INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Adam Kwela

KOMBINATORYCZNE I DESKRYPTYWNE WŁASNOŚCI IDEAŁÓW NA ZBIORACH PRZELICZALNYCH

Rozprawa doktorska przygotowana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Piotra Zakrzewskiego oraz dr. Marcina Saboka

Pracę nad rozprawą finansowano
z grantu NCN nr 2012/07/N/ST1/03205.

Gdańsk 2014

Oświadczenie autora rozprawy:

Oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

....

data *mgr Adam Kwela*

Oświadczenie promotora rozprawy:

Niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

....

data *prof. dr hab. Piotr Zakrzewski*

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Wstęp

Badania ideałów na zbiorach przeliczalnych są klasycznym przedmiotem badań teorii mnogości. Obiekty te znajdują wiele różnych zastosowań w szeregu dziedzin matematyki. Topologia, analiza rzeczywista, analiza funkcjonalna czy też teoria układów dynamicznych są tu najbardziej reprezentatywnymi przykładami. Badania dotyczące ideałów leżą też w centrum zainteresowań wielu wybitnych matematyków z całego świata – można tu wymienić takich matematyków jak Debs, Farah, Fremlin, Hrušák, Solecki, Talagrand, Todorčević i wielu innych.

W rozprawie koncentrujemy się na kombinatorycznych własnościach ideałów. Badamy m.in. rozmaite własności selektywne. Posiadają one stosunkowo bogatą literaturę. Wśród autorów prac poświęconych tym zagadnieniom można wymienić takich matematyków jak Baumgartner, Grigorieff, Laflamme, Mathias, Taylor, Todorčević, Wagon i Zakrzewski (por. [4], [19], [32], [34], [43], [44] i [45]). Warto też wspomnieć, że obiekty blisko związane z tymi zagadnieniami – ultrafiltry selektywne (por. [5]) – znajdują liczne zastosowania w teorii mnogości, topologii czy też teorii modeli.

Okazuje się, że pewne własności kombinatoryczne mogą nakładać silne ograniczenia na deskryptywną złożoność ideału. Przykładem może tu być słynne twierdzenie Soleckiego. Udowodnił on, że każdy P-ideał analityczny jest typu $\mathbf{\Pi}^0_3$ (por. [40]). Z tego powodu w rozprawie dużo uwagi poświęcamy zagadnieniom związanym z deskryptywnymi własnościami ideałów.

Niektóre rozpatrywane w rozprawie problemy leżą na styku teorii mnogości i topologii. W szczególności, badamy kombinatorykę ideałów, które są reprezentowane w pewien konkretny sposób na przestrzeniach metryzowalnych i ośrodkowych poprzez σ-ideały zawierające wszystkie singletony. Pierwsze przykłady takich ideałów pochodzą od Soleckiego i Faraha (por. [14]). Później ta klasa ideałów była badana również przez Saboka i Zapletala (por. [38]).

Zarówno własności kombinatoryczne, jak i deskryptywne znalazły zastosowanie w badaniach zbieżności ideałowej ciągów funkcji ciągłych. Zbieżność ideałowa ma długą historię sięgającą artykułu Cartana z lat 30. ub. wieku (por. [8]), jak również badań Grimeisena i Katětova z lat 60. ub. wieku (por. [20], [22] i [23]). Od tamtego czasu nastąpił znaczący postęp w naszym rozumieniu tego tematu – swój wkład w to mieli m.in. Dobrowolski, Kostyrko, Marciszewski, Šalát, Solecki i Wilczyński (por. [11], [27] i [41]). W ciągu kilku ostatnich lat ta tematyka pojawiła się m.in. w pracach Balcerzaka, Demsa, Filipowa, Komisarskiego i Szucy (por. [2] i [16]). Związki między zbieżnością ideałową ciągów funkcji ciągłych a własnościami kombinatorycznymi i deskryptywnymi ideałów były szczegółowo badane przez Debsa, Laczkovicha, Recława, Saint Raymonda i Soleckiego (por. [10], [31] i [41]). W szczególności, Debs i Saint Raymond zdefiniowali pojęcie rangi ideału, które charakteryzuje zbieżność ideałową ciągów funkcji ciągłych. Jest ono związane z oddzielaniem ideału od jego dualnego filtru przy użyciu zbioru borelowskiego. W pracy przedstawiamy kilka nowych wyników dotyczących wyznaczania rangi pewnych specjalnych ideałów oraz zbieżności ideałowej ciągów funkcji quasi-ciągłych.

W rozprawie wykorzystujemy dwie ideałowe gry nieskończone. Obie zostały szczegółowo zbadane przez Laflamme'a (por. [32]). Później były wykorzystywane m.in. przez Filipowa, Hrušáka, Laczkovicha, Natkańca, Recława i Szucę (por. [16], [21], [31] i [37]). Innym ważnym narzędziem są relacje na zbiorze ideałów – porządek Katětova oraz tzw. zawieranie izomorficznej kopii danego ideału. Pojęcia te znalazły zastosowanie w szeregu prac takich autorów jak Debs, Hrušák, Laczkovich, Meza-Alcántara, Recław i Saint Raymond (por. [10], [21], [31] i [36]).

Rozprawa składa się z następujących części.

W rozdziale 1.2 można znaleźć zbiór podstawowych definicji – opisujemy w nim używane w pracy kombinatoryczne własności ideałów oraz wprowadzamy definicję ideałów reprezentowanych topologicznie. Ostatnia część poświęcona jest zbieżności ideałowej. Rozdział ten przedstawia również szerszy kontekst rozważań zawartych w rozprawie.

W rozdziale 2 prezentujemy wyniki dotyczące ideałów reprezentowanych topologicznie. Jest on w całości oparty na artykule [30] napisanym wspólnie z dr. Marcinem Sabokiem.

W części 2.1 przedstawiamy kombinatoryczną charakteryzację ideałów reprezentowanych topologicznie. Sabok i Zapletal w [38] postawili hipotezę, że analityczny ideał jest reprezentowany topologicznie wtedy i tylko wtedy, gdy jest gęsty, słabo selektywny i typu $\mathbf{\Pi}^0_3$. Wspomniana charakteryzacja nie rozstrzyga prawdziwości tej hipotezy, jednak pokazuje, że ideały reprezentowane topologicznie dają się scharakteryzować przy użyciu wyłącznie kombinatorycznych pojęć.

W części 2.2 obliczamy dokładną złożoność deskryptywną takich ideałów – pokazujemy, że każdy analityczny ideał reprezentowany topologicznie jest $\mathbf{\Pi}^0_3$-zupełny. W połączeniu z charakteryzacją z rozdziału 2.1 otrzymujemy ciekawy wynik ukazujący silne ograniczenie nałożone przez pewne własności kombinatoryczne na deskryptywną złożoność ideału.

Rozważaniom selektywnych własności ideałów poświęcony jest rozdział 3. W 3.1 przedstawiamy wyniki dotyczące słabej selektywności, które również zostały zawarte w artykule [30]. Pewne uproszczenia w dowodach zawartych w tej części rozprawy zasugerował prof. Piotr Zakrzewski. Rozważania z rozdziałów 3.2 i 3.3 zostały zaś zawarte w pracy [28]. Badania tych zagadnień miały swój początek w rozmowach z dr. hab. Piotrem Szucą.

W części 3.1 pokazujemy, że ideał koanalityczny jest słabo selektywny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przecięciem pewnej rodziny ideałów reprezentowanych topologicznie. Ukazuje to pewne powiązanie obu tych pojęć, co jest interesujące w kontekście wspomnianej wyżej hipotezy Saboka i Zapletala.

Rozdział 3.2 przedstawia zaś podstawowe rezultaty badań słabej ramseyowskości. W szczególności pokazujemy, że lokalna selektywność nie implikuje słabej ramseyowskości. Co więcej, udowadniamy również, że istnieją co najmniej dwa nieizomorficzne ideały lokalnie selektywne, które nie są słabo ramseyowskie. Może to być zaskakujące, gdyż obie te własności wydają się być sobie stosunkowo bliskie.

Jeden z ideałów zdefiniowanych w części 3.2 stosujemy w rozdziale 3.3 do rozwiązania problemu postawionego przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę w pracy [15], dotyczącego istnienia ideału z własnością Mon, który nie jest 2-ramseyowski.

Rozdział 4 został poświęcony zbieżności ideałowej ciągów funkcji ciągłych oraz quasi-ciągłych. Wyniki z rozdziałów 4.1 i 4.2 zostały opublikowane w artykule [29] napisanym wspólnie z prof. Ireneuszem Recławem, zaś rozdział 4.3 wchodzi w skład pracy [28] i został zainspirowany pytaniami, jakie postawił dr hab. Piotr Szuca na Seminarium Zakładu Funkcji Rzeczywistych Uniwersytetu Gdańskiego.

W części 4.1 obliczamy dokładną wartość rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego, gdy $\mathcal{J}$ jest ideałem koanalitycznym rangi 1. Wykorzystujemy do tego tzw. $\mathcal{J}$-granice ciągów ideałów. Jest to znaczne uogólnienie twierdzenia Debsa i Saint Raymonda z [10], w którym dokładna wartość rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego została wyznaczona jedynie w przypadku, gdy $\mathcal{J}$ jest równy ideałowi wszystkich skończonych podzbiorów ω.

Rozdział 4.2 zawiera dalsze rozważania dotyczące rangi $\mathcal{J}$-granic ciągów ideałów. Mianowicie, pokazujemy, że – w przeciwieństwie do $\mathcal{J}$-sum Fubiniego – ranga $\mathcal{J}$-granicy ciągu ideałów $(\mathcal{J}_n)_{n\in\omega}$ może być równa 1, nawet gdy ideały $\mathcal{J}$ oraz $\mathcal{J}_n$ mają dowolnie dużą rangę.

W części 4.3 stosujemy wyniki z rozdziału 3.2 do scharakteryzowania słabej ramseyowskości w terminach porządku Katětova oraz zawierania izomorficznej kopii pewnego ideału. Następnie stosujemy wyniki Natkańca i Szucy z [37], aby otrzymać charakteryzację ideałów, dla których zbieżność ideałowa ciągów funkcji quasi-ciągłych zachowuje się podobnie do zwykłej zbieżności takich ciągów – pokazujemy, że są to dokładnie te ideały, które nie zawierają izomorficznej kopii pewnego ideału zdefiniowanego w rozdziale 3.2.

Podziękowania

Chciałbym podziękować mojemu głównemu promotorowi, prof. Piotrowi Zakrzewskiemu, za opiekę naukową, pomoc w przygotowaniu tej rozprawy oraz krytyczne uwagi, które pozwoliły ją znacząco ulepszyć. Współpraca z prof. Zakrzewskim była bardzo rozwijająca.

Dr. Marcinowi Sabokowi, promotorowi pomocniczemu, dziękuję za cenne uwagi oraz współpracę, której wynikiem jest nasz wspólny artykuł będący częścią tej rozprawy.

Wdzięczny jestem również dr. hab. Piotrowi Szucy za inspirację do podjęcia ciekawych i owocnych badań.

Osobne podziękowania należą się nieżyjącemu już prof. Ireneuszowi Recławowi, który był promotorem mojej pracy magisterskiej oraz opiekunem naukowym podczas pierwszej części studiów doktoranckich. Artykuł będący owocem naszych wspólnych badań stał się częścią tej rozprawy. Praca z prof. Recławem była dla mnie niezwykle przyjemna i inspirująca.

1.2 Podstawowe definicje i oznaczenia

W tym rozdziale wprowadzamy pojęcia, których będziemy używać w rozprawie, oraz prezentujemy ich wybrane własności. Większość stosowanych oznaczeń jest standardowa i zgodna z oznaczeniami używanymi w [24].

1.2.1 Ideały

Przez ω oznaczamy zbiór $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Dla zbioru X symbol $\mathcal{P}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich jego podzbiorów. Rodzina $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ jest *ideałem na zbiorze* X, jeśli jest zamknięta na podzbiory i skończone sumy. Zbiór X oznaczamy wtedy przez $\mathrm{dom}(\mathcal{I})$. Dodatkowo zakładamy, że każdy ideał zawiera wszystkie skończone podzbiory X i jest właściwym podzbiorem $\mathcal{P}(X)$. Wszystkie rozważane w rozprawie ideały są zadane na zbiorach przeliczalnych. Przez **Fin** oznaczamy ideał wszystkich skończonych podzbiorów ω, tzn. $\mathbf{Fin} = [\omega]^{<\omega}$. Mówimy, że rodzina $\mathcal{G}$ *generuje ideał* $\mathcal{I}$, jeśli

$$\mathcal{I} = \{A : \exists_{G_0,\ldots,G_k \in \mathcal{G}}\ A \subset G_0 \cup \ldots \cup G_k\}.$$

Rodzinę $\mathcal{I}^* = \{A \subset X : A^c \in \mathcal{I}\}$ nazywamy *filtrem dualnym do ideału* $\mathcal{I}$. Filtry są zamknięte na nadzbiory i skończone przecięcia. Rodzina zbiorów $\mathcal{I}^+ = \{A \subset X : A \notin \mathcal{I}\}$ jest koideałem wszystkich *$\mathcal{I}$-pozytywnych podzbiorów* X. Jeśli $Y \notin \mathcal{I}$, to definiujemy *obcięcie ideału $\mathcal{I}$ do zbioru Y* jako $\mathcal{I} \restriction Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{I}\}$.

Ideał $\mathcal{I}$ jest *maksymalny*, jeśli jedynym ideałem właściwym zawierającym $\mathcal{I}$ jest sam $\mathcal{I}$. Równoważnie, dla każdego $A \subset X$, albo $A \in \mathcal{I}$ albo $X \setminus A \in \mathcal{I}$. Filtr dualny do ideału maksymalnego nazywamy *ultrafiltrem*.

Mówimy, że ideał jest *gęsty*, jeśli w każdym nieskończonym podzbiorze jego dziedziny można znaleźć jego nieskończony podzbiór będący elementem ideału. Ideał $\mathcal{I}$ jest *słabym P-ideałem*, jeśli dla każdego ciągu $(X_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{I}$ istnieje taki zbiór $X \notin \mathcal{I}$, że $X \cap X_i$ jest skończony dla wszystkich i. Jeśli zawsze można znaleźć zbiór $X \in \mathcal{I}^*$ o powyższej własności, to $\mathcal{I}$ nazywamy *P-ideałem*.

1.2.2 Relacje na zbiorze ideałów

Mówimy, że $\mathcal{I}$ *jest mniejszy od $\mathcal{J}$ w porządku Katětova* (ozn. $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$), jeśli istnieje taka funkcja $f \colon \mathrm{dom}(\mathcal{J}) \to \mathrm{dom}(\mathcal{I})$, że dla wszystkich $A \in \mathcal{I}$ mamy

$f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$. Jeśli f jest bijekcją pomiędzy $\mathrm{dom}(\mathcal{J})$ oraz $\mathrm{dom}(\mathcal{I})$, to mówimy, że *ideał* $\mathcal{J}$ *zawiera kopię izomorficzną ideału* $\mathcal{I}$ (ozn. $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$). Zależności pomiędzy relacjami $\leqslant_K$ i $\sqsubseteq$ były szczegółowo badane w [3]. Jeśli ideał $\mathcal{I}$ jest gęsty, to $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja różnowartościowa $f\colon \mathrm{dom}(\mathcal{J}) \to \mathrm{dom}(\mathcal{I})$ taka, że $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{I}$ (por. [3] i [6]).

Ideały $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są $\sqsubseteq$-*równoważne*, jeśli $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$ oraz $\mathcal{J} \sqsubseteq \mathcal{I}$. Dwa ideały $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są *izomorficzne*, jeśli istnieje taka bijekcja $\pi\colon \mathrm{dom}(\mathcal{J}) \to \mathrm{dom}(\mathcal{I})$, że dla wszystkich $A \subset \mathrm{dom}(\mathcal{I})$ zachodzi

$$A \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \pi^{-1}[A] \in \mathcal{J}.$$

1.2.3 Operacje na rodzinach ideałów

Iloczyn kartezjański zbiorów X i Y oznaczamy symbolem $X \times Y$, zaś proj_i, dla $i = 1, 2$, jest rzutem na i-tą współrzędną, tzn. funkcja $\mathrm{proj}_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ jest dana wzorem $\mathrm{proj}_i(k_1, k_2) = k_i$. Dla $A \subset X \times Y$ oraz $x \in X$ używamy symbolu A_x na oznaczenie zbioru $\{y \in Y : (x, y) \in A\}$. Jeśli $(X_i)_{i\in I}$ jest pewną rodziną zbiorów, to $\sum_{i\in I} X_i$ jest *sumą rozłączną zbiorów* X_i, tzn. zbiorem wszystkich par (i, x), gdzie $i \in I$ oraz $x \in X_i$. W przypadku dwóch zbiorów X i Y na oznaczenie ich sumy rozłącznej używamy symbolu $X \oplus Y$.

Jeśli $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są ideałami na X i Y odpowiednio, to ideał $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ na $X \oplus Y$ definiujemy następująco:

$$A \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J} \Leftrightarrow \{x \in X : (0, x) \in A\} \in \mathcal{I} \wedge \{y \in Y : (1, y) \in A\} \in \mathcal{J}.$$

Dla ideału $\mathcal{J}$ na zbiorze I oraz rodziny ideałów $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ wszystkie zbiory postaci $\sum_{i\in A} B_i$, dla $A \in \mathcal{J}^*$ oraz $B_i \in \mathcal{J}_i$, tworzą bazę ideału na zbiorze $\sum_{i\in I} \mathrm{dom}\,(\mathcal{J}_i)$. Oznaczamy ten ideał przez $\mathcal{J}$-$\sum_{i\in I} \mathcal{J}_i$ i nazywamy $\mathcal{J}$*-sumą Fubiniego rodziny* $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$. W szczególności, jeśli wszystkie $\mathcal{J}_i$ są tym samym ideałem $\mathcal{I}$ zdefiniowanym na zbiorze X, otrzymujemy *produkt ideałów*

$$\mathcal{J} \otimes \mathcal{I} = \{A \subset I \times X : \{i \in I : A_i \notin \mathcal{I}\} \in \mathcal{J}\}.$$

Jeśli $\mathcal{J}$ jest ideałem na zbiorze I, zaś $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ jest ciągiem ideałów na zbiorze X, to

$$\lim_{i\to\mathcal{J}} \mathcal{J}_i = \{A \subset X : \{i \in I : A \notin \mathcal{J}_i\} \in \mathcal{J}\}$$

jest ideałem na X. Nazywamy go $\mathcal{J}$*-granicą ciągu ideałów* $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ i czasem oznaczamy również przez $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i$. Filtry dualne do tych ideałów były badane przez Fremlina w [17] w kontekście filtrów przeliczalnego typu.

1.2.4 Przestrzenie polskie

Przestrzeń topologiczna jest *przestrzenią polską*, jeśli jest ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny. Każdy podzbiór $\mathbf{\Pi}^0_2$ przestrzeni polskiej jest również przestrzenią polską (z topologią podprzestrzeni). Przestrzenią polską kluczową dla rozważań zawartych w tej rozprawie jest przestrzeń Cantora 2^ω wyposażona w topologię produktu przestrzeni. Jest to przestrzeń zwarta i *zerowymiarowa*, tzn. posiada bazę topologii złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to przez $K(x, \epsilon)$ oznaczamy kulę o środku w punkcie $x \in X$ i promieniu $\epsilon > 0$.

Ideał jest *σ-ideałem na zbiorze X*, jeśli jest zamknięty na przeliczalne sumy. Zakładamy zawsze, że σ-ideał zawiera wszystkie singletony. Rodzinę I zwartych podzbiorów przestrzeni topologicznej X nazywamy *ideałem zbiorów zwartych*, jeśli jest zamknięta na zwarte podzbiory i skończone sumy. Jeśli dodatkowo jest zamknięta na zwarte przeliczalne sumy, to I nazywamy *σ-ideałem zbiorów zwartych*. Przez $\mathcal{K}(X)$ oznaczamy hiperprzestrzeń wszystkich zwartych podzbiorów przestrzeni polskiej X z *topologią Vietorisa* (podbazę tej topologii stanowią zbiory $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \subset U\}$ oraz $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap U \neq \emptyset\}$, gdzie U jest zbiorem otwartym w X). Przestrzeń $\mathcal{K}(X)$ jest również polska. Ponadto, jeśli X jest zwarta, to $\mathcal{K}(X)$ także. Gdy d jest metryką Hausdorffa na X, to $\mathcal{K}(X)$ jest metryzowalna przez metrykę Hausdorffa (por. [24]).

1.2.5 Hierarchia borelowska

Dla liczby porządkowej $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, definiujemy *hierarchię zbiorów borelowskich przestrzeni polskiej* X w następujący sposób:

- $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$ jest rodziną wszystkich otwartych podzbiorów X;
- $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \{X \setminus A : A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)\}$;
- $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n : \forall_{n\in\omega}\ A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X)\}$.

Podzbiór A przestrzeni polskiej X nazywamy *analitycznym*, gdy jest on rzutem zbioru borelowskiego $B \subset X \times X$ (równoważnie, jeśli istnieje domknięty podzbiór $D \subset X \times \omega^\omega$ taki, że $A = \mathrm{proj}_1[D]$). Podzbiór $C \subset X$ nazywamy *koanalitycznym*, gdy $X \setminus C$ jest zbiorem analitycznym. Klasy zbiorów analitycznych i koanalitycznych oznaczamy odpowiednio $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ oraz $\mathbf{\Pi}^1_1(X)$. Będziemy również używali symboli $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ oraz $\mathbf{\Pi}^1_1$, gdy X jest ustalona.

Dla klasy zbiorów hierarchii borelowskiej lub rzutowej $\mathbf{\Gamma}$ (tzn. $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Sigma}^1_1$ lub $\mathbf{\Pi}^1_1$) mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest zbiorem $\mathbf{\Gamma}$-*trudnym*, jeśli dla każdej przestrzeni polskiej zerowymiarowej Y i zbioru $B \in \mathbf{\Gamma}(Y)$ istnieje taka funkcja ciągła $f\colon Y \to X$, że $f^{-1}[A] = B$. Jeśli dodatkowo $A \in \mathbf{\Gamma}(X)$, to zbiór A nazywamy $\mathbf{\Gamma}$-*zupełnym*. Hierarchia borelowska i rzutowa jest szczegółowo opisana w [24].

Jeśli X jest zbiorem przeliczalnym, to możemy utożsamić $\mathcal{P}(X)$ z przestrzenią 2^X wszystkich funkcji $f : X \to 2$, wyposażoną w topologię zbioru Cantora, poprzez utożsamienie podzbiorów X z ich funkcjami charakterystycznymi. Wszystkie pojęcia topologiczne i deskryptywne dotyczące ideałów na X będą się odnosić do tej topologii. Wiadomo, że każdy ideał analityczny jest $\mathbf{\Sigma^0_2}$-trudny (por. lemat 2.2.1).

Odwzorowanie $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ jest *podmiarą na* X, jeśli $\phi(\emptyset) = 0$ oraz $\phi(A) \leqslant \phi(A \cup B) \leqslant \phi(A) + \phi(B)$ dla wszystkich $A, B \subset X$. Podmiara jest *półciągła z dołu*, jeśli dodatkowo $\phi(A) = \lim_{n\to\infty} \phi(A \cap \{x_0, \ldots, x_n\})$, gdzie $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$ jest numeracją zbioru X. Mazur w [35] udowodnił, że ideał $\mathcal{I}$ na X jest $\mathbf{\Sigma^0_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I} = \mathbf{Fin}(\phi) = \{A \subset X : \phi(A) < \infty\}$ dla pewnej półciągłej z dołu podmiary ϕ na X.

1.2.6 Przykłady ideałów

Najprostszym przykładem ideału jest ideał **Fin** składający się z wszystkich skończonych podzbiorów ω. Jest to P-ideał typu $\mathbf{\Sigma^0_2}$, który nie jest gęsty. Innymi dobrze znanymi ideałami, które będą rozważane w tej pracy, są:

- $\emptyset \otimes \mathbf{Fin} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \forall_{n\in\omega}\ A_n \in \mathbf{Fin}\}$ jest ideałem $\mathbf{\Pi^0_3}$-zupełnym, który nie jest gęsty i nie jest P-ideałem.
- $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n \in \omega : A_n \in \mathbf{Fin}\} \in \mathbf{Fin}\}$ jest gęstym ideałem $\mathbf{\Sigma^0_4}$-zupełnym, który nie jest P-ideałem.
- $\mathcal{ED} = \{A \subset \omega \times \omega : \exists_{n,m\in\omega}\ \forall k > n\ \ |\{i \in \omega : (k, i) \in A\}| \leqslant m\}$ jest gęstym ideałem typu $\mathbf{\Sigma^0_2}$, który nie jest P-ideałem. Jest to ideał generowany przez zbiory postaci $\{n\} \times \omega$ oraz wykresy funkcji $\omega \to \omega$.
- $NULL(\mathbb{Q}) = \Big\{A \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1] : \overline{A}$ jest miary Lebesgue'a zero$\Big\}$ jest gęstym ideałem $\mathbf{\Pi^0_3}$-zupełnym, który nie jest P-ideałem.
- $NWD(\mathbb{Q}) = \{A \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1] : A$ jest nigdziegęsty w $[0, 1]\}$ również jest gęstym ideałem $\mathbf{\Pi^0_3}$-zupełnym, który nie jest P-ideałem.

- $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \left\{A \subset \omega : \sum_{n\in A} \frac{1}{n} \text{ jest skończona}\right\}$ jest gęstym P-ideałem, który jest typu $\mathbf{\Sigma^0_2}$.
- $\mathcal{Z}_0 = \{A \subset \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{|A\cap n|}{n} = 0\}$ jest gęstym P-ideałem $\mathbf{\Pi^0_3}$-zupełnym.
- $\mathbf{conv} = \{A \subset \mathbb{Q} \cap [0,1] : \exists_{n\in\omega} \forall_{k\in\omega} \exists_{F\in[A]^n} \{i \in A : \exists_{m\in F} |i-m| < \frac{1}{k}\} \in \mathbf{Fin}\}$ jest gęstym ideałem $\mathbf{\Sigma^0_4}$-zupełnym, który nie jest P-ideałem. Jest to ideał generowany przez ciągi w $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ zbieżne w $[0,1]$.

1.2.7 Drzewa i gry

Jeśli $s \in \omega^{<\omega}$, tzn. $s = (s(0),\dots,s(k))$ jest skończonym ciągiem liczb naturalnych, to przez $\mathrm{lh}(s)$ oznaczamy jego *długość*, tzn. $k+1$. Dla $s,t \in \omega^{<\omega}$ takich, że $\mathrm{lh}(s) \leqslant \mathrm{lh}(t)$, piszemy $s \preceq t$, jeśli $s(i) = t(i)$ dla wszystkich $i = 0,\dots,\mathrm{lh}(s)-1$. Zakładamy, że $\emptyset$ jest ciągiem długości 0 oraz $\emptyset \preceq t$ dla każdego $t \in \omega^{<\omega}$. *Konkatenacją ciągów* $s,t \in \omega^{<\omega}$ jest ciąg

$$s^\frown t = (s(0),\dots,s(\mathrm{lh}(s)-1), t(0),\dots,t(\mathrm{lh}(t)-1)),$$

gdzie $s = (s(0),\dots,s(\mathrm{lh}(s)-1))$ oraz $t = (t(0),\dots,t(\mathrm{lh}(t)-1))$. Zbiór $T \subset \omega^{<\omega}$ jest *drzewem*, jeśli dla każdych $s \in T$ i $t \in \omega^{<\omega}$ takich, że $t \preceq s$, mamy $t \in T$.

Gałęzią drzewa T jest taka funkcja $b : \omega \to \omega$, że $(b(0),\dots,b(k)) \in T$ dla wszystkich $k \in \omega$. Często utożsamiamy gałąź ze zbiorem wszystkich skończonych ciągów $(b(0),\dots,b(k))$ dla $k \in \omega$. Z tego względu gałąź może być traktowana jako podzbiór T. Przez $[T]$ oznaczamy zbiór wszystkich nieskończonych gałęzi drzewa T. *Ramifikacją drzewa* $T \subset \omega^{<\omega}$ *w* $s \in T$ jest zbiór $\{n \in \omega : s^\frown (n) \in T\}$.

W rozprawie będziemy korzystać z dwóch gier nieskończonych. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem na X, a $\mathcal{X}$ – dowolną rodziną podzbiorów X. W grze $G_1(\mathcal{J},\mathcal{X})$ uczestniczą dwaj gracze: w swoim n-tym ruchu gracz I wybiera zbiór $C_n \in \mathcal{J}$, a gracz II odpowiada punktem $k_n \notin C_n$. Gracz I wygrywa, jeśli $\{k_n : n \in \omega\} \in \mathcal{X}$. W przeciwnym razie wygrywa gracz II. Jeśli $\mathcal{J} = \mathcal{X}$, to grę $G_1(\mathcal{J},\mathcal{X})$ oznaczamy symbolem $G_1(\mathcal{J})$. Tę grę szerzej opisujemy w rozdziale 3.1, a w rozdziale 4.3 znajdujemy ideał w pewnym sensie krytyczny dla tej gry. W grze nieskończonej $G_2(\mathcal{J},\mathcal{X})$ również uczestniczą dwaj gracze: w swoim n-tym ruchu gracz I wybiera zbiór $C_n \in \mathcal{J}$, a gracz II odpowiada zbiorem skończonym F_n rozłącznym z C_n. Gracz I wygrywa, jeśli $\bigcup_{n\in\omega} F_n \in \mathcal{X}$. W przeciwnym razie wygrywa gracz II. Ponownie, jeśli $\mathcal{J} = \mathcal{X}$, to grę $G_2(\mathcal{J},\mathcal{X})$ oznaczamy symbolem $G_2(\mathcal{J})$. Tę grę szerzej opisujemy w rozdziale

4.1. Obie powyższe gry były szczegółowo badane w [32] przez Laflamme'a, który scharakteryzował strategie wygrywające dla obu graczy (zob. lematy 3.1.4 i 4.1.4).

Niech teraz $B = X$ lub $B = [X]^{<\omega}$. *Strategią wygrywającą dla gracza I* jest taka funkcja $\sigma\colon (\mathcal{J} \times B)^{<\omega} \to \mathcal{J}$, że jeśli $x \in (\mathcal{J} \times B)^{\omega}$ jest ciągiem spełniającym warunek $\mathrm{proj}_1(x(n+1)) = \sigma(x \restriction n)$ dla wszystkich n, to:

- $\{\mathrm{proj}_2(x(n)) : n \in \omega\} \in \mathcal{X}$, w przypadku gry $G_1(\mathcal{J}, \mathcal{X})$;
- $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{proj}_2(x(n)) \in \mathcal{X}$, w przypadku gry $G_2(\mathcal{J}, \mathcal{X})$.

Podobnie, *strategią wygrywającą dla gracza II* jest taka funkcja $\sigma\colon [(\mathcal{J} \times B)^{<\omega}] \times \mathcal{J} \to B$, że jeśli $x \in (\mathcal{J} \times B)^{\omega}$ jest ciągiem spełniającym warunek $\mathrm{proj}_2(x(n+1)) = \sigma((x \restriction n, \mathrm{proj}_1(x(n+1))))$ dla wszystkich n, to:

- $\{\mathrm{proj}_2(x(n)) : n \in \omega\} \notin \mathcal{X}$, w przypadku gry $G_1(\mathcal{J}, \mathcal{X})$;
- $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{proj}_2(x(n)) \notin \mathcal{X}$, w przypadku gry $G_2(\mathcal{J}, \mathcal{X})$.

Grę nazywamy *zdeterminowaną*, jeśli jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Przy użyciu aksjomatu wyboru można skonstruować rodziny $\mathcal{X}$, dla których gry nie są zdeterminowane. Jednak, jak wynika z twierdzenia Martina o borelowskiej determinacji (por. [24]), pewne deskryptywne ograniczenia nałożone na rodzinę $\mathcal{X}$ mogą zagwarantować determinację gry. W szczególności, jeśli $\mathcal{J}$ jest borelowski, to gry $G_1(\mathcal{J})$ i $G_2(\mathcal{J})$ są zdeterminowane (por. lematy 3.1.5 i 4.1.5).

1.2.8 Funkcje rzeczywiste

$\mathcal{C}(X)$ oznacza rodzinę funkcji ciągłych zdefiniowanych na X o wartościach w $\mathbb{R}$. Przez $\mathcal{B}_\alpha(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich funkcji rzeczywistych zdefiniowanych na X *borelowskiej klasy* $\alpha < \omega_1$, tzn. takich funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, że $f^{-1}[U] \in \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1+\alpha}}$ dla każdego otwartego $U \subset \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest *quasi-ciągła* (ozn. $f \in \mathcal{QC}(X)$), jeśli dla wszystkich x_0 i $\epsilon > 0$ w każdym otoczeniu x_0 istnieje taki niepusty zbiór otwarty V, że $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ dla wszystkich $x \in V$.

Dla rodziny $\mathcal{R}$ funkcji rzeczywistych przez $\mathcal{B}_1(\mathcal{R})$ oznaczamy rodzinę wszystkich funkcji, które da się przedstawić jako granicę punktową ciągów funkcji z rodziny $\mathcal{R}$. Twierdzenie Lebesgue'a i Hausdorffa mówi, że $\mathcal{B}_1(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_1(X)$ (por. [24]), a Grande pokazał, że $\mathcal{B}_1(\mathcal{QC}(X))$ jest równa klasie wszystkich funkcji punktowo nieciągłych, tzn. takich funkcji, których zbiór punktów ciągłości jest gęsty w X (por. [18]).

1.3 Kombinatoryczne własności ideałów

Definicja 1.3.1 *Ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest:*

- selektywny*, jeśli dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega}$ zbioru X, który spełnia warunek $\bigcup_{m\geqslant n} X_m \notin \mathcal{I}$, dla każdego $n \in \omega$, istnieje $\mathcal{I}$-pozytywny selektor tego podziału.*
- słabo selektywny*, jeśli dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega}$ zbioru X, posiadającego co najwyżej jeden element nienależący do ideału, istnieje $\mathcal{I}$-pozytywny selektor. Równoważnie, dla każdej funkcji $f : B \to \omega$ zadanej na $\mathcal{I}$-pozytywnym zbiorze B można znaleźć $\mathcal{I}$-pozytywny $A \subset B$, na którym f jest stała lub $\mathcal{I}$-pozytywny $A \subset B$, na którym f jest różnowartościowa.*
- słabo ramseyowski*, jeśli każde drzewo $T \subset X^{<\omega}$, którego ramifikacje są w $\mathcal{I}^*$, posiada $\mathcal{I}$-pozytywną gałąź.*
- lokalnie selektywny*, jeżeli dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega}$ zbioru X na zbiory z ideału, istnieje $\mathcal{I}$-pozytywny selektor tego podziału.*

Ideały selektywne były badane m.in. w [19], [34], [43], [44] oraz [45]. Mathias w [34], gdzie koideały ideałów selektywnych noszą nazwę "happy families", udowodnił, że żaden analityczny ani koanalityczny ideał selektywny nie jest gęsty. Pokazał także, że każdy ideał generowany przez rodzinę prawie rozłączną (tzn. taką, której elementy przecinają się na zbiorach skończonych) jest selektywny. W szczególności, wszystkie ideały przeliczalnie generowane (tzn. generowane przez przeliczalną rodzinę) są selektywne, ponieważ każdy taki ideał można przedstawić jako ideał generowany przez przeliczalną rodzinę parami rozłączną. W [43] Todorčević znalazł inny przykład analitycznego ideału selektywnego. Zakrzewski w [45] udowodnił, że P-ideały analityczne, które nie są przeliczalnie generowane, nie są selektywne.

Słaba selektywność i lokalna selektywność zostały wprowadzone w [4] w celu uogólnienia znanego pojęcia selektywności zdefiniowanego dla ideałów maksymalnych lub ultrafiltrów. Później lokalna selektywność była badana m.in. w [21], [15] i [36], a słaba selektywność w [19] i [15]. Definicję ideałów słabo ramseyowskich podajemy za [32]. Warto zwrócić uwagę, że w [19] tę samą nazwę nosi nieco inna własność, równoważna słabej selektywności.

Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem maksymalnym, to wszystkie cztery zdefiniowane powyżej własności są równoważne i odpowiadają pojęciu selektywności ideału maksymalnego (zob. [5]). W przypadku ogólnym zachodzą zaś następujące implikacje:

$$\text{selektywny} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{słabo}\\ \text{selektywny}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{słabo}\\ \text{ramseyowski}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{lokalnie}\\ \text{selektywny}\end{array}$$

W powyższym ciągu implikacji jedynie te, które odnoszą się do słabej ramseyowskości mogą nie być oczywiste – są one konsekwencją stwierdzenia 3.2.1 bazującego na obserwacjach poczynionych przez Grigorieffa w [19] dla ideałów selektywnych i słabo selektywnych. Dowód stwierdzenia 3.2.1 zamieszczamy w rozdziale 3.2. Pokażemy w nim również, że dwie ostatnie implikacje nie są odwracalne. W kontekście rozdziałów 3.1 i 3.2 szczególnie zaskakujący może być fakt, że słaba ramseyowskość nie jest równoważna lokalnej selektywności. Szczegółowo omawiamy ten problem w rozdziale 3.2.

Ideałami słabo selektywnymi, ale nie selektywnymi są $NULL(\mathbb{Q})$ oraz $NWD(\mathbb{Q})$ (por. [14], [38] i [45]). Łatwo zauważyć, że przykładem ideału lokalnie selektywnego, ale nie słabo selektywnego jest $\mathbf{Fin} \oplus \mathcal{ED}$ (por. uwaga 3.2.4). Wśród ideałów, które nie są lokalnie selektywne, można wymienić np. $\emptyset \otimes \mathbf{Fin}$, $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$ lub $\mathcal{ED}$ (por. [36]). Co więcej, znana jest charakteryzacja ideałów lokalnie selektywnych przy pomocy ideału $\mathcal{ED}$.

Stwierdzenie 1.3.2 (por. [36] i [3]) *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału $\mathcal{I}$:*

1. *$\mathcal{I}$ nie jest lokalnie selektywny;*
2. *$\mathcal{ED} \sqsubseteq \mathcal{I}$;*
3. *$\mathcal{ED} \leqslant_K \mathcal{I}$.*

Zatem ideał $\mathcal{ED}$ jest w pewnym sensie ideałem krytycznym dla lokalnej selektywności. Podobnie można scharakteryzować słabe P-ideały przy użyciu ideału $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$ (por. twierdzenie 1.5.1). Innym, nietrywialnym przykładem takiego wyniku może być twierdzenie Soleckiego z [39]: ideał $\mathcal{I}$ klasy $\mathbf{\Sigma^1_1} \setminus \mathbf{\Sigma^0_2}$ jest P-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest powyżej ideału $\emptyset \otimes \mathbf{Fin}$ w porządku Rudin-Blass.

W rozdziale 4.3 podamy analogiczną do twierdzenia 1.3.2 charakteryzację słabej ramseyowskości.

Kolejną własnością ideałów rozważaną w tej pracy jest własność *Mon* (zdefiniowana wyłącznie dla ideałów na ω): dla każdego ciągu liczb rzeczywistych istnieje taki zbiór spoza ideału, że podciąg indeksowany tym zbiorem jest monotoniczny (por [15]).

Funkcję $\chi : [X]^2 \to k$ nazywamy *kolorowaniem*. Dowolny zbiór $H \subset X$, dla którego istnieje takie $i < k$, że $\chi \restriction [H]^2 = i$, nazywamy *zbiorem monochromatycznym kolorowania* χ. Ideał na X jest *k-ramseyowski*, jeśli dla każdego kolorowania zbioru par nieuporządkowanych elementów X przy pomocy k kolorów istnieje monochromatyczny zbiór spoza ideału. Jeśli ideał jest k-ramseyowski dla każdego k, to mówimy, że jest *ramseyowski*.

Łatwo zauważyć, że każdy ideał 2-ramseyowski jest Mon. Każdy ideał niegęsty ma własność Mon oraz jest ramseyowski (por. [15]). Zatem np. $\emptyset \otimes \mathbf{Fin}$ jest ramseyowski, a każdy ideał na ω izomorficzny z $\emptyset \otimes \mathbf{Fin}$ ma własność Mon. Ideał $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ jest ideałem, który nie jest ramseyowski i nie ma własności Mon (por. [15]). W [15] autorzy postawili pytanie o istnienie ideału Mon, który nie jest ramseyowski. Rozwiązanie tego problemu wynika z [36] – Meza-Alcántara skonstruował tam ideał 2-ramseyowski, który nie jest 3-ramseyowski. Jednak nie odpowiada to na pytanie o istnienie ideału Mon, który nie jest 2-ramseyowski (a więc nie jest k-ramseyowski dla żadnego k). W rozdziale 3.3 udowadniamy, że taki ideał również istnieje.

1.4 Ideały reprezentowane przez σ-ideały

Poniższa klasa ideałów po raz pierwszy pojawiła się w [38].

Definicja 1.4.1 (por. [38]) *Niech X będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, $D \subseteq X$ – gęstym zbiorem przeliczalnym, a I – σ-ideałem na X (w szczególności, zgodnie z przyjętym w rozdziale 1.2.4 założeniem, $\{x\} \in I$ dla każdego $x \in X$). Wówczas*

$$\mathcal{J}_I = \left\{ A \subseteq D : \overline{A} \in I \right\}$$

jest ideałem na D. Ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze przeliczalnym jest reprezentowany topologicznie*, jeśli istnieją I, D, X takie jak wyżej, dla których $\mathcal{I}$ jest izomorficzny z $\mathcal{J}_I$. Wówczas mówimy, że $\mathcal{I}$ jest* reprezentowany topologicznie *na X przez I.*

Dwa istotnie różne przykłady takich ideałów zostały podane w [14] przez Faraha i Soleckiego: $NWD(\mathbb{Q})$ (reprezentowany przez σ-ideał zbiorów pierwszej kategorii) i $NULL(\mathbb{Q})$ (reprezentowany przez σ-ideał zbiorów miary Lebesgue'a zero). Pokazali oni, że ideały te nie są izomorficzne.

Później ideały reprezentowane topologicznie były badane w [38] przez Saboka i Zapletala, którzy udowodnili, że każdy ideał reprezentowany topologicznie jest gęsty i słabo selektywny. Co więcej, zaobserwowali oni, że jeśli ideał reprezentowany topologicznie jest analityczny, to jest typu $\mathbf{\Pi^0_3}$. Postawili również następującą hipotezę:

Hipoteza 1.4.2 (por. [38]) *Ideał analityczny $\mathcal{I}$ jest gęsty, słabo selektywny i $\mathbf{\Pi^0_3}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest reprezentowany topologicznie.*

Na marginesie zauważmy, że w [44] Todorčević rozważał nieco inny sposób topologicznej reprezentacji ideałów na zbiorach przeliczalnych. Mianowicie, dla ustalonej przestrzeni Hausdorffa X, punktu $x \in X$ oraz takiego ciągu $(x_n)_{n\in\omega} \subset X \setminus \{x\}$, że x jest jego punktem skupienia, definiujemy ideał $\mathcal{I}_X(x,(x_n)_{n\in\omega}) = \{A \subset \omega : x \in \overline{\{x_n : n \in A\}}\}$. Todorčević pokazał, że każdy ideał na ω, reprezentowany w ten sposób przez zwarty zbiór X funkcji borelowskich zdefiniowanych na jakiejś przestrzeni polskiej, jest analityczny i selektywny. Co więcej, wszystkie znane przykłady analitycznych ideałów selektywnych są tej postaci.

Jeśli w definicji 1.4.1 pominęlibyśmy założenie o tym, że σ-ideał zawiera wszystkie singletony, to każdy ideał postaci $\mathcal{I}_X(x,(x_n)_{n\in\omega})$, gdzie X jest przestrzenią metryczną ośrodkową, byłby reprezentowany topologicznie (przez σ-ideał $I = \{Z \subset X : x \notin Z\}$). Jednakże przyjęcie przez nas powyższego podejścia powoduje, że przy dodatkowym założeniu zwartości przestrzeni X żaden ideał postaci $\mathcal{I}_X(x,(x_n)_{n\in\omega})$ nie jest reprezentowany topologicznie w naszym sensie (tzn. w sensie definicji 1.4.1). Wynika to z faktu, że żaden analityczny ideał selektywny nie jest gęsty (por. twierdzenie 2.1.3), co zostało udowodnione przez Mathiasa w [34] (zob. też [43]).

W rozdziale 2.1 podamy charakteryzację ideałów reprezentowanych topologicznie. Wykorzystamy ją w rozdziale 3.1 do wykazania, że każdy koanalityczny ideał słabo selektywny jest przecięciem pewnej rodziny ideałów reprezentowanych topologicznie. Uzyskana charakteryzacja jest czysto kombinatoryczna – nie odnosi się w ogóle do deskryptywnej złożoności ideału. Co więcej, okazuje się, że każdy analityczny ideał reprezentowany topologicznie jest $\mathbf{\Pi^0_3}$-zupełny. Pokazujemy to w rozdziale 2.2. Jako wniosek otrzymujemy zatem twierdzenie mówiące, że pewne kombinatoryczne własności nakładają silne ograniczenie na deskryptywną złożoność ideału. Znane są podobne twierdzenia, jak chociażby wynik Soleckiego z [40]: każdy analityczny P-ideał jest albo $\mathbf{\Sigma}^0_2$, albo $\mathbf{\Pi}^0_3$-zupełny.

1.5 Zbieżność ideałowa

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Ciąg $(x_n)_{n\in\omega}$ liczb rzeczywistych jest *$\mathcal{I}$-zbieżny do* $x \in \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ zbiór $\{n \in \omega : |x - x_n| \geqslant \epsilon\}$ jest w ideale $\mathcal{I}$. Przez $\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{R})$ oznaczamy rodzinę wszystkich funkcji, które da się przedstawić jako $\mathcal{I}$-granicę punktową funkcji z rodziny $\mathcal{R}$.

Duży wpływ na rozumienie rodzin $\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_\alpha)$ miał artykuł [10]. Z naszego punktu widzenia najciekawszy wynik uzyskali Laczkovich i Recław w [31]. Ich dowód wykorzystuje grę $G_2(\mathcal{I})$ (zob. rozdziały 1.2.7 i 4.1). Równoważność warunków 3. i 4. wynika z charakteryzacji udowodnionej przez Laflamme'a w [32] (zob. 4.1.4) oraz determinacji gry $G_2(\mathcal{I})$ dla borelowskich ideałów $\mathcal{I}$ (zob. lemat 4.1.5). Z dowodu poniższego twierdzenia zawartego w [31] wynika, że na mocy lematów 4.1.5 i 4.1.6 oraz uwagi 4.1.7, które udowodnimy w rozprawie, twierdzenie można uogólnić na wszystkie ideały koanalityczne.

Twierdzenie 1.5.1 (por. [31]) *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem borelowskim na ω. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_1(X)$ dla każdej nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X;*
2. *$\mathcal{I}$ jest słabym P-ideałem;*
3. *$\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin} \not\sqsubseteq \mathcal{I}$;*
4. *$\mathcal{I}$ da się oddzielić od $\mathcal{I}^*$ zbiorem $\mathbf{\Sigma^0_2}$;*
5. *Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_2(\mathcal{I})$.*

Zatem $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$ jest krytycznym ideałem dla ideałowej zbieżności ciągów funkcji ciągłych. W [3] zostało dodatkowo pokazane, że warunek 3. jest równoważny warunkowi $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin} \not\leqslant_K \mathcal{I}$. Powyższy wynik z [31] został częściowo uogólniony w [7] przez Bouziada, który wykazał równoważność warunków 1., 4. i 5. dla wszystkich ideałów na ω (tzn. niekoniecznie borelowskich). Ponadto, pokazał on, że implikacja 5. $\Rightarrow$ 1. pozostanie prawdziwa po zastąpieniu w warunku 1. przestrzeni polskiej X dowolną przestrzenią normalną.

Jeśli A i B są dwoma podzbiorami przestrzeni polskiej X, a $\mathbf{\Gamma}$ jest klasą borelowską, to mówimy, że A jest $\mathbf{\Gamma}$-*oddzielony* od B, jeśli istnieje $S \in \mathbf{\Gamma}(X)$, dla którego $A \cap S = \emptyset$ oraz $B \subset S$. Rangą ideału $\mathcal{I}$ jest liczba porządkowa

$$\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \min\left\{\alpha < \omega_1 : \mathcal{I} \text{ jest } \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\alpha}\text{-oddzielony od } \mathcal{I}^*\right\}.$$

Z twierdzenia Łuzina o oddzielaniu (por. [24]) wynika, że każdy ideał analityczny ma przeliczalną rangę. Pojęcie rangi ideału zostało wprowadzone przez Debsa i Saint Raymonda w [10], jednakże idea pochodzi od Soleckiego (por. [41]), który podczas badań nad pytaniem postawionym przez Dobrowolskiego i Marciszewskiego w [11] pierwszy zauważył związek tej własności oddzielania z ideałową zbieżnością. Wspomniany związek w pełni ukazuje poniższe twierdzenie Debsa i Saint Raymonda.

Twierdzenie 1.5.2 (por. [10]) *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem analitycznym na ω oraz α – przeliczalną liczbą porządkową. Wtedy:*

1. *$\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{C}(X)) \subset \mathcal{B}_\alpha(X)$ dla każdej przestrzeni polskiej X wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \leqslant \alpha$.*
2. *$\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{C}(X)) \supset \mathcal{B}_\alpha(X)$ dla każdej zerowymiarowej przestrzeni polskiej X wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \geqslant \alpha$.*
3. *$\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_\alpha(X)$ dla każdej zerowymiarowej przestrzeni polskiej X wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \alpha$.*

W pracy będziemy korzystać z kilku podstawowych własności rangi.

Stwierdzenie 1.5.3 (por. [10]) *Ranga ideału ma następujące własności:*

- $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \min\left\{\alpha < \omega_1 : \mathcal{I} \textit{ jest } \mathbf{\Pi}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\alpha}\textit{-oddzielony od } \mathcal{I}^*\right\}$.
- *Jeśli $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$, to $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \leqslant \mathrm{rk}(\mathcal{J})$.*
- *Rangi ideałów izomorficznych są równe.*

Innym ważnym pojęciem w badaniach zbieżności ideałowej ciągów funkcji ciągłych są *ideały Katětova* $\mathbf{Fin}_n$, dla $n \in \omega$. Są one zdefiniowane indukcyjnie:

- $\mathbf{Fin}_1 = \mathbf{Fin}$,

- $\mathbf{Fin}_{k+1} = \mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}_k$.

Warto zauważyć, że $\mathbf{Fin}_2 = \mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$. Można również zdefiniować ideały Katětova $\mathbf{Fin}_\alpha$ dla $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$. Pomijamy ich definicję, jednak można ją znaleźć w [10] – są to ideały dualne do filtrów $\mathcal{N}_\alpha$ wprowadzonych w tej pracy (zob. też [3]). Ideały Katětova odgrywają ważną rolę w teorii rangi ideałów, gdyż dla każdego $\alpha < \omega_1$ ideał $\mathbf{Fin}_\alpha$ ma rangę α. Idea tych ideałów pochodzi od Katětova (por. [22] i [23]) i Grimeisena (por. [20]). Ideały Katětova są również związane z zagadnieniem znalezienia minimalnej złożoności borelowskiej ideału danej rangi. Debs i Saint Raymond w [10] postawili następujące hipotezy.

Hipoteza 1.5.4 (por. [10]) *Ranga ideału analitycznego $\mathcal{I}$ jest większa bądź równa α wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera on izomorficzną kopię ideału $\mathbf{Fin}_\alpha$.*

Hipoteza 1.5.5 (por. [10]) *Każdy ideał rangi α ma złożoność borelowską nie mniejszą niż ideał $\mathbf{Fin}_\alpha$.*

W [3] zostało pokazane, że warunek $\mathbf{Fin}_\alpha \not\sqsubseteq \mathcal{I}$ jest równoważny warunkowi $\mathbf{Fin}_\alpha \not\leqslant_K \mathcal{I}$ w przypadku, gdy α jest następnikiem lub $\alpha = \omega$. Wiadomo, że hipoteza 1.5.4 jest prawdziwa dla $\alpha = 2$, a hipoteza 1.5.5 jest prawdziwa w przypadku, gdy $\alpha = 1, 2$ lub α jest graniczną liczba porządkową (por. [10] i [9]). W [9] pokazano ponadto, że dla $\alpha < \omega$ hipoteza 1.5.4 implikuje hipotezę 1.5.5.

Debs i Saint Raymond w [10] badali również $\mathcal{J}$-sumy Fubiniego, uzyskując następujące wyniki.

Twierdzenie 1.5.6 (por. [10]) *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest $\mathcal{J}$-sumą Fubiniego ciągu ideałów $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ oraz $J \subset I$ jest elementem $\mathcal{J}^*$.*

1. *Jeśli* $\mathrm{rk}(\mathcal{J}) \geqslant \alpha$ *oraz* $\mathrm{rk}(\mathcal{J}_i) \geqslant \xi$ *dla* $i \in J$, *to* $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \geqslant \xi + \alpha$.
2. *Jeśli* $\mathrm{rk}(\mathcal{J}) \leqslant \alpha$ *oraz* $\mathrm{rk}(\mathcal{J}_i) \leqslant \xi$ *dla* $i \in J$, *to* $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \leqslant \xi + 1 + \alpha$.
3. *Jeśli* $\mathcal{J} = \mathbf{Fin}$ *oraz* $\mathrm{rk}(\mathcal{J}_i) \leqslant \xi$ *dla* $i \in J$, *to* $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \leqslant \xi + 1$.

Można zauważyć, że oszacowanie rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego nie jest precyzyjne. Nie jest jednak znany żaden przykład pokazujący, że w 2 nie da się uzyskać silniejszego oszacowania. W rozdziale 4.1 pokazujemy, że takie silniejsze oszacowanie jest możliwe, gdy $\mathcal{J}$ jest ideałem koanalitycznym rangi

1. Uzyskujemy ten wynik dzięki badaniom rangi $\mathcal{J}$-granic ciągów ideałów. W rozdziale 4.2 pokazujemy zaś, że w przypadku $\mathcal{J}$-granic część 1. powyższego twierdzenia nie jest prawdziwa – ranga $\mathcal{J}$-granicy ciągu ideałów $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ może być równa 1., nawet gdy ideały $\mathcal{J}$ oraz $\mathcal{J}_i$ mają dowolnie dużą rangę.

Ostatnio Natkaniec i Szuca w [37], badając granice ideałowe ciągów funkcji quasi-ciągłych, uzyskali wynik podobny do twierdzenia 1.5.1 – scharakteryzowali ideały, dla których $\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{B}_1(QC(X))$, przy użyciu słabej ramseyowskości. W dowodzie użyli gry $G_1(\mathcal{J})$ (zob. rozdziały 1.2.7 i 3.1). Równoważność warunków 2. i 3. wynika z wcześniejszej charakteryzacji udowodnionej przez Laflamme'a w [32] (zob. lemat 3.1.4) oraz determinacji gry $G_1(\mathcal{I})$ dla ideałów borelowskich $\mathcal{I}$ (zob. lemat 3.1.5). Z dowodu poniższego twierdzenia zawartego w [37] wynika, że na mocy lematów 3.1.5 i 3.1.6 oraz uwagi 3.1.7, które udowodnimy w rozprawie, twierdzenie można uogólnić na wszystkie ideały koanalityczne. Warto również przypomnieć, że grą charakteryzującą granice ideałowe ciągów funkcji ciągłych, z której skorzystali Laczkovich i Recław w dowodzie twierdzenia 1.5.1, była gra $G_2(\mathcal{J})$.

Twierdzenie 1.5.7 (por. [37]) *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem borelowskim na ω. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{B}_1(\mathcal{QC})$ dla każdej metrycznej przestrzeni Baire'a;*
2. *$\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski;*
3. *Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{I})$.*

W rozdziale 4.3 pokazujemy, że możliwa jest również charakteryzacja ideałowej zbieżności ciągów funkcji quasi-ciągłych poprzez pewien ideał krytyczny, tzn. istnieje odpowiednik warunku 3. twierdzenia 1.5.1 w przypadku quasi-ciągłości.

Rozdział 2

Ideały reprezentowane topologicznie

2.1 Charakteryzacja

Przypomnijmy (zob. definicja 1.4.1), że ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze przeliczalnym jest *reprezentowany topologicznie*, jeśli istnieje ośrodkowa przestrzeń metryczna X z ośrodkiem D oraz σ-ideał I na X (zawierający wszystkie singletony), dla których $\mathcal{I}$ jest izomorficzny z ideałem na D zdefiniowanym następująco:

$$\mathcal{J}_I = \left\{A \subseteq D : \overline{A} \in I\right\}.$$

W tym rozdziale przedstawimy kombinatoryczną charakteryzację ideałów reprezentowanych topologicznie. Przy okazji wykażemy, że w przypadku tych ideałów możemy mieć pewną kontrolę nad przestrzenią topologiczną. Mianowicie, każdy ideał reprezentowany topologicznie jest reprezentowany na zbiorze Cantora. Wszystkie wyniki z tego rozdziału pochodzą z pracy [30] napisanej wspólnie z dr. Marcinem Sabokiem.

Jednak na początek warto skomentować pewien aspekt definicji 1.4.1 ideałów reprezentowanych topologicznie. Formalnie takie ideały zależą od wyboru ośrodka. Okazuje się jednak, że wybierając różne ośrodki, otrzymujemy ideały izomorficzne.

Stwierdzenie 2.1.1 (por. [30]) *Niech I będzie σ-ideałem na ośrodkowej przestrzeni metrycznej X, a D i E – dwoma ośrodkami X. Jeśli $\mathcal{I} = \{A \subseteq D : \overline{A} \in I\}$ oraz $\mathcal{J} = \{A \subseteq E : \overline{A} \in I\}$, to ideały $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są izomorficzne.*

Dowód. Używając metody "back-and-forth", ponumerujmy różnowartościowo $D = \{d_n : n \in \omega\}$ oraz $E = \{e_n : n \in \omega\}$ w taki sposób, aby dla wszystkich n odległość d_n od e_n była mniejsza od $\frac{1}{n}$. Dla $A \subset \omega$ oznaczmy $A_D = \overline{\{d_n : n \in A\}} \subset X$ oraz $A_E = \overline{\{e_n : n \in A\}} \subset X$. Aby wykazać, że ideały $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są izomorficzne, wystarczy udowodnić, że A_D należy do I wtedy i tylko wtedy, gdy A_E należy do I. Zaobserwujmy, że $A_D \subset A_E \cup \{d_n : n \in A\}$ oraz $A_E \subset A_D \cup \{e_n : n \in A\}$. Rzeczywiście, pierwsza inkluzja jest konsekwencją faktu, że jeśli $x \in A_D$ nie jest żadnym z punktów d_n dla $n \in A$, to istnieje nieskończony ciąg $(d_n)_{n \in B}$ zbieżny do x, gdzie $B \subset A$. Ponieważ e_n są odległe od d_n o mniej niż $\frac{1}{n}$, ciąg $(e_n)_{n \in B}$ również zbiega do x. Dowód drugiej inkluzji jest analogiczny. Zatem A_D oraz A_E mogą się różnić co najwyżej o zbiór przeliczalny. Ponieważ I jest σ-ideałem zawierającym wszystkie singletony, otrzymujemy, że $A_D \in I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_E \in I$. $\square$

Następne twierdzenie charakteryzuje, przy użyciu wyłącznie kombinatorycznych pojęć, ideały reprezentowane topologicznie. Jeden z koniecznych warunków jest modyfikacją pojęcia przeliczalnie oddzielalnych luk wprowadzonego przez Todorčevića w [42] (zob. też [1], [12] i [13]).

Definicja 2.1.2 *Ideał $\mathcal{J}$ na zbiorze przeliczalnym D jest* przeliczalnie oddzielalny, *jeśli istnieje taka przeliczalna rodzina $\{X_n : n \in \omega\}$ podzbiorów D, że dla wszystkich $A \in \mathcal{J}$ i $B \notin \mathcal{J}$ istnieje takie n, że $A \cap X_n = \emptyset$ oraz $B \cap X_n \notin \mathcal{J}$. W takim przypadku mówimy, że rodzina $\{X_n : n \in \omega\}$ oddziela $\mathcal{I}$.*

Twierdzenie 2.1.3 (por. [30]) *Dla każdego ideału $\mathcal{J}$ następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{J}$ jest gęsty i przeliczalnie oddzielalny;*
2. *$\mathcal{J}$ jest reprezentowany topologicznie;*
3. *$\mathcal{J}$ jest reprezentowany topologicznie na zbiorze Cantora.*

W dowodzie będziemy potrzebować następującego lematu pokazującego, że rodzina świadcząca o przeliczalnej oddzielalności może być ulepszona.

Lemat 2.1.4 *Jeśli ideał $\mathcal{J}$ zdefiniowany na zbiorze D jest gęsty i przeliczalnie oddzielalny, to istnieje przeliczalna rodzina $\{X_n : n \in \omega\}$ świadcząca o przeliczalnej oddzielalności $\mathcal{J}$, która ponadto spełnia następujące warunki:*

- *dla dowolnych $i \neq j \in D$ istnieje takie $n \in \omega$, że $i \in X_n$ oraz $j \notin X_n$ ($\{X_n : n \in \omega\}$ oddziela punkty);*

- *wszystkie jej kombinacje boolowskie są albo puste, albo nieskończone.*

Dowód. Niech $\{Y_n : n \in \omega\}$ będzie rodziną świadczącą o przeliczalnej oddzielalności $\mathcal{J}$. Niech $\{(i_n, j_n) : n \in \omega\}$ będzie numeracją zbioru przeliczalnego $D \times D \setminus \{(i,i) : i \in D\}$. Skonstruujemy indukcyjnie rodzinę $\{X_n : n \in \omega\}$ podzbiorów D taką, że dla każdego n:

- jeśli $n = 2m$ dla pewnego $m \in \omega$, to X_n jest takim podzbiorem zbioru Y_m, że $Y_m \setminus X_n \in \mathcal{J}$;

- jeśli $n = 2m+1$ dla pewnego $m \in \omega$, to $k_m \in X_n$ oraz $l_m \notin X_n$;

- wszystkie kombinacje boolowskie zbiorów X_i, dla $i \leqslant n$, są albo puste, albo nieskończone.

Zauważmy, że na mocy pierwszego warunku taka rodzina świadczy o przeliczalnej oddzielalności $\mathcal{J}$. Zatem $\{X_n : n \in \omega\}$ będzie żądaną rodziną.

Niech $X_0 = Y_0$ i załóżmy, że X_k, dla $k < n$, są już skonstruowane. Wszystkie niepuste kombinacje boolowskie rodziny $\{X_k : k < n\}$ tworzą skończony podział $\{A_k : k < k_n\}$ zbioru D na nieskończone podzbiory.

Przypadek 1. Załóżmy, że $n = 2m$ jest parzyste. Dla każdego $k < k_n$ wybieramy zbiór $B_k \subset A_k \cap Y_m$ w następujący sposób:

- jeśli $A_k \cap Y_m \in \mathcal{J}$, to $B_k = \emptyset$;

- jeśli $A_k \cap Y_m \notin \mathcal{J}$ i $A_k \setminus Y_m$ jest nieskończony, to $B_k = A_k \cap Y_m$;

- jeśli $A_k \cap Y_m \notin \mathcal{J}$ i $A_k \setminus Y_m$ jest skończony, to, korzystając z gęstości ideału $\mathcal{J}$, można znaleźć nieskończony $B'_k \subset A_k \cap Y_m$ należący do $\mathcal{J}$. Wtedy niech $B_k = (A_k \cap Y_m) \setminus B'_k$.

Zbiór $X_n = \bigcup_{k<k_n} B_k$ jest takim podzbiorem Y_m, że $Y_m \setminus X_n \in \mathcal{J}$ oraz X_n jest albo pusty, albo nieskończony i konieskończony w każdym ze zbiorów A_k.

Przypadek 2. Załóżmy, że $n = 2m+1$ jest nieparzyste. Istnieje $k < k_n$ takie, że $i_m \in A_k$. Niech X_n będzie dowolnym nieskończonym podzbiorem zbioru A_k takim, że $i_m \in X_n$, $j_m \notin X_n$ oraz $A_k \setminus X_n$ jest nieskończony. Wtedy X_n w każdym A_k jest albo pusty, albo nieskończony i konieskończony. □

Możemy teraz przejść do dowodu twierdzenia 2.1.3.

Dowód. **3. $\Rightarrow$ 2.:** Oczywiste.

2. $\Rightarrow$ 1.: Załóżmy, że $\mathcal{J}$ jest reprezentowany na X przez σ-ideał I, tzn. $\mathcal{J}$ jest izomorficzny z $\mathcal{J}_I$. Niech $D \subset X$ będzie przeliczalnym zbiorem gęstym w X. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{J}_I$ jest gęsty i przeliczalnie oddzielalny, gdyż obie te własności są niezmiennikami izomorfizmu ideałów.

Pokażemy najpierw, że $\mathcal{J}_I$ jest gęsty. Rzeczywiście, jeśli $A \subset D$ nie należy do $\mathcal{J}_I$, to $\overline{A} \notin I$, więc $\overline{A}$ jest nieprzeliczalny, ponieważ zakładamy, że każdy σ-ideał zawiera wszystkie singletony. Niech $x \in \overline{A} \setminus A$. Wybierzmy ciąg $(x_n)_{n\in\omega}$ elementów A zbieżny do x. Wtedy $B = \{x_n : n \in \omega\}$ jest nieskończonym podzbiorem A należącym do $\mathcal{J}_I$ ($\overline{B} = B \cup \{x\}$ jest przeliczalny, a więc należy do I).

Aby pokazać, że $\mathcal{J}_I$ jest przeliczalnie oddzielalny, niech $\{U_n : n \in \omega\}$ będzie bazą topologii przestrzeni X oraz niech $X_n = U_n \cap D$. Pokażemy, że rodzina $\{X_n : n \in \omega\}$ świadczy o przeliczalnej oddzielalności ideału $\mathcal{J}_I$. Istotnie, niech $A \in \mathcal{J}_I$ oraz $B \notin \mathcal{J}_I$. Wtedy $\overline{A} \in I$ oraz $\overline{B} \notin I$. Ponieważ I jest σ-ideałem, istnieje takie n, że $U_n \cap \overline{A} = \emptyset$ oraz $U_n \cap \overline{B} \notin I$. Wówczas $X_n \cap A = \emptyset$ oraz $X_n \cap B$ jest $\mathcal{J}_I$-pozytywny, gdyż $\overline{X_n \cap B}$ zawiera $U_n \cap \overline{B}$.

1. $\Rightarrow$ 3.: Załóżmy, że ideał $\mathcal{J}$ jest gęsty i przeliczalnie oddzielalny. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\mathcal{J}$ jest zdefiniowany na ω. Niech $\{X_n : n \in \omega\}$ będzie rodziną z lematu 2.1.4. Rozważmy odwzorowanie

$$\omega \ni k \mapsto x_k = \{n \in \omega : k \in X_n\} \in \mathcal{P}(\omega).$$

Ponieważ rodzina $\{X_n : n \in \omega\}$ oddziela punkty, to powyższe odwzorowanie jest izomorfizmem pomiędzy ciałem podzbiorów ω, złożonym z kombinacji boolowskich zbiorów X_n, a ciałem złożonym z odpowiadających im otwarto-domkniętych podzbiorów przestrzeni $\{x_k : k \in \omega\}$, stanowiącym bazę jej topologii jako podprzestrzeni $\mathcal{P}(\omega)$ (por. [24, stwierdzenie 12.1]). Ponieważ wszystkie niepuste kombinacje boolowskie zbiorów X_n są nieskończone, podprzestrzeń $\mathcal{C} = \overline{\{x_k : k \in \omega\}} \subset \mathcal{P}(\omega)$ nie ma punktów izolowanych.

Wynika stąd, że przestrzeń $\mathcal{C}$ jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora i $D = \{x_k : k \in \omega\}$ jest gęstym ośrodkiem $\mathcal{C}$. Powyższe odwzorowanie definiuje również izomorfizm ideałów, więc możemy założyć, że $\mathcal{J}$ jest ideałem na D. Przy tym utożsamieniu zbiór X_n składa się z tych $x \in D$, że $n \in x$.

Zdefiniujmy ideał zbiorów zwartych $I = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{C}) : \exists A \in \mathcal{J} \quad K \subset \overline{A}\}$. Pokażemy, że I jest σ-ideałem zbiorów zwartych.

Przypuśćmy przeciwnie i oznaczmy przez d metrykę zupełną na $\mathcal{P}(\omega)$ ograniczoną przez 1. Na mocy lematu 2.1 z [33] (zob. też [25]), istnieje ciąg zbiorów $K_n \in I$ oraz zbiór $K \in I$ takie, że K_n zbiega do K w metryce Hausdorffa pochodzącej od d oraz $K \cup \bigcup_n K_n \notin I$. Niech $A \in \mathcal{J}$ będzie takim podzbiorem D, że $K \subset \overline{A}$. Ponadto, dla każdego n, niech $B_n \in \mathcal{J}$ będzie takim podzbiorem D, że $K_n \subset \overline{B_n}$ oraz $\overline{B_n}$ jest zawarty w kuli $K(K_n, \frac{1}{n})$. Zdefiniujmy $B = A \cup \bigcup_n B_n$ i zauważmy, że $B \notin \mathcal{J}$, ponieważ $K \cup \bigcup_n K_n \subset \overline{B}$. Ideał $\mathcal{J}$ jest przeliczalnie oddzielalny zbiorami X_n. Zatem istnieje takie n, że $A \cap X_n = \emptyset$ oraz $B \cap X_n \notin \mathcal{J}$. Zbiory X_n są otwarto-domknięte w D (w topologii podprzestrzeni), a więc istnieje zbiór otwarto-domknięty $E \subset \mathcal{C}$ taki, że $A \subset E$ oraz $E \cap X_n = \emptyset$. Niech $\epsilon > 0$ będzie taki, że $K(K, \epsilon) \subset E$. Wszystkie zbiory B_k, poza skończoną ilością, są zawarte w $K(K, \epsilon)$. Zatem $B \setminus E$ jest pokryty skończenie wieloma zbiorami B_k, podobnie jak $B \cap X_n \subset B \setminus E$. Ponieważ zbiory B_k należą do $\mathcal{J}$, otrzymujemy sprzeczność z tym, że $B \cap X_n \notin \mathcal{J}$.

Niech I' będzie σ-ideałem na $\mathcal{C}$ generowanym przez σ-ideał zbiorów zwartych I. Wówczas mamy $I = I' \cap \mathcal{K}(\mathcal{C})$. Zauważmy, że I' zawiera wszystkie singletony. Rzeczywiście, jeśli $x \in \mathcal{C}$, to istnieje ciąg $(y_n)_{n\in\omega} \subset D$ zbieżny do x. Ponieważ ideał $\mathcal{J}$ jest gęsty, istnieje podciąg $(y_{n_k})_{k\in\omega}$ ciągu $(y_n)_{n\in\omega}$ taki, że $\{y_{n_k} : k \in \omega\} \cup \{x\} = \overline{\{y_{n_k} : k \in \omega\}} \in I$. Zatem $\{x\} \in I$, a więc również $\{x\} \in I'$.

Aby zakończyć dowód, pokażemy, że $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{I'}$. Jedna inkluzja jest oczywista: jeśli $A \in \mathcal{J}$, to $\overline{A} \in I$ na mocy definicji I, a więc $A \in \mathcal{J}_{I'}$. Z drugiej strony, jeśli $A \in \mathcal{J}_{I'}$, to $\overline{A} \in I'$, a nawet $\overline{A} \in I$. Zatem istnieje $B \in \mathcal{J}$ spełniający warunek $\overline{A} \subset \overline{B}$. Pokażemy, że $A \in \mathcal{J}$. Jeśli $A \notin \mathcal{J}$, to $X_n \cap B = \emptyset$ oraz $X_n \cap A \neq \emptyset$ dla pewnego n. Niech $E \subset \mathcal{C}$ będzie otwarto-domkniętym bazowym podzbiorem $\mathcal{C}$ spełniającym $E \cap D = X_n$. Zauważmy, że $\overline{B} \cap E = \emptyset$ oraz $\overline{A} \cap E \neq \emptyset$. Otrzymaliśmy sprzeczność z $\overline{A} \subset \overline{B}$. Zatem $A \in \mathcal{J}$. □

Uwaga 2.1.5 *Zauważmy, że ani gęstość, ani przeliczalna oddzielalność w pojedynkę nie wystarczają do tego, aby ideał był reprezentowany topologicznie. Ideał* $\emptyset \otimes \mathbf{Fin}$ *jest przeliczalnie oddzielalny przez zbiory* $C_{n,k} = \{(n,m) \in \omega \times \omega : m > k\}$*, jednak nie jest gęsty. Z drugiej strony, ideał* $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$ *jest gęsty, ale nie jest słabo selektywny (zob. definicja 1.3.1), gdyż funkcja* $(n,m) \mapsto n$ *nie jest ani stała, ani różnowartościowa na żadnym zbiorze* $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$*-pozytywnym. W [38] zostało wykazane, że każdy ideał reprezentowany topologicznie jest słabo selektywny. Zatem* $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$ *nie jest reprezentowany topologicznie. Na mocy twierdzenia 2.1.3 nie może być też przeliczalnie oddzielalny.*

2.2 Złożoność deskryptywna

W tym rozdziale obliczamy dokładną złożoność borelowską analitycznych ideałów reprezentowanych topologicznie. W połączeniu z twierdzeniem 2.1.3 wynik z tego rozdziału pokazuje, że każdy analityczny ideał gęsty i przeliczalnie oddzielalny jest $\mathbf{\Pi}^0_3$-zupełny. Podobne wyniki, ukazujące ograniczenia narzucone przez pewne kombinatoryczne własności na deskryptywną złożoność ideałów, były znane już wcześniej. Dla przykładu, Solecki w [40] pokazał, że każdy analityczny P-ideał jest albo $\mathbf{\Sigma}^0_2$, albo $\mathbf{\Pi}^0_3$-zupełny. Wyniki z tego rozdziału są częścią pracy [30] napisanej wspólnie z dr. Marcinem Sabokiem.

Najpierw przywołajmy dobrze znany fakt dotyczący borelowskiej złożoności ideałów analitycznych. Zamieszczamy jego dowód w trosce o kompletność argumentacji.

Lemat 2.2.1 *Wszystkie ideały analityczne są $\mathbf{\Sigma^0_2}$-trudne.*

Dowód. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem analitycznym na zbiorze przeliczalnym X. Ponieważ $\mathcal{J}$ ma własność Baire'a, na mocy twierdzenia Jalali-Naini i Talagranda (por. [12]) istnieje funkcja $f\colon X \to \omega$ taka, że $f^{-1}[\{i\}]$ jest skończony dla każdego $i \in X$ oraz

$$A \in \mathbf{Fin} \Leftrightarrow f^{-1}[A] \in \mathcal{J},$$

dla każdego $A \subset \omega$. Zdefiniujmy funkcję $\varphi\colon \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(X)$ wzorem $\varphi(A) = f^{-1}[A]$. Łatwo sprawdzić, że φ jest ciągła oraz

$$\varphi^{-1}[\mathcal{J}] = \Big\{A \subset \omega : f^{-1}[A] \in \mathcal{J}\Big\} = \mathbf{Fin}.$$

Zatem $\mathcal{J}$ jest $\mathbf{\Sigma^0_2}$-trudny. □

Twierdzenie 2.2.2 (por. [30]) *Analityczne ideały reprezentowane topologicznie są $\mathbf{\Pi}^0_3$-zupełne.*

Dowód jest w dużej mierze oparty na argumentach z [33].

Dowód. Niech $\mathcal{J}$ będzie analitycznym ideałem reprezentowanym topologicznie. Pokażemy najpierw, że $\mathcal{J}$ jest typu $\mathbf{\Pi^0_3}$. Ta obserwacja została zamieszczona bez dowodu przez Saboka i Zapletala w [38]. Poniżej przedstawiamy szczegóły tego rozumowania.

Na mocy twierdzenia 2.1.3 istnieje σ-ideał I na przestrzeni Cantora $\mathcal{C}$ taki, że ideał $\mathcal{J}_I$ zdefiniowany na ośrodku D przestrzeni $\mathcal{C}$ jest izomorficzny z $\mathcal{J}$. Ponadto, z dowodu twierdzenia 2.1.3 wynika, że $I \cap \mathcal{K}(\mathcal{C}) = \left\{A \in \mathcal{K}(\mathcal{C}) : \exists_{B \in \mathcal{J}_I} \quad A \subset \overline{B}\right\}$. Zauważmy, że σ-ideał zbiorów zwartych $I \cap \mathcal{K}(\mathcal{C})$ jest analityczny, jako obraz zbioru analitycznego $\mathcal{J}_I \times \mathcal{K}(\mathcal{C})$ poprzez borelowską funkcję daną wzorem $(A, X) \mapsto \overline{A} \cap X \in \mathcal{K}(\mathcal{C})$ dla $(A, X) \in \mathcal{P}(D) \times \mathcal{K}(\mathcal{C})$. Zatem z twierdzenia Kechrisa, Louveau i Woodina (por. [26]) oraz Dougherty'ego, Kechrisa i Louveau (por. [25]) $I \cap \mathcal{K}(X)$ jest typu $\mathbf{\Pi^0_2}$. Ideał $\mathcal{J}_I$ jest teraz przeciwobrazem zbioru $I \cap \mathcal{K}(X)$ typu $\mathbf{\Pi^0_2}$ poprzez funkcję pierwszej klasy borelowskiej daną wzorem $A \mapsto \overline{A} \in \mathcal{K}(X)$, dla każdego $A \subset D$. Zatem $\mathcal{J}_I$ jest typu $\mathbf{\Pi^0_3}$.

Pokażemy teraz, że $\mathcal{J}_I$ jest $\mathbf{\Pi^0_3}$-trudny. Ustalmy metrykę na $\mathcal{C}$. Istnieje taki $x \in \mathcal{C}$, że dla każdego n kula $K(x, \frac{1}{2^n})$ nie należy do I. Rzeczywiście, w przeciwnym razie moglibyśmy pokryć $\mathcal{C}$ kulami należącymi do σ-ideału I. Ponieważ $\mathcal{C}$ jest przestrzenią zwartą, z tego pokrycia bylibyśmy w stanie wybrać pokrycie skończone. Ale wtedy $\mathcal{C} \in I$.

Ustalmy zatem $x \in \mathcal{C}$ takie, że $V_n = K(x, \frac{1}{2^n}) \notin I$, dla $n \in \omega$. Dla każdego n definiujemy ideał na $D \cap V_n$ wzorem

$$\mathcal{J}_I^n = \{A \cap V_n : A \in \mathcal{J}_I\}.$$

Ponieważ $\mathcal{J}_I$ jest ideałem, mamy $\mathcal{J}_I^n = \mathcal{J}_I \cap \mathcal{P}(V_n)$. Czyli ideały $\mathcal{J}_I^n$ są analityczne, a więc $\mathbf{\Sigma^0_2}$-trudne na mocy lematu 2.2.1. Zatem dla każdego n istnieje funkcja ciągła $\phi_n : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(D \cap V_n)$ taka, że $\phi_n^{-1}[\mathcal{J}_I^n] = \mathbf{Fin}$.

Zdefiniujmy $\phi : (\mathcal{P}(\omega))^\omega \to \mathcal{P}(D)$ wzorem

$$\phi\left((A_n)_{n\in\omega}\right) = \bigcup_{n\in\omega} \phi_n(A_n).$$

Niech także

$$\mathbf{W} = \left\{(A_n)_{n\in\omega} : \forall_{n\in\omega} \quad A_n \in \mathbf{Fin}\right\} = \left\{(A_n)_{n\in\omega} : \forall_{n\in\omega} \quad \phi_n(A_n) \in \mathcal{J}_I^n\right\}.$$

Zbiór $\mathbf{W}$ jest $\mathbf{\Pi}^0_3$-zupełny (zob. [24, ćwiczenie 23.1] oraz [33, dowód twierdzenia 1.1]). Ponadto łatwo sprawdzić, że funkcja ϕ jest ciągła. Aby zakończyć dowód, wystarczy zatem pokazać, że $\phi^{-1}[\mathcal{J}_I] = \mathbf{W}$.

Załóżmy najpierw, że $(A_n)_{n\in\omega}$ jest taki, że $\bigcup_{n\in\omega} \phi_n(A_n) \in \mathcal{J}_I$. Wtedy dla każdego n mamy $\phi_n(A_n) \in \mathcal{J}_I$ oraz $\phi_n(A_n) \subset V_n$. Zatem zbiór $\phi_n(A_n)$ należy do $\mathcal{J}_I^n$ dla każdego n. Czyli $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathbf{W}$.

Z drugiej strony, jeśli $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathbf{W}$, czyli dla każdego n mamy $\phi_n(A_n) \in \mathcal{J}_I^n \subset \mathcal{J}_I$, to również $\overline{\phi_n(A_n)} \in I$. Ponieważ I jest σ-ideałem zawierającym wszystkie singletony, $\bigcup_{n\in\omega} \overline{\phi_n(A_n)} \cup \{x\} \in I$. Aby udowodnić, że

$\bigcup_{n\in\omega} \phi_n(A_n) \in \mathcal{J}_I$, wystarczy pokazać, że

$$\overline{\bigcup_{n\in\omega} \phi_n(A_n)} \subset \bigcup_{n\in\omega} \overline{\phi_n(A_n)} \cup \{x\}\,.$$

Istotnie, jeśli $y \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} \phi_n(A_n)}$, to istnieje ciąg $(y_n)_{n\in\omega}$ elementów zbioru $\bigcup_{n\in\omega} \phi_n(A_n)$ zbieżny do y. Możliwe są dwa przypadki:

Przypadek 1. Istnieje takie m, że w $\phi_m(A_m)$ jest nieskończenie wiele punktów y_n. W tym przypadku y jest elementem zbioru $\overline{\phi_m(A_m)}$.

Przypadek 2. W każdym ze zbiorów $\phi_m(A_m)$ jest tylko skończenie wiele punktów y_n. Przypuśćmy, że $y \neq x$. Wtedy istnieje takie m, że $y \notin \overline{V_m}$. Ponieważ ciąg zbiorów $(V_n)_{n\in\omega}$ jest malejący oraz $y = \lim_n y_n$, nieskończenie wiele punktów y_n należy do V_m. Otrzymujemy sprzeczność z tym, że $y \notin \overline{V_m}$. Zatem $y = x$.

W obu przypadkach otrzymaliśmy $y \in \bigcup_{n\in\omega} \overline{\phi_n(A_n)} \cup \{x\}$. □

Rozdział 3

Selektywne własności ideałów

3.1 Ideały słabo selektywne

Przypomnijmy (zob. definicja 1.3.1), że ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest *słabo selektywny*, jeśli dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega}$ zbioru X posiadającego co najwyżej jeden element nienależący do ideału, istnieje $\mathcal{I}$-pozytywny selektor. Równoważnie, dla każdej funkcji $f : B \to \omega$ zadanej na $\mathcal{I}$-pozytywnym zbiorze B można znaleźć $\mathcal{I}$-pozytywny $A \subset B$, na którym f jest stała lub $\mathcal{I}$-pozytywny $A \subset B$, na którym f jest różnowartościowa. Przypomnijmy również (zob. definicja 1.4.1), że ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze przeliczalnym jest *reprezentowany topologicznie*, jeśli istnieje ośrodkowa przestrzeń metryczna X z ośrodkiem D oraz σ-ideał I na X, dla których $\mathcal{I}$ jest izomorficzny z ideałem na D zdefiniowanym następująco:

$$\mathcal{J}_I = \left\{A \subseteq D : \overline{A} \in I\right\}.$$

Ten rozdział jest poświęcony udowodnieniu charakteryzacji koanalitycznych ideałów słabo selektywnych przy użyciu ideałów reprezentowanych topologicznie. Ujawnia ona pewne powiązanie obu tych pojęć (zob. też hipoteza 1.4.2). Wyniki z tego rozdziału są częścią artykułu [30] napisanego wspólnie z dr. Marcinem Sabokiem, jednak prof. Piotr Zakrzewski zasugerował pewne zmiany i uproszczenia w stosunku do tego artykułu.

Mówimy, że kolorowanie $f : [X]^2 \to 2$ *spełnia warunek* $(\star)$ *względem ideału* $\mathcal{I}$, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ zbiór $\{y \in X : f(\{x,y\}) = 0\}$ należy do ideału $\mathcal{I}$ lub zbiór $\{y \in X : f(\{x,y\}) = 1\}$ należy do ideału $\mathcal{I}$.

Na początek przytaczamy fakt udowodniony przez Grigorieffa.

Stwierdzenie 3.1.1 (por. [19]) *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$ jest słabo selektywny;*
2. *Dla każdego zbioru $\mathcal{I}$-pozytywnego X każde drzewo $T \subset X^{<\omega}$, którego ramifikacje są w $(\mathcal{I} \restriction X)^*$, posiada $\mathcal{I}$-pozytywną gałąź;*
3. *Dla każdego zbioru $\mathcal{I}$-pozytywnego X każde kolorowanie $f : [X]^2 \to 2$, spełniające warunek $(\star)$ względem $\mathcal{I}$, posiada monochromatyczny $\mathcal{I}$-pozytywny podzbiór zbioru X;*
4. *Dla każdego malejącego ciągu $(X_n)_{n\in\omega}$ $\mathcal{I}$-pozytywnych podzbiorów ω, spełniającego warunek $X_n \setminus X_{n+1} \in \mathcal{I}$ dla każdego n, istnieje rosnąca funkcja $f : \omega \to \omega$, której zbiór wartości nie należy do $\mathcal{I}$ i taka, że $f(n+1) \in X_{f(n)}$ dla każdego n.*

Ostatni punkt powyższego stwierdzenia, w przeciwieństwie do pozostałych, jest poprawnie zdefiniowany jedynie dla ideałów na ω. Z tego względu w sformułowaniu stwierdzenia pojawia się założenie, że $\mathcal{I}$ jest ideałem na ω. Należy jednak zauważyć, że słaba selektywność jest niezmiennikiem izomorfizmu ideałów. Można zatem stosować powyższe stwierdzenie dla wszystkich ideałów na zbiorach przeliczalnych, pamiętając, że w przypadku punktu 4. należy rozważać dowolną izomorficzną kopię ideału zdefiniowaną na ω.

W dalszej części będzie nam również potrzebna poniższa obserwacja.

Stwierdzenie 3.1.2 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na X oraz $A \notin \mathcal{I}$. Jeśli $\mathcal{I}$ jest słabo selektywny, to ideał $\mathcal{I} \restriction A$ również jest słabo selektywny.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest słabo selektywny. Pokażemy, że $\mathcal{I} \restriction A$ jest słabo selektywny. Niech $(X_n)_{n\in\omega}$ będzie podziałem zbioru A takim, że $X_i \in \mathcal{I} \restriction A$ dla $i > 0$. Zdefiniujmy podział zbioru X w następujący sposób: $Y_0 = X \setminus X_0$ oraz $Y_n = X_{n+1}$ dla $n > 0$. Wtedy $Y_n \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $n > 0$, więc istnieje $\mathcal{I}$-pozytywny selektor S tego podziału. Zauważmy, że wówczas $S \cap A$ jest $(\mathcal{I} \restriction A)$-pozytywnym selektorem podziału $(X_n)_{n\in\omega}$. $\square$

W [38] Sabok i Zapletal udowodnili, że ideały reprezentowane topologicznie są słabo selektywne. Zgodnie z hipotezą 1.4.2 postawioną przez Saboka i Zapletala ideały reprezentowane topologicznie powinny dać się scharakteryzować przy pomocy gęstości oraz słabej selektywności. Poniższe twierdzenie ujawnia kolejną zależność między tymi pojęciami.

Twierdzenie 3.1.3 (por. [30]) *Załóżmy, że ideał $\mathcal{I}$ jest koanalityczny. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$ jest słabo selektywny;*

2. *$\mathcal{I}$ jest przecięciem pewnej rodziny ideałów reprezentowanych topologicznie.*

Dowód wykorzystuje grę $G_1(\mathcal{J})$ (zob. rozdział 1.2.7). Przypomnijmy, że uczestniczą w niej dwaj gracze: w swoim n-tym ruchu gracz I wybiera zbiór $C_n \in \mathcal{J}$, a gracz II odpowiada punktem $k_n \notin C_n$. Gracz I wygrywa, jeśli $\{k_n : n \in \omega\} \in \mathcal{J}$. W przeciwnym razie wygrywa gracz II.

Filtr $\mathcal{F}$ jest *ω-+-diagonalizowalny*, jeśli istnieje taka przeliczalna rodzina $(X_n)_{n\in\omega}$ zbiorów $\mathcal{F}^*$-pozytywnych, że dla każdego $Y \in \mathcal{F}$ istnieje $n \in \omega$ takie, że $X_n \setminus Y$ jest skończony (por. [32]). Na marginesie zauważmy, że ω-+-diagonalizowalność filtru $\mathcal{J}^*$ wynika z pewnej silniejszej własności: koideał $\mathcal{J}^+$ jest *bisekwencyjny*, jeśli dla każdego ultrafiltru $\mathcal{U} \subset \mathcal{J}^+$ istnieje taka przeliczalna rodzina $(X_n)_{n\in\omega}$ zbiorów z $\mathcal{U}$, że dla każdego $A \in \mathcal{J}$ istnieje $n \in \omega$ takie, że $A \cap X_n = \emptyset$. Todorčević pokazał w [44], że koideał każdego analitycznego lub koanalitycznego ideału selektywnego jest bisekwencyjny. Łatwo zauważyć również, że ω-+-diagonalizowalność filtru $\mathcal{J}^*$ wynika z przeliczalnej oddzielalności. Przypomnijmy (zob. definicja 2.1.2), że ideał $\mathcal{J}$ jest *przeliczalnie oddzielalny*, jeśli istnieje taka przeliczalna rodzina $\{X_n : n \in \omega\}$, że dla wszystkich $A \in \mathcal{J}$ i $B \notin \mathcal{J}$ istnieje takie n, że $A \cap X_n = \emptyset$ oraz $B \cap X_n \notin \mathcal{J}$.

Gra $G_1(\mathcal{J})$ była badana w [32] przez Laflamme'a, który udowodnił następujące charakteryzacje.

Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest *słabo ramseyowski*, jeśli każde drzewo $T \subset X^{<\omega}$, którego ramifikacje są w $\mathcal{I}^*$, posiada $\mathcal{I}$-pozytywną gałąź (zob. definicja 1.3.1). Zauważmy również, że na mocy warunku 2. stwierdzenia 3.1.1 każdy ideał słabo selektywny jest słabo ramseyowski.

Lemat 3.1.4 (por. [32]) *Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem.*

1. *Gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy ideał $\mathcal{J}$ nie jest słabo ramseyowski.*

2. *Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy filtr $\mathcal{J}^*$ jest ω-+-diagonalizowalny.*

Grę $G_1(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ można uogólnić w następujący sposób. Rozważmy ideał $\mathcal{J}$ na zbiorze przeliczalnym X oraz $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X) \times \omega^\omega$. W grze $G_1'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ uczestniczą dwaj gracze: w swoim n-tym ruchu gracz I wybiera zbiór $C_n \in \mathcal{J}$, a gracz II odpowiada parą (k_n, m_n) taką, że $k_n \in X \setminus C_n$ oraz $m_n \in n \cup \{-1\}$ (wybór $m_n = -1$ można interpretować jako wstrzymanie się gracza II od wykonania posunięcia). Gracz II wygrywa, jeśli nieskończenie wiele punktów m_n jest różnych od -1 oraz $(\{k_n : n \in \omega\}, \bar{m}) \in \mathcal{X}$, gdzie $\bar{m}$ jest ciągiem tych m_n, które są różne od -1. W przeciwnym razie wygrywa gracz I.

Poniżej prezentujemy dowód determinacji gry $G_1'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ dla borelowskich zbiorów $\mathcal{X}$. Jest to standardowy wniosek z twierdzenia Martina o borelowskiej determinacji. Dowód zamieszczamy w trosce o kompletność rozumowania. Warto odnotować, że gra $G_1(\mathcal{J})$ dla borelowskich $\mathcal{J}$ również jest zdeterminowana. Dowód tego faktu jest analogiczny do poniższego (zob. też [37]).

Lemat 3.1.5 (por. [24]) *Jeśli $\mathcal{J}$ jest ideałem zdefiniowanym na zbiorze przeliczalnym X, a $\mathcal{X}$ jest borelowskim podzbiorem $\mathcal{P}(X) \times \omega^\omega$, to gra nieskończona $G_1'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ jest zdeterminowana.*

Dowód. W dowodzie zastosujemy twierdzenie Martina o borelowskiej determinacji (por. [24, rozdział 20A]). W tym celu potrzebujemy przeformułować grę $G_1'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ na język używany w [24] tak, aby była równoważna pewnej grze postaci $G(T, Y)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $X = \omega$. Niech $A = \mathcal{P}(\omega \cup \{-1\})$. Zdefiniujmy drzewo

$$\begin{aligned} T = \{(a_0, \ldots, a_n) \in A^{<\omega} : \forall_{i \in \omega} \quad & a_{3i} \in \mathcal{J} \wedge |a_{3i+1}| = |a_{3i+2}| = 1 \wedge \\ & -1 \notin a_{3i+1} \wedge a_{3i} \cap a_{3i+1} = \emptyset \wedge a_{3i+2} \subset i \cup \{-1\}\}. \end{aligned}$$

Funkcja $F\colon [T] \to A^\omega$ zadana wzorem $F((a_0, a_1 \ldots)) = \{a_{3i+1} : i \in \omega\}$ jest ciągła. Ponadto gra $G_1'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ jest równoważna grze postaci $G(T, F^{-1}(\mathcal{X}))$. Ponieważ $\mathcal{X}$ jest borelowski (a więc $F^{-1}(\mathcal{X})$ również), na mocy twierdzenia Martina o borelowskiej determinacji (por. [24, twierdzenie 20.5]) gra $G_1'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ jest zdeterminowana. $\square$

Załóżmy, że $\mathcal{J}$ jest koanalitycznym ideałem na przeliczalnym zbiorze X. Niech $D \subset [X]^\omega \times \omega^\omega$ będzie takim zbiorem domkniętym, że $[X]^\omega \setminus \mathcal{J}$ jest rzutem zbioru D. Oznaczmy $G_1'(\mathcal{J}) = G_1'(\mathcal{J}, D)$.

Lemat 3.1.6 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na X.*

1. *Jeśli gracz I ma strategię wygrywająca w grze $G_1'(\mathcal{J})$, to ma również strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{J})$.*

2. *Jeśli gracz II ma strategię wygrywająca w grze $G_1'(\mathcal{J})$, to ma również strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{J})$.*

Dowód. **1.:** Niech σ będzie strategią wygrywającą gracza I w grze $G_1'(\mathcal{J})$. Opiszemy strategię τ dla gracza I w grze $G_1(\mathcal{J})$. Załóżmy, że gracz I ma wykonać swój n-ty ruch, po tym, jak gracz II zagrał $k_0, \ldots, k_{n-1}$. Niech F będzie skończonym zbiorem wszystkich ciągów $m_0, \ldots, m_n$ takich, że $m_i \in i \cup \{-1\}$ i dla każdego $f = (m_0, \ldots, m_{n-1}) \in F$ niech $C_f \in \mathcal{J}$ będzie n-tym ruchem gracza I w grze $G_1'(\mathcal{J})$ zgodnym ze strategią σ, po tym, jak gracz II zagrał $(k_0, m_0), \ldots, (k_{n-1}, m_{n-1})$. Niech ruchem gracza I w $G_1(\mathcal{J})$ zgodnym ze strategią τ będzie zbiór $\bigcup_{f\in F} C_f$.

Pokażemy, że jest to strategia wygrywająca dla gracza I w grze $G_1(\mathcal{J})$. Załóżmy przeciwnie. Wtedy istnieje ciąg $(k_n)_{n\in\omega}$ zagrań gracza II w grze $G_1(\mathcal{J})$ (będący odpowiedzią na zagrania gracza I zgodne ze strategią τ) taki, że $\{k_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{J}$. Aby otrzymać sprzeczność, znajdziemy ciąg zagrań gracza II w grze $G_1'(\mathcal{J})$ (będący odpowiedzią na zagrania gracza I zgodne ze strategią σ) taki, że gracz II wygra w grze $G_1'(\mathcal{J})$. Ponieważ $\{k_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{J}$, istnieje ciąg $(m_n)_{n\in\omega} \in \omega^\omega$ taki, że $(\{k_n : n \in \omega\}, (m_n)_{n\in\omega}) \in D$.

Niech $(m_n')_{n\in\omega}$ będzie pewnym ciągiem takim, że $m_n' \in n \cup \{-1\}$ dla każdego n oraz $(m_n)_{n\in\omega} = \bar{m}'$, gdzie $\bar{m}'$ jest ciągiem tych m_n', które są różne od -1 (tzn. w ciągu $(m_n')_{n\in\omega}$ pomiędzy wartościami m_i a m_{i+1} jest na tyle długi skończony blok złożony z liczb -1, aby na miejscu k-tym ciągu $(m_n')_{n\in\omega}$ mogła się pojawić liczba m_{i+1}, czyli aby $k > m_{i+1}$). Gra, w której gracz I gra zgodnie ze strategią σ, a gracz II w swoim n-tym ruchu wybiera (k_n, m_n'), jest zgodna z regułami gry $G_1'(\mathcal{J})$ na mocy definicji strategii τ. Jednak w takiej grze wygrywa gracz II. Otrzymaliśmy sprzeczność z tym, że σ jest strategią wygrywającą dla gracza I.

2.: Niech σ będzie strategią wygrywającą gracza II w grze $G_1'(\mathcal{J})$. Opiszemy strategię τ dla gracza II w grze $G_1(\mathcal{J})$. Załóżmy, że gracz II ma wykonać swój n-ty ruch, po tym, jak gracz I zagrał $C_0, \ldots, C_n \in \mathcal{J}$. Niech (k_n, m_n), gdzie $k_n \in X \setminus C_n$ oraz $m_n \in n \cup \{-1\}$, będzie n-tym ruchem gracza II w grze $G_1'(\mathcal{J})$ zgodnym ze strategią σ, po tym, jak gracz I zagrał $C_0, \ldots, C_n$. Ruchem gracza II w $G_1(\mathcal{J})$ zgodnym ze strategią τ niech będzie $k_n \in X \setminus C_n$.

Pokażemy, że jest to strategia wygrywająca dla gracza II w grze $G_1(\mathcal{J})$. Ponieważ σ jest strategią wygrywającą gracza II w grze $G_1'(\mathcal{J})$, to $(\{k_n : n \in$

$\omega\}, \bar{m}) \in D$, gdzie $\bar{m}$ jest ciągiem tych m_n, które są różne od -1. Zatem $\{k_n : n \in \omega\} \in [X]^\omega$ należy do rzutu $\mathrm{proj}_1[D] = [X]^\omega \setminus \mathcal{J}$. Czyli gracz II wygrywa w grze $G_1(\mathcal{J})$. □

Uwaga 3.1.7 *Z lematów 3.1.5 oraz 3.1.6 otrzymujemy, że dla każdego koanalitycznego ideału $\mathcal{J}$ gra $G_1(\mathcal{J})$ jest zdeterminowana. Co więcej, na mocy lematu 3.1.4, koanalityczny ideał jest słabo ramseyowski wtedy i tylko wtedy, gdy jego filtr dualny jest ω-+-diagonalizowalny.*

Możemy teraz przejść do dowodu twierdzenia 3.1.3.

Dowód. **2. ⇒ 1.:** Załóżmy, że $\mathcal{J} = \bigcap_{l\in\Lambda} \mathcal{J}_l$, gdzie każdy $\mathcal{J}_l$ jest ideałem reprezentowanym topologicznie. W [38] Sabok i Zapletal pokazali, że każdy ideał reprezentowany topologicznie jest słabo selektywny. Wystarczy zatem udowodnić, że przecięcie ideałów słabo selektywnych jest ideałem słabo selektywnym.

Niech $B \notin \mathcal{J}$ oraz $f : B \to \omega$ będzie dowolną funkcją. Wybierzmy takie $l \in \Lambda$, że $B \notin \mathcal{J}_l$. Ponieważ $\mathcal{J}_l$ jest słabo selektywny, to albo istnieje $B' \notin \mathcal{J}_l$, na którym f jest stała, albo istnieje $B' \notin \mathcal{J}_l$, na którym f jest różnowartościowa. Ale wtedy również $B' \notin \mathcal{J}$. Zatem dla każdej funkcji zadanej na $\mathcal{J}$-pozytywnym zbiorze istnieje $\mathcal{J}$-pozytywny podzbiór, na którym ta funkcja jest stała lub różnowartościowa. Czyli $\mathcal{J}$ jest słabo selektywny.

1. ⇒ 2.: Niech $\mathcal{J}$ będzie koanalitycznym ideałem słabo selektywnym. Możemy założyć, że $\mathcal{J}$ jest zdefiniowany na ω. Niech $D \subset [\omega]^\omega \times \omega^\omega$ będzie takim zbiorem domkniętym, że $[\omega]^\omega \setminus \mathcal{J}$ jest rzutem zbioru D.

Pokażemy najpierw, że dla każdego $B \notin \mathcal{J}$ filtr $(\mathcal{J} \restriction B)^*$ jest ω-+-diagonalizowalny. Na mocy stwierdzenia 3.1.2, $\mathcal{J} \restriction B$ jest słabo selektywny. Wtedy $\mathcal{J} \restriction B$ jest też słabo ramseyowski na mocy warunku 2. stwierdzenia 3.1.1, więc gracz I nie ma strategii wygrywającej w grze $G_1(\mathcal{J} \restriction B)$ (lemat 3.1.4). Zatem gracz I nie ma też strategii wygrywającej w grze $G_1'(\mathcal{J} \restriction B)$ (lemat 3.1.6). Ideał $\mathcal{J} \restriction B$ jest koanalityczny, gdyż $\mathcal{J} \restriction B = \mathcal{J} \cap \mathcal{P}(B)$, a więc gra $G_1'(\mathcal{J} \restriction B)$ jest zdeterminowana na mocy lematu 3.1.5. Wtedy musi istnieć strategia wygrywająca dla gracza II w grze $G_1'(\mathcal{J} \restriction B)$, a także w grze $G_1(\mathcal{J} \restriction B)$ (lemat 3.1.6). Czyli filtr $(\mathcal{J} \restriction B)^*$ jest ω-+-diagonalizowalny (lemat 3.1.4).

Niech rodzina $(X_n)_{n\in\omega}$ świadczy o ω-+-diagonalizowalności filtru $(\mathcal{J} \restriction B)^*$. Niech $Y_n^m = X_n \setminus m$, dla $n, m \in \omega$. Zastępując $(X_n)_{n\in\omega}$ rodziną przeliczalną $\mathcal{Y}_B = \{Y_n^m\}_{n,m\in\omega}$ składającą się z $\mathcal{J}$-pozytywnych podzbiorów B, otrzymujemy, że dla każdego $A \in \mathcal{J}$ istnieje $Y \in \mathcal{Y}_B$ spełniający $Y \cap A = \emptyset$.

Pokażemy teraz, że od rodzin $\mathcal{Y}_B$ można żądać więcej: dla każdego $B \notin \mathcal{J}$ istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{X}_B$ $\mathcal{J}$-pozytywnych podzbiorów B taka, że:

(a) dla każdego $X_0, \ldots, X_n \in \mathcal{X}_B$, jeśli $\bigcap_{i \leqslant n} X_i \neq \emptyset$, to istnieje $Y \in \mathcal{X}_B$ spełniający $Y \subset \bigcap_{i \leqslant n} X_i$ oraz $(\bigcap_{i \leqslant n} X_i) \setminus Y \in \mathcal{J}$;

(b) dla każdego $X \in \mathcal{X}_B$ istnieją $X_0, X_1 \in \mathcal{X}_B$, $X_0, X_1 \subset X$ takie, że $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ i $X \setminus (X_0 \cup X_1) \in \mathcal{J}$;

(c) dla każdego $X \in \mathcal{X}_B$ oraz $A \in \mathcal{J}$ istnieje $Y \in \mathcal{X}_B$, $Y \subset X$ spełniający $Y \cap A = \emptyset$.

Zauważmy, że warunek (b) implikuje, że dla każdego $X \in \mathcal{X}_B$ oraz $n \in X$ istnieje $Y \in \mathcal{X}_B$ taki, że $Y \subset X$ oraz $n \notin Y$.

Aby przeprowadzić konstrukcję rodziny $\mathcal{X}_B$ dla ustalonego $B \notin \mathcal{J}$, zauważmy, że $\mathcal{J} \restriction A$, dla zbioru $(\mathcal{J} \restriction B)$-pozytywnego $A \subset B$, jako ideał koanalityczny, a więc z własnością Baire'a, nie jest maksymalny. Zatem istnieją $\mathcal{J}$-pozytywne zbiory rozłączne X^0, X^1 takie, że $X^0 \cup X^1 = X$. Niech $\mathcal{Z}$ będzie przeliczalną rodziną $\mathcal{J}$-pozytywnych podzbiorów B taką, że:

- $B \in \mathcal{Z}$,
- dla każdego $C \in \mathcal{Z}$ mamy $\mathcal{Y}_C \subset \mathcal{Z}$,
- dla każdego $C \in \mathcal{Z}$ mamy $C^0, C^1 \in \mathcal{Z}$,
- dla każdych $C_0, \ldots, C_n \in \mathcal{Z}$, jeśli $\bigcap_{i \leqslant n} C_i \notin \mathcal{J}$, to $\bigcap_{i \leqslant n} C_i \in \mathcal{Z}$.

Niech $\mathcal{Z} = \{Z_i : i \in \omega\}$ będzie numeracją z nieskończonymi powtórzeniami. Indukcyjnie konstruujemy zbiory X_i w następujący sposób. Niech $X_0 = Z_0$ oraz $X_{i+1} = X_i \setminus \bigcup\{Z_i \cap X_j : j < i \text{ oraz } Z_i \cap X_j \in \mathcal{J}\}$. Rodzina $\mathcal{X}_B = \{X_i : i \in \omega\}$ ma żądane własności, ponieważ dla każdego $i \in \omega$ mamy $X_i \subset Z_i$ oraz $Z_i \setminus X_i \in \mathcal{J}$.

Niech teraz

$$\mathcal{J}_B = \{A \subset \omega : \forall_{X \in \mathcal{X}_B} \exists_{Y \in \mathcal{X}_B} \quad Y \subset X \wedge A \cap Y = \emptyset\}.$$

Zauważmy, że na mocy (c) dla każdego $B \notin \mathcal{J}$ rodzina $\mathcal{J}_B$ jest ideałem zawierającym $\mathcal{J}$. Ponadto $B \notin \mathcal{J}_B$. Zatem mamy $\mathcal{J} = \bigcap_{B \notin \mathcal{J}} \mathcal{J}_B$. Aby zakończyć dowód, pokażemy, że ideały $\mathcal{J}_B$ są reprezentowane topologicznie. Na mocy twierdzenia 2.1.3 musimy sprawdzić, że dla każdego $B \notin \mathcal{J}$ ideał $\mathcal{J}_B$ jest gęsty i przeliczalnie oddzielalny.

Ideał $\mathcal{J}_B$ jest przeliczalnie oddzielalny rodziną $\mathcal{X}_B$. Rzeczywiście, jeśli $A \in \mathcal{J}_B$ oraz $C \notin \mathcal{J}_B$, to istnieje $X \in \mathcal{X}_B$ taki, że dla każdego podzbioru $Y \in \mathcal{X}_B$ zbioru X zachodzi $Y \cap C \neq \emptyset$. Co więcej, dla każdego podzbioru $Y \in \mathcal{X}_B$ zbioru X zachodzi również $Y \cap C \notin \mathcal{J}_B$. Istotnie, w przeciwnym przypadku, korzystając z tego, że $Y \cap C \in \mathcal{J}_B$ oraz z definicji ideału $\mathcal{J}_B$, znaleźlibyśmy podzbiór $Y' \in \mathcal{X}_B$ zbioru X, dla którego $Y' \cap C = \emptyset$. Z drugiej strony, istnieje $Y \in \mathcal{X}_B$ taki, że $Y \subset X$ i $Y \cap A = \emptyset$, ponieważ $A \in \mathcal{J}_B$. Zatem $\mathcal{X}_B$ przeliczalnie oddziela $\mathcal{J}_B$.

Aby pokazać, że $\mathcal{J}_B$ jest gęsty, ustalmy zbiór $C \notin \mathcal{J}_B$. Szukamy zbioru nieskończonego $A \subset C$ należącego do $\mathcal{J}_B$. Ustalmy $X \in \mathcal{X}_B$ taki, że dla każdego $Y \in \mathcal{X}_B$ zawartego w X mamy $Y \cap C \notin \mathcal{X}_B$. Niech $\mathcal{X}_B = \{X_i : i \in \omega\}$. Indukcyjnie skonstruujemy rosnący ciąg liczb naturalnych $(n_i)_{i\in\omega}$ oraz ciąg $\mathcal{J}$-pozytywnych zbiorów $(Y_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{X}_B$ takie, że:

(i) $Y_{i+1} \subset Y_i \subset X$ (więc $Y_i \cap C \notin \mathcal{J}_B$) oraz $n_i \in Y_i \cap C$,

(ii) $X_i \setminus Y_i$ zawiera element rodziny $\mathcal{X}_B$.

Niech $Y_{-1} = X$. Z warunku (b) istnieją rozłączne zbiory $\mathcal{J}_B$-pozytywne $X_i^0, X_i^1 \in \mathcal{X}_B$ zawarte w X_i i takie, że $X_i \setminus (X_i^0 \cup X_i^1) \in \mathcal{J}$. Jeśli $Y_{i-1} \cap X_i = \emptyset$, to niech $Y_i = Y_{i-1}$ oraz $n_i \in Y_i \cap C$ będzie dowolnym punktem większym od n_{i-1}. Jeśli zaś zbiór $Y_{i-1} \cap X_i$ jest niepusty, to jest również $\mathcal{J}$-pozytywny. Wtedy co najmniej jeden ze zbiorów $Y_{i-1} \cap X_i^0$ lub $Y_{i-1} \cap X_i^1$ musi być niepusty. Ponieważ $\mathcal{X}_B$ spełnia warunek (a), jeden z tych zbiorów zawiera zbiór Y_i należący do $\mathcal{X}_B$. Niech $n_i \in Y_i \cap C$ będzie dowolną liczbą naturalną większą od n_{i-1}.

Zdefiniujmy $A = \{n_i : i \in \omega\}$. Pokażemy, że A należy do $\mathcal{J}_B$. Wybierzmy w tym celu $X_i \in \mathcal{X}_B$. Z warunku (ii) wynika, że zbiór $X_i \setminus Y_i$ zawiera element Y należący do rodziny $\mathcal{X}_B$. Zatem, z warunku (i) zbiór $A \cap Y$ jest skończony. Ponieważ $\mathcal{X}_B$ spełnia warunek (b), można zmniejszyć zbiór Y do takiego zbioru $Z \in \mathcal{X}_B$, że $Z \cap A = \emptyset$. Zatem $A \in \mathcal{J}_B$, co kończy dowód gęstości ideału $\mathcal{J}_B$ oraz całego twierdzenia. □

3.2 Ideały słabo ramseyowskie

Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest *słabo ramseyowski*, jeśli każde drzewo $T \subset X^{<\omega}$, którego ramifikacje są w $\mathcal{I}^*$, posiada $\mathcal{I}$-pozytywną gałąź (zob. definicja 1.3.1).

Słaba ramseyowskość jest niezbyt dobrze zbadaną własnością. W tym rozdziale przedstawimy kilka podstawowych faktów dotyczących ideałów słabo ramseyowskich. Dalsze rozważania dotyczące tej własności są zawarte w rozdziale 4.3, gdzie podajemy jej pełną charakteryzację. Poniższe wyniki zostały zawarte w pracy [28].

Następne stwierdzenie jest odpowiednikiem stwierdzenia 3.1.1 dla przypadku słabej ramseyowskości. Warto w tym momencie zwrócić uwagę, że warunkowi 1. ze stwierdzenia 3.1.1 odpowiada warunek 4. Jednakże jest on jedynie przeformułowaniem warunku 3. Dość zaskakujący jest fakt, że lokalna selektywność, która wydaje się być naturalnym odpowiednikiem warunku 1. ze stwierdzenia 3.1.1 dla słabej ramseyowskości, w rzeczywistości nie jest równoważna tej ostatniej. Pokazuje to twierdzenie 3.2.10.

Przypomnijmy, że kolorowanie $f : [X]^2 \to 2$ spełnia warunek $(\star)$ względem ideału $\mathcal{I}$ na zbiorze X, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ albo zbiór $\{y \in X : f(\{x, y\}) = 0\}$ należy do $\mathcal{I}$, albo zbiór $\{y \in X : f(\{x, y\}) = 1\}$ należy do $\mathcal{I}$.

Stwierdzenie 3.2.1 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski;*
2. *Dla każdego kolorowania $f : [\omega]^2 \to 2$, spełniającego warunek $(\star)$ względem $\mathcal{I}$, istnieje monochromatyczny $\mathcal{I}$-pozytywny podzbiór X;*
3. *Dla każdego malejącego ciągu $(X_n)_{n\in\omega} \subset \mathcal{I}^*$ podzbiorów ω, istnieje rosnąca funkcja $f : \omega \to \omega$, której zbiór wartości nie należy do $\mathcal{I}$ i taka, że $f(n+1) \in X_{f(n)}$ dla każdego n;*
4. *Dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega} \subset \mathcal{I}$ zbioru ω, istnieje rosnąca funkcja $f : \omega \to \omega$, której zbiór wartości nie należy do $\mathcal{I}$ i taka, że $f(n+1) \in \bigcup_{i>f(n)} X_i$ dla każdego n.*

Podobnie jak w stwierdzeniu 3.1.1, ostatnie dwa punkty powyższego stwierdzenia są poprawnie zdefiniowane jedynie dla ideałów na ω. Należy jednak zauważyć, że słaba ramseyowskość również jest niezmiennikiem izomorfizmu ideałów. Można zatem stosować powyższe stwierdzenie dla wszystkich ideałów na zbiorach przeliczalnych, pamiętając, że w przypadku punktów 3. i 4. należy rozważać dowolną kopię izomorficzną ideału zdefiniowaną na ω.

Dowód jest analogiczny do dowodu stwierdzenia 3.1.1 zawartego w [19].

Dowód. **3. $\Leftrightarrow$ 4.:** Oczywiste.

1. $\Rightarrow$ 2.: Załóżmy, że ideał $\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski. Niech $f : [\omega]^2 \to 2$ będzie takim kolorowaniem, że dla wszystkich liczb $x \in \omega$ albo zbiór $C_x^0 = \{y \in \omega : f(\{x, y\}) = 0\}$ jest w ideale, albo w ideale jest zbiór $C_x^1 = \{y \in \omega : f(\{x, y\}) = 1\}$. Zdefiniujmy indukcyjnie drzewo $T \subset \omega^{<\omega}$ w następujący sposób:

- ramifikacja $A_\emptyset$ drzewa T w $\emptyset$ jest równa ω,
- jeśli $s = (s(0), \ldots, s(k)) \in T$, to ramifikacja A_s drzewa T w s jest przecięciem zbioru $A_{(s(0),\ldots,s(k-1))}$ z tym spośród zbiorów $C^0_{s(k)}$ i $C^1_{s(k)}$, który jest w $\mathcal{I}^*$.

Zauważmy, że wszystkie ramifikacje drzewa T są w $\mathcal{I}^*$, więc istnieje gałąź b nienależąca do $\mathcal{I}$. Dla każdego n istnieje $i(n) \in 2$ takie, że dla każdego m

$$A_{(b(0),\ldots,b(n+m))} \subset A_{(b(0),\ldots,b(n))} \subset C^{i(n)}_{b(n)},$$

więc $f(\{b(n), b(n+m)\}) = i(n)$ dla wszystkich m. Ponieważ $b \notin \mathcal{I}$, jeden ze zbiorów $\{b(n) : i(n) = 0\}$ i $\{b(n) : i(n) = 1\}$ nie jest w ideale – jest on żądanym zbiorem.

2. $\Rightarrow$ 3.: Załóżmy, że $\mathcal{I}$ spełnia warunek 2. i niech $(X_n)_{n\in\omega} \subset \mathcal{I}^*$ będzie malejącym ciągiem podzbiorów ω. Zdefiniujmy kolorowanie $f : [\omega]^2 \to 2$ w następujący sposób:

$$f(\{n, m\}) = 0 \Leftrightarrow m \in X_n,$$

dla $n < m$. Wtedy $\{m \in \omega : f(\{n, m\}) = 0\} \supset X_n \setminus n \in \mathcal{I}^*$ dla każdego n, więc istnieje zbiór $H \notin \mathcal{I}$ taki, że $f \restriction [H]^2 = 0$. Niech $h \colon \omega \to H$ będzie rosnącą numeracją zbioru H. Wówczas $h[\omega] = H$ nie jest w ideale oraz $h(n+1) \in \{m \in \omega : f(\{h(n), m\}) = 0\} \subset X_{h(n)}$. Zatem h jest żądaną funkcją.

3. $\Rightarrow$ 1.: Załóżmy, że $\mathcal{I}$ spełnia warunek 3.

Pokażemy najpierw, że dla każdej rodziny $\{X_s\}_{s\in\omega^{<\omega}}$ zawartej w $\mathcal{I}^*$ istnieje rosnąca funkcja $h : \omega \to \omega$, o zbiorze wartości spoza $\mathcal{I}$ i taka, że $h(n) \in X_{(h(0),\ldots,h(n-1))}$ dla każdego $n \in \omega$. Istotnie, niech $\{X_s\}_{s\in\omega^{<\omega}} \subset \mathcal{I}^*$ i zaobserwujmy, że bez straty ogólności możemy założyć, że ta rodzina ma następującą własność: jeśli $s, t \in \omega^{<\omega}$ są takie, że $\mathrm{lh}(s) \leqslant \mathrm{lh}(t)$ oraz $\max_{k<\mathrm{lh}(s)} s(k) \leqslant \max_{k<\mathrm{lh}(t)} t(k)$, to $X_t \subset X_s$. Rzeczywiście, niech X'_t będzie przecięciem zbioru X_t z wszystkimi (skończenie wieloma) spośród zbiorów X_s, dla których zachodzi $\mathrm{lh}(s) \leqslant \mathrm{lh}(t)$ i $\max_{k<\mathrm{lh}(s)} s(k) \leqslant \max_{k<\mathrm{lh}(t)} t(k)$. Wtedy $X'_s \in \mathcal{I}^*$ oraz $X'_s \subset X_s$, więc żądana funkcja dla rodziny $\{X'_s\}_{s\in\omega^{<\omega}}$

jest również żądaną funkcją dla rodziny $\{X_s\}_{s\in\omega^{<\omega}}$. Niech s_n będzie ciągiem stałym o wartościach równych n i długości $n+1$. Wówczas $(X_{s_n})_{n\in\omega}$ jest malejącym ciągiem zbiorów z $\mathcal{I}^*$. Z założenia istnieje rosnąca funkcja $h:\omega\to\omega$ o zbiorze wartości nienależącym do $\mathcal{I}$, spełniająca $h(n+1)\in X_{s_{h(n)}}$ dla wszystkich $n\in\omega$. Ciąg $(h(0),\ldots,h(n))$ ma długość $n+1$ i jego maksimum jest równe $h(n)$. Z drugiej strony, ciąg $s_{h(n)}$ ma długość $h(n)+1\geqslant n+1$ (ponieważ h jest rosnąca), a jego maksimum także jest równe $h(n)$. Zatem $X_{s_{h(n)}}\subset X_{(h(0),\ldots,h(n))}$ oraz $h(n+1)\in X_{(h(0),\ldots,h(n))}$.

Niech teraz $T\subset\omega^{<\omega}$ będzie drzewem o ramifikacjach w $\mathcal{I}^*$. Zdefiniujmy $(X_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ w następujący sposób: jeśli $s\in T$, to X_s jest ramifikacją drzewa T w s, a w przeciwnym razie $X_s=\omega$. Wówczas istnieje rosnąca funkcja $h:\omega\to\omega$ o obrazie nienależącym do $\mathcal{I}$, spełniająca $h(n)\in X_{(h(0),\ldots,h(n-1))}$ dla każdego $n\in\omega$. Aby zakończyć dowód, pokażemy indukcyjnie, że h jest gałęzią drzewa T. Mamy $h(0)\in X_\emptyset$ oraz $\emptyset$ jest w T, więc $(h(0))\in T$. Załóżmy teraz, że $(h(0),\ldots,h(k-1))\in T$. Wtedy

$$h(k)\in X_{(h(0),\ldots,h(k-1))}=\{n\in\omega:(h(0),\ldots,h(k-1),n)\in T\}\,,$$

a więc $(h(0),\ldots,h(k-1),h(k))\in T$. $\square$

Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest *słabo selektywny*, jeśli dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega}$ zbioru X, posiadającego co najwyżej jeden element nienależący do ideału, istnieje $\mathcal{I}$-pozytywny selektor. Podobnie, ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest *lokalnie selektywny*, jeżeli dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega}$ zbioru X na zbiory z ideału, istnieje $\mathcal{I}$-pozytywny selektor tego podziału (zob. definicja 1.3.1).

Stwierdzenia 3.1.1 i 3.2.1 pozwalają na sformułowanie następującego wniosku.

Wniosek 3.2.2 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem.*

1. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest słabo selektywny, to jest słabo ramseyowski.*
2. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski, to jest lokalnie selektywny.*

Żadna implikacja we wniosku 3.2.2 nie może być odwrócona. Poniższy fakt doprowadzi do konkluzji, że istnieją ideały słabo ramseyowskie, które nie są słabo selektywne.

Stwierdzenie 3.2.3 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na X oraz $A\notin\mathcal{I}$. Jeśli ideał $\mathcal{I}\restriction A$ jest słabo ramseyowski, to ideał $\mathcal{I}$ również jest słabo ramseyowski.*

Dowód. Załóżmy, że ideał $\mathcal{I} \restriction A$ jest słabo ramseyowski. Pokażemy, że $\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski. Niech $T \subset X^{<\omega}$ będzie drzewem, którego wszystkie ramifikacje X_s są w $\mathcal{I}^*$. Zdefiniujmy drzewo $T' \subset A^{<\omega}$ w następujący sposób: jeśli $s \in T'$, to ramifikacja B_s drzewa T' w s jest równa $X_s \cap A$. Mamy $B_s \in (\mathcal{I} \restriction A)^*$ dla wszystkich $s \in T'$, więc istnieje $(\mathcal{I} \restriction A)$-pozytywna gałąź b drzewa T'. Aby zakończyć dowód, zaobserwujmy, że b jest również gałęzią drzewa T, która nie jest w $\mathcal{I}$. $\square$

Uwaga 3.2.4 *Istnieje ideał słabo ramseyowski, który nie jest słabo selektywny. Dla przykładu, rozważmy ideał* $\emptyset \otimes \mathbf{Fin}$. *Zauważmy, że* $\emptyset \otimes \mathbf{Fin} \restriction \{0\} \times \omega = \mathbf{Fin}$, *więc*

$$\emptyset \otimes \mathbf{Fin} = (\emptyset \otimes \mathbf{Fin} \restriction \{0\} \times \omega) \oplus (\emptyset \otimes \mathbf{Fin} \restriction (\omega \setminus \{0\}) \times \omega)$$

jest słabo ramseyowski na mocy stwierdzenia 3.2.3. Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{ED}$ *(zob. rozdział 1.2.6) nie jest lokalnie selektywny (por. stwierdzenie 1.3.2), więc również nie może być słabo selektywny. Wówczas* $(\emptyset \otimes \mathbf{Fin}) \oplus \mathcal{ED}$ *jest szukanym ideałem na mocy stwierdzenia 3.1.2.*

Przejdziemy teraz do wykazania, że druga implikacja z wniosku 3.2.2 również nie może być odwrócona. Zdefiniujmy w tym celu dwa ideały.

Definicja 3.2.5 (por. [28]) $\mathcal{ED}_\uparrow$ *jest ideałem na* $\omega \times \omega$ *generowanym przez zbiory* $\{n\} \times \omega$ *(takie generatory nazywamy* generatorami pierwszego rodzaju ideału $\mathcal{ED}_\uparrow$*) oraz wykresy niemalejących funkcji* $\omega \to \omega$ *(takie generatory nazywamy* generatorami drugiego rodzaju ideału $\mathcal{ED}_\uparrow$*). Innymi słowy,* $\mathcal{ED}_\uparrow$ *jest generowany przez monochromatyczne zbiory kolorowania* $\chi_\uparrow \colon [\omega \times \omega]^2 \to 2$ *danego wzorem:*

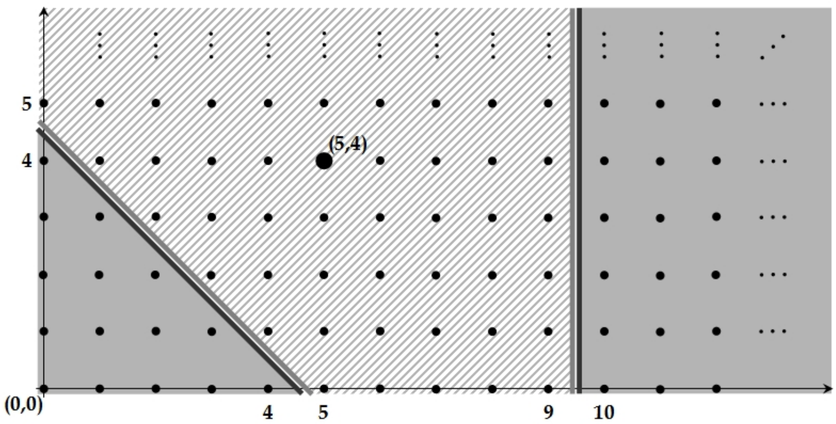
$$\chi_\uparrow(\{(i,j),(k,l)\}) = \begin{cases} 0 & \text{, jeśli } i < k \text{ lub } j \leqslant l \\ 1 & \text{, w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

dla wszystkich (i,j) *mniejszych od* (k,l) *w porządku leksykograficznym.*

Definicja 3.2.6 (por. [28]) $\mathcal{WR}$ *jest ideałem na* $\omega \times \omega$ *generowanym przez dwa rodzaje generatorów: zbiory* $\{n\} \times \omega$ *(takie generatory nazywamy* generatorami pierwszego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$*) oraz takie zbiory* G*, że dla wszystkich* $(i,j),(k,l) \in G$ *zachodzi* $i > k + l$ *lub* $k > i + j$ *(takie generatory nazywamy* generatorami drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$). *Innymi słowy, $\mathcal{WR}$ jest generowany przez monochromatyczne zbiory kolorowania* λ: $[\omega \times \omega]^2 \to 2$ *zadanego wzorem:*

$$\lambda(\{(i,j),(k,l)\}) = \begin{cases} 0 & \text{, jeśli } k > i+j \\ 1 & \text{, jeśli } k \leqslant i+j \end{cases}$$

dla wszystkich (i,j) mniejszych od (k,l) w porządku leksykograficznym.



Rys. 3.1: Ilustracja kolorowania λ na dwuelementowych podzbiorach $\omega \times \omega$ zawierających punkt $(5,4)$. Obszar szary odpowiada wartości kolorowania λ równej 0, a obszar zakreskowany – wartości 1.

Definicja 3.2.7 *Dla dowolnego punktu $(i,j) \in \omega \times \omega$ przez $\sum(i,j)$ oznaczamy sumę jego współrzędnych, tzn. $\sum(i,j) = i+j$.*

Uwaga 3.2.8 *Zarówno $\mathcal{ED}_\uparrow$ jak i $\mathcal{WR}$ są ideałami typu $\mathbf{\Sigma^0_2}$. Jeśli $\mathcal{I}$ oznacza któryś z tych ideałów, to podmiara ϕ na $\omega \times \omega$ zadana wzorem*

$$\phi(A) = \inf\{|\mathcal{C}| : A \subset \bigcup \mathcal{C} \text{ oraz każdy } C \in \mathcal{C} \text{ jest generatorem pierwszego lub drugiego rodzaju ideału } \mathcal{I}\}$$

jest dolnie półciągła (zob. rozdział 1.2.5). Ponadto

$$\mathcal{I} = \mathbf{Fin}(\phi) = \{A \subset X : \phi(A) < \infty\}.$$

Poniższe stwierdzenie wynika z twierdzenia 4.3.1. Tutaj prezentujemy bezpośredni dowód tego faktu.

Stwierdzenie 3.2.9 *Ideał $\mathcal{ED}_{\uparrow}$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\mathcal{WR}$, tzn. $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{ED}_{\uparrow}$.*

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $\pi\colon \omega\times\omega \to \omega\times\omega$ wzorami $\pi\left((i,2j)\right) = (i, i+j)$ oraz $\pi\left((i,2j+1)\right) = (i+j+1, i)$ dla $i,j \in \omega$. Wówczas $\pi[\bigcup_{n\in\omega} \omega \times \{2n\}] \subset \{(i,j) : i \leqslant j\}$ oraz $\pi[\bigcup_{n\in\omega} \omega \times \{2n+1\}] \subset \{(i,j) : i > j\}$. Zauważmy także, że π jest różnowartościowa. Pokażemy, że $\pi[\omega\times\omega] = \omega\times\omega$. Niech $(n,m) \in \omega\times\omega$. Jeśli $n \leqslant m$, to $(n,m) = \pi((n, 2(m-n)))$. Jeśli natomiast $n > m$, to $(n,m) = \pi((m, 2(n-m-1)+1))$.

Aby zakończyć dowód, pokażemy, że dla każdego generatora A ideału $\mathcal{WR}$ zbiór $\pi[A]$ należy do $\mathcal{ED}_{\uparrow}$. Załóżmy najpierw, że A jest generatorem pierwszego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$, tzn. $A = \{i\} \times \omega$ dla pewnego i. Wówczas $\pi[A]$ jest pokryty przez zbiór $\{i\} \times \omega$ oraz przez wykres funkcji stale równej i, a więc niemalejącej. Zatem $\pi[A]$ należy do $\mathcal{ED}_{\uparrow}$. Załóżmy teraz, że A jest generatorem drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$. Zauważmy, że

$$\pi[A] = \pi[A \cap \bigcup_{n\in\omega} (\omega \times \{2n\})] \cup \pi[A \cap \bigcup_{n\in\omega} (\omega \times \{2n+1\})].$$

Pokażemy, że oba składniki powyższej sumy są pokryte przez wykresy niemalejących funkcji. Niech najpierw $(i,2j), (k,2l)$ należące do $A \cap \bigcup_{n\in\omega}(\omega\times\{2n\})$ będą takie, że $k > i+2j$. Wówczas $\pi\left((i,2j)\right) = (i, i+j)$ oraz $\pi\left((k,2l)\right) = (k, k+l)$. Ponieważ $k > i+2j$, to $k > i$ oraz $k+l > i+j$, więc zbiór $\pi[A \cap \bigcup_{n\in\omega}(\omega \times \{n\})]$ jest pokryty przez wykres funkcji niemalejącej. Podobnie, jeśli $(i, 2j+1), (k, 2l+1)$ należące do $A \cap \bigcup_{n\in\omega} \omega \times \{2n+1\}$ są takie, że $k > i+2j+1$, to $\pi\left((i,2j+1)\right) = (i+j+1, i)$ oraz $\pi\left((k,2l+1)\right) = (k+l+1, k)$, a także $k+l+1 > i+j+1$ oraz $k > i$. Zatem również w tym przypadku zbiór $\pi[A \cap \bigcup_{n\in\omega}(\omega \times \{n+1\})]$ jest pokryty przez wykres funkcji niemalejącej. $\square$

Ideały $\mathcal{ED}_{\uparrow}$ oraz $\mathcal{WR}$ pokazują, że nie można odwrócić drugiej implikacji z wniosku 3.2.2.

Twierdzenie 3.2.10 (por. [28]) *Ideały $\mathcal{ED}_{\uparrow}$ oraz $\mathcal{WR}$ są lokalnie selektywne, ale nie są słabo ramseyowskie.*

Dowód. Aby wykazać, że żaden z ideałów nie jest słabo ramseyowski, pokażemy, że nie spełniają one warunku 2. ze stwierdzenia 3.2.1. W tym celu wystarczy zauważyć, że

$$\{b \in \omega\times\omega : \chi_{\uparrow}\left(\{a,b\}\right) = 1\} \in \mathcal{ED}_{\uparrow}$$

oraz

$$\{b \in \omega \times \omega : \lambda(\{a, b\}) = 1\} \in \mathcal{WR},$$

dla każdego $a \in \omega \times \omega$, ponieważ pierwszy zbiór jest pokryty przez skończenie wiele zbiorów postaci $\{n\} \times \omega$ oraz przez wykresy skończenie wielu funkcji stałych (a więc niemalejących), natomiast drugi zbiór jest pokryty przez skończenie wiele zbiorów postaci $\{n\} \times \omega$.

Pokażemy teraz, że $\mathcal{ED}_\uparrow$ i $\mathcal{WR}$ są lokalnie selektywne. W tym celu sprawdzimy, że $\mathcal{ED}_\uparrow$ nie zawiera kopii izomorficznej ideału $\mathcal{ED}$. Na mocy stwierdzenia 1.3.2 będzie to oznaczało, że ideał $\mathcal{ED}_\uparrow$ nie jest lokalnie selektywny. Lokalna selektywność ideału $\mathcal{WR}$ również wynika z tego faktu. Istotnie, gdyby $\mathcal{WR}$ zawierał izomorficzną kopię $\mathcal{ED}$, to $\mathcal{ED}_\uparrow$ również by ją zawierał, gdyż na mocy stwierdzenia 3.2.9 mamy $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{ED}_\uparrow$.

Przypuśćmy zatem, że $\mathcal{ED}_\uparrow$ zawiera izomorficzną kopię $\mathcal{ED}$ i oznaczmy przez X_n obraz zbioru $\{n\} \times \omega$ poprzez funkcję świadczącą o $\mathcal{ED} \sqsubseteq \mathcal{ED}_\uparrow$. W dalszej części bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że $\mathcal{ED}$ jest ideałem generowanym przez zbiory X_n oraz wszystkie selektory tych zbiorów. Zauważmy, że dla każdego X_n jest tylko skończenie wiele zbiorów postaci $\{m\} \times \omega$, które mają nieskończone przecięcie z X_n (bo wszystkie X_n należą do $\mathcal{ED}_\uparrow$, a elementy ideału $\mathcal{ED}_\uparrow$ mają tę własność). Skonstruujemy zbiór $S \notin \mathcal{ED}_\uparrow$ taki, że $|S \cap X_n| \leqslant 1$ dla każdego n (a więc S będzie w $\mathcal{ED}$), co doprowadzi do sprzeczności z $\mathcal{ED} \sqsubseteq \mathcal{ED}_\uparrow$. Możliwe są dwa przypadki:

Przypadek 1. Jest nieskończenie wiele zbiorów postaci $\{i\} \times \omega$, których przecięcie z jakimś ze zbiorów X_n jest nieskończone. W tym przypadku istnieje zbiór nieskończony $T \subset \omega$ taki, że dla każdego jego elementu t istnieje taki indeks $k(t) \in \omega$, że $X_{k(t)} \cap (\{t\} \times \omega)$ jest nieskończony. Ponumerujmy $T = \{t_0, t_1, \ldots\}$ w taki sposób, aby ciąg $(t_n)_{n\in\omega}$ był konkatenacją następujących po sobie skończonych malejących ciągów o coraz większych długościach i takich, że wszystkie elementy kolejnego skończonego malejącego ciągu są większe od każdego elementu skończonych ciągów występujących przed nim, tzn. np.

$$t_0 < t_2 < t_1 < t_5 < t_4 < t_3 < t_9 < t_8 < t_7 < t_6 < t_{10} < \ldots$$

Możemy dodatkowo założyć, że $k(t_i) < k(t_j)$ dla $i < j$, poprzez wybranie rosnącego podciągu ciągu $(k(t_n))_{n\in\omega}$ w taki sposób, aby powyższa własność była zachowana.

Indukcyjnie wybierzmy teraz pewien rosnący ciąg liczb naturalnych $(m_i)_{i\in\omega}$. Docelowo S będzie się składał ze wszystkich punktów (t_i, m_i). Niech m_0 będzie dowolną liczbą spełniającą $(t_0, m_0) \in X_{k(t_0)}$. Załóżmy teraz, że

m_j, dla $j < i$, są już skonstruowane. Niech m_i będzie dowolną liczbą spełniającą $(t_i, m_i) \in X_{k(t_i)}$, dla której ponadto zachodzi $m_i > m_{i-1}$. Zdefiniujmy $S = \{(t_i, m_i) : i \in \omega\}$. Wówczas S należy do $\mathcal{ED}$. Z drugiej strony, przypuśćmy, że S należy do $\mathcal{ED}_\uparrow$. Wtedy istnieje k takie, że S jest pokryty przez k wykresów niemalejących funkcji. Wówczas co najmniej dwa punkty spośród $(t_p, m_p), \ldots, (t_{p+k+1}, m_{p+k+1})$ należą do wykresu tej samej niemalejącej funkcji, gdzie $p = 1 + 2 + \ldots + k$. Jednakże jest to niemożliwe, ponieważ $t_{p+j} < t_{p+i}$ oraz $m_{p+j} > m_{p+i}$ dla $i < j \leqslant k + 1$. Zatem S nie jest w $\mathcal{ED}_\uparrow$.

Przypadek 2. Jest nieskończenie wiele zbiorów postaci $\{i\} \times \omega$, z których każdy przecina niepusto nieskończenie wiele spośród zbiorów X_n. Zatem istnieje zbiór nieskończony $T \subset \omega$ taki, że dla każdego jego elementu t zbiór

$$\{i : X_i \cap (\{t\} \times \omega) \neq \emptyset\}$$

jest nieskończony. Ponownie, ponumerujmy $T = \{t_0, t_1, \ldots\}$ w taki sam sposób jak w przypadku 1. i indukcyjnie wybierzmy pewien ciąg liczb naturalnych $(m_i)_{i\in\omega}$. Niech m_0 będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że m_j, dla $j < i$, są już skonstruowane. Niech m_i będzie dowolną liczbą naturalną taką, że

$$(t_i, m_i) \notin \bigcup\{X_k : \exists_{j<i} \quad (t_j, m_j) \in X_k\}$$

oraz $m_i > m_{i-1}$. Wówczas zbiór $S = \{(t_i, m_i) : i \in \omega\}$ należy do $\mathcal{ED}$, ale nie do $\mathcal{ED}_\uparrow$ z tych samych względów, co w przypadku 1.

Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $\mathcal{ED}_\uparrow$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\mathcal{ED}$. $\square$

Jak się przekonamy w rozdziale 4.3, ideał $\mathcal{WR}$ jest krytycznym ideałem dla słabej ramseyowskości (w takim sensie, w jakim $\mathcal{ED}$ jest krytycznym ideałem dla lokalnej selektywności; por. stwierdzenie 1.3.2).

Zawieranie $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{ED}_\uparrow$ zostało udowodnione w stwierdzeniu 3.2.9. Poniżej pokazujemy, że ideały $\mathcal{WR}$ i $\mathcal{ED}_\uparrow$ nie są $\sqsubseteq$-równoważne (zob. rozdział 1.2.2). Zatem istnieją co najmniej dwa nieizomorficzne ideały lokalnie selektywne, ale nie słabo ramseyowskie.

Stwierdzenie 3.2.11 (por. [28]) *Ideały $\mathcal{WR}$ i $\mathcal{ED}_\uparrow$ nie są $\sqsubseteq$-równoważne.*

Lemat 3.2.12 *Jeśli $a_0, \ldots, a_k \in \omega \times \omega$ są takimi punktami, że*

- *$proj_1(a_i) < proj_1(a_j)$ dla wszystkich $i < j \leqslant k$,*

- $\sum a_i > proj_1(a_k)$ *dla wszystkich* $i \leqslant k$,

to $a_0, \ldots, a_k$ *nie mogą być pokryte przez* k *generatorów drugiego rodzaju ideału* $\mathcal{WR}$.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że $a_0, \ldots, a_k$ są pokryte przez k generatorów drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$. Wtedy dwa spośród $a_0, \ldots, a_k$ są pokryte jednym z tych generatorów. Załóżmy, że a_i oraz a_j, dla pewnych $i < j \leqslant k$, są pokryte jednym generatorem. Wtedy jednak, z definicji generatora drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$, powinniśmy mieć $\mathrm{proj}_1(a_j) > \sum a_i$, ale $\sum a_i > \mathrm{proj}_1(a_k) > \mathrm{proj}_1(a_j)$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniami lematu. Zatem $a_0, \ldots, a_k$ nie mogą być pokryte przez k generatorów drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$. □

Możemy teraz przejść do dowodu stwierdzenia 3.2.11.

Dowód. Pokażemy, że ideał $\mathcal{WR}$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\mathcal{ED}_\uparrow$. Przypuśćmy przeciwnie i oznaczmy przez X_n obraz zbioru $\{n\} \times \omega$ poprzez bijekcję $\sigma : \omega \times \omega \to \omega \times \omega$ świadczącą o tym, że $\mathcal{ED}_\uparrow \sqsubseteq \mathcal{WR}$. Dowód będzie przebiegał według takiego samego schematu, jak dowód twierdzenia 3.2.10.

Zauważmy, że każdy ze zbiorów X_n ma nieskończone przecięcie jedynie ze skończenie wieloma zbiorami postaci $\{k\} \times \omega$ (bo wszystkie X_n należą do $\mathcal{WR}$, a elementy ideału $\mathcal{WR}$ mają tę własność). Skonstruujemy zbiór S nienależący do $\mathcal{WR}$ i taki, że $\sigma^{-1}[S]$ jest pokryty przez wykres niemalejącej funkcji (a więc $\sigma^{-1}[S]$ należy do $\mathcal{ED}_\uparrow$). Możliwe są dwa przypadki:

Przypadek 1. Jest nieskończenie wiele zbiorów $\{k\} \times \omega$ przecinających jakiś X_n na zbiorze nieskończonym. Istnieje nieskończony zbiór $T = \{t_0 < t_1 < \ldots\}$ taki, że dla każdego n istnieje takie $k(t_n)$, że zbiór $X_{k(t_n)} \cap (\{t_n\} \times \omega)$ jest nieskończony. Możemy założyć, że $k(t_n) < k(t_m)$, dla $n < m$, wybierając rosnący podciąg ciągu $(k(t_n))_{n\in\omega}$. Indukcyjnie konstruujemy punkty $a_i \in \omega \times \omega$, dla $i \in \omega$. Docelowo S będzie się składał ze wszystkich a_i. Niech a_0 będzie dowolnym elementem zbioru $X_{k(t_0)} \cap (\{t_0\} \times \omega)$. Załóżmy, że a_j, dla $j < i$, są skonstruowane. Niech a_i będzie dowolnym punktem zbioru $X_{k(t_i)} \cap (\{t_i\} \times \omega)$ spełniającym $\sum a_i > t_{2i}$ oraz

$$\mathrm{proj}_2\left(\sigma^{-1}(a_i)\right) > \mathrm{proj}_2\left(\sigma^{-1}(a_{i-1})\right).$$

Mamy również

$$\mathrm{proj}_1\left(\sigma^{-1}(a_i)\right) = k(t_i) > k(t_{i-1}) = \mathrm{proj}_1\left(\sigma^{-1}(a_{i-1})\right).$$

Zdefiniujmy $S = \{a_i : i \in \omega\}$. Wtedy $\sigma^{-1}[S]$ jest w $\mathcal{ED}_\uparrow$. Z drugiej strony, przypuśćmy, że S jest również w $\mathcal{WR}$. Wówczas istnieje k takie, że S jest pokryty przez k generatorów drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$. Jednak jest to niemożliwe na mocy lematu 3.2.12 zastosowanego do punktów $a_p, \ldots, a_{p+k+1}$, gdzie $p = 1 + 2 + \ldots + k$, ponieważ $\sum a_{p+i} > t_{2p} > t_{p+k+1}$ dla $i \leqslant k + 1$.

Przypadek 2. Jest nieskończenie wiele $\{k\} \times \omega$, z których każdy ma niepuste przecięcie z nieskończenie wieloma zbiorami X_n. Zatem istnieje nieskończony zbiór $T = \{t_0 < t_1 < \ldots\}$ taki, że dla każdego n zbiór

$$\{i : X_i \cap (\{t_n\} \times \omega) \neq \emptyset\}$$

jest nieskończony. Indukcyjnie wybieramy punkty a_i, dla $i \in \omega$, w następujący sposób. Niech a_0 będzie dowolnym elementem $\{t_0\} \times \omega$. Załóżmy teraz, że a_j, dla $j < i$, są już skonstruowane i niech k będzie takie, że $a_{i-1} \in X_k$. Niech

$$a_i \in (\{t_i\} \times \omega) \cap \bigcup_{n>k} X_n$$

będzie takim punktem, że $\sum a > t_{2i}$ oraz

$$\mathrm{proj}_2\left(\sigma^{-1}(a_i)\right) > \mathrm{proj}_2\left(\sigma^{-1}(a_{i-1})\right).$$

Mamy również

$$\mathrm{proj}_1\left(\sigma^{-1}(a_i)\right) = k(t_i) > k(t_{i-1}) = \mathrm{proj}_1\left(\sigma^{-1}(a_{i-1})\right).$$

Zdefiniujmy $S = \{a_i : i \in \omega\}$. Wówczas $\sigma^{-1}[S]$ należy do $\mathcal{ED}_\uparrow$, jednak S nie jest elementem $\mathcal{WR}$ na mocy lematu 3.2.12 z tych samych powodów, co w przypadku 1.

Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $\mathcal{WR}$ nie zawiera kopii izomorficznej ideału $\mathcal{ED}_\uparrow$. □

3.3 Własność Mon

Przypomnijmy (zob. rozdział 1.3), że ideał na ω ma własność *Mon*, jeśli dla każdego ciągu liczb rzeczywistych istnieje taki zbiór spoza ideału, że podciąg indeksowany tym zbiorem jest monotoniczny. Ideał na X jest *k-ramseyowski*, jeśli dla każdego kolorowania zbioru par nieuporządkowanych elementów X przy pomocy k kolorów istnieje monochromatyczny zbiór spoza ideału.

W tym rozdziale odpowiadamy twierdząco na pytanie postawione w [15] przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę, dotyczące istnienia ideału z własnością Mon, który nie jest 2-ramseyowski. Przykładem jest ideał $\mathcal{WR}$ zdefiniowany w poprzednim rozdziale. Poniższe wyniki są częścią pracy [28]. Podjęcie poniższych rozważań jest rezultatem rozmów z dr. hab. Piotrem Szucą.

Twierdzenie 3.3.1 (por. [28]) *Każdy ideał na ω, który jest izomorficzny z $\mathcal{WR}$, ma własność Mon.*

Dowód. Ustalmy bijekcję $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ i ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\omega}$. Niech $y_a = x_{\pi(a)}$ dla $a \in \omega^2$ i zdefiniujmy:

$$T = \left\{ i \in \omega : \left(y_{(i,j)}\right)_{j\in\omega} \text{ zawiera niemalejący podciąg } \left(y_{(i,j^i_k)}\right)_{k\in\omega} \right\},$$

$$T' = \left\{ i \in \omega : \left(y_{(i,j)}\right)_{j\in\omega} \text{ zawiera nierosnący podciąg } \left(y_{(i,j^i_k)}\right)_{k\in\omega} \right\}.$$

Ponieważ każdy ciąg zawiera podciąg monotoniczny, jeden z tych zbiorów musi być nieskończony. Załóżmy, że $T = \{t_0 < t_1 < \ldots\}$ jest nieskończony (drugi przypadek jest analogiczny). Rozważmy ciąg $\left(\lim_{k\to\infty} y_{(t_l,j^{t_l}_k)}\right)_{l\in\omega} \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zawiera on taki monotoniczny podciąg

$$\left(\lim_{k\to\infty} y_{(t_{l_s},j^{t_{l_s}}_k)}\right)_{s\in\omega},$$

który jest albo rosnący, albo malejący, albo stały. Zdefiniujmy

$$y(s,k) = y_{(t_{l_s},j^{t_{l_s}}_k)}$$

oraz

$$Y = \left\{ (t_{l_s}, j^{t_{l_s}}_k) : k, s \in \omega \right\}.$$

Możliwe są trzy przypadki:

Przypadek 1. Jeśli ciąg $(\lim_{k\to\infty} y(s,k))_{s\in\omega}$ jest rosnący, to konstruujemy indukcyjnie punkty $a_i \in Y$, $i \in \omega$, w następujący sposób. Niech a_0 będzie dowolnym elementem zbioru $Y \cap \{t_{l_0}\} \times \omega$. Załóżmy, że a_j, dla $j < i$, są już skonstruowane. Niech a_i będzie dowolnym elementem $Y \cap \{t_{l_i}\} \times \omega$ spełniającym:

- $\pi(a_i) > \pi(a_{i-1})$;

- $y_{a_i} > y_{a_{i-1}}$;
- $\sum a_i > t_{l_{2i}}$.

Trzy powyższe warunki nałożone w każdym kroku indukcyjnym eliminują jedynie skończenie wiele punktów ze zbioru $Y \cap (\{t_{l_i}\} \times \omega)$, gdyż dla $s < s'$ mamy $\lim_{k\to\infty} y(s,k) < \lim_{k\to\infty} y(s',k)$. Zatem zawsze można wybrać punkty o żądanych własnościach.

Zdefiniujmy $M = \{a_i : i \in \omega\}$. Wówczas ciąg $(y_{a_i})_{i\in\omega}$ jest rosnący. Co więcej, M nie należy do $\mathcal{WR}$. Rzeczywiście, w przeciwnym przypadku istniałoby takie k, że M byłby pokryty przez k generatorów drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}$. Jednak jest to niemożliwe na mocy lematu 3.2.12 zastosowanego do punktów $a_p, \ldots, a_{p+k+1}$, gdzie $p = 1 + 2 + \ldots + k$, ponieważ $\sum a_{p+i} > t_{l_{2p}} > t_{l_{p+k+1}}$ dla $i \leqslant k+1$.

Przypadek 2. Jeśli ciąg $(\lim_{k\to\infty} y(s,k))_{s\in\omega}$ jest stały, to możemy założyć, że albo dla nieskończenie wielu s ciąg $(y(s,k))_{k\in\omega}$ jest stały, albo dla nieskończenie wielu s ciąg $(y(s,k))_{k\in\omega}$ jest rosnący. Konstruujemy indukcyjnie punkty $a_i \in Y$, $i \in \omega$, w ten sam sposób jak w przypadku 1. Wtedy $M = \{a_i : i \in \omega\}$ nie należy do $\mathcal{WR}$ na mocy lematu 3.2.12 (z tych samych powodów co w przypadku 1.) i ciąg $(y_{a_i})_{i\in\omega}$ jest niemalejący.

Przypadek 3. Jeśli ciąg $(\lim_{k\to\infty} y(s,k))_{s\in\omega}$ jest malejący, to konstruujemy indukcyjnie punkty $a_i \in Y$, $i \in \omega$, w następujący sposób. Niech a_0 będzie dowolnym elementem zbioru $Y \cap (\{t_{l_0}\} \times \omega)$ spełniającym $y_{a_0} \geqslant \lim_{k\to\infty} y(1,k)$. Ponieważ $\lim_{k\to\infty} y(0,k) > \lim_{k\to\infty} y(1,k)$, taki wybór jest możliwy. Załóżmy, że a_j, dla $j < i$, są już skonstruowane i niech a_i należący do $Y \cap (\{t_{l_i}\} \times \omega)$ będzie taki, że:

- $\pi(a_i) > \pi(a_{i-1})$;
- $y_{a_i} > \lim_{k\to\infty} y(i+1,k)$;
- $\sum a_i > t_{l_{2i}}$.

Zauważmy, że $y(i+1,k) \in Y \cap (\{t_{l{i+1}}\} \times \omega)$ oraz $\lim_{k\to\infty} y(i,k) > \lim_{k\to\infty} y(i+1,k)$, więc można wybrać punkt spełniający drugi warunek. Zatem ponownie, trzy warunki nałożone w każdym kroku indukcyjnym eliminują jedynie skończenie wiele punktów ze zbioru $Y \cap (\{t_{l_i}\} \times \omega)$ i zawsze można wybrać punkty o żądanych własnościach.

Zdefiniujmy $M = \{a_i : i \in \omega\}$. Wtedy również M nie jest w $\mathcal{WR}$ na mocy lematu 3.2.12 (z tych samych powodów co w przypadku 1.) i ciąg $(y_{a_i})_{i\in\omega}$ jest malejący. □

Oczywiście $\mathcal{WR}$ nie jest 2-ramseyowski, ponieważ jest generowany przez zbiory monochromatyczne pewnego kolorowania za pomocą dwóch kolorów. Otrzymujemy stąd następujący wniosek, który rozwiązuje problem postawiony w [15].

Wniosek 3.3.2 (por. [28]) *Istnieje ideał z własnością Mon, który nie jest 2-ramseyowski.*

Okazuje się jednak, że ideał $\mathcal{ED}_\uparrow$ (zob. definicja 3.2.5) nie ma własności Mon, chociaż również nie jest 2-ramseyowski.

Uwaga 3.3.3 (por. [28]) *Istnieje ideał na ω izomorficzny z $\mathcal{ED}_\uparrow$, który nie ma własności Mon.*

Dowód. Oznaczmy $U = \{(i,j) : j \geqslant i\}$ oraz $L = \{(i,j) : j < i\}$ i zdefiniujmy indukcyjnie bijekcję $\pi\colon \omega \to \omega\times\omega$. W n-tym kroku indukcyjnym określamy π na bloku wartości od $2(1+2+\ldots+n)$ do $2(1+\ldots+(n+1))-1$. Niech $\pi(0) = (0,0)$ oraz $\pi(1) = (1,0)$. Załóżmy teraz, że $\pi(i)$, dla $i < p = 2(1+2+\ldots+n)$, jest określone. Niech $\pi(p+2k) = (k,n)$ oraz $\pi(p+2k+1) = (n+1, n-k)$ dla $k = 0,\ldots,n$. Zauważmy, że $\pi[\{2k : k \in \omega\}] = U$ i $\pi[\{2k+1 : k \in \omega\}] = L$.

Rozważmy ciąg $(x_n)_{n\in\omega}$ taki, że dla każdego $k \in \omega$ zarówno $(x_n) \restriction \pi^{-1}[U \cap (\{k\}\times\omega)]$, jak i $(x_n) \restriction \pi^{-1}[L \cap (\omega\times\{k\})]$ są malejącymi ciągami o wartościach w przedziale otwartym $(k, k+1) \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że zbiór $M \subset \omega$ jest taki, że ciąg $(x_n) \restriction M$ jest monotoniczny.

Jeśli ciąg $(x_n) \restriction M$ jest nierosnący, to $\pi[M] \cap U$ jest pokryty przez skończenie wiele zbiorów postaci $\{n\}\times\omega$, natomiast $\pi[M] \cap L$ jest pokryty przez skończenie wiele zbiorów postaci $\omega\times\{n\}$ (które są wykresami stałych, a więc nierosnących funkcji). Istotnie, niech $r \in \mathbb{R}$ będzie największym wyrazem ciągu $(x_n) \restriction M$. Wtedy istnieje takie k, że $r \in (k-1, k)$. Wówczas $\pi[M] \cap U \subset k\times\omega$ oraz $\pi[M] \cap L \subset \omega\times k$. Zatem w tym przypadku $\pi[M]$ należy do $\mathcal{ED}_\uparrow$.

Z drugiej strony, jeśli ciąg $(x_n) \restriction M$ jest niemalejący, to zarówno $\pi[M]\cap U$, jak i $\pi[M]\cap L$ są pokryte wykresami niemalejących funkcji $\omega \to \omega$. Istotnie, niech $n < m \in M$ będą parzystymi liczbami takimi, że $x_n \leqslant x_m$. Załóżmy, że $n = 2(1+\ldots+(j+1)) + 2i$ oraz $m = 2(1+\ldots+(l+1)) + 2k$ dla pewnych i,j,k,l takich, że $i \leqslant j$ oraz $k \leqslant l$. Ponieważ $x_n \leqslant x_m$, to z definicji ciągu $(x_n)_{n\in\omega}$ mamy, że $\mathrm{proj}_1(\pi(n)) < \mathrm{proj}_1(\pi(m))$. Wobec tego

$$i = \mathrm{proj}_1((i,j)) = \mathrm{proj}_1(\pi(n)) < \mathrm{proj}_1(\pi(m)) = \mathrm{proj}_1((k,l)) = k.$$

Musimy pokazać, że również $j \leqslant l$. Ale gdyby $j > l$, to mielibyśmy $n > m$. Zatem zbiór $\pi[M] \cap U$ jest pokryty wykresem niemalejącej funkcji. Dla zbioru $\pi[M] \cap L$ argumentacja przebiega podobnie. We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy, że zbiór $\pi[M]$ należy do $\mathcal{ED}_{\uparrow}$. $\square$

Rozdział 4

Zbieżność ideałowa ciągów funkcji

4.1 Ranga $\mathcal{J}$-sum Fubiniego

Ten rozdział jest poświęcony wyznaczeniu wartości rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego. Wyniki z tego rozdziału weszły w skład artykułu [29] napisanego wspólnie z prof. Ireneuszem Recławem. W rozprawie prezentujemy je w nieco ogólniejszej formie. Dokładną wartość rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego uzyskujemy w przypadku, gdy $\mathcal{J}$ jest ideałem koanalitycznym rangi 1 (wniosek 4.1.8). Jest to uogólnienie punktu 3. twierdzenia Debsa i Saint Raymonda (por. twierdzenie 1.5.6), gdzie dokładna wartość została wyznaczona jedynie w przypadku $\mathcal{J} = \mathbf{Fin}$. W pracy [29] dokładna wartość rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego została policzona jedynie w przypadku, gdy $\mathcal{J}$ jest ideałem borelowskim rangi 1.

Przypomnijmy, że jeśli A i B są dwoma podzbiorami przestrzeni polskiej X, a $\mathbf{\Gamma}$ jest klasą borelowską, to mówimy, że A jest $\mathbf{\Gamma}$-*oddzielony* od B, jeśli istnieje $S \in \mathbf{\Gamma}(X)$, dla którego $A \cap S = \emptyset$ oraz $B \subset S$. Rangą ideału $\mathcal{I}$ (zob. rozdział 1.5) jest liczba porządkowa

$$\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \min\left\{\alpha < \omega_1 : \mathcal{I} \text{ jest } \mathbf{\Sigma^0_{1+\alpha}}\text{-oddzielony od } \mathcal{I}^*\right\}.$$

Przypomnijmy również (zob. rozdział 1.2.3), że dla ideału $\mathcal{J}$ na zbiorze I oraz rodziny ideałów $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$, wszystkie zbiory postaci $\sum_{i\in A} B_i$, dla $A \in \mathcal{J}^*$ oraz $B_i \in \mathcal{J}_i$, tworzą bazę ideału na $\sum_{i\in I} \mathrm{dom}\,(\mathcal{J}_i)$, oznaczanego przez $\mathcal{J}$-$\sum_{i\in I} \mathcal{J}_i$ i nazywanego $\mathcal{J}$*-sumą Fubiniego rodziny* $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$.

W celu wyznaczenia rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego badamy rangi $\mathcal{J}$-granic. Jeśli $\mathcal{J}$ jest ideałem na zbiorze I, a $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ jest ciągiem ideałów na zbiorze

X, to

$$\lim_{i \to \mathcal{J}} \mathcal{J}_i = \{A \subset X : \{i \in I : A \notin \mathcal{J}_i\} \in \mathcal{J}\}$$

jest $\mathcal{J}$*-granicą ciągu ideałów* $(\mathcal{J}_i)_{i \in I}$ (zob. rozdział 1.2.3).

Uwaga 4.1.1 *Zauważmy, że* $\mathcal{J}$*-sumę Fubiniego rodziny ideałów* $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ *można przedstawić jako* $\mathcal{J}$*-granicę ciągu ideałów* $\left(\tilde{\mathcal{J}}_i\right)_{i\in I}$ *zdefiniowanych następująco:*

$$\tilde{\mathcal{J}}_i = \left\{ M \subset \sum_{j \in I} D_j : \{x \in D_i : (i,x) \in M\} \in \mathcal{J}_i \right\},$$

dla $j \in \omega$. *Łatwo zauważyć, że* $\mathrm{rk}(\tilde{\mathcal{J}}_i) = \mathrm{rk}(\mathcal{J}_i)$.

Dla $\mathcal{J}$-granic w ogólnym przypadku uzyskujemy następujące oszacowanie.

Stwierdzenie 4.1.2 (por. [29]) *Niech* $\mathcal{J}$ *będzie ideałem na zbiorze* I *oraz* $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ *– ciągiem ideałów na* X. *Niech* $\mathbf{\Gamma}^{\mathbf{0}}_{\xi}$ *oznacza klasę borelowską* $\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_{\xi}$ *lub* $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{0}}_{\xi}$ *(tę samą dla wszystkich* $\xi < \omega$*).*

1. *Załóżmy, że istnieje taki zbiór* $J \in \mathcal{J}^*$*, że dla wszystkich* $i \in J$ *zachodzi* $\mathcal{J}_i \in \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{0}}_{\beta_\mathbf{i}}$*, dla pewnych* $0 < \beta_i < \beta$. *Jeśli* $\mathcal{J} \in \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\alpha}$*, to* $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i \in \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\beta+\alpha}$.
2. *Załóżmy, że istnieje taki zbiór* $J \in \mathcal{J}^*$*, że dla wszystkich* $i \in J$ *zachodzi* $\mathrm{rk}(\mathcal{J}_i) \leqslant \beta$. *Jeśli* $\mathrm{rk}(\mathcal{J}) \leqslant \alpha$*, to* $\mathrm{rk}\left(\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i\right) \leqslant \beta + 1 + \alpha$.

W [10] zostało udowodnione analogiczne stwierdzenie dla $\mathcal{J}$-sum Fubiniego (por. twierdzenie 1.5.6). Poniższy dowód bazuje na argumentach z [10].

Dowód. **1.** Zdefiniujmy funkcję $\varphi_i : \mathcal{P}(X) \to 2$ wzorem

$$\varphi_i(A) = \begin{cases} 1 & \text{, jeśli } i \in J \text{ oraz } A \in \mathcal{J}_i \\ 0 & \text{, w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Każda taka funkcja jest borelowskiej klasy β. Funkcja $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(I)$ zdefiniowana wzorem $\varphi(A) = \{i \in I : \varphi_i(A) = 0\}$ również jest borelowskiej klasy β. Ponieważ $\mathcal{J} \in \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\alpha}(\mathcal{P}(I))$, mamy

$$\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i = \varphi^{-1}[\mathcal{J}] \in \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\beta+\alpha}(\mathcal{P}(X)).$$

2. Niech $S \in \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\alpha}(\mathcal{P}(I))$ będzie zbiorem oddzielającym ideał $\mathcal{J}$ od jego filtru dualnego oraz niech $S_i \in \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\beta}(\mathcal{P}(X))$ będą zbiorami oddzielającymi ideały $\mathcal{J}_i$ od ich filtrów dualnych. Zdefiniujmy funkcje $\psi_i : \mathcal{P}(X) \to 2$ wzorem

$$\psi_i(A) = \begin{cases} 1 & \text{, jeśli } i \in J \text{ oraz } A \in S_i \\ 0 & \text{, w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Każda taka funkcja jest borelowskiej klasy $\beta + 1$. Funkcja $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(I)$ zdefiniowana wzorem $\psi(A) = \{i \in I : \psi_i(A) = 0\}$ również jest borelowskiej klasy $\beta + 1$, więc zbiór $\psi^{-1}[S]$ jest typu $\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}+\beta+\mathbf{1}+\alpha}(\mathcal{P}(X))$. Zatem wystarczy pokazać, że $\psi^{-1}[S]$ oddziela $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i$ od jego filtru dualnego.

Ponieważ $\mathcal{J}_i \cap S_i = \emptyset$, $\varphi_i[A] = 0$ (zob. dowód pierwszej części stwierdzenia) implikuje $\psi_i[A] = 0$, dla wszystkich i oraz A. Zatem $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i = \varphi^{-1}[\mathcal{J}] \subset \psi^{-1}[\mathcal{J}]$. Skoro $\mathcal{J} \cap S = \emptyset$, otrzymujemy $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i \cap \psi^{-1}[S] = \emptyset$.

Z drugiej strony, jeśli $A \in (\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i)^*$, to mamy $\{i \in I : A \notin \mathcal{J}_i^*\} \in \mathcal{J}$, a więc $\{i \in I : A \in \mathcal{J}_i^*\} \in \mathcal{J}^*$. Zauważmy, że

$$\psi(A) \supset \{i \in I : A \in S_i\} \supset \{i \in I : A \in \mathcal{J}_i^*\}\,.$$

Zatem $\psi(A) \in \mathcal{J}^* \subset S$. □

Możemy teraz przejść do dokładniejszego wyznaczenia rangi $\mathcal{J}$-granic w szczególnym przypadku – gdy $\mathcal{J}$ jest ideałem koanalitycznym rangi 1.

Twierdzenie 4.1.3 (por. [29]) *Niech α będzie przeliczalną liczbą porządkową, $\mathcal{J}$ – ideałem koanalitycznym rangi 1 na I, $J \in \mathcal{J}^*$ oraz niech $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$ będzie takim ciągiem ideałów na X, że dla wszystkich $i \in J$ ranga ideału $\mathcal{J}_i$ jest mniejsza bądź równa α. Wtedy* $\mathrm{rk}\,(\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i) \leqslant \alpha + 1$.

Dowód jest oparty na grze $G_2(\mathcal{J})$ (zob. rozdział 1.2.7). Przypomnijmy, że uczestniczą w niej dwaj gracze: w swoim n-tym ruchu gracz I wybiera zbiór $C_n \in \mathcal{J}$, a gracz II odpowiada zbiorem skończonym F_n rozłącznym z C_n. Gracz I wygrywa, jeśli $\bigcup_{n\in\omega} F_n \in \mathcal{J}$. W przeciwnym razie wygrywa gracz II.

Gra $G_2(\mathcal{J})$ była badana przez Laflamme'a w [32]. Później Laczkovich i Recław w [31] wykorzystali jego charakteryzacje strategii wygrywających dla obu graczy, aby udowodnić twierdzenie 1.5.1. Warto również dodać, że ta sama gra została wykorzystana w kontekście zbieżności ideałowej również przez Filipowa i Szucę w [16].

Niech $\mathcal{F}$ będzie filtrem. Zbiór

$$Z = \left\{Z^k : k \in \omega\right\} \subset \mathbf{Fin} \setminus \{\emptyset\}$$

nazywamy *$\mathcal{F}$-uniwersalnym*, jeśli dla każdego $M \in \mathcal{F}$ istnieje takie $k \in \omega$, że $Z^k \subset M$. Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest *ω-diagonalizowalny przez zbiory $\mathcal{F}$-uniwersalne*, jeśli istnieją takie zbiory $\mathcal{F}$-uniwersalne $Z_n = \left\{Z_n^k : k \in \omega\right\}$, że

$$\forall_{M\in\mathcal{F}} \quad \exists_{n\in\omega} \quad \forall_{k\in\omega}^{\infty} \quad Z_n^k \cap M \neq \emptyset.$$

Zauważmy, że przeliczalna oddzielalność ideału $\mathcal{J}$ (zob. definicja 2.1.2) implikuje ω-+-diagonalizowalność filtru $\mathcal{J}^*$ (zob. lemat 3.1.4 i dyskusja przed lematem), a ta z kolei implikuje ω-diagonalizowalność $\mathcal{J}^*$ przez zbiory $\mathcal{J}^*$-uniwersalne (zob. [32]).

Następny lemat został udowodniony przez Laflamme'a w [32].

Lemat 4.1.4 (por. [32]) *Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem.*

1. *Gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G_2(\mathcal{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy ideał $\mathcal{J}$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\mathbf{Fin}\otimes\mathbf{Fin}$ (tzn. $\mathbf{Fin}\otimes\mathbf{Fin} \sqsubseteq \mathcal{J}$).*

2. *Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_2(\mathcal{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy filtr $\mathcal{J}^*$ jest ω-diagonalizowalny przez zbiory $\mathcal{J}^*$-uniwersalne.*

Grę $G_2(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ można uogólnić w taki sam sposób jak grę $G_1(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ (por. dyskusja pod lematem 3.1.4). Rozważmy ideał $\mathcal{J}$ na zbiorze przeliczalnym X oraz $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X) \times \omega^\omega$. W grze $G_2'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ uczestniczą dwaj gracze: w swoim n-tym ruchu gracz I wybiera zbiór $C_n \in \mathcal{J}$, a gracz II odpowiada parą (F_n, m_n) taką, że $F_n \subset X \setminus C_n$ jest skończony oraz $m_n \in n \cup \{-1\}$. Gracz II wygrywa, jeśli nieskończenie wiele m_n jest różnych od -1 oraz $(\bigcup\{F_n : n \in \omega\}, \bar{m}) \in \mathcal{X}$, gdzie $\bar{m}$ jest ciągiem tych m_n, które są różne od -1. W przeciwnym razie wygrywa gracz I.

Następny lemat pokazuje, że gra $G_2'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ jest zdeterminowana dla borelowskich zbiorów $\mathcal{X}$ (zob. też 3.1.5). Warto odnotować, że gra $G_2(\mathcal{J})$ dla borelowskich $\mathcal{J}$ również jest zdeterminowana. Szczegółowy dowód tego faktu został zamieszczony w [31].

Lemat 4.1.5 (por. [31]) *Jeśli $\mathcal{J}$ jest ideałem zdefiniowanym na zbiorze przeliczalnym X, a $\mathcal{X}$ jest borelowskim podzbiorem $\mathcal{P}(X) \times \omega^\omega$, to gra nieskończona $G_2'(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ jest zdeterminowana.*

Dowód jest analogiczny do dowodu lematu 3.1.5.

Załóżmy, że $\mathcal{J}$ jest koanalitycznym ideałem na przeliczalnym zbiorze X. Niech $D \subset [X]^\omega \times \omega^\omega$ będzie takim zbiorem domkniętym, że $[X]^\omega \setminus \mathcal{J}$ jest rzutem zbioru D. Oznaczmy $G'_2(\mathcal{J}) = G'_2(\mathcal{J}, D)$.

Lemat 4.1.6 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na X.*

1. *Jeśli gracz I ma strategię wygrywająca w grze $G'_2(\mathcal{J})$, to ma również strategię wygrywającą w grze $G_2(\mathcal{J})$.*
2. *Jeśli gracz II ma strategię wygrywająca w grze $G'_2(\mathcal{J})$, to ma również strategię wygrywającą w grze $G_2(\mathcal{J})$.*

Dowód jest oczywistą modyfikacją dowodu lematu 3.1.6.

Uwaga 4.1.7 *Z lematów 4.1.5 oraz 4.1.6 otrzymujemy, że dla każdego koanalitycznego ideału $\mathcal{J}$ gra $G_2(\mathcal{J})$ jest zdeterminowana. Co więcej, na mocy lematu 4.1.4, koanalityczny ideał $\mathcal{J}$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału* **Fin** $\otimes$ **Fin** *wtedy i tylko wtedy, gdy filtr $\mathcal{J}^*$ jest ω-diagonalizowalny przez zbiory $\mathcal{J}^*$-uniwersalne.*

Możemy teraz przejść do dowodu twierdzenia 4.1.3.

Dowód. Dla każdego $i \in I$ ranga ideału $\mathcal{J}_i$ jest mniejsza bądź równa α. Zatem dla każdego $i \in I$ niech $S_i \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha}(X)$ będzie zbiorem oddzielającym ideał $\mathcal{J}_i$ od jego filtru dualnego $\mathcal{J}^*$ (takie S_i istnieją na mocy stwierdzenia 1.5.3). Ponieważ $\mathcal{J}$ jest ideałem koanalitycznym, na mocy lematu 4.1.5 gra $G'_2(\mathcal{J})$ jest zdeterminowana, a więc jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Ponieważ $\mathcal{J}$ jest ideałem rangi 1, na mocy twierdzenia 1.5.1 ideał $\mathcal{J}$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału **Fin**$\otimes$**Fin**. Wobec tego, z lematu 4.1.4 wynika, że gracz I nie może mieć strategii wygrywającej w grze $G_2(\mathcal{J})$. Na mocy lematu 4.1.6 gracz I nie może też mieć strategii wygrywającej w grze $G'_2(\mathcal{J})$. Zatem gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G'_2(\mathcal{J})$ i na mocy lematów 4.1.4 i 4.1.6 istnieje rodzina $\left\{Z^k_n : k \in \omega\right\}_{n\in\omega}$ zbiorów $\mathcal{J}^*$-uniwersalnych ω-diagonalizująca $\mathcal{J}^*$. Zdefiniujmy zbiór

$$S = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} \bigcap_{k>m} \bigcup_{i\in Z^k_n \cap J} S_i.$$

Łatwo zauważyć, że S jest klasy $\mathbf{\Sigma}^0_{\mathbf{1}+\alpha+\mathbf{1}}$. Co więcej, S oddziela ideał $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i$ od jego filtru dualnego.

Istotnie, jeśli $A \in (\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i)^*$, to zbiór $\{i \in I : A \in S_i\} \cap J$ jest elementem $\mathcal{J}^*$. Zatem istnieje takie $n \in \omega$, że $Z_n^k \cap \{i \in I : A \in S_i\} \cap J \neq \emptyset$ dla prawie wszystkich $k \in \omega$. Wówczas

$$\exists_{n\in\omega}\exists_{m\in\omega}\forall_{k>m}\exists_{i\in Z_n^k\cap J} \quad A \in S_i.$$

Zatem $A \in S$.

Z drugiej strony, jeśli $A \in \lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i$, to zbiór $\{i \in I : A \notin S_i\}$ jest elementem filtru $\mathcal{J}^*$. Zatem dla każdego $n \in \omega$ istnieje takie $k \in \omega$, że $Z_n^k \cap J \subset Z_n^k \subset \{i \in I : A \notin S_i\}$. Możemy nawet wzmocnić tę obserwację: ponieważ zbiory Z_n^k są skończone, dla każdego $n \in \omega$ istnieje nieskończenie wiele $k \in \omega$ takich, że $Z_n^k \cap J \subset \{i \in I : A \notin S_i\}$. Zatem

$$\forall_{n\in\omega}\forall_{m\in\omega}\exists_{k>m}\forall_{i\in Z_n^k\cap J} \quad A \notin S_i,$$

skąd $A \notin S$. □

Poniższy wniosek wyznacza dokładną wartość rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego w przypadku, gdy $\mathcal{J}$ jest ideałem koanalitycznym rangi 1.

Wniosek 4.1.8 (por. [29]) *Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem koanalitycznym rangi 1 na zbiorze I oraz dla każdego $i \in I$ niech $\mathcal{J}_i$ będzie ideałem na zbiorze D_i. Niech także $\mathcal{I} = \mathcal{J}\text{-}\sum_{i\in I} \mathcal{J}_i$ oraz $J \in \mathcal{J}^*$. Jeśli dla pewnego $0 < \alpha < \omega_1$ dla wszystkich $i \in J$ zachodzi $\mathrm{rk}(\mathcal{J}_i) = \alpha$, to $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \alpha + 1$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 1.5.6 mamy $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \geqslant \alpha+1$. Z drugiej strony, na mocy uwagi 4.1.1, ideał $\mathcal{I}$ można przedstawić jako $\mathcal{J}$-granicę pewnego ciągu ideałów $\left(\tilde{\mathcal{J}}_i\right)_{i\in I}$ takich, że $\mathrm{rk}(\tilde{\mathcal{J}}_i) = \mathrm{rk}(\mathcal{J}_i)$. Zatem na mocy twierdzenia 4.1.3 otrzymujemy $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \leqslant \alpha + 1$. □

Przypomnijmy, że ideały Katětova $\mathbf{Fin}_k$ (zob. rozdział 1.5), dla $k \in \omega$, są zdefiniowane indukcyjnie:

- $\mathbf{Fin}_1 = \mathbf{Fin}$,
- $\mathbf{Fin}_{k+1} = \mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}_k$.

W [10] Debs i Saint Raymond pokazali, że $\mathrm{rk}\left(\mathbf{Fin}_k\right) = k$ dla każdego $k \in \omega$.

Twierdzenie 4.1.3 jest najlepszym możliwym do uzyskania górnym oszacowaniem rangi $\mathcal{J}$-granic, gdy $\mathcal{J}$ jest ideałem koanalitycznym rangi 1.

Wniosek 4.1.9 (por. [29]) *Dla każdego $k \in \omega$ istnieje ideał koanalityczny $\mathcal{J}$ na zbiorze I rangi 1 oraz ciąg ideałów $(\mathcal{J}_i)_{i\in I}$, z których każdy ma rangę k, takie, że* $\operatorname{rk}(\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i) \leqslant k+1$.

Dowód. Rozważmy ideał $\mathbf{Fin}_{k+1} = \mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}_k$. Zauważmy, że ma on rangę $k+1$ i jest **Fin**-sumą ciągu ideałów rangi k. Ponadto **Fin** jest ideałem typu $\mathbf{\Sigma^0_2}$ (a więc koanalitycznym) rangi 1. Na mocy uwagi 4.1.1 ideał $\mathbf{Fin}_{k+1}$ można przedstawić jako **Fin**-granicę pewnego ciągu ideałów $\left(\tilde{\mathcal{J}}_i\right)_{i\in\omega}$, z których każdy ma rangę k. Wtedy

$$\operatorname{rk}\left(\lim_{\mathbf{Fin}} \tilde{\mathcal{J}}_i\right) = \operatorname{rk}(\mathbf{Fin}_{k+1}) = k+1.$$

□

4.2 Ograniczenie dolne rangi granic filtrów

Prezentowane poniżej wyniki również weszły w skład artykułu [29] napisanego wspólnie z prof. Ireneuszem Recławem. Ten rozdział jest poświęcony wyznaczeniu dolnego ograniczenia dla rangi $\mathcal{J}$-granic (zob. rozdziały 1.2.3 i 1.5). Okazuje się, że rangi $\mathcal{J}$-granic zachowują się odmiennie niż rangi $\mathcal{J}$-sum Fubiniego, które są mocno zdeterminowane przez rangi ideałów $\mathcal{J}$ oraz $\mathcal{J}_i$ (por. twierdzenie 1.5.6 i wniosek 4.1.8). Mianowicie, ranga $\mathcal{J}$-granic może być równa 1, nawet gdy ideały $\mathcal{J}$ oraz $\mathcal{J}_i$ mają dowolnie wysoką rangę.

Twierdzenie 4.2.1 (por. [29]) *Niech $0 < \alpha, \beta < \omega_1$. Istnieją ideał $\mathcal{J}$ rangi β i rodzina ideałów $(\mathcal{J}_i)_{i\in \operatorname{dom}(\mathcal{J})}$ rangi α, dla których $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i$ ma rangę* 1.

Ideały Katětova $\mathbf{Fin}_k$ (zob. rozdział 1.5), dla $k \in \omega$, są zdefiniowane indukcyjnie:

- $\mathbf{Fin}_1 = \mathbf{Fin}$,
- $\mathbf{Fin}_{k+1} = \mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}_k$.

W [10] można również znaleźć definicję ideałów $\mathbf{Fin}_\gamma$ dla $\omega \leqslant \gamma < \omega_1$.

W dowodzie będziemy potrzebować dwóch lematów. Pierwszy z nich jest łatwą obserwacją bazującą na definicji ideałów $\mathbf{Fin}_\gamma$, więc pozostawiamy go bez dowodu.

Lemat 4.2.2 *Ideały* $\mathbf{Fin}_\gamma$*, dla* $0 < \gamma < \omega_1$*, mają następującą własność: istnieje taka nieskończona rodzina parami rozłącznych zbiorów nieskończonych* $(Z_i)_{i\in\omega}$*, że dla każdego* $M \subset \operatorname{dom}(\mathbf{Fin}_\gamma)$*, jeśli* $Z_i \cap M$ *jest nieskończony dla wszystkich* $i \in \omega$*, to* $M \notin \mathbf{Fin}_\gamma$*.*

Lemat 4.2.3 (por. [29]) *Dla każdej liczby porządkowej* $0 < \alpha < \omega_1$ *istnieją ideały* $\mathcal{I}_0$ *oraz* $\mathcal{I}_1$ *rangi* α*, których przecięcie* $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1$ *ma rangę* 1*.*

Dowód. Niech $\alpha < \omega_1$ oraz $(Z_i)_{i\in\omega}$ będzie rodziną z lematu 4.2.2 dla ideału $\mathbf{Fin}_\alpha$. Niech funkcje $\pi_0, \pi_1 : \omega \to \operatorname{dom}(\mathbf{Fin}_\alpha)$ będą dowolnymi bijekcjami spełniającymi warunek $\left|\pi_0^{-1}[Z_i] \cap \pi_1^{-1}[Z_j]\right| = \omega$, dla wszystkich $i, j \in \omega$. Definiujemy ideały $\mathcal{I}_0$ oraz $\mathcal{I}_1$ na ω w następujący sposób:

$$M \in \mathcal{I}_k \iff \pi_k[M] \in \mathbf{Fin}_\alpha,$$

dla $k \in \{0, 1\}$. Oba ideały są izomorficzne z $\mathbf{Fin}_\alpha$, a więc mają rangę α. Zaobserwujmy również, że dla każdego $k \in \{0, 1\}$ rodzina $\left(\pi_k^{-1}[Z_i]\right)_{i\in\omega}$ spełnia tezę lematu 4.2.2 dla ideału $\mathcal{I}_k$: dla każdego $M \subset \omega$, jeśli $\pi_k^{-1}[Z_i] \cap M$ jest nieskończony dla wszystkich $i \in \omega$, to $M \notin \mathcal{I}_k$.

Ideał $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1$ jest borelowski, więc na mocy twierdzenia 1.5.1 wystarczy pokazać, że $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin} \not\sqsubseteq \mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1$. Niech $\tau : \omega \to \omega^2$ będzie dowolną bijekcją. Oznaczmy $E_i = \tau^{-1}[\{i\} \times \omega]$. Możliwe są dwa przypadki:

Przypadek 1. Załóżmy, że istnieją $k \in \{0, 1\}$ oraz $i_0 \in \omega$ takie, że $\pi_k^{-1}[Z_{i_0}]$ jest pokryty przez skończenie wiele zbiorów E_i, tzn. $\pi_k^{-1}[Z_{i_0}] \subset \bigcup_{i\in T} E_i$ dla pewnego zbioru skończonego T. Bez straty ogólności możemy założyć, że $k = 1$. Zbiór $\bigcup_{i\in T}(\{i\} \times \omega)$ należy do ideału $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$, jednak jego przeciwobraz względem funkcji τ, czyli zbiór $\bigcup_{i\in T} E_i$, zawiera $\pi_1^{-1}[Z_{i_0}]$. Zatem dla wszystkich j mamy

$$\pi_0^{-1}[Z_j] \cap \bigcup_{i\in T} E_i \supset \pi_0^{-1}[Z_j] \cap \pi_1^{-1}[Z_{i_0}].$$

Na mocy definicji bijekcji π_0 i π_1 przecięcie $\pi_1^{-1}[Z_{i_0}] \cap \pi_0^{-1}[Z_j]$ jest nieskończone. Zatem $\bigcup_{i\in T} E_i$ nie należy do $\mathcal{I}_0$.

Przypadek 2. Załóżmy, że żadnego ze zbiorów $\pi_k^{-1}[Z_j]$ nie da się pokryć skończenie wieloma E_i. Dla każdego $i \in \omega$ niech S_i będzie selektorem rodziny

$$\left\{\pi_1^{-1}[Z_i] \cap E_j : j > i \text{ oraz } \pi_1^{-1}[Z_i] \cap E_j \neq \emptyset\right\}.$$

Ponieważ dla każdego $j \in \omega$ zachodzi

$$\left|E_j \cap \bigcup_{i\in\omega} S_i\right| \leqslant j < \omega,$$

mamy

$$\tau\left[\bigcup_{i\in\omega} S_i\right] \in \mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}.$$

Jednakże przeciwobraz tego zbioru względem τ nie jest elementem $\mathcal{I}_1$, gdyż dla każdego $j \in \omega$ zachodzi

$$\left|\bigcup_{i\in\omega} S_i \cap \pi_1^{-1}[Z_j]\right| = \left|S_j \cap \pi_1^{-1}[Z_j]\right| = \omega.$$

Zatem $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin} \not\sqsubseteq \mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1$. □

Możemy teraz przejść do dowodu twierdzenia 4.2.1.

Dowód. Ustalmy $0 < \alpha, \beta < \omega_1$. Niech $\mathcal{I}_0$ oraz $\mathcal{I}_1$ będą ideałami rangi α z lematu 4.2.3. Niech również $\mathcal{J}$ będzie dowolnym ideałem rangi β, który nie jest maksymalny (np. $\mathcal{J} = \mathbf{Fin}_\beta$). Wybierzmy zbiór H taki, że $H \notin \mathcal{J}$ oraz $\operatorname{dom}(\mathcal{J}) \setminus H \notin \mathcal{J}$. Niech $\mathcal{J}_i = \mathcal{I}_0$ dla $i \in H$ oraz $\mathcal{J}_i = \mathcal{I}_1$ dla $i \notin H$. Wówczas $\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_i$ jest równy $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1$, więc ma rangę 1. □

4.3 Zbieżność ideałowa ciągów funkcji quasi-ciągłych

Ostatnio Natkaniec i Szuca w [37] zbadali granice ideałowe ciągów funkcji quasi-ciągłych (zob. rozdział 1.2.8) i scharakteryzowali ideały, dla których $\mathcal{I}\text{-}\mathcal{B}_1(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{B}_1(QC(X))$, przy użyciu słabej ramseyowskości (por. twierdzenie 1.5.7). Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest *słabo ramseyowski*, jeśli każde drzewo $T \subset X^{<\omega}$, którego ramifikacje są w $\mathcal{I}^*$, posiada $\mathcal{I}$-pozytywną gałąź (zob. definicja 1.3.1). Powstało pytanie, czy dla zbieżności ideałowej ciągów funkcji quasi-ciągłych istnieje ideał krytyczny w takim sensie, w jakim $\mathbf{Fin} \otimes \mathbf{Fin}$ jest krytyczny dla zbieżności ideałowej ciągów funkcji ciągłych. Innymi słowy, czy dla twierdzenia 1.5.7 można znaleźć odpowiednik trzeciego warunku z twierdzenia 1.5.1. Poniżej rozwiązujemy ten problem. Wynik ten jest również interesujący z punktu widzenia selektywnych własności ideałów na zbiorach przeliczalnych.

Pokażemy, że ideał $\mathcal{WR}$ z rozdziału 3.2 jest krytyczny dla słabej ramseyowskości. Przypomnijmy, że $\mathcal{WR}$ jest ideałem na $\omega \times \omega$ generowanym przez zbiory $\{n\} \times \omega$ (generatory pierwszego rodzaju) oraz takie zbiory G, że dla wszystkich $(i,j),(k,l) \in G$ zachodzi $i > k+l$ lub $k > i+j$ (generatory drugiego rodzaju). Ten rozdział jest oparty na pracy [28]. Inspiracją do tych badań było pytanie postawione przez dr. hab. Piotra Szucę podczas Seminarium Zakładu Funkcji Rzeczywistych Uniwersytetu Gdańskiego.

Twierdzenie 4.3.1 (por. [28]) *Dla każdego ideału $\mathcal{I}$ następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski;*
2. *$\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{I}$;*
3. *$\mathcal{WR} \leqslant_K \mathcal{I}$.*

Z twierdzeń 1.5.7 oraz 4.3.1 otrzymujemy następujący wniosek dotyczący zbieżności ideałowej ciągów funkcji quasi-ciągłych. Trzeba odnotować, że w [37] twierdzenie 1.5.7 zostało udowodnione jedynie dla borelowskich ideałów, jednak na mocy lematów 3.1.5 i 3.1.6 oraz uwagi 3.1.7 można je uogólnić na przypadek ideałów koanalitycznych.

Wniosek 4.3.2 (por. [28]) *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem koanalitycznym na ω. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$-$\mathcal{B}_1(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{B}_1(\mathcal{QC})$ dla każdej metrycznej przestrzeni Baire'a;*
2. *$\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski;*
3. *$\mathcal{WR} \nleqslant_K \mathcal{I}$;*
4. *$\mathcal{WR} \not\sqsubseteq \mathcal{I}$.*

Warto również zwrócić uwagę na to, że słaba ramseyowskość posłużyła Laflamme'owi w [32] do badania gry $G_1(\mathcal{I})$ – udowodnił on mianowicie, że gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski (por. lemat 3.1.4). Gra $G(\mathcal{I})$ została wykorzystana m.in. w [21] przez Hrušáka (zob. też [36]) oraz w [37] przez Natkańca i Szucę w dowodzie twierdzenia 1.5.7. Twierdzenie 4.3.1 jest interesujące również w kontekście gry $G(\mathcal{I})$.

Wniosek 4.3.3 (por. [28]) *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału $\mathcal{I}$:*

1. *Gracz I ma strategię wygrywającą w grze* $G_1(\mathcal{I})$*;*

2. $\mathcal{WR} \leqslant_K \mathcal{I}$*;*

3. $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{I}$*.*

Definicja 4.3.4 *Dla* $(i,j),(k,l) \in \omega \times \omega$ *piszemy* $(i,j) \sqsubset (k,l)$*, jeśli* $i < k$*. Podobnie,* $(i,j) \sqsubseteq (k,l)$*, jeśli* $i \leqslant k$*.*

Przypomnijmy (zob. definicja 3.2.7), że $\sum(i,j) = i + j$ dla dowolnego punktu $(i,j) \in \omega \times \omega$.

Dowód twierdzenia 4.3.1 przeprowadzimy z wykorzystaniem pewnych pomocniczych ideałów.

Definicja 4.3.5 *Dla każdej funkcji* $\pi\colon \omega \times \omega \to \omega$ *spełniającej warunki:*

(a) $\pi[\omega \times \omega] = \omega$*,*

(b) przeciwobrazy wszystkich singletonów poprzez π *są skończone,*

niech $\mathcal{WR}^\pi$ *będzie ideałem na* $\omega \times \omega$ *generowanym przez wszystkie zbiory postaci* $\{n\} \times \omega$ *(takie zbiory nazywamy* generatorami pierwszego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^\pi$*) oraz zbiory postaci* $G = \{g_0 \sqsubset g_1 \sqsubset \ldots\}$ *takie, że* $\pi(g_i) < \pi(g_j)$ *i* $(\pi(g_i), 0) \sqsubseteq g_j$ *dla wszystkich* $i < j$ *(takie zbiory nazywamy* generatorami drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^\pi$*).*

Uwaga 4.3.6 *Zauważmy, że ideał* $\mathcal{WR}$ *jest postaci* $\mathcal{WR}^\pi$*. Istotnie, łatwo zauważyć, że funkcja* $\hat{\pi}\colon \omega \times \omega \to \omega$ *zadana wzorem* $\hat{\pi}((i,j)) = i + j + 1$ *spełnia warunki* (a) *i* (b) *z definicji 4.3.5. Pokażemy, że* $\mathcal{WR} = \mathcal{WR}^{\hat{\pi}}$*. Zbiory postaci* $\{n\} \times \omega$ *są generatorami zarówno* $\mathcal{WR}$*, jak i* $\mathcal{WR}^{\hat{\pi}}$*. Jeśli* G *jest generatorem drugiego rodzaju ideału* $\mathcal{WR}$*, to dla dowolnych* $(i,j),(k,l) \in G$*, gdzie* $i + j < k$*, mamy* $(i,j) \sqsubset (k,l)$ *oraz* $(i + j + 1, 0) \sqsubseteq (k,l)$*. Ponadto*

$$\hat{\pi}((i,j)) = i + j + 1 \leqslant k < k + l + 1 = \hat{\pi}((k,l)).$$

Zatem $G \in \mathcal{WR}^{\hat{\pi}}$*. Z drugiej strony, niech* $G = \{g_0 \sqsubset g_1 \sqsubset \ldots\} \in \mathcal{WR}^{\hat{\pi}}$ *będzie taki, że* $\hat{\pi}(g_i) < \hat{\pi}(g_j)$ *i* $(\pi(g_i), 0) \sqsubseteq g_j$ *dla wszystkich* $i < j$*. Wtedy dla dowolnych* $(i,j),(k,l) \in G$ *takich, że* $i < k$*, mamy* $i + j + 1 = \hat{\pi}((i,j)) < \hat{\pi}((k,l)) = k+l+1$*, a więc w szczególności* $k > i+j$*. Czyli* G *jest generatorem drugiego rodzaju ideału* $\mathcal{WR}$*.*

Lemat 4.3.7 (por. [28]) *Ideały $\mathcal{WR}$ i $\mathcal{WR}^\pi$ są gęste.*

Dowód. Niech $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ będzie dowolną funkcją spełniającą warunki (a) i (b) z definicji 4.3.5 oraz niech $A \notin \mathcal{WR}^\pi$. Jeśli istnieje takie i, że A ma nieskończone przecięcie z $\{i\} \times \omega$, to definiujemy $B = A \cap (\{i\} \times \omega)$. Jeśli natomiast A ma skończone przecięcie z każdym ze zbiorów postaci $\{i\} \times \omega$, to A przecina nieskończenie wiele takich zbiorów. W tym przypadku konstruujemy nieskończony podzbiór A należący do $\mathcal{WR}^\pi$. Niech $x_0 \in A$. Jeśli $x_0, \ldots, x_k$ są skonstruowane, to niech

$$x_{k+1} \in A \cap \{x : x_k \sqsubset x \wedge (\pi(x_k), 0) \sqsubseteq x \wedge \pi(x_k) < \pi(x)\}.$$

Zdefiniujmy $B = \{x_0, x_1, \ldots\}$. W obu przypadkach $B \subset A$ jest nieskończony oraz $B \in \mathcal{WR}^\pi$.

Na mocy uwagi 4.3.6 gęstość ideału $\mathcal{WR}$ jest konsekwencją powyższego rozumowania. □

Następny lemat jest kluczowy dla dowodu twierdzenia 4.3.1.

Lemat 4.3.8 (por. [28]) *Ideały postaci $\mathcal{WR}^\pi$ są $\sqsubseteq$-równoważne. Co więcej, są one $\sqsubseteq$-równoważne ideałowi $\mathcal{WR}$.*

Dowód. Na mocy uwagi 4.3.6 $\sqsubseteq$-równoważność ideału $\mathcal{WR}$ z ideałami $\mathcal{WR}^\pi$ jest konsekwencją $\sqsubseteq$-równoważności ideałów $\mathcal{WR}^\pi$.

Pokażemy, że dla dowolnych funkcji $\pi, \pi_0 : \omega \times \omega \to \omega$, spełniających warunki (a) i (b) z definicji 4.3.5, istnieje funkcja różnowartościowa $\sigma : \omega \times \omega \to \omega \times \omega$ taka, że $\sigma^{-1}[A] \in \mathcal{WR}^{\pi_0}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{WR}^\pi$. Na mocy lematu 4.3.7 oraz faktu z rozdziału 1.2.2 będzie to oznaczało, że $\mathcal{WR}^\pi \sqsubseteq \mathcal{WR}^{\pi_0}$.

Możemy założyć, że

$$\pi^{-1}[\{0\}] \cap (\{0\} \times \omega) \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Istotnie, w przeciwnym razie rozważmy funkcję π' taką, że $\pi'(0,0) = 0$ i $\pi'(a) = \pi(a)$ dla $a \in (\omega \times \omega) \setminus \{(0,0)\}$. Wtedy $\mathcal{WR}^{\pi'} = \mathcal{WR}^\pi$, ponieważ każdy generator jednego z tych ideałów da się pokryć jakimś generatorem drugiego z tych ideałów oraz zbiorem skończonym $\{(0,0)\}$.

Definiujemy σ poprzez zdefiniowanie niemalejącego ciągu zbiorów skończonych $A_0, A_1, \ldots \subset \omega \times \omega$ i indukcyjne skonstruowanie niemalejącego ciągu liczb naturalnych $(m_n)_{n\in\omega}$ oraz ciągu $(\sigma_n)_{n\in\omega}$ funkcji częściowych określonych na rozłącznych podzbiorach $\omega \times \omega$. Docelowo $\sigma = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n \cup \sigma'$, gdzie σ' jest pewną funkcją częściową określoną na dopełnieniu sumy dziedzin funkcji σ_n, którą zdefiniujemy w dalszej części dowodu.

Niech $A_0 = \emptyset$ oraz

$$A_n = \{a \in \omega \times \omega : a \sqsubseteq (2n, 0) \wedge \pi(a) \leqslant 2n\}.$$

Zauważmy, że każdy A_n jest zbiorem skończonym zawierającym A_{n-1} dla $n > 0$. Ponadto na mocy (4.1) zbiory A_n dla $n > 0$ są niepuste oraz

$$A_1 \cap ((\{0\} \times \omega) \setminus A_0) = A_1 \cap (\{0\} \times \omega) \neq \emptyset. \tag{4.2}$$

Przejdźmy teraz do indukcyjnej konstrukcji ciągu liczb naturalnych $(m_n)_{n\in\omega}$ oraz ciągu funkcji częściowych $(\sigma_n)_{n\in\omega}$. Na początku niech $m_0 = 1$ i niech $\sigma_0\colon \{0\} \times \omega \to \{0\} \times \omega$ będzie identycznością. Jeśli liczby naturalne $m_0, \ldots, m_{n-1}$ oraz funkcje częściowe $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ są już skonstruowane, to definiujemy

$$m_n = \max \pi_0 \left[\bigcup_{j<n} \sigma_j^{-1} \left[A_n \cap ((\{2j\} \times \omega) \setminus A_j)\right] \right].$$

Zauważmy, że liczby m_n są poprawnie określone na mocy (4.2) oraz faktu, że zbiory A_n dla $n > 0$ są skończone. Co więcej, zbiory te tworzą niemalejący ciąg, więc $m_n \geqslant m_{n-1}$. Niech

$$\sigma_n\colon \left[\{a : (m_{n-1}, 0) \sqsubseteq a \sqsubset (m_n, 0) \wedge \pi_0(a) > m_n\}\right] \to (\{2n\} \times \omega) \setminus A_n$$

będzie dowolną bijekcją (jeśli dziedzina σ_n jest pusta, tzn. $m_{n-1} = m_n$, to $\sigma_n = \emptyset$, a w przeciwnym razie oba zbiory są nieskończone).

Teraz zajmiemy się zbiorem $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, gdzie

$$B_n = \{a : (m_{n-1}, 0) \sqsubseteq a \sqsubset (m_n, 0) \wedge \pi_0(a) \leqslant m_n\}.$$

Zdefiniujemy funkcję częściową σ' określoną na B. Zauważmy, że $(\omega \times \omega) \setminus B = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(\sigma_n)$. Ponadto, każdy ze zbiorów B_n jest skończony, a B ma skończone przecięcie z każdym ze zbiorów postaci $\{i\} \times \omega$. Ponumerujmy $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$ w taki sposób, że:

(a) $\pi_0(b_0) \leqslant \pi_0(b_1) \leqslant \ldots$;

(b) jeśli $\pi_0(b_i) = \pi_0(b_{i+1})$, to $b_{i+1} \sqsubseteq b_i$.

Zdefiniujmy również funkcje $f, h : \omega \to \omega$ wzorami

$$f(n) = |\{j : b_j \sqsubset (\pi_0(b_n), 0)\}|$$

oraz

$$h(n) = |\{j : b_j \sqsubset b_n\}|.$$

Teraz możemy przejść do definicji funkcji częściowej σ':

- $\sigma'(b_0)$ jest dowolnym elementem zbioru $\{2h(0)+1\} \times \omega$ spełniającym nierówność $\pi(\sigma'(b_0)) > 2f(0)+1$,
- $\sigma'(b_k)$ dla $k > 0$ jest dowolnym elementem zbioru $\{2h(k)+1\} \times \omega$ spełniającym nierówność $\pi(\sigma'(b_k)) > 2f(k)+1$ oraz warunek $\pi(\sigma'(b_k)) > \pi(\sigma'(b_{k-1}))$.

Łatwo zauważyć, że $\sigma = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n \cup \sigma'$ jest funkcją różnowartościową określoną na $\omega \times \omega$, ponieważ każda z funkcji częściowych σ_n oraz σ jest różnowartościowa oraz funkcje te mają parami rozłączne zbiory wartości.

Pokażemy, że σ jest żądaną funkcją, tzn. $\sigma^{-1}[A] \in \mathcal{WR}^{\pi_0}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{WR}^{\pi}$. Zauważmy najpierw, że przeciwobraz poprzez σ zbioru postaci $\{i\} \times \omega$ dla parzystego i jest dziedziną funkcji σ_i, zatem jest pokryty przez skończenie wiele $\{j\} \times \omega$. Natomiast przeciwobraz poprzez σ zbioru postaci $\{i\}\times\omega$ dla nieparzystego i jest skończony, ponieważ jest zawarty w skończonej sumie zbiorów B_k (zob. definicja funkcji σ'). Zatem przeciwobrazy poprzez σ generatorów pierwszego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi}$ należą do $\mathcal{WR}^{\pi_0}$.

Załóżmy teraz, że G jest generatorem drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi}$. Mamy

$$\sigma^{-1}[G] = \left(\sigma^{-1}[G] \cap B\right) \cup \left(\sigma^{-1}[G] \setminus B\right),$$

więc wystarczy sprawdzić, że zbiory $\sigma^{-1}[G] \cap B$ oraz $\sigma^{-1}[G] \setminus B$ należą do $\mathcal{WR}^{\pi_0}$.

Najpierw zajmiemy się drugim z tych zbiorów. Pokażemy, że jest on pokryty przez dwa generatory drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi_0}$.

Skoro G jest generatorem drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi}$, to dla dowolnych $g, g' \in G$ mamy $\mathrm{proj}_1(g) \neq \mathrm{proj}_1(g')$. Zatem, jeśli $g, g' \in G \setminus \sigma[B]$, to g i g' nie mogą należeć do zbioru wartości tej samej funkcji częściowej σ_i. Wtedy również $\mathrm{proj}_1(\sigma^{-1}(g)) \neq \mathrm{proj}_1(\sigma^{-1}(g'))$. Niech zatem $\sigma^{-1}[G] \setminus B = \{g_0 \sqsubset g_1 \sqsubset \ldots\}$. Pokażemy, że $\pi_0(g_{n+1}) > \pi_0(g_n)$ oraz $(\pi_0(g_n), 0) \sqsubseteq g_{n+2}$ dla każdego n. Będzie to oznaczało, że zbiory $\{g_{2i} : i \in \omega\}$ oraz $\{g_{2i+1} : i \in \omega\}$ są generatorami drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi_0}$.

Z konstrukcji funkcji σ otrzymujemy

$$\sigma(g_i) \sqsubset \sigma(g_j) \text{ dla } i < j. \tag{4.3}$$

Wobec tego, skoro punkty $\sigma(g_i)$ tworzą generator drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi}$ (jako podzbiór generatora drugiego rodzaju G), to mamy również:

(i) $\pi(\sigma(g_i)) < \pi(\sigma(g_j))$,

(ii) $(\pi(\sigma(g_i)), 0) \sqsubseteq \sigma(g_j)$, dla $i < j$.

Ustalmy $n \in \omega$. Ponieważ $g_{n+1} \in \sigma^{-1}[G] \setminus B = \sigma^{-1}[G] \cap \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{dom}(\sigma_n)$, to istnieje $k \in \omega$ takie, że $g_{n+1} \in \operatorname{dom}(\sigma_k)$, czyli

$$\sigma(g_{n+1}) \in (\{2k\} \times \omega) \setminus A_k. \tag{4.4}$$

Wtedy mamy

$$\pi_0(g_{n+1}) > m_k, \tag{4.5}$$

bo wszystkie elementy $\operatorname{dom}(\sigma_k)$ spełniają ten warunek. Z *(ii)* mamy również $\pi(\sigma(g_n)) \leqslant 2k$. Ponadto, na mocy (4.3), $\sigma(g_n) \sqsubseteq (2k, 0)$. A zatem $\sigma(g_n) \in A_k$. Z definicji m_k oraz faktu, że jedyne $j \in \omega$ takie, że $g_n \in \operatorname{dom}(\sigma_j)$, jest mniejsze od k, otrzymujemy

$$m_k \geqslant \pi_0(g_n). \tag{4.6}$$

A zatem z (4.5) mamy $\pi_0(g_{n+1}) > \pi_0(g_n)$.

Zauważmy również, że z (4.3) i (4.4) wynika, że jedyne $l \in \omega$ takie, że $g_{n+2} \in \operatorname{dom}(\sigma_l)$, jest większe od k, a więc $\sigma(g_{n+2}) \in \bigcup_{i>k}(\{2i\} \times \omega) \setminus A_i$. Wtedy otrzymujemy $(m_k, 0) \sqsubseteq g_{n+2}$. Z (4.6) dostajemy $(\pi_0(g_n), 0) \sqsubseteq g_{n+2}$.

Pokazaliśmy, że $\pi_0(g_{n+1}) > \pi_0(g_n)$ oraz $(\pi_0(g_n), 0) \sqsubseteq g_{n+2}$ dla każdego n, co – jak wcześniej uzasadnialiśmy – implikuje, że zbiór $\sigma^{-1}[G] \setminus B$ jest pokryty przez dwa generatory drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi_0}$.

Teraz zajmiemy się zbiorem $\sigma^{-1}[G] \cap B$. Jest on równy $\{b_{n_0}, b_{n_1}, \ldots\}$ dla pewnego rosnącego podciągu $(n_i)_{i\in\omega}$. Pokażemy, że da się go pokryć jednym generatorem drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi_0}$.

Ustalmy $i, j \in \omega$ takie, że $i < j$. Z konstrukcji funkcji σ' mamy, że $\pi(\sigma(b_{n_i})) < \pi(\sigma(b_{n_j}))$. Otrzymujemy więc:

(i) $\sigma(b_{n_i}) \sqsubset \sigma(b_{n_j})$,

(ii) $(\pi(\sigma(b_{n_i})), 0) \sqsubseteq \sigma(b_{n_j})$, ponieważ G jest generatorem drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^\pi$. Skoro z definicji funkcji σ' mamy $\sigma(b_{n_i}) \in \{2h(n_i)+1\} \times \omega$ oraz $\sigma(b_{n_j}) \in \{2h(n_j)+1\} \times \omega$, to z (i) otrzymujemy $h(n_i) < h(n_j)$. Zatem z definicji funkcji h mamy $b_{n_i} \sqsubset b_{n_j}$. Co więcej, z warunku (a) numeracji zbioru B mamy $\pi_0(b_{n_i}) \leqslant \pi_0(b_{n_j})$, gdyż $n_i < n_j$. Wtedy z warunku (b) numeracji zbioru B otrzymujemy, że $\pi_0(b_{n_i}) < \pi_0(b_{n_j})$, gdyż $b_{n_i} \sqsubset b_{n_j}$.

Z definicji funkcji σ' mamy $2f(n_i)+1 < \pi(\sigma(b_{n_i}))$. Zatem z (ii) otrzymujemy

$$(2f(n_i)+1, 0) \sqsubseteq \sigma(b_{n_j}).$$

Ponieważ, jak już wcześniej zauważyliśmy, mamy $\sigma(b_{n_j}) \in \{2h(n_j)+1\} \times \omega$, to możemy zaobserwować, że

$$\left|\left\{j : b_j \sqsubset b_{n_j}\right\}\right| = h(n_j) > f(n_i) = \left|\left\{j : b_j \sqsubset \left(\pi_0\left(b_{n_i}\right), 0\right)\right\}\right|.$$

Stąd dostajemy $(\pi_0(b_{n_i}), 0) \sqsubseteq b_{n_j}$, co kończy dowód faktu, że $\sigma^{-1}[G] \cap B$ da się pokryć jednym generatorem drugiego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^{\pi_0}$, a także dowód całego lematu. $\square$

Jesteśmy gotowi udowodnić twierdzenie 4.3.1.

Dowód. W dowodzie bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że $\mathcal{I}$ jest ideałem na ω.

2. $\Rightarrow$ **3.:** Oczywiste.

3. $\Rightarrow$ **1.:** Załóżmy, że $\mathcal{WR} \leqslant_K \mathcal{I}$. Na mocy twierdzenia 3.2.10 ideał $\mathcal{WR}$ nie jest słabo ramseyowski, o czym świadczy kolorowanie $\lambda\colon [\omega \times \omega]^2 \to 2$ zadane wzorem:

$$\lambda\left(\left\{(i,j),(k,l)\right\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{, jeśli } k > i+j \\ 1 & \text{, jeśli } k \leqslant i+j \end{cases}$$

dla wszystkich (i,j) mniejszych od (k,l) w porządku leksykograficznym.

Pokażemy, że ideał $\mathcal{I}$ również nie jest słabo ramseyowski. Niech $f : \omega \to \omega \times \omega$ będzie funkcją świadczącą o tym, że $\mathcal{WR} \leqslant_K \mathcal{I}$. Zdefiniujmy kolorowanie $\chi\colon [\omega]^2 \to 2$ wzorem

$$\chi\left(\{n,m\}\right) = \begin{cases} \lambda\left(\{f(n), f(m)\}\right) & \text{, jeśli } f(n) \neq f(m) \\ 1 & \text{, jeśli } f(n) = f(m) \end{cases}$$

dla $n, m \in \omega$ takich, że $n \neq m$.

Otrzymujemy

$$\{m \in \omega : \chi(\{n, m\}) = 1\} \in \mathcal{I}$$

dla wszystkich $n \in \omega$, gdyż

$$\{b \in \omega \times \omega : \lambda(\{a, b\}) = 1\} \in \mathcal{WR}$$

dla każdego $a \in \omega \times \omega$ oraz

$$f^{-1}[\{b \in \omega \times \omega : \lambda(\{f(n), b\}) = 1\} \cup \{f(n)\}] = \{m \in \omega : \chi(\{n, m\}) = 1\}.$$

Załóżmy, że $H \subset \omega$ jest taki, że funkcja $\chi \restriction [H]^2$ jest stała. Wtedy również funkcja $\lambda \restriction [f[H]]^2$ jest stała, więc $f[H]$ należy do $\mathcal{WR}$. Ponieważ f świadczy o tym, że $\mathcal{WR} \leqslant_K \mathcal{I}$, mamy $H \subset f^{-1}[f[H]] \in \mathcal{I}$. Zatem ideał $\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski.

1. $\Rightarrow$ 2.: Załóżmy, że ideał $\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski. Wtedy na mocy warunku 2. stwierdzenia 3.2.1 istnieje podział $(X_n)_{n\in\omega} \subset \mathcal{I}$ zbioru ω taki, że $h[\omega] \in \mathcal{I}$ dla wszystkich rosnących funkcji $h : \omega \to \omega$ spełniających warunek $h(n+1) \in \bigcup_{i>h(n)} X_i$ dla każdego $n \in \omega$. Pokażemy, że $\mathcal{WR}^\pi \sqsubseteq \mathcal{I}$ dla pewnej bijekcji $\pi : \omega \times \omega \to \omega$. Wtedy z lematu 4.3.8 otrzymamy $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{I}$.

Załóżmy najpierw, że wszystkie zbiory X_n są nieskończone. Znajdziemy taką bijekcję π, że $\pi[A] \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{WR}^\pi$. Niech $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ będzie dowolną bijekcją spełniającą warunek $X_n = \pi[\{n\} \times \omega]$, dla $n \in \omega$. Obrazy poprzez tę bijekcję wszystkich zbiorów postaci $\{n\} \times \omega$ należą do $\mathcal{I}$. Co więcej, jeśli zbiór $G = \{g_0 \sqsubset g_1 \sqsubset \ldots\} \subset \omega \times \omega$ jest taki, że $\pi(g_i) < \pi(g_j)$ i $(\pi(g_i), 0) \sqsubseteq g_j$ dla $i < j$ (zob. definicja 4.3.5), to funkcje $h_0, h_1 : \omega \to \omega$ zadane wzorami $h_0(n) = \pi(g_{2n})$ oraz $h_1(n) = \pi(g_{2n+1})$ są rosnące. Ponadto

$$h_0(n+1) = \pi(g_{2n+2}) \in \bigcup_{i \geqslant \pi(g_{2n+1})} \pi[\{i\} \times \omega] \subset \bigcup_{i > \pi(g_{2n})} \pi[\{i\} \times \omega] = \bigcup_{i > h_0(n)} X_i,$$

ponieważ $(\pi(g_{2n+1}), 0) \sqsubseteq g_{2n+2}$, czyli

$$g_{2n+2} \in \bigcup_{i \geqslant \pi(g_{2n+1})} (\{i\} \times \omega).$$

Podobnie, $h_1(n+1) \in \bigcup_{i>h_1(n)} X_i$. Zatem otrzymujemy $\pi[G] = h_0[\omega] \cup h_1[\omega] \in \mathcal{I}$.

Teraz zajmiemy się ogólnym przypadkiem. Oznaczmy przez **P** zbiór wszystkich liczb parzystych (tzn. $\mathbf{P} = \{2i : i \in \omega\}$) oraz przez **NP** zbiór wszystkich liczb nieparzystych (tzn. $\mathbf{NP} = \{2i + 1 : i \in \omega\}$). Zdefiniujmy

$g : \omega \to \mathbf{P}$ wzorem $g(n) = 2n$. Niech $f : \mathbf{P} \to \omega \times \omega$ będzie taką funkcją różnowartościową, że $f[g[X_n]]$ jest podzbiorem właściwym zbioru $\{n\} \times \omega$. Niech także $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ będzie taką bijekcją, że $\pi^{-1} \restriction \mathbf{P} = f$ oraz $\pi^{-1} \restriction \mathbf{NP}$ jest dowolną bijekcją pomiędzy zbiorami $\mathbf{NP}$ i $(\omega \times \omega) \setminus f[\mathbf{P}]$.

Na mocy lematu 4.3.7 oraz faktu z rozdziału 1.2.2, aby pokazać, że $\mathcal{WR}^\pi \sqsubseteq \mathcal{I}$, wystarczy znaleźć funkcję różnowartościową świadczącą o tym, że $\mathcal{WR}^\pi \leqslant_K \mathcal{I}$.

Zdefiniujmy zatem funkcję różnowartościową $\sigma : \omega \to \omega \times \omega$ wzorem $\sigma(n) = f(2n)$. Pokażemy, że σ świadczy o tym, że $\mathcal{WR}^\pi \leqslant_K \mathcal{I}$.

Najpierw zauważmy, że $\sigma^{-1}[\{n\} \times \omega] \subset X_n \in \mathcal{I}$, czyli przeciwobrazy generatorów pierwszego rodzaju ideału $\mathcal{WR}^\pi$ należą do $\mathcal{I}$.

Jeśli natomiast zbiór $G \cap \sigma[\omega] = \{g_0 \sqsubset g_1 \sqsubset \ldots\}$ jest taki, że $\pi(g_i) < \pi(g_j)$ oraz $(\pi(g_i), 0) \sqsubseteq g_j$, dla $i < j$, to zdefiniujmy funkcję $h : \omega \to \omega$ wzorem $h(n) = \sigma^{-1}(g_n)$. Mamy $h(n) = \frac{f^{-1}(g_n)}{2} = \frac{\pi(g_n)}{2}$, ponieważ $f^{-1}(g_n) \in \mathbf{P}$ oraz $\pi^{-1} \restriction \mathbf{P} = f$. Zatem

$$h(n) = \frac{\pi(g_n)}{2} < \frac{\pi(g_{n+1})}{2} = h(n+1).$$

Zauważmy również, że jeśli $\mathrm{proj}_1(g_{n+1}) = k$, to $h(n+1) = \sigma^{-1}(g_{n+1}) \in X_k$. Mamy $(\pi(g_n), 0) \sqsubseteq g_{n+1}$, czyli $\pi(g_n) \leqslant k$. Wtedy $h(n) = \frac{\pi(g_n)}{2} < k$, a więc $h(n+1) \in \bigcup_{i > h(n)} X_i$. Wówczas otrzymujemy $\sigma^{-1}[G] = h[\omega] \in \mathcal{I}$, co kończy dowód. $\square$

Bibliografia

[1] A. Avilés, S. Todorčević, *Multiple gaps*, Fund. Math. 213 (2011), no. 1, 15–42.

[2] M. Balcerzak, K. Dems, A. Komisarski, *Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 715—729.

[3] P. Barbarski, R. Filipów, N. Mrożek, P. Szuca, *When the Katětov order implies that one ideal extends the other?*, Colloq. Math. 130 (2013), no. 1, 91–102.

[4] J.E. Baumgartner, A.D. Taylor, S. Wagon, *Structural properties of ideals*, Rozprawy matematyczne (1982), no. 197, Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny, Warszawa.

[5] D. Booth, *Ultrafilters on countable sets*, Ann. of Math. Logic 2 (1970), no. 1, 1–24.

[6] P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas, *Cardinal coeficients associated to certain orders on ideals*, Arch. Math. Logic 51 (2012), no. 1, 187–202.

[7] A. Bouziad, *The point of continuity property, neighbourhood assignments and filter convergences*, Fund. Math. 218 (2012), 225–242.

[8] H. Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 777–779.

[9] G. Debs, J. Saint Raymond, *A combinatorial property of Fréchet iterated filters*, Topology and its Applications 159 (2012), 2205-2227.

[10] G. Debs, J. Saint Raymond, *Filter descriptive classes of Borel functions*, Fund. Math. 204 (2009), 189–213.

[11] T. Dobrowolski, W. Marciszewski, *Classification of function spaces with the pointwise topology determined by a countable dense set*, Fund. Math. 148 (1995), 35–62.

[12] I. Farah, *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc. 147 (2000), no. 702.

[13] I. Farah, *Analytic Hausdorff gaps II. The density zero ideal*, Israel J. Math. 154 (2006), 235–246.

[14] I. Farah, S. Solecki, *Two* $\mathbf{\Pi}^0_3$ *ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 6, 1971–1975.

[15] R. Filipów, N. Mrożek, I. Recław, P. Szuca, *Ideal version of Ramsey's theorem*, Czechoslovak Math. J. 61 (2011), no. 2, 289–308.

[16] R. Filipów, P. Szuca, *Three kinds of convergence and the associated* $\mathcal{I}$*-Baire classes*, J. Math. Anal. Appl. 391 (2012), 1–9.

[17] D. H. Fremlin, *Filters of countable type*, dostępne w: http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/preprints.htm (2007), ostatnie wejście: 7 marca 2014 r.

[18] Z. Grande, *Sur la quasi-continuité et la quasi-continuité approximative*, Fund. Math. 129 (1988), 167—172.

[19] S. Grigorieff, *Combinatorics on ideals and forcing*, Ann. of Math. Logic 3 (1971), 363–394.

[20] G. Grimeisen, *Ein Approximationsatz für Baireschen Funktionen*, Math. Ann. 146 (1962), 189–194.

[21] M. Hrušák, *Combinatorics of filters and ideals*, w: Set theory and its applications. Contemp. Math. 533 (2011), 29–69, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[22] M. Katětov, *On descriptive classification of functions*, Proceedings of the Third Prague Topological Symposium (1972), 235–242.

[23] M. Katětov, *On descriptive classes of functions*, w: Theory of Sets and Topology, Deutsch. Verlag Wiss., Berlin (1972), 265–278.

[24] A.S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995.

[25] A.S. Kechris, *Hereditary properties of the class of closed sets of uniqueness for trigonometric series*, Israel J. Math. 73 (1991), no. 2, 189–198.

[26] A.S. Kechris, A. Louveau, W.H. Woodin, *The structure of σ-ideals of compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987), no. 1, 263–288.

[27] P. Kostyrko, T. Šalát, W. Wilczyński, *I-convergence*, Real Anal. Exchange 26 (2000), no. 2, 669–686.

[28] A. Kwela, *A note on a new ideal*, submitted.

[29] A. Kwela, I. Recław, *Ranks of $\mathcal{F}$-limits of filter sequences*, J. Math. Anal. Appl. 398 (2013), 872–878.

[30] A. Kwela, M. Sabok, *Topological representations*, submitted.

[31] M. Laczkovich, I. Recław, *Ideal limits of sequences of continuous functions*, Fund. Math. 203 (2009), 39–46.

[32] C. Laflamme, *Filter games and combinatorial properties of strategies*, Contemp. Math. 192 (1996), 51–67.

[33] É. Matheron, S. Solecki, M. Zelený, *Trichotomies for ideals of compact sets*, J. Symbolic Logic 71 (2006), no. 2, 586–598.

[34] A. R. D. Mathias, *Happy families*, Annals Math. Logic 12 (1977), 59-–111.

[35] K. Mazur, *F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$*, Fund. Math. 138 (1991), 104–111.

[36] D. Meza-Alcántara, *Ideals and filters on countable set*, rozprawa doktorska, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2009.

[37] T. Natkaniec, P. Szuca, *On the ideal convergence of sequences of quasicontinuous functions*, preprint.

[38] M. Sabok, J. Zapletal, *Forcing properties of ideals of closed sets*, J. Symbolic Logic 76 (2011), 1075–1095.

[39] S. Solecki, *Analytic ideals*, The Bull. of Symb. Logic 2 (1996), 339–348.

[40] S. Solecki, *Analytic ideals and their applications*, Ann. Pure Appl. Logic 99 (1999), 51–72.

[41] S. Solecki, *Filters and sequences*, Fund. Math. 163 (2000), 215–228.

[42] S. Todorčević, *Analytic gaps*, Fund. Math. 150 (1996), no. 1, 55–66.

[43] S. Todorčević, *Topics in topology*, Lecture Notes in Math. 1652 (1997), Springer-Verlag, Berlin.

[44] S. Todorčević, *Introduction to Ramsey Spaces*, Annals of Mathematics Studies 174 (2010), Princeton University Press, Princeton.

[45] P. Zakrzewski, *Fubini properties for filter-related σ-ideals*, Top. and its App. 136 (2004), 239–249.