unikania wzorców oraz aproksymacjach diofantycznych. Składają się na nią trzy niezależne dowody, łączy je jednak kluczowa rola własności lokalnych.

1.1. Wprowadzenie do metod analitycznych.

Zanim przystąpimy do konstrukcji dowodów, przypomnimy klika podstawowych konceptów kombinatoryki analitycznej, dzięki którym uzyskamy później porządane oszacowania. Pochodzą one z książki Flajoleta i Sedgewicka "Analytic combinatorics"[17].

Ciąg liczbowy $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest *wykładniczego rzędu* K^n, co zapiszemy w skrócie jako $a_n \bowtie K^n$, wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$$

W dowodach użyjemy zdefiniowanego w książce operatora działającego na funkcjach tworzących SEQ. Operator ten odpowiada klasie obiektów $1+E+1+E_2+\dots$ i reprezentuje ciągi, tzn. pozycje nie są permutowane i istnieje dokładnie jeden ciąg pusty. Mamy:

$$\begin{aligned} SEQ(f(z)) &= 1 + \Sigma_{n\geqslant 1} Z(E_n)(f(z), f(z^2), \dots, f(n^2)) \\ &= 1 + \Sigma_{n\geqslant 1} f(z)^n = \frac{1}{1-f(z)} \end{aligned}$$

Kombinatoryka analityczna będzie używana w dowodach jako narzędzie służące do dowodzenia ograniczeń na wzrost współczynników funkcji tworzącej $f(z)$ zdefiniowanej równaniem typu $f(z) = z\cdot\phi(f(z)))$. Będzie to możliwe dzięki zastosowaniu następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.1. *(Flajolet, Sedgewick*[17]*, Proposition IV.5) Niech ϕ będzie funkcją analityczną w 0, mającą nieujemne współczynniki Taylora taką, że $\phi(0) \neq 0$. Ponadto niech $R \leqslant +\infty$ będzie promieniem zbieżnści ciągu reprezentującego ϕ w 0. Przy zachowaniu warunku*

$$\lim_{x\to R_-} \frac{x\cdot\phi'(x)}{\phi(x)} > 1$$

istnieje unikalne rozwiązanie $\tau \in (0, R)$ równania charakterystycznego:

$$\frac{\tau\cdot\phi'(\tau)}{\phi(\tau)}$$

Wtedy, formalne rozwiązanie $y(z)$ równania $y(z) = z\cdot\phi(y(z))$ jest analityczne w 0, a jego współczynniki spełniają równanie wzrostu wykładniczego:

$$[z^n]f(z) \bowtie \left(\frac{1}{p}\right)^n \textit{ gdzie } p = \frac{\tau}{\phi(\tau)} = \frac{1}{\phi'(\tau)}$$

2. Rozdział 1 - Unikanie wzorców w słowach częściowych

2.1. Podstawowe definicje. Niech $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$ oraz $\Delta = \{A, B, C, \dots\}$ będą alfabetami skończonymi. Elementy Σ nazywać będziemy *literami*, a ciągi elementów Σ *słowami*. Analogicznie elementy Δ nazywać będziemy *zmiennymi*, a ciągi tych elementów - *wzorcami*. Słowo w nad Σ *realiuje wzorzec* p jeśli istnieje morfizm $h : \Delta^+ \to \Sigma^+$ taki, że $h(p) = w$. Słowo w *zawiera wzorzec* p wtedy i tylko wtedy, gdy jakieś jego spójne podsłowo realizuje p, na przykład $aabaac$ zawiera wzorzec ABA, podczas gdy $abaca$ unika wzorca AA.

Słowo częściowe nad alfabetem Σ to ciąg znaków z rozszerzonego alfabetu $\Sigma_\diamond = \Sigma \cup \{\diamond\}$, gdzie $\diamond$ rozumiemy jako *lukę* reprezentującą nieznany znak. Dla słowa częściowego w zbiór pozycji luk oznaczamy jako $H(w)$. Słowo częściowe zawiera p jeśli istnieje podstawienie pojedynczych liter z Σ w miejsca $H(w)$ takie, że słowo wynikowe zawiera p.

indeks unikalności $\lambda(p)$ dla wzorca p to rozmiar najmniejszego alfabetu Σ takiego, że istnieje słowo nieskończone nad Σ unikające p. Analiogicznie *indeks częściowej unikalności* $\lambda^*(p)$ to rozmiar najmniejszego alfabetu Σ takiego, że istnieje nieskończone słowo częściowe w nad $\Sigma_\diamond$ unikające p oraz takie, że $|H(W)| = \infty$.

2.2. Wprowadzenie. Koncepcje i techniki związane z wzorcami w słowach znajdują zastosowania w wielu dziedzinach teoretycznej i stosowanej informatyki. Algorytmy związane z rozpoznawaniem wzorców znajdują szerokie zastosowanie np. w genetyce lub biologii obliczeniowej[11]. Z drugiej strony, ciągi bez powtórzeń są często wykorzystywane do znajdowania kontrprzykładów w językach bezkontekstowych, grupach, zbiorach częściowo uporządkowanych oraz dynamice symbolicznej[12].

Koncepcja unikalności i nieunikalności wzorców została wprowadzona przez Bean'a, Ehrenfeucht'a i McNulty'ego [4] oraz niezależnie przez Zimina [34]. Udowodnili oni jedno z podstawowych twierdzeń w tej tematyce:

Twierdzenie 2.1. *Niech p będzie wzorcem nad m zmiennymi. Wtedy p jest unikalny nad alfabetem pewnej skończonej wielkości k wtedy i tylko wtedy, gdy w_m unika p, gdzie w_m jest rekursywnie zdefiniowane jako $w_1 = 1$ oraz $w_l = w_{l-1} l w_{l-1}$.*

Interesującym i nietrywialnym wnioskiem z tego twierdzenia jest fakt, że nieunikalność danego wzorca p jest decydowalna. Wciąż otwartym poozstaje problem decydowalności o unikalnośc wzorca p nad alfabetem określonej wielkości k. Alternatywną wersją tego problemu jest znalezienie minimalnego k takiego, że p jest unikalny nad alfabetem wielkości k(indeksu unikalności). W kontekście słów pełnych unikalność wzorców unarnych była badana przez Thue'go[31, 32]: α jest nieunikalny, $\lambda(\alpha\alpha) = 3$, a $\lambda(\alpha\alpha\alpha) = 2$. Przypadek $m = 2$ również został całkowicie sklasyfikowany [8, 25, 29, 30].
W przypadku słów częściowych krótkie wzorce są niemożliwe do uniknięcia ze względu na możliwość podstawienia luki pod dowolną zmienną, przez co zarówno α jak i $\alpha\alpha$ są trywialnie nieunikalne, natomiast $\lambda^*(\alpha\alpha\alpha) = 2$[26], tak samo jak w przypadku słów pełnych. W przypadku $m = 2$ również widać korespondencję między słowami częściowymi a pełnymi - gdy zabroni się podstawiania pod zmienne pojedynczych liter, klasyfikacja wzorców dla słów pełnych pozostaje prawdziwa również w przypadku słów częściowych [7].

W ogólniejszej sytuacji, gdy wzorzec składa się z m zmiennych, hipoteza Cassaigne'a dowiedziona przez Blanchet-Sadri i Woodhouse'a daje ścisłe ograniczenie na minimalną długość wzorca unikalnego nad binarnym i ternarnym alfabetem dla słów pełnych:

Twierdzenie 2.2. *Jeśli p jest wzorcem o m zmiennych, to:*

- *Jeśli $|p| \geqslant 3(2^{m-1})$ to p jest unikalny nad alfabetem binarnym*

- *Jeśli* $|p| \geqslant 2^m$ *to* p *jest unikalny nad alfabetem ternarnym*

Autorzy w pracy stawiają hipotezę mówiącą, że powyższy wynik dla słów binarnych powinien uogólniać się na słowa częściowe. W przypadku słów ternarnych sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. Spostrzeżenie Kriegera i Ochema[24], że jeśli zmienna występuje we wzorcu tylko raz to można pod nią podstawić dowolnie długi ciąg liter i sprowadzić problem do wyszukiwania dwóch mniejszych wzorców pozwala sprowadzić problem unikalności dowolnego wzorca do problemu unikalności wzorca zdublowanego, czyli takiego, w którym każda zmienna występuje conajmniej dwukrotnie. Wzorzec p jest unikalny wtedy i tylko wtedy, gdy unikalne są wszystkie jego zdublowane podwzorce. W przypadku wzorców ternarnych możliwa jest sytuacja, w której pojedynczo występujące zmienne dzielą wzorzec na podwzorce w taki sposób, że żaden z nich nie spełnia już równania z warunku Cassaigne'a. Przykładem może być wzorzec $\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\gamma\alpha\alpha$ - jest on nieunikalny, gdyż do tego by słowo go zawierało wystarczy, by para $a\diamond$ wystąpiła w słowie trzykrotnie dla pewnej litery a. Z tego względu w pewien sposób naturalne wydaje się rozważanie w przypadku alfabetu ternarnego jedynie wzorców zdublowanych. Głównym wynikiem przedstawianym w tym rozdziale będzie dowód hipotezy dla alfabetu ternarnego z pewnym ograniczeniem na m:

Twierdzenie 2.3. *Jeśli* p *jest wzorcem o* $m > 2$ *zmiennych takim, że* $|p| \geqslant 2^m$*, to* p *jest unikalny nad alfabetem ternarnym.*

Twierdzenie naturalnie uzupełnia przedstawioną wcześniej klasyfikację unikalnych wzorców w słowach częściowych pozostawiając jedynie niewielką lukę - wciąż nie jest wiadomo, czy istnieje zdublowany wzorzec długości 4 i o 2 zmiennych, który byłby nieunikalny dla słów częściowych nad alfabetem ternarnym. Takie wzorce są jedynie dwa - $\alpha\beta\alpha\beta$ oraz $\alpha\alpha\beta\beta$, jednak sprawdzenie ich unikalności wymyka się używanym w tej pracy metodom probabilistycznym, których siła tkwi w zachowaniach asymptotycznych.

2.3. **Dowód głównego twierdzenia.** Dowód będzie wykorzystywać algorytmiczną wersję lokalnego lematu Lovasz'a autorstwa Mosera i Tardosza[27]. Koncepcja zastosowania tej wersji lematu w dowodach dotyczących wzorców w słowach pochodzi od Grytczuka, Kozika i Micka[21] i polega na założeniu, że losowy algorytm budujący słowo unikając wzorca nigdy nie ułoży słowa pewnej długości M i użycia tego faktu do skompresowania ciągu bitów w stopniu większym niż jest to możliwe.

Ustalmy wzorzec p o $k \geqslant 3$ zmiennych i długości 2^k. Udowodnimy, że możliwe jest skonstruowanie słowa $W = w_1 \dots w_n$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b, c\}$ unikającego p i takiego, że $H(W) = \{w_i : 100 \mid i\}$. Przeanalizujmy randomizowany algorytm 2, który stara się losowo ułożyć słowo W(dla uproszczenia analizy zakładamy, że umieszcza on litery również w miejscach luk) i wycofuje wszystkie instancje wzorca p traktując pozycje $H(W)$ jako luki.

Zauważmy, że zgodnie z założeniem nie istnieje $n-$literowe słowo unikające p, a zatem algorytm nigdy się nie zatrzyma. Ustalmy pewną wejściową sekwencję S i prześledźmy pierwsze M kroków działania algorytmu. Działając algorytmem na sekwencji S stworzymy strukturę dokładnie opisującą zachowanie algorytmu. Struktura ta będzie oczywiście zależeć jedynie od sekwencji S oraz wzorca p. Ponadto z konstrukcji będzie wynikać, że dla dwóch róznych sekwencji S i S' otrzymamy różne struktury. Naszą strukturą będzie piątka (P, L, S, H, F), gdzie:

(1) $P = (p_1, \dots, p_M)$ jest ciągiem liczb, gdzie p_i jest ilością liter, z któych składa się konstruowane słowo po i-tym kroku algorytmu,

Algorithm 1: Unikanie wzorca p

wejście: $S : \mathbb{N} \to \Sigma = \{a, b, c\}$
$\mathtt{i} \leftarrow 1$, $j \leftarrow 1$
while *Istnieje pozycja W bez przyporządkowanej litery* **do**
  $w_j \leftarrow S(\mathtt{i})$
  i++
  j++
  if *Istnieje instancja R wzorca p kończąca się na w_j* **then**
    Niech W_R będzie zbiorem pozycji R
    for $k \in W_R$ **do**
      usuń literę na pozycji w_k
    end
    $j \leftarrow$ pierwsza pozycja w W_R
  endif
end
return W

(2) $L = (L_1, \ldots, L_s)$ jest ciągiem zbiorów liczb, gdzie $L_i = \{l_{i,1}, \ldots, l_{i,k-1}\}$ i k jest ilością zmiennych we wzorcu p, a $l_{i,j}$ jest ilością liter przyporządkowanych do j-tej zmiennej w i-tym wycofanym powtórzeniu wzorca p podczas działania algorytmu,
(3) $S = (s_1, \ldots, s_r)$ jest ciągiem powstałym z liter przyporządkowanych do poszczególnych zmiennych α, β, γ kolejnych wycofywanych instancji p,
(4) $H = \{h_1, \ldots h_{|H|}\}$ jest ciągiem liter koniecznych do odtworzenia liter przyporządkowanych lukom podczas działania algorytmu. Po każdej retrakcji do H dodawane jest tyle liter, ile luk znajdowało się w wycofywanym fragmencie. Jest pewna redundancja między H i S, ale nie jest ona asymptotycznie istotna,
(5) $F = (f_1, \ldots, f_n)$ jest sekwencją liter w słowie W po M krokach algorytmu

Bezstratność kompresji Dowiedziemy, że możliwe jest zrekonstruowanie pierwszych M elementów sekwencji wejściowej S na podstawie piątki (P, L, S, H, F) powstałej w trakcie M kroków algorytmu. Dowód będzie polegał na odtworzeniu z (P, L, S, H, F) elementu $S(M)$ oraz (P', L', S', H', F') - piątki powstałej w trakcie pierwszych $M-1$ kroków działania algorytmu. Iterując ten proces otrzymamy całą sekwencję S.

Jeśli $p_M = p_{M-1} + 1$ to żaden wzorzec nie został wycofany podczas ostatniego kroku algorytmu, więc $S(M)$ jest po prostu ostatnim elementem F, P' oraz F' są jeden element krótsze, natomiast $L' = L$ i $H' = H$.

Jeśli $p_M = p_{M-1} - r + 1$, gdzie $k > 0$ to w trakcie ostatniego kroku nastąpiło wycofanie r elementów będących instancją wzorca p. Z ostatniego elementu L jesteśmy w stanie odtworzyć stukturę tej instancji, tzn. długości $l_1, \ldots, l_k$ ciągów podstawionych pod kolejne zmienne. Następnie analizując P jesteśmy w stanie stwierdzić ile luk zawierała instancja oraz w których miejscach wycofanego fragmentu się one znajdowały, natomiast z S i H jesteśmy w stanie odtworzyć konkretne litery, które były podstawione pod zmienne. Połączenie tych kroków pozwala na zrekonstuowanie słowa sprzed retrakcji wykonanej przez algorytm w ostatnim kroku. Przypisanie zrekonstruowanego słowa do F' oraz odpowiednie skrócenie P', L', S' and H' daje nam porządaną piątkę odpowiadającą $M-1$-emu krokowi algorytmu.

Kompresja. Interesować nas będzie asymptotyczna ilość opisów, gdy M dąży do nieskończoności. Podamy wspólne ograniczenie na ilość trójek P, L, S i osobne ograniczenia na H i F.

Ograniczanie P, L, S

Zastosujemy opisane wcześniej metody analityczne do ograniczenia rzędu wykładniczego ciągu $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ trójek (P, L, S), które możliwe są do uzyskania po i krokach algorytmu. Rozważmy te trójki jako ścieżki Dycka zaczynające się w punkcie $(0, 0)$ i kończące się w $(2i, 1)$. Jeśli dana ścieżka kończy się w jakimś innym punkcie, możemy sztucznie ją przedłużyć nie zmieniając rzędu wykładniczego dla dużych i. Jest to konsekwencja ograniczonej wysokości ścieżek wynikającej z niemożliwości skonstruowania słowa dłuższego niż $|W|$ nie zawierająeego wzorca p. Skonstruujemy funkcje tworzącą opisująca możliwe ścieżki poprzez zastosowanie konstrukcji SEQ. Niech $P(z)$ będzie funkcją tworzącą odpowiadającą wszystkim ścieżką Dycka możliwym do uzyskania w czasie działania algorytmu, $PL(z)$ będzie funkcją odpowiadającą ścieżkom wraz z wszystkimi możliwymi ciągami L, natomiast $t(z)$ - pożądaną funkcją odpowiadającą trójkom P, L, S. Zastosujemy teraz lekko zmodyfikowaną dekompozycję ostatnich spadków[17]. Niech $P_{0,n}$ będzie funkcją tworzącą wszystkich możliwych ścieżek zaczynających się na poziomie 0 i kończących na poziomie n. Zapisanie miejsc, w których ścieżka przekracza granicę poziomów $0, ..., n$ daje nam $P_{0,n} = P_{0,1}^{n-1}$, co po zsumowaniu dla wszystkich możliwych ostatnich spadków daje $P = z(1 + \mathrm{SEQ}(P))$. Jako że wraz z ostatnim spadkiem chcemy zapisać również L, podzielimy go na k części odpowiadających zmiennym wzorca p w taki sposób, że część odpowiadająca i-tej zmiennej pojawiającej się u_i razy w p będzie długości podzielnej przez u_i. Dostajemy

$$PL(z) = z\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{k}\Big(\mathrm{SEQ}\big(\mathrm{SEQ}_{u_i}(PL(z))\big)\Big)\right)\right)$$

Zapisując wraz ze ścieżką również S dostajemy konstrukcję dla t, co po przetłumaczeniu na równanie dla funkcji tworzącej daje:

$$t(z) = z\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{k}\Big(\mathrm{SEQ}\big(\mathrm{SEQ}_{u_i}(3 \times t(z))\big)\Big)\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$t(z) = z\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{k}\Big(\frac{3t(z)^{u_i}}{1 - 3t(z)^{u_i}}\Big)\right)\right)$$

Funkcja $\phi = 1 + \left(\prod_{i=1}^{k}\big(\frac{3t(z)^{u_i}}{1-3t(z)^{u_i}}\big)\right)$ spełnia warunki twierdzenia 1.1 a zatem istnieje unikalne rozwiązanie równania $\frac{x\phi'(x)}{\phi(x)}$. Jako że $\frac{x}{\phi(x)}$ jest funkcją wypukłą, wystarczy ograniczyć jej maximum by uzyskać ograniczenie rzędu wykładniczego R_i. Dla funkcji $\varphi(l_1, \ldots, l_k) = \frac{t}{1+\prod_{i=1}^{k}(\frac{3t^{l_i}}{1-3t^{l_i}})}, t \in (0, 0.6), l_1, \ldots, l_k \geqslant 2$ wypukłej dla zmiennych $l_1, \ldots, l_k$ maksymalną wartością w zbiorze wypukłym $\{(l_1, \ldots, l_k); 2 \leqslant l_i, \Sigma_{i=1}^{k} l_k = 2^k\}$ jest jeden z punktów ekstremalnych tego zbioru, to jest:

$$\frac{t}{1 + \prod_{i=1}^{k}(\frac{3t^{l_i}}{1-3t^{l_i}})} \geqslant \frac{t}{1 + \prod_{i=1}^{k-1} \frac{3t^2}{(1-3t^2)} \times \frac{3t^{2^k-2k+2}}{1-3t^{2^k-2k+2}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{t}{1 + \prod_{i=1}^{k} \frac{3t^{l_i}}{1-3t^{l_i}}} \geqslant \frac{t}{1 + \prod_{i=1}^{3} \frac{3t^2}{1-3t^2} \times \frac{3t^{10}}{1-3t^{10}}}$$

Używając programu Maple dokonujemy sprawdzenia, że ostatnia nierówność osiąga 0.487 dla $t = 0.4710$, a zatem rząd wykładniczy R_n jest nie większy niż $1/0.4710 = 2.1229$ i w konsekwencji istnieje najwyżej 2.1229^M trójek P, L, S możliwych do uzyskania w M krokach algorytmu2

Ograniczanie H Każda retrakcja R wycofuje co najmniej 24 litery, a zatem dodaje co najwyżej $\lceil \frac{|R|}{100} \rceil$ liter do H. Ponadto suma długości wszystkich retrakcji jest niewiększa niż M, a zatem istnieje najwyżej $2^{\frac{M}{24}} < 1.03^M$ ciągów R możliwych do osiągnięcia po M krokach algorytmu.
Ograniczanie F Ostateczna sekwencja liter jest długości najwyżej $|W| - 1$, zatem istnieje najwyżej $4^{|W|}$ takich sekwencji, bo do każdego miejsca może zostać przyporządkowany jeden z symboli $0, 1, 2$(litery alfabetu ternarnego) lub brak symbolu. Symbole $\diamond$ mogą być przyporządkowywane tylko do ustalonych wcześniej pozycji, zatem dodatkowe zapisywanie ich nie jest konieczne.

Ograniczanie (P, L, S, R, F)
Mnożąc wszystkie poprzednie ograniczenia dla dostatecznie dużego M otrzymujemy ograniczenie $(2.1229 \times 1.03)^M \times 4^(|W|) < 2.1866^M \times 4^{|W|} < 3^M$ na wszystkie możliwe piątki w pełni opisujące wszystkie 3^M możliwych prefiksów S, co daje nam pożądaną sprzeczność.

2.4. **Uwagi końcowe.** Algorytmiczny lokalny lemat Lovasza jest bardzo użyteczną metodą w dziedzinie unikania wzorców w słowach, jednak jego siła przejawia się głównie w zachowaniach asymptotycznych(można to zresztą powiedzieć o większości metod o naturze probabilitycznej). Bezpośrednie zastosowanie technik wykorzystanych w dowodzie dla alfabetów ternarnych pozwala na udowodnienie hipotey o alfabetach binarnych dla wzorców p o conajmniej 3 zmiennych. Z tego względu udowodnienie pełny dowód hipotezy dla alfabetów binarnych może wymagać innych metod.

3. Unikanie wzorców w grafach

3.1. **Podstawowe definicje.** Dla grafu G przez $V(G)$ i $E(G)$ oznaczać będziemy odpowiednio zbiór wierzchołków i krawędzi G. Kolorowanie grafu to funkcja $\phi : V(G) \to \mathbb{N}$ przyporządkowująca każdemu z wierzchołków kolor będący liczbą naturalną, natomiast k-kolorowanie to kolorowanie używające jedynie k kolorów.

Przyporządkujmy teraz każdemu z wierzchołków v listę $L_v \subset \mathbb{N}$ dostępnych kolorów. Kolorowanie G z list to takie kolorowanie, dla którego $\forall_{v \in V(G)} \phi(v) \in L_v$. Listowa liczba Thuego grafu G oznaczana jako $\pi_l(G)$ to minimalne k takie, że dla każdego przyporządkowania list wielkości k do wierzchołków G istnieje nierepetytywne kolorowanie z tych list. W obrębie tego rozdziału interesować nas będzie czasem wybieranie mniejszej listy z większych list kolorów dostępnych dla każdego wierzchołka - na taką procedurę patrzeć będziemy jak na wybór podlisty ze wszystkich możliwych podlist i nazywać l-kolorowaniem.

Powiemy, że kolorowanie $\phi V(G) \to \mathbb{N}$ grafu G unika wzorca p, jeśli nie istnieje w nim ścieżka prosta, która zawierałaby p(rozważamy kolory wierzchołków na ścieżce jako litery alfabetu k-arnego) oraz że jest *nierepetytywne*, jeśli unika wzorca $\alpha\alpha$. O l-kolorowaniu powiemy, że unika wzorca p, jeśli z wybranych list nie da się wybrać kolorów tak, by powstała instancja wzorca. Liczba Thuego grafu G, oznaczana jako $\pi(G)$, to minimalna ilość kolorów k, dla której da się skonstruować nierepetytywne k-kolorowanie G.

3.2. **Wprowadzenie.** Jednym z naturalnych rozwinięć tematyki unikania wzorców w słowach nad alfabetem k-arnym jest unikanie wzorców w grafach kolorowanych k kolorami. Problem ten był rozważany głównie w kontekście unikania powtórzeń(tzn. wzorców typu $\alpha\alpha$) i ograniczania liczby kolorów ze względu na różne parametry grafowe. Wynikiem, który zapoczątkował badania w tej dziedzinie było ograniczenie ilości kolorów ze względu na maksymalny stopień wierzchołka:[2]

Twierdzenie 3.1. *Istnieje stała c taka, że*

$$\pi(G) \leqslant \pi_l(G) \leqslant c\Delta^2$$

dla wszystkich grafów o maksymalnym stopniu wierzchołka równym Δ

Ponadto w tej samej pracy udało się pokazać, że istnieją grafy, dla których $\pi(G) \geqslant \frac{\Delta^2}{\log \Delta}$. Dzięki późniejszym pracom dotyczącym oszacowania stałej c[19, 20, 22, 16] zostało osiągnięte oszacowanie $\pi(G) \leqslant \pi_l(G) \leqslant (1 + o(1))\Delta^2$[16]. Wszystkie te wyniki w naturalny sposób uogólniają się na listową liczbę Thuego.

Jednym z prostszych wyników w tej dziedzinie jest ograniczenie liczby Thuego dla wszystkich drzew przez 4[2], które zostało uogólnione dla wszystkich grafów o ograniczonej szerokości drzewowej przez Kündgena i Pelsmajera. Pokazali oni, że $\pi(G) \leqslant 4^k$ dla wszystkich grafów o szerokości drzewowej k[23]. Jeśli zamiast szerokości drzewowej rozważy się szerokość ścieżkową, znane jest ograniczenie wielomianowe: $\pi(G) \leqslant 2k^2 + 6k + 1$[16]. W żadnym z przypadków nie wiadomo, czy ograniczenie jest poprawnej asymptotyki.

Przejdziemy teraz do omówienia wyników dotyczących listowej liczby Thuego, która będzie głównym tematem tego rozdziału. Wiadomo, że dla ścieżek listowa liczba Thuego wynosi 3 lub 4 i jest to jeden z pierwszych wyników wykorzystujących algorytmiczną wersję lokalnego lematu Lovasza w problematyce unikania wzorców[**?**](Zwykła liczba Thuego dla ścieżek wynosi 3 i jest to prosta konsekwencja twierdzenia Thuego). Niedawny wynik Fiorenzi'ego, Ochema, Ossona de Mendeza i Zhu jest pierwszym wskazującym na różnicę między listową i klasyczna liczbą Thuego. Pokazali oni, że listowa liczba Thuego dla drzew nie jest ograniczona. Oczywiście drzewa, które osiągają wysokią listową liczbę Thuego muszą mieć również wysokie stopnie wierzchołków, co wynika z przytoczonego wcześniej ograniczenia.

Z jednej strony wiemy więc, że $\pi_l(G)$ nie jest ograniczone dla grafów z ograniczoną szerokością drzewową, z drugiej strony jest ograniczone dla ścieżek i grafów z szerokością ścieżkową 1[16]. Dwa wyniki, które zaprezentuję w tym rozdziale powstały we współpracy z Piotrem Mickiem, Jakubem Kozikiem oraz Gweanelem Joretem. Pierwszy z nich to konstrukcja kontrprzykładu pokazującego, że listowa liczba Thuego nie jest ograniczona dla grafów z szerokością ścieżkową.

Twierdzenie 3.2. *Dla każdego $l > 1$ istnieje graf G o szerokości ścieżkowej 2 taki, że $\pi_l(G) > l$*

W obliczu tego wyniku i prostego ograniczenia klasycznej liczby Thuego dla drzew zasadnym wydaje się pytanie o listową liczbę Thuego dla drzew z ograniczoną szerokością ścieżkową(ograniczenie to nie ogranicza stopni wierzchołków). Drugi wynik jest pozytywny i stanowi ograniczenie na liczbę kolorów w tej właśnie konfiguracji:

Twierdzenie 3.3. *Istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $\pi_l(T) \leqslant f(k)$ dla każdego drzewa T o szerokości ścieżkowej k.*

3.3. **Ogólne grafy o ograniczonej szerokości ścieżkowej.** Sekcję tę zaczniemy od konstrukcji grafu o szerokości ścieżkowej 2 i dowolnie dużej listowej liczbie Thuego. Niech $D_{n,k}$ będzie grafem powstałym ze ścieżki o długości $2n$ poprzez zastąpienie każdego nieparzystego wierzchołka grupą $\binom{kn}{k}$ wierzchołków, to jest:

$$V(D_{n,k}) = \{v_{2i-1} | i \in [n]\} \cup \left\{v_{2i}^{j} : i \in \Big[n\Big], j \in \Big[\binom{kn}{k}\Big]\right\}$$

Wierzchołki są połączone krawędzia w $D_{n,k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich indeksy różnią się o dokładnie jeden(co w szczególności oznacza, że grupy wierzchołków nieparzystych tworzą zbiory niezależne). Udowodnimy teraz, że:

Twierdzenie 3.4. *Jeśli k i n są liczbami naturalnymi takimi, że $k > 1$ i $n > e^{k+2}$ to $\pi_l(D_{n,k}) > k$*

Dowód. Na potrzeby dowodu wierzchołkiem uogólnionym V_i nazwijmy wierzchołek v_i dla i parzystych oraz zbiór wszystkich wierzchołków $v_{i,j}$ dla i nieparzystych. Wtedy przez dla kolorowania ϕ przez $\phi(2i+1)$ będziemy rozumieć zbiór wszystkich kolorów wybranych dla wierzchołków w V_{2i+1}.Przyporządkujmy listy długości k do wierzchołków w taki sposób, że wierzchołki parzyste otrzymają parami rozłączne listy, natomiast wierzchołki nieparzyste o danym indeksie otrzymają wszystkie możliwe listy kolorów używanych przez listy wierzchołków parzystych. Dla wierzchołka v_i, gdzie $i = 2t$ połóżmy zatem $L_i = \{tk+1, tk+2, \ldots, tk+k\}$, a dla wierzchołków $v_{2i+1,1}, v_{2i+1,2}, \ldots, v_{2i+1,knk}$ niech $L_{2i+1,1}, \ldots$ będą wszystkimi k-elementowymi podzbiorami $\{1, 2, \ldots, kn\}$.

Przypuśćmy, że dla takiego doboru list ϕ jest nierepetytywnym k-kolorowaniem $D_{n,k}$. By dojść do sprzeczności wystarczy rozważyć powtórzenia bloków nieparzystej długości. Zauważmy, że dla każdego segmentu $[D_i, D_{i+4j+2}]$ musi istnieć parzyste l takie, że $\phi(l) \notin \phi(l+2j+1)$ dla pewnego $j \in \mathbb{Z}$. Powiemy wtedy, że para $(l, l+2j+1)$ jest świadkiem dla segmentu $[D_i, D_{i+4j+2}]$. Oczywiście każdy segment musi mieć świadka, ponadto para $(l, l+2j+1)$ może być świadkiem jedynie dla zawierających ją segmentów długości $4j+2$, a zatem dla najwyżej $|2j+1|$ segmentów.

Graf $D_{n,k}$ zawiera $n-(4l-2)$ segmentów długości $4l+2$, które w sumie potrzebują co najmniej $\lceil \frac{n-(4l-2)}{4l+2} \rceil = \lceil \frac{n}{4l+2} - 2 \rceil$ świadków. Sumując dla wszystkich l otrzymujemy:

$$\Sigma_{l=1}^{\frac{n-2}{4}} \lceil \frac{n}{4l+2} - 2 \rceil \geqslant \frac{n}{4} \Sigma_{l=1}^{\frac{n}{4}} \frac{1}{l} - 2 \geqslant \frac{n}{4} \ln(\frac{n}{4}) \tag{1}$$

Zauważmy teraz, że uogólniony wierzchołek nieparzysty V_{2i+1} może należeć do najwyżej $k-1$ par typu $(l, 2i+1)$ będących świadkami, gdyż należenie do każdej z nich wiąże się z niemożliwością wykorzystania koloru $\phi(l)$ w żadnym z wierzchołków V_{2i+1}. Jeśli więc należałby on do k par, zabraniałyby one k różnych kolorów, zatem wierzchołek V_{2i+1} odpowiadający zabronionej k-tce nie mógłby zostać pokolorowany. Z równania 1 wynika, że uogólniony wierzchołek nieparzysty należy średnio do $\frac{1}{2}\ln(\frac{n}{4})$ par będących świadkami, co w połączeniu z założeniem $n > e^{k+2}$ daje nam pożądaną sprzeczność.

□

3.4. **Drzewa o ograniczonej szerokości ścieżkowej.** Reszta niniejszego rozdziału poświęcona będzie dowodowi twierdzenia o ograniczonej liczbowej liczbie chromatycznej drzew z ograniczoną szerokością ścieżkową. Metoda będzie bardzo podobna do wykorzystanej w dowodzie twierdzenia 2.3:

Twierdzenie 3.5. *Istnieje funkcja f taka, że jeśli T jest drzewem o szerokości śieżkowej $w$to $\pi_l(w) < f(w)$*

Ze względów technicznych zanim przejdziemy do dowodu uogólnimy pojęcie powtórzenia. Powtórzenie długości n z przerwą t to ciąg $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_t, a_{n+1}, \ldots, a_{2n})$, gdzie $a_i = a_{i+n}$. Powtórzenie długości k nazywać będziemy w skrócie k-powtórzeniem. Nadużywając lekko notacji ścieżkę w grafie, w którym sekwencja kolorów tworzyć będzie repetycję również nazywać będziemy repetycją. Środkową krawędzią repetycji długości k nazwiemy krawędź pomiędzy k-tym, a $k+1$-szym wierzchołkiem ścieżki. Bliźniakiem l-tego wierzchołka w repetycji długości k nazwiemy wierzchołek o indeksie $l + k \mod 2k$.

W dowodzie korzystać będziemy z następującego lematu o dekompozycji drzew o ograniczonej szerokości ścieżkowej:

Lemat 3.6. *Jeśli T jest drzewem o szerokości ścieżkowej k, istnieje zbiór P rozłącznych ścieżek należących do T taki, że:*

(1) *Każdy wierzchołek T należy do dokładnie jednej ścieżki w P*
(2) *Metadrzewo $\mathbb{T}$ powstałe z T przez kontrakcję wszystkich ścieżek w P ma średnicę niewiększą niż $2^{k+1} - 1$*

Dowód. Dowód będzie przebiegać indukcyjnie ze względu na k. Przypadek $k = 0$ jest oczywisty, załóżmy więc, że $k > 0$ i teza zachodzi dla wszystkich $l < k$. Każdy graf o szerokości ścieżkowej k jest spójnym podgrafem grafu przedziałowego o wysokości $k+1$, weźmy więc dowolną reprezentację takiego nadgrafu dla T. Niech P_0 będzie ścieżką łączącą przedział zaczynający się najbardziej na lewo w tej reprezentacji z przedziałem kończącym się najbardziej na prawo(jest ona wyznaczona jednoznacznie, bo T jest drzewem). Po usunięciu P_0 z reprezentacji, pozostaje las o szerokości ścieżkowej nie większej niż $k-1$. Z założenia indukcyjnego każde pozostałe drzewo posiada dekompozycję na ścieżki spełniające warunki twierdzenia tworzące metadrzewa o szerokości nie większej niż $2^k - 1$. Niech P będzie sumą tych ścieżek i P_0. Oczywiście ścieżki P są podziałem wierzchołków drzewa T, a średnica metadrzewa P jest nie większa niż $2^{k+1} - 1$. □

Ustalmy teraz drzewo T o szerokości ścieżkowej k wraz z dowolnym zanurzeniem na płaszczyznę, korzeniem oraz dekompozycją P o metadrzewie $\mathbb{T}$ Dodatkowo skierujmy każdą ścieżkę w P w prawą stronę. Pojedynczą ścieżkę dekompozycji nazywać będziemy ścieżką *pierwotną*, natomiast jej wierzchołek sąsiadujący ze ścieżką bliższą korzeniowi T - punktem *centralnym*(oczywiście ścieżka zawierająca korzeń nie ma punktu centralnego). Dla każdego wierzchołka $v \in T$, poziomem v będziemy nazywać odległość metawierzchołka zawierającego v do metawierzchołka zawierającego korzeń T w metadrzewie $\mathbb{T}$. Dla dowolnej ścieżki w T, jej fragment składający się z wierzchołków na najniższym osiąganym przez nią poziomie nazywać będziemy dolną częścią ścieżki. Scieżkę w T nazywać będziemy stabilną - jeśli oba z jej końców są w jej dolnej części, jednokierunkową - jeśli leży tam tylko jeden z końców, oraz dwukierunkową - jeśli żaden z końców nie leży w dolnej części ścieżki. Jednokierunkowa ścieżka $(v_1, \ldots, v_l)$ jest skierowana w lewo jeśli (v_2, v_1) jest skierowaną krawędzią w ścieżce P zawierającej v_1, przeciwnym wypadku taka ścieżka jest skierowana w prawo(nawet jeśli v_1 i v_2 należą do różnych ścieżek w P). Dla ścieżek jedno- i dwukierunkowych wierzchołki należące do dolnej części ścieżki mające sąsiada nienależącego do dolnej częśći nazywać będziemy *punktami załamania*. Dla punktu v na poziomie k, dziećmi tego punktu nazwiemy wszystkie wierzchołki z poziomu $k+1$, które sąsiadują z v. Przez $v\downarrow$ oznaczać będziemy sumę wszystkich potomków v wraz z v.

Zanim przejdziemy do konstrukcji nierepetytywnego kolorowania T skrócimy listy wykluczając jednocześnie następujące szczególne typy powtórzeń:

(1) k-powtórzenia z przerwą t, gdzie $t < k$, należące w całości do jednej ścieżki pierwotnej,
(2) jednostronne k-powtórzenia skierowane w prawo z dowolnie dużą przerwą takie, że przecięcie przerwy i dolnej części powtórzenia jest nie dłuższe niż k

(3) jednostronne k-powtórzenia skierowane w lewo z dowolnie dużą przerwą takie, że przecięcie przerwy i dolnej części powtórzenia jest nie dłuższe niż k

Opis stopniowego skracania list opiszemy w trzech lematach poświęconych trzem kolejnym typom powtórzeń. Skracanie list w drzewie można rozważać jako kolorowanie drzewa krótszymi listami, każde takie kolorowanie nazywać będziemy L-kolorowaniem. We wszystkich dowodach wszystkie skrócone listy będą tej samej długości. Ścieżkę pokolorowaną listami nazywać będziemy L-powtórzeniem danego typu, jeśli z list da się wybrać kolory w taki sposób, by powstało powtórzenie tego typu.

Ze względów technicznych będziemy potrzebować następującej obserwacji:

Lemat 3.7. *Jeśli $x_1, \ldots, x_n$ jest ciągiem nieujemnych liczby rzeczywistych takich, że $\Sigma_{i=1}^{n} x_i = M$ to $\Pi_{i=1}^{n} x_i \leqslant 4^M$.*

Dowód. Z nierówności Cauchyego wynika, że iloczyn n liczb o stałej sumie jest maksymalizowany, gdy liczby te są równe. Interesuje nas zatem maksymalna wartość wyrażenia x^n przy założeniu, że $nx = M$. Zauważmy, że dla $x > 4$ mamy $(\frac{x}{2})^2 > x$, a zatem wybranie $x' = \frac{x}{2}$ i $n' = 2n$ zwiększy nasze wyrażenie. Maksimum jest więc osiągane dla x-ów mniejszych niż 4, co implikuje nierówność $x^n < 4^n < 4^M$. □

Lemat 3.8. *Jeśli T jest drzewem o szerokości ścieżkowej k z listami wielkości $N = 64n^2 + n - 1$ przyporządkowaymi do wierzchołków to istnieje l-kolorowanie T listami wielkości n w taki sposób, by nie istniała l-repetycja typu* (1)

Dowód. Niech T będzie drzewem o szerokości drzewowej k, metadrzewie $\mathbb{T}$ i ze zbiorem list $\{L_v\}_{v \in V(T)}$ o wielkościach równych $64n^2 + n - 1$ dla każdego v. Załóżmy, że nie jest możliwy wybór podlist wielkości n w taki sposób, by nie istniała l-repetycja typu (1). Z definicji każde powtórzenie typu (1) zawarte jest w jednej ścieżce pierwotnej, a zatem istnieje pewna ścieżka $P \in \mathbb{P}$ dla której nie istnieje odpowiedni wybór podlist. Rozważmy randomizowany algorytm 2 próbujący wybrać podlisty w taki sposób, by nie stworzyć l-repetycji typu (1):

Algorithm 2: Unikanie powtórzeń typu (1)

wejście: $S : \mathbb{N} \rightarrow [\binom{N}{n}]$
i $\leftarrow 1$, $j \leftarrow 1$, $C \leftarrow \emptyset$
while *Sciezka nie jest w całości L-pokolorowana* **do**
  $C(v_j) \leftarrow podlist\mathrm{Lo}indeksie S(\mathtt{i})$
  i++
  j++
  if *Istnieje instancja R L-repetycji kończąca się na* v_j **then**
    Niech W_R będzie powtórzoną częścią R zawierającą v_j
    for $v \in W_R$ **do**
      usuń warotść $C(v)$
    end
    $j \leftarrow$ indeks pierwszej pozycji w W_R
  endif
end
return C

Zauważmy, że dzięki założeniu o nieistnieniu poprawnego l-kolorowania, algorytm nigdy się nie zatrzyma. Ustalmy teraz pewną sekwencję wejściową S i prześledźmy pierwsze M kroków działania algorytmu. Tak jak poprzednio, postaramy się opisać działanie algorytmu za pomocą struktur, których ilość oszacujemy później za pomocą metod kombinatoryki analitycznej. Tym razem strukturą będzie czwórka (P, F, G, R), gdzie:

- $P = (p_1, \ldots, p_M)$ jest ciągiem liczb, gdzie p_i jest jest ilośćią wierzchołków z nadanymi kolorami (mniejszymi listami) po i krokach,
- F jest funkcją częściową C po M krokach algorytmu
- $G = (g_1, \ldots, g_s)$ jest ciągiem liczb takich, że g_i jest długością przerwy w i-tej wycofanej repetycji typu (1),
- $R = (r_1, \ldots, r_s)$ jest ciągiem sekwencji liczb, gdzie $r_i = (l_1, \ldots, l_k)$ odpowiada i-temu powtórzeniu. Jeśli i-te powtórzenie pojawiło się na ścieżce $(v_1, \ldots, v_k, b_1, \ldots, b_t, v_{k+1}, \ldots, v_{2k})$, gdzie t jest długością przerwy, a listy je tworzące to $L_1, \ldots, L_k, B_1, \ldots, B_t, L_{k+1}, \ldots, L_{2k}$ to l_i jest indeksem listy L_{k+i} spośród wszystkich list możliwych do wybrania na wierzchołku v_i

□

Teraz przystąpimy do dowodów kompresji i bezstratności tego kodowania, analogicznie jak miało to miejsce w poprzednim rozdziale.

Kompresja

(1) Zacznijmy od oszacowania ilości wszystkich możliwych P. Ciąg $(p_1, \ldots, p_M)$ bijektywnie przetransformujmy w ciąg różnic $(1, p_2 - p_1, , p_M - p_{M-1})$ tak, że wszystkie różnice należeć będą do zbioru $\{1, 0, -1, -2, \}$. Następnie każdy niedodatni element $-k$ tego ciągu zamieńmy w podciąg $(1, -1, -1,)$ długości k, łatwo sprawdzić, że ta operacja również jest bijektywna. Ciąg wynikowy jest ciągiem zerojedynkowym o długości nie większej niż $2M$, zatem ilość takich ciągów jest rzędu $O(4^M)$ więc i ilość P jest takiego rzędu, jako że obie transformacje były bijektywne,

(2) Ilość możliwych F może być traktowana jak stała, gdyż nie rośnie wraz z M

(3) Suma elementów G jest nie większa niż suma długości wszystkich wycofanych l-repetycji, która jest nie większa niż M, zatem ilość możliwych ciągów G jest mniejsza niż ilość ciągów $M + 1$ liczb nieujemnych sumujących się do M, czyli $\binom{2M}{M} = O(4^M)$

(4) By oszacować ilość możliwych R przypomnijmy, że każde $\alpha_j \in r_i \in R$ jest indeksem pewnej n-podlisty pośród wszystkich n-podlist listy rozmiaru N mających niepuste przecięcie z pewną jej ustaloną podlistą rozmiaru n. Indeks ten nie może być większy niż $nN - 1n - 1$. Suma długości ciągów składających się na R jest nie większa niż M, a każdy ciąg długości M może być rozdzielony na spójne podciągi na 2^M sposobów, co w połączeniu z poprzednią obserwacją daje porządane oszacowanie postaci $O((2n\binom{N-1}{n-1})^M)$.

Mnożąc uzyskane szacowania dostajemy oszacowanie na ilość możliwych czwórek (P, F, R, B) opisujących konkretny przebieg algorytmu o długości M:

$$o\Big(\Big(2^5 n\Big(\binom{N-1}{n-1}\Big)\Big)^M\Big) = o\Big(\Big(2^5 n \frac{n}{N-n+1}\binom{N}{n}\Big)^M\Big) = o\Big(\binom{N}{n}^M\Big)$$

Widać zatem, że dla wystarczająco dużego M liczba możliwych opisów działania algorytmu jest mniejsza niż liczba początkowych segmentów S o długości M. By uzyskać sprzeczność wystarczy teraz pokazać, że dwa różne segmenty początkowe S generują zawsze różne opisy.

Bezstratność opisu Udowodnimy, że da się zrekonstruować pierwsze M elementów ciągu S na podstawie czwórki (P, F, R, G) powstałej po M krokach działania algorytmu. Argument będzie iteracyjny - dla (P, F, R, G) zrekonstruujemy $S(M)$ oraz

(P', F', R', G') - czwórkę powstałą po $M-1$ krokach działania algorytmu, a następnie powtarzając rozumowanie - całą początkową sekwencję S. Jeśli $p_M = p_{M-1}+1$ to żadne l-powtórzenie nie zostało wycofane w ostatnim kroku, zatem $S(M)$ to po prostu indeks ostatniej podlisty F, P' i F' są o jeden element krótsze, a $R' = R$ i $B' = B$. Jeśli $p_M = p_{M-1} - k + 1$, gdzie $k > 0$ to w ostatnim kroku została wykonana retrakcja k elementów tworzących l-powtórzenie. Ostatni element G to długość luki t dla tego powtórzenia. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ będzie ostatnim elementem R, a $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_t$ ostatnimi elementami F o przypisanych podlistach, oraz niech $A_1, \ldots, A_k$ będą podlistami przypisanymi do $a_1, \ldots, a_k$(informacje o tych podlistach są zapisane w F). Ponadto niech $a_{k+1}, \ldots, a_{2k}$ będą wierzchołkami następującymi po b_t na ścieżce - są to wierzchołki, którym przed retrakcją były przypisane podlisty. Rozważmy wierzchołek a_{k+i}. Znamy jego listę $L(a_{k+i})$, znamy podlistę A_i przypisaną do a_i i wiemy, że lista A_{k+1} przypisana wcześniej do a_{k+i} ma indeks α_i spośród wszystkich n-podlist $L(a_{k+i})$ mających niepuste przecięcie z A_i. Pozwala nam to zrekonstuować wszystkie podlisty przypisane wierzchołkom przed retrakcją- F''. Tak jak w poprzednim przypadku, $S(M)$ to indeks ostatniej podlisty F'', natomiast (P', F', R', B') są o jeden element krótsze niż (P, F'', R, B).

Używając bardzo podobnych argumentów w kolejnych lematach pokażemy, że jeśli początkowe listy są wystarczająco długie to mogą zostać skrócone w taki sposób, by każde kolorowanie unikało powtórzeń typu (2) oraz (3).

Lemat 3.9. *Jeśli T jest drzewem o szerokości ścieżkowej k i listach rozmiaru $N = 64n^2 + n - 1$ oraz bez powtórzeń typu* (1) *to da się wybrać podlisty rozmiaru n dla wszystkich wierzchołków tak, by nie istniało kolorowanie z tych podlist zawierające powtórzenie typu* (2) *o dolnej części w ścieżce pierwotnej zawierającej korzeń T.*

Dowód. W obrębie dowodu powtórzenie typu (2) z dolną częścią w ścieżce zawierającej korzeń T nazywać będziemy powtórzeniem typu $(2')$. Dla częściowego l-kolorowania C i wierzchołka v niech $d(C, v)$ będzie deterministycznie skonstruowanym rozszerzeniem C o wszystkie wierzchołki należące do $v\downarrow$, które unika powtórzeń typu $(2')$. Oczywiście takie rozszerzenie nie musi zawsze istnieć, więc d jest funkcją częściową. Jeśli istnieje wiele takich rozszerzeń, wybieramy pierwsze zgodnie z dowolnym ustalonym porządkiem. Naturalnie rozszerzamy d do funkcji, która działa na zbiorach wierzchołków, a nie tylko na pojedynczych wierzchołkach.

Dowód będzie polegał na analizie algorytmu 3 kolorującego drzewo i unikającego powtórzeń typu $(2')$. W analizie wartości $C(v)$ przyporządkowane w linii 5 nazywać przyporządkowanymi *bezpośrednio*. Algorytm korzysta ze zdefiniowanej później funkcji `Next` oraz dodatkowych oznaczeń - dla wierzchołka v ze ścieżki pierwotnej $\mathbb{P}$ przez `right`(v) oznaczać będziemy wierzchołek na prawo od v, natomiast przez left(v) - na lewo od v.

Załóżmy, że nie istnieje l-kolorowanie drzewa T unikające powtórzeń typu $(2')$. Podobnie jak w przypadku ostatniego dowodu, prześledzimy teraz pierwsze M kroków algorytmu(który, znów podobnie jak w ostatnim przypadku, nigdy się nie zatrzyma). Zauważmy, że w każdym momencie trwania algorytmu wierzchołki pokolorowane bezpośrednio tworzą ścieżkę, a ponadto gdy w trakcie trwania procedury powstaje l-kolorowanie typu $(2')$, aktualnie kolorowany wierzchołek musi być końcem ścieżki zawierającej to potórzenie. Z faktu, że kolorowania poddrzew ukorzenionych w bezpośrednio pokolorowanych wierzchołkach są wybierane deterministycznie wynika ponadto, że częściowe kolorowanie całego drzewa jest całkowicie zdeterminowane przez bezpośrednio pokolorowane wierzchołki. Co więcej - i-ty wierzchołek bezpośrednio pokolorowanej ścieżki $(v_1, \ldots, v_r)$ jest zdeterminowany przez podlisty $(v_1, \ldots, v_{i-1})(v_1$ jest korzeniem).

W ogólności funkcja `Next` jest niezdefiniowana dla pewnych argumentów (np. gdy v jest pierwszym wierzchołkiem meta-ścieżki i nie ma dzieci). Mimo to, jako że

Algorithm 3: Eliminacja l-repetycji typu (2')

input: $S : \mathbb{N} \to [\binom{N}{n}]$
`i` $\leftarrow 1$, $C \leftarrow \emptyset$
$v \leftarrow$ root of T
while *T nie jest całkowicie l-pokolorowane* **do**
  $C(v) \leftarrow$ podlista L_v długości n o indeksie $S(i)$
  `i++`
  if *istnieje l-repetycja P typu (2')* **then**
    Niech P' będzie powtórzoną częścią P
    for $v' \in P'\downarrow$ **do**
      usuń wartość $C(v')$
    end
    $v \leftarrow$ punkt P' najbliższy korzeniowi
  else
    $(C, v) \leftarrow \mathrm{Next}(C, v)$
  endif
end

Algorithm 4: Funkcja Next

input: C częściowe l-kolorowanie drzewa
input: v wierzchołek drzewa
if *$d(C, v)$ nie jest zdefiniowane* **then**
  Niech $(v_1, \ldots, v_k)$ będzie numeracją dzieci v
  Niech j będzie największą liczbą, dla której $d(C, \{v_1, \ldots, v_j\})$ jest zdefiniowane
  $v' \leftarrow v_{j+1}$
  $C' \leftarrow d(C, v_1, \ldots, v_j)$
else
  C' $\leftarrow d(C, v)$
  if *v jest centralnym punktem ścieżki pierwotnej $\mathbb{P}$* **then**
    Niech B będzie zbiorem wierzchołków na prawo od v w $\mathbb{P}$ razem z v
    if *$d(C, B)$ istnieje* **then**
      $v' \leftarrow \mathrm{right}(v)$
      $C' \leftarrow d(C, B)$
    else
      $v' \leftarrow \mathrm{left}(v)$
    endif
  endif
  else if *v jest na lewo od centralnego punktu ścieżki pierwotnej $\mathbb{P}$* **then**
    $v' \leftarrow \mathrm{left}(v)$
  endif
  else if *v jest na prawo od centralnego punktu ścieżki pierwotnej $\mathbb{P}$* **then**
    $v' \leftarrow \mathrm{left}(v)$
  endif
endif
return (C', v')

założyliśmy niemożność pokolorowania drzewa bez powtórzeń a funkcja `Next` zawsze wybiera poddrzewo dla którego aktualne kolorowanie C nie może być rozszerzone, pewne l-powtórzenie musi się pojawić przed osiągnięciem wierzchołka, dla którego funkcja jest niezdefiniowana.

Przeanalizujmy pierwsze M kroków algorytmu działającego na sekwencji S. Informacje dotyczące przebiegu znów zapisywać będziemy jako czwórkę (P, F, R, G), gdzie F i R zdefiniowane będą tak jak poprzednio, $P = \{p_1, \ldots, p_M\}$ jest takie, że p_i to ilość wierzchołków **bezpośrednio** pokolorowanych po i krokach, natomiast $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ jest ciągiem, gdzie g_i to ilość wierzchołków i-tego powtórzenia, tóre należą do przecięcia luki i dolnej części powtórzenia. Z definicji g_i jest nie większe niż długość powtórzenia.

Zauważmy, że wierzchołki na ścieżce będącej korzeniem meta-drzewa mogą zostać pokolorowane jedynie bezpośrednio oraz ostatni wierzchołek tworzący wycofywane powtórzenie również jest kolorowany bezpośrednio, a zatem każde powtórzenie składa się jedynie z wierzchołków bezpośrednio pokolorowanych.
Kompresja Przeanalizujmy asymptotyczną liczbę czwórek opisujących pierwsze M kroków algorytmu, gdzie M zmierza do nieskończoności. Oszacowanie P, F, G oraz R jest identyczne jak w dowodzie lematu 3.9, zatem liczba możliwych czwórek wynosi:

$$o\left(\left(2^5 n\binom{N-1}{n-1}\right)^M \right) = o\left(\left(2^5 n\frac{n}{N-n+1}\binom{N}{n}\right)^M\right) = o\left(\binom{N}{n}^M\right).$$

Podobnie jak poprzednio wnioskujemy zatem, że dla wystarczająco dużego M ilość możliwych opisów jest mniejsza niż ilość początkowych segmentów S, co prowadzi do sprzeczności.
Bezstratność Znów tak jak w dowodzie poprzedniego lematu zastosujemy rozumowanie iteracyjne by z czwórki (P, F, R, G) otrzymać elementy ciągu S.

Jeśli $p_M = p_{M-1} + 1$ to żadne powtórzenie nie zostało wycofane w poprzednim kroku. Z każdego częściowego kolorowania, w szczególności z F, jesteśmy w stanie wydedukować, które wartości zostały przyporządkowane bezpośrednio - tworzą one ścieżkę $(v_1, \ldots, v_m)$, gdzie v_1 jest pierwszym wierzchołkiem ścieżki będącej korzeniem meta-drzewa. Wtedy $S(M)$ jest indeksem podlisty przyporządkowanej v_m w F, $R' = R, G' = G$, P' to P bez ostatniego elementu, natomiast F' jest częściowym kolorowaniem determinowanym przez podlisty bezpośrednio przyporządkowane $(v_1, \ldots, v_{m-1})$ w F.

Jeśli $p_M = p_{M-1} - k + 1$ i $k > 0$ to po ostatnim kroku zostało wycofane l-powtórzenie o długości k. Niech g będzie ostatnim elementem G, a $r = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ - ostatnim elementem R. Zrekonstruujemy kolorowanie zawierające powtórzenie w k fazach. Ścieżka z przyporządkowanymi podlistani jednoznacznie wyznacza następny wierzchołek v', któremu zostanie bezpośrednio przyporządkowana podlista. Jest to również ostatni wierzchołek, którego podlista została usunięta podczas retrakcji. Wiemy również, że podlista do niego przyporządkowana miała niepuste przecięcie z podlistą wierzchołka w należącego do drugiej powtórzenia, którego pozycję(a zatem i jego podlistę A_w) potrafimy odtworzyć znając g. W połączeniu z α_1 pozwala nam to odtworzyć podlistę przyporządkowaną wcześniej do v'. Iterując argument k-krotnie otrzymujemy F''. By otrzymać F' wystarczy usunąć ostatnio przyporządkowaną podlistę F'', natomiast P', R' i G' równe są R, R i G z usuniętymi ostatnimi elementami. □

Lemat 3.10. *Dla każdego k istnieje N_k takie, że jeśli T jest drzewem o szerokości ścieżkowej T z listami rozmiaru N_k w każdym wierzchołku bez powtórzeń typu* (1) *to możliwe jest wybranie podlist rozmiaru n, które unikać będą powtórzeń typu* (2) *i* (3)*.*

Dowód. By pozbyć się powtórzenia typu (2) o dolnej części na danej ścieżce należącej do meta-drzewa wystarczy zastosować procedurę z lematu 3.9. Stosując ją dla wszystkich ścieżek pierwotnych usuniemy wszystkie tego typu powtórzenia. Zauważmy, że każda ścieżka pierwotna ma najwyżej $k-1$ przodków w drzewie, a zatem każda lista zostanie skrócona najwyżej k-krotnie. By pozbyć się powtórzeń typu trzy wystarczy odwrócić kierunek wszystkich ścieżek pierwotnych i ponownie zastosować poprzednie rozumowanie. □

Lemat 3.11. *Jeśli T jest drzewem o szerokości ścieżkowej k i listach o rozmiarze 2^{k+1}, które nie zawiera l-powtórzeń typów $(1),(2),(3)$ to T może zostać nierepetytywnie pkolorowane.*

Dowód. Uporządkujmy wierzchołki drzewa rosnąco ze względu na odległość od korzenia w meta-drzewie(rozstrzygając remisy w dowolny sposób). Będziemy kolorować wierzchołki zachłannie w taki sposób, że za każdym razem gdy wierzchołkowi v będzie przyporządkowywany kolor c, kolor ten będzie usuwany z list wierzchołków należących do $v\downarrow$. Jako że głębokość skontraktowanego drzewa jest mniejsza niż długość list, żadna lista nigdy nie będzie pusta. Załużmy teraz, że w tak pokolorowanym drzewie pojawiło się powtórzenie. Jeśli jest ono na ścieżce jednokierunkowej, jego środkowa krawędź musi być na jego dolnej części(co wynika z procedury usuwania kolorów z list) - łatwo wtedy sprawdzić, że powtórzenie takie byłoby typu $(1),(2)$ lub (3), co daje sprzeczność.

Jako, że powtórzenia należące w całości do ścieżek pierwotnych już wykluczyliśmy, jedyną pozostającą możliwością jest powtórzenie dwustronne - takie, którego żaden z końców nie leży na najniższym osiąganym przez nie poziomie. Jednak tak jak w poprzednim przypadku, jego krawędź środkowa musi leżeć w jego dolnej części. Bez straty ogólności przyjmijmy, że krawędź środkow jest nie odleglejsza od lewego punktu schodzącego, niż od prawego punktu schodzącego - w tej sytuacji powtórzenie typu (2) jest podścieżką powtórzenia dwustronnego, co daje sprzeczność. □

Tezę twierdzenia 3.5 uzyskujemy stosując lematy 3.9, 3.10 do pozbycia się powtórzeń typu $(1),(2)$ oraz (3) a następnie kolorując wierzchołki drzewa przy pomocy lematu 3.11.

4. Hipoteza o samotnym biegaczu

4.1. **Wstęp.** Hipoteza o samotnym biegaczu została postawiona niezależnie przez Willsa[33] i Cusicka[13], a jej obrazowa nazwa pochodzi z następującej interpretacji pochodzącej od Goddyna[5]: Rozważmy k biegaczy na okręgu o obwodzie 1 biegnącymi z różnymi stałymi prędkościami i startującymi w tym samym punkcie. Hipoteza mówi, że dla każdego biegacza istnieje chwila, w której jest w odległości przynajmniej $\frac{1}{k}$ od pozostałych. Klasyczna wersja hipotezy jest następująca:

Hipoteza 4.1. *Dla każdego n i dla każdego zbioru liczb całkowitych $\{v_1,\ldots,v_n\}$ istnieje $t\in\mathbb{R}$ takie, że:*

$$||tv_i|| \geqslant \frac{1}{n+1}$$

Dla każdego $i\in[n]$

Jeśli prawdziwa, hipoteza jest najlepszym możliwym oszacowaniem: dla zbioru prędkości:

$v_i = i$ dla każdego $i\in[n]$,

nie istnieje chwila, w której biegacze byliby w odległości większej od punktu początkowego niż $\frac{1}{n+1}$. Nieskończoną rodzinę podobnych przykładów można znaleźć w [18].

Hipoteza jest stosunkowo prosta w przypadku $n = 1, 2, 3$, dla $n = 4$ komputerowo wspierany dowód jest autorstwa Cusicka i Pomerance'a[14], dla $n = 5$ - Bohmana, Holzmanna i Kleitmana[6]. Dla $n = 6$ Barajas i Serra udowodnili hipotezę badając właściwości regularnej liczby chromatycznej grafów odległości[3].

W [6], autorzy dokonali użytecznej redukcji hipotezy do przypadku, w którym wszystkiej v_i są dodatnimi liczbami całkowitymi. W szczególności, przyjmując to założenie można również założyć, że $t \in [0, 1]$.

Czerwiński [15] udowodnił mocniejsza wersję hipotezy w przypadku, gdy wszystkie prędkośi są wylosowane z rozkładem jednostajnym ze zbioru $[N]$ - wynika z niej, że gdy $N \to \infty$, dla prawie wszystkich zbiorów prędkości istnieje chwila t, w której wszyscy biegacze są w odległości prawie $\frac{1}{2}$ id ounktu startowego. Zależność między liczbą biegaczy n i zbiorem, z którego są losowane prędkości była później zoptymalizowana przez Alona[1].

Innym kierunkiem badań jest rozluźnianie warunku dotyczącego odległości biegaczy od punktu startowego, tj. dowodzenie, że dla pewnego $\delta \geqslant \frac{1}{n}$ i dowolnego zbioru prędkości całkowitych istnieje $t \in (0, 1)$ takie, że $||tv_i|| \geqslant \delta$. Stosunkowo prosty dowód dla $\delta = \frac{1}{2n}$ był kolejno poprawiany do $\delta = \frac{1}{2n-1}, \delta = \frac{1}{2n-2}$ oraz $\delta = \frac{1}{2n-3}$ przez Chena[9], Perernau i Serrę[28] oraz Chena i Cusicka[10](trzecie ograniczenie dotyczy tylko przypadku, w którym $2n - 3$ jest liczbą pierwszą). W niniejszym rozdziale udowodnimy tezę dla $\delta = \frac{1}{2n - \frac{\sqrt{n-2}}{2}}$, czyli twierdzenie:

Twierdzenie 4.2. *Dla każdego n oraz zbioru liczb całkowitych $\{v_1, \ldots, v_n\}$ istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że:*

$$||tv_i||_c \geqslant \frac{1}{2n - \frac{\sqrt{n-2}}{2}}$$

dla każdego $i \in [n]$, gdzie $||x||_c$ oznacza odległość od najbliższej liczby całkowitej

4.2. **Podstawowe definicje.** W dowodzie będziemy opierać się na klasycznym sformułowaniu hipotezy 4.1. Dowód będzie korzystał z metody probabilistycznej zastosowanej do procesu, w którym losujemy $t \in [0, 1]$ z prawdopodobieństwem jednostajnym. Poszczególne $t \in [0, 1]$ nazywać będziemy momentami. Dla wszystkich $i \in [n]$ zdefiniujmy zdarzenie polegające na tym, że i-ty biegacz jest w odległości δ od punktu startowego:

$$A_i = \{t \in (0, 1) : ||tv_i||_c < \delta\}$$

Zauważmy, że mamy $P(A_i) = 2\delta$ niezależnie od prędkości i-tego biegacza. Korzystając z tego oznaczenia, możemy przeformułować hipotezę jako:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\Big) > 0$$

Taka reformulacja pozwala na pierwsze proste oszacowanie asymptotyki problemu:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\Big) \geqslant 1 - \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 - 2\delta$$

skąd wynika, że $\delta \leqslant \frac{1}{2n}$ istnieje $t \in [0, 1]$ spełniające tezę(bo $1 - 2\delta n > 0$).
Dla ułatwienia późniejszych obliczeń będziemy posługiwać się oznaczeniem $\gamma = \frac{1}{\Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)} = \frac{1}{2\delta n}$. Interesujące nas wartości γ będą należeć do przedziału $[\frac{1}{2}, 1]$ - $\frac{1}{2}$ jest równoważne oryginalnej nierówności w hipotezie, 1 - powyższemu oszacowaniu przez sumę prawdopodobieństw.

Dla zbioru liczb całkowitych największy wspólny dzielnik oznaczać będziemy przez nwd, natomiast najmniejszą wspólną wielokrotność przez nww. Zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$ oznaczymy przez $[n]$, natomiast $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ - przez $[n]_0$. Zbiór liczb $\{v_1, \dots, v_n\}$ nazwiemy δ-pełnym, jeśli dla każdego $t \in [0, 1]$ istnieje i takie, że $||tv_i||_c < \delta$, natomiast biegacza i nazwiemy *δ-bliskim w czasie t* jeśli jest on wtedy odległości δ od punktu startowego.

4.3. **Dowód głównego wyniku.** Kluczową rolę w dowodzie odgrywać będą oszacowania prawdopodobieństwa wystąpienia jednocześnie dwóch i trzech zdarzeń. Pierwsze oszacowanie jest autorstwa Serry i Perarnau[28]:

Lemat 4.3 (Serra,Perernau)**.** *Dla każdego i oraz j mamy:*

$$P(A_i \cup A_j) \geqslant \max(2\delta^2, \frac{\mathrm{nwd}(v_i, v_j)}{\min(v_i, v_j)} 2\delta)$$

co jest równoważne:

$$P(A_i \cup A_j) \geqslant \frac{1}{\gamma n} \max(\frac{1}{2\gamma n}, \frac{\mathrm{nwd}(v_i, v_j)}{\min(v_i, v_j)})$$

Oszacowanie dla trójek udowodnimy korzystając z następującego wniosku z chińskiego twierdzenia o resztach:

Lemat 4.4. *Układ równań:*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod n_1 \\ x \equiv a_2 \mod n_2 \\ \dots \\ x \equiv a_l \mod n_k \end{cases}$$

ma rozwiązanie $x \in \big[\mathrm{nww}(n_1, n_2, \dots, n_k)\big]_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_i \equiv a_j \mod \mathrm{nwd}(n_i, n_j)$$

dla każdej pary i, j. Ponadto rozwiązanie jest zawsze jednoznacznie wyznaczone.

Dowód. Jeśli dokonamy rozkładu $n_i = p_1^{b_1} \dots p_r^{b_r}$ to z klasycznego chińskiego twierdzenia o resztach otrzymamy równoważność kongruencji ($x \equiv a_i \mod n_i$) oraz układu kongruencji:

$$\begin{cases} x \equiv a_i \mod p_1^{b_1} \\ x \equiv a_i \mod p_2^{b_2} \\ \dots \\ x \equiv a_i \mod p_r^{b_r} \end{cases}$$

Przekształcając w ten sposób kongruencje możemy zredukować układ do przypadku, w którym wszystkie n są potęgami liczb pierwszych. Zauważmy, że założenie $a_i \equiv a_j \mod \mathrm{nwd}(n_i, n_j)$ jest przez tę redukcję przenoszone - liczby są kongruentne modulo $\mathrm{nwd}(n_i, n_j)$ wtedy i tylko wtedy gdy są kongruentne modulo $\mathrm{nwd}(p_m^{r_m}, p_n^{r_m})$ dla wszystkich dzielników n_i, n_j.

Ponownie korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach możemy przeanalizować sytuację dla każdej liczby pierwszej osobno - jeśli dla każdego będziemy w stanie rozwiązać wszystkie kongruencje modulo p_i by otrzymać x_i(które będzie zdeterminowane modulo najwyższa obecna potęga p_i) to będziemy w stanie rozwiązać pełny układ kongruencji. Każdy z naszych układów wygląda zatem następująco:

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \mod p^{b_1} \\ x \equiv b_2 \mod p^{b_2} \\ \dots \\ x \equiv b_3 \mod p^{b_r} \end{cases}$$

Oczywiście ma on rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $b_i \equiv b_j \mod p^{\min(b_i, b_j)}$ dla każdej pary i, j, co jak pokazaliśmy jest równoznaczne oryginalnemu warunkowi, że $a_i \equiv a_j \mod \mathrm{nwd}(n_i, n_j)$ dla każdej pary i, j, co daje tezę.

□

Lemat 4.5. *Dla każdych $k_1, k_2, k_3 \in [n]$ zachodzi:*

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) \leqslant \prod_{i=1}^{3} \max\Big(\frac{1}{\gamma n}, \frac{2\,\mathrm{nwd}(v_{k_i}, v_{k_{i+1}})}{v_{k_i}}\Big)$$

dla notacji cyklicznej.

Dowód. Zauważmy, że jeśli $\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}) > 1$ to położenie biegaczy k_1, k_2, k_3 na okręgu powtarza się cyklicznie $\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})$ razy, możemy zatem przeanalizować tylko pierwsze powtórzenie się cyklu, co jest równoważne przypadkowi gdy $\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}) = 0$.

Zdefiniujmy podział odcinka jednostkowego $R = \{r_0, \dots, r_{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})-1}\}$, gdzie $r_j = \Big[\frac{j}{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}, \frac{j}{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})} + 1\Big)$. Wtedy dla każdego k_i ilość przedziałów z R między dwoma kolejnymi momentami, w których k_i-ty biegacz jest przy punkcie startowym to $\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_i}}$.

Biegacza k_i nazwiemy *dyskretnie bliskim w czasie* t_0 jeśli w przedziale $r \in R$ do którego należy t jest choć jeden moment, w którym k_i jest w otoczeniu δ punktu startowego. Niech A'_{k_i} oznacza zdarzenie polegające na byciu dyskretnie blisko przez k_i-tego biegacza, a przez NWW oznaczmy $\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})$. Tezę lematu udowodnimy dla zdarzeń A', co będzie implikowało tezę dla A, które są ich podzbiorami(a zatem prawdopodobieństwo ich przecięcia jest mniejsze). Zauważmy teraz, że k_i-ty biegacz jest dyskretnie blisko w czasie $t_0 \in r_j$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$|j \mod (\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_i}})| \notin \{\Big\lceil \delta \frac{NWW}{v_{k_i}}\Big\rceil, \dots, \Big\lceil (1-\delta)\frac{NWW}{v_{k_i}}\Big\rceil\}$$

Zatem do zdarzenia $A'_{k_1} \cap A'_{k_2} \cap A'_{k_3}$ należą dokładnie te r, których indeks j spełnia układ równań:

$$\begin{cases} |j \mod (\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_1}})| \notin \{\lceil \delta \frac{NWW}{2\gamma n v_{k_1}}\rceil, \dots, \lceil (1-\delta)\frac{NWW}{2\gamma n v_{k_1}}\rceil\} \\ |j \mod (\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_2}})| \notin \{\lceil \delta \frac{NWW}{2\gamma n v_{k_2}}\rceil, \dots, \lceil (1-\delta)\frac{NWW}{2\gamma n v_{k_2}}\rceil\} \\ |j \mod (\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_3}})| \notin \{\lceil \delta \frac{NWW}{2\gamma n v_{k_3}}\rceil, \dots, \lceil (1-\delta)\frac{NWW}{2\gamma n v_{k_3}}\rceil\} \end{cases}$$

Obie strony nierówności są liczbami całkowitymi co sprawia, że cały układ można rozpatrywać jako logiczną alternatywę układów równań typu:

$$\begin{cases} j = x_1 \mod (\frac{NWW}{v_{k_1}}) \\ j = x_2 \mod (\frac{NWW}{v_{k_2}}) \\ j = x_3 \mod (\frac{NWW}{v_{k_3}}) \end{cases}$$

Gdzie x_i jest ze zbioru $\Big[\lceil \frac{NWW}{2\gamma n v_{k_i}}\rceil\Big]_0 \cup \{\lfloor NWW - \frac{NWW}{2\gamma n v_{k_i}}\rfloor, \dots, NWW\}$. nwd Pamiętając, że $\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}) = 1$ dokonujemy przeliczenia:

$$(\mathrm{nwd}(\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_i}}, \frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_{i+1}}})) = \frac{v_{k_{i+2}}}{\mathrm{nwd}(v_{k_{i+2}}, v_{k_{i+1}})\,\mathrm{nwd}(v_{k_{i+2}}, v_{k_i})}$$

Korzystając teraz z lematu 4.4 wiemy, że układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie pod warunkiem, że:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \mod \frac{v_{k_3}}{\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1})\,\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_2})} \\ x_2 = x_3 \mod \frac{v_{k_1}}{\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2})\,\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_3})} \\ x_3 = x_1 \mod \frac{v_{k_2}}{\mathrm{nwd}(v_{k_2}, v_{k_1})\,\mathrm{nwd}(v_{k_2}, v_{k_3})} \end{cases}$$

Problem sprowadza się zatem do oszacowania liczby różnych trójek postaci $x = (x_1, x_2, x_3)$ należących do odpowiednich przedziałów i spełniających powyższe równości. Zauważmy, że wszystkich x-ów spełniających równości jest $\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})$,

bo na mocy lematu 4.4 każdy z nich jest związany z jednym z elementów R. Niech teraz c_1, c_2, c_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym przyjmującymi wartości należące do $[\frac{v_{k_3}}{\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1})}]_0$, $[\frac{v_{k_1}}{\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2})}]_0$, $[\frac{v_{k_2}}{\mathrm{nwd}(v_{k_2}, v_{k_3})}]_0$. Na podstawie wartości c_1, c_2, c_3 zdefiniujemy pośrednio trójkę (x_1, x_2, x_3) (niekoniecznie należącą do odpowiednich przedziałów), zrobimy to poprzez stopniowe ustalanie reszt z dzielenia elementów x.
Na początku zawęzimy zbiór kandydatów na x_1 do takich, dla których $x_1 \equiv c_1 \mod \frac{v_{k_3}}{\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1})}$ zauważając przy okazji, że kontrolując x_1 tylko w tym zakresie jesteśmy w stanie stwierdzić, że aby v_1 nie był dyskretnie blisko wystarcza, by $\lceil \frac{v_{k_3}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1})} \rceil < c_1 < \lfloor 1 - \frac{v_{k_3}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1})} \rfloor$. Wiemy, że

$$x_1 \equiv x_2 \mod \frac{v_{k_3}}{\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1}) \,\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_2})}$$

a reszta z dzielenia x_1 przez ten czynnik jest już całkowicie zdeterminowana, zatem ustalając x_2 mamy jedynie swobodę rzędu

$$\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_2}} \frac{\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1}) \,\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_2})}{v_{k_3}} = \frac{v_{k_1}}{\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2})}$$

. Ustalamy zatem wartość x_2 na podstawie c_2 wybranego z tego właśnie przedziału. Ponownie możemy stwierdzić, że aby v_2 nie był dyskretnie blisko wystarcza, by $\lceil \frac{v_{k_1}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2})} \rceil < c_2 < \lfloor 1 - \frac{v_{k_1}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2})} \rfloor$. Równość druga ogranicza nam swobodę wyboru x_3 do rzędu $\frac{v_{k_2}}{\mathrm{nwd}(v_{k_2}, v_{k_3})}$(analogicznie jak w przypadku x_2), natomiast równość trzecia na nią nie wpływa, gdyż podzielność x_1 przez $\frac{\mathrm{nww}(v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3})}{v_{k_3}}$ wciąż jest nieustalona. Mamy zatem, że jeśli zachodzi choć jedna z nierówności:

$$\lceil \frac{v_{k_3}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1})} \rceil < c_1 < \lfloor 1 - \frac{v_{k_3}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_3}, v_{k_1})} \rfloor$$
$$\lceil \frac{v_{k_1}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2})} \rceil < c_2 < \lfloor 1 - \frac{v_{k_1}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_1}, v_{k_2})} \rfloor$$
$$\lceil \frac{v_{k_2}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_2}, v_{k_3})} \rceil < c_3 < \lfloor 1 - \frac{v_{k_2}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_2}, v_{k_3})} \rfloor$$

to z pewnością nie zachodzi zdarzenie $P(A'_{k_1} \cap A'_{k_2} \cap A'_{k_3})$. Niech A''_i będzie zdarzeniem polegającym na tym, że c_i nie spełnia odpowiadającej mu jednej z powyższych nierówności. Zauważmy, że A''_i implikuje A'_i, poza tym zdarzenia A'' są niezależne. Oszacujemy teraz $P(A''_{k_i})$ rozpatrując dwa przypadki:
Przypadek 1. Jeśli $\frac{v_{k_{i-1}}}{2\gamma n \,\mathrm{nwd}(v_{k_i}, v_{k_{i-1}})} \leqslant 1$ to zdarzenie A' może zachodzić jedynie, gdy $c_1 = 0$ lub $c_1 = \frac{v_{k_{i-1}}}{\mathrm{nwd}(v_{k_i}, v_{k_{i-11}})} - 1$, zatem $P(A''_{k_i}) \leqslant \frac{2 \,\mathrm{nwd}(v_{k_i}, v_{k_{i-1}})}{v_{k_i}}$
Przypadek 2. Jeśli $\frac{\delta v_{k_{i-1}}}{\mathrm{nwd}(v_{k_{i-1}}, v_{k_i})} > 1$ to obłożenie wyrażenia funkcją sufitową może zwiększyć jego wartość najwyżej dwukrotnie, a zatem $P(A''_{k_i}) \leqslant \frac{1}{\gamma n}$
Sumarycznie dostajemy zatem oszacowanie $P(A''_{k_i}) \leqslant \max(\frac{2 \,\mathrm{nwd}(v_{k_{i-1}}, v_{k_i})}{v_{k_{i-1}}}, \frac{1}{2\gamma n})$, co w połączeniu z niezależnością zdarzeń A''_1, A''_2, A''_3 daje tezę $P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) \leqslant \prod_{i=1}^{3} \max(\frac{1}{\gamma n}, \frac{2 \,\mathrm{nwd}(v_{k_i}, v_{k_{i+1}})}{v_{k_i}})$.

□

Zanim przystąpimy do dalszej części dowodu, zdefiniujemy kilka dodatkowych oznaczeń. Niech:

$$P_1 = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) = 2n\delta = \frac{1}{\gamma}$$
$$P_2 = \Sigma_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j)$$
$$P_3 = \Sigma_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Korzystając z lematów 4.3 i 4.5 oraz klasycznej nierówności Jensena udowodnimy teraz kluczowy lemat łączący oszacowania na dwójki i trójki biegaczy:

Lemat 4.6. *Jeśli zbiór* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *jest* δ*-pełny oraz* $C \geqslant P_3$ *to* $P_1 \geqslant \max(\frac{2P_2^2}{3P_3'+2P_2}, \frac{2P_2}{n}) + 1$

Dowód. Niech $Z = [0, P_2]$, a $\phi : Z \to [2, n]$ będzie funkcją taką, że $\mu(\{z \in Z : \phi(z) = k\})$(gdzie μ oznacza miarę Lebegue'a) jest częścią P_2 realizowaną w trakcie momentów, w których k biegaczy jest blisko punktu startowego. Funkcja ϕ nie jest jednoznacznie określona, weźmy więc dowolną taką, która jest mierzalna w sensie Lebegue'a. Intuicja stojąca za tymi konceptami jest taka, że Z jest "zasobem" P_2, który musi zostać wyczerpany zanim wyczerpane zostanie P_3, a ϕ funkcją mówiącą o tym, w jaki sposób P_2 będzie realizowane. Jeśli teraz $\mu(\{z \in Z : \phi(z) = k\}) = l$ dla pewnego k to momenty, w których w okolicy punktu startowego jest k biegaczy przyczyniają się do dodania $\frac{2}{k-1}l$ do P_1 oraz $\frac{k-2}{3}l$ do P_3, skąd:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_Z \tfrac{2}{\phi(x)-1}dx \\ P_2 &= \int_Z 1dx \\ P_3 &= \int_Z \tfrac{\phi(x)-2}{3}dx \end{aligned}$$

Funkcja $\frac{2}{y-1}$ jest wypukła, więc dzięki całkowej nierówności Jensena wiemy, że dla ustalonego P_3 minimum P_1 jest otrzymywane dla stałej funkcji ϕ. Jest to równoważne przypadkowi, w którym w każdym momencie w liczba biegaczy δ-bliskich jest równa 1(wtedy moment taki nie wpływa na Z) lub k. Sytuacja taka nie zawsze jest możliwa do zrealizowania z całkowitym k, jednak zawsze istnieje rozwiązanie stale równe k rzeczywistemu, które wykorzystamy do konstrukcji oszacowania. Rozważmy dwa przypadki:
Przypadek 1. Dostajemy rozwiązanie, w którym $k > n$(biorąc $P_3 = C$)
W tym przypadku w oszacowaniu nie wykorzystamy oszacowania na P_3. Rozwiązaniem minimalizującym P_1 w tym przypadku jest takie, w którym $k = n$. Mamy zatem $P_1 = 1 + (n-1)l$ dla l będącego ilością (miarą) momentów, w których n biegaczy jest blisko punktu startowego. Dokonując przeliczenia:

$$P_2 = \binom{n}{2}l$$
$$l = \frac{2P_2}{n(n-1)}$$

otrzymujemy $P_1 = 1 + \frac{2P_2}{n}$.
Przypadek 2. Dostajemy rozwiązanie, w którym $k \leqslant n$(biorąc $P_3 = C$)
By skonstruować oszacowanie wyliczmy najpierw k, dla którego osiągane jest minimum P_1. Mamy $P_2 = \binom{k}{2}l$ oraz $P_3' = \binom{k}{3}l$ a zatem $\frac{P_3}{P_2} = \frac{2k(k-1)(k-2)}{6k(k-1)} = \frac{k-2}{3}$ i w konsekwencji $k = \frac{3P_3+2P_2}{P_2}$. Podobnie jak w poprzednim przypadku wyliczamy $l = \frac{2P_2}{\left(\frac{3P_3+2P_2}{P_2}\right)\left(\frac{3P_3+2P_2}{P_2}-1\right)}$, dzięki czemu otrzymujemy

$$P_1 = 1 + \frac{2P_2}{\left(\frac{3P_3+2P_2}{P_2}\right)\left(\frac{3P_3+2P_2}{P_2}-1\right)}\left(\frac{3P_3+2P_2}{P_2}-1\right) = 1 + \frac{2P_2^2}{3P_3+2P_2}$$

□

Lemat 4.7. *Jeśli* $P_2 = \frac{1}{2\gamma^2}c$ *dla pewnego* c *to* $P_3 \leqslant \frac{1}{6\gamma^3}c^3$.

Dowód. Dla biegaczy i oraz j niech $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{\gamma^2 n(n-1)}c_{ij}$, skąd dostajemy równość $P_2 = \Sigma_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{\gamma^2 n(n-1)} \Sigma_{1 \leqslant i<j \leqslant n} c_{ij}$, a więc również $\Sigma_{i,j} c_{ij} =$

$\frac{cn(n-1)}{2}$. Z lematów 4.5 oraz 4.3 wiemy, że:

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) \leqslant \prod_{i=1}^{3} \max(\frac{1}{\gamma n}, \frac{2\,\mathrm{nwd}(v_{k_i}, v_{k_{i+1}})}{v_{k_i}}) \leqslant (\gamma n)^3 \prod_{i=1}^{3} P(A_{k_i} \cap A_{k_{i+1}}) =$$

$$(\gamma n)^3 \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{\gamma^2 n(n-1)} c_{k_i k_{i+1}} = \frac{1}{(\gamma(n-1))^3} \prod_{i=1}^{3} c_{k_i k_{i+1}}$$

A zatem:

$$P_3 = \Sigma_{1 \leqslant i<j<l} P(A_i \cap A_j \cap A_l) \leqslant \Sigma_{1 \leqslant i<j<l} \frac{1}{(\gamma(n-1))^3} \prod_{i=1}^{3} c_{k_i k_{i+1}} =$$

$$\frac{1}{(\gamma(n-1))^3} \Sigma_{1 \leqslant i<j<l} \prod_{i=1}^{3} c_{k_i k_{i+1}}$$

Z nierówności Cauchyego wiemy, że przy ustalonej sumie iloczyny c_{ij} są maksymalizowane dla wszystkich wartości równych, więc:

$$P_3 < \frac{1}{(\gamma(n-1))^3} \Sigma_{1 \leqslant i<j<k} \prod_{i=1}^{3} c_{k_i k_{i+1}} \leqslant \frac{1}{(\gamma(n-1))^3} \Sigma_{1 \leqslant i<j<k} \prod_{i=1}^{3} \frac{2cn(n-1)}{2n(n-1)} =$$

$$\frac{1}{(\gamma(n-1))^3} \frac{c^3 n(n-1)(n-2)}{6} < \frac{c^3}{6\gamma^3}$$

□

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia 4.2. Ustalmy $n > 3$ oraz zbiór prędkości $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ oraz minimalne δ takie, że V jest δ-pełny. Oszacujemy teraz P_1 dla tych wartości na podstawie lematu 4.6(pierwsza nierówność) oraz 4.7(druga nierówność):

$$P_1 \geqslant \max\left(\frac{2P_2^2}{3P_3 + 2P_2}, \frac{2P_2}{n}\right) + 1 \geqslant \max\left(\frac{2\frac{c^2}{4\gamma^4}}{\frac{3c^3}{6\gamma^3} + \frac{2c}{2\gamma^2}}, \frac{2c}{2n\gamma^2}\right) + 1 =$$

$$\max\left(\frac{c}{c^2\gamma + \gamma^2}, \frac{c}{\gamma^2 n}\right) + 1$$

Zauważmy, że dla ustalonego γ pierwszy element funkcji max jest ściśle malejący ze względu na c, natomiast drugi - ściśle rosnący. Minimum tej funkcji jest zatem osiągane, gdy człony są sobie równe, możemy zatem wyliczyć c realizujące minimum:

$$\frac{c}{c^2\gamma + \gamma^2} = \frac{c}{\gamma^2 n}$$

$$c^2\gamma + \gamma^2 = \gamma^2 n$$

$$c = \sqrt{\gamma(n-1)}$$

Podstawiając je do drugiego elementu maksimum oraz korzystając z faktu, że $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ otrzymujemy nierówności:

$$\frac{1}{\gamma} = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) = P_1 \geqslant 1 + \frac{\sqrt{\gamma(n-1)}}{\gamma^2 n} \geqslant \frac{n + \sqrt{n-1}}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma \leqslant \frac{n}{n + \sqrt{n-1}} = \frac{n(n - \sqrt{n-1})}{n^2 - n + 1} < \frac{n - \sqrt{n-1}}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} - \sqrt{n-1}$$

Dla $n > 5$ mamy $\sqrt{n-1}' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > \frac{1}{n-1}$ a zatem $\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2} > \frac{1}{n-1}$ i w konsekwencji $1 + \frac{1}{n-1} - \sqrt{n-1} < 1 - \sqrt{n-2}$. Jeśli zatem $\gamma \geqslant 1 - \sqrt{n-2}$, lub równoważnie $\delta \geqslant \frac{1}{2n-\frac{\sqrt{n-2}}{2}}$, to zbiór V nie może być δ-pełny. Istnieje więc takie $t \in [0, 1)$, że $|tv_i| \geqslant \frac{1}{2n-\frac{\sqrt{n-2}}{2}}$ dla każdego $i \in [n]$, co daje tezę.

Literatura

[1] N. Alon, The chromatic number of random Cayley graphs, European J. Combin. 34 (2013), no. 8, 1232 – 1243.
[2] N. Alon, J. Grytczuk, M. Hałuszczak, and O. Riordan. Nonrepetitive colorings of graphs. Random Structures Algorithms, 21(3-4):336–346, 2002.
[3] J. Barajas and O. Serra, The lonely runner with seven runners, Electron. J. Combin. 15 (2008), no. 1, Paper 48, 18 pp.
[4] D.R. Bean, A. Ehrenfeucht, G. McNulty: Avoidable patterns in strings of symbols. Pacific Journal of Mathematics 85 (1979) 261–294
[5] W. Bienia, L. Goddyn, P. Gvozdjak, A. Seb o, and M. Tarsi, Flows, view obstructions, and the runner, J. Combin. Theory Ser. B 72 (1998), no. 1, 1–9.
[6] T. Bohman, R. Holzman, and D. Kleitman, Six lonely runners, Electron. J. Combin. 8 (2001), no. 2, Paper 3, 49 pp.
[7] F. Blanchet-Sadri, R. Merca¸s, S. Simmons, E. Weissenstein: Avoidable binary patterns in partial words. Acta Informatica 48 (2011) 25–41
[8] J. Cassaigne: Unavoidable binary patterns. Acta Informatica 30 (1993) 385–395
[9] Y. G. Chen, View-obstruction problems in n-dimensional Euclidean space and a generalization of them, Acta Math. Sinica 37 (1994), no. 4, 551–562.
[10] Y. G. Chen and T. W. Cusick, The view-obstruction problem for n-dimensional cubes, J. Number Theory 74 (1999), no. 1, 126–133.
[11] M. Crochemore, L. Ilie, W. Rytter: Repetitions in strings: Algorithms and combinatorics. Theoretical Computer Science 410 (2009) 5227–5235
[12] J.D. Currie: Pattern avoidance: themes and variations. Theoretical Computer Science 339 (2005)
[13] T. W. Cusick, View-obstruction problems. II, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), no. 1, 25–28.
[14] T. W. Cusick and C. Pomerance, View-obstruction problems. III, J. Number Theory 19 (1984), no. 2
[15] S. Czerwinski, Random runners are very lonely. J. Comb. Theory, Ser. A 119(6): 1194-1199 (2012)
[16] V. Dujmović, G. Joret, J. Kozik, and D. R. Wood. Nonrepetitive colouring via entropy compression. to appear in Combinatorica,
[17] P. Flajolet, R. Sedgewick: Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, 2009, ISBN 978-0-521-89806-5, electronic version
[18] L. Goddyn and E. B. Wong, Tight instances of the lonely runner, Integers 6 (2006), A38.
[19] J. Grytczuk. Nonrepetitive graph coloring. In Graph Theory in Paris, Trends in Mathematics, pages 209–218. Birkhauser, 2007.
[20] J. Grytczuk. Pattern avoidance on graphs. Discrete Math., 307(11-12):1341–1346, 2007.
[21] J. Grytczuk, J. Kozik, P. Micek: A new approach to nonrepetitive sequences. Random Structures and Algorithms, 42 (2013), pp. 214-225.
[22] J. Harant, S. Jendrol: Nonrepetitive vertex colorings of graphs. Discrete Math., 312(2):374–380, 2012.
[23] A. Kündgen, M. J. Pelsmajer. Nonrepetitive colorings of graphs of bounded tree-width. Discrete Math., 308(19):4473–4478, 2008.
[24] D. Krieger, P. Ochem, N. Rampersad, J. Shallit: Avoiding Approximate Squares. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 15
[25] M. Lothaire: Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge University Press, Cambridge (2002)
[26] F. Manea, R. Merca¸s: Freeness of partial words. Theoretical Computer Science 389 (2007) 265–277
[27] R.A. Moser, G. Tardos: A constructive proof of the general lovasz local lemma. Journal of ACM, vol. 57(2), 2010, pp 11:1-11:15.
[28] G. Perarnau, O. Serra, Correlation among runners and some results on the Lonely Runner Conjecture, arXiv:1407.3381
[29] P. Roth: Every binary pattern of length six is avoidable on the two-letter alphabet. Acta Informatica 29 (1992) 95–106
[30] U. Schmidt: Avoidable patterns on two letters. Theoretical Computer Science 63 (1989) 1–17

[31] A. Thue: Uber unendliche Zeichenreihen. Norske Vid. Selsk. Skr. I, Mat. Nat. Kl. Christiana 7 (1906) 1–22

[32] A. Thue: Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen. Norske Vid. Selsk. Skr. I, Mat. Nat. Kl. Christiana 1 (1912) 1–67, 4588, 2007, pp 278-289.

[33] J. M. Wills, Zwei Satze uber inhomogene diophantische Approximation von Irrationalzahlen, Math. 71 (1967), 263–269.

[34] A.I. Zimin: Blocking sets of terms. Mathematics of the USSR-Sbornik 47 (1984) 353–364