Uniwersytet Jagielloński

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Koncepcja jednostajności w C^*-algebrach

Promotor:
Dr hab. Piotr Niemiec

Autor:
Adam Wegert

16 czerwca 2015

Podziękowania

W pierwszej kolejności chciałem złożyć bardzo serdeczne podziękowania Panu dr. hab. Piotrowi Niemcowi za ogrom pracy włożonej w powstanie niniejszej rozprawy, za życzliwość i gotowość do pomocy, za liczne i inspirujące dyskusje o matematyce (dotyczące nie tylko tematyki algebr operatorowych), jak również za prawdziwie „zaraźliwy” entuzjazm do matematyki.

Chciałem również złożyć podziękowania:

- *Panu prof. Wojciechowi Kucharzowi za możliwość poszerzania swojej wiedzy (w zakresie teorii homologii i kohomologii, topologii algebraicznej oraz topologii rozmaitości) zarówno na wykładach jak i na interesujących konsultacjach.*

- *Panu dr. Jakubowi Byszewskiemu za dyskusje na temat elementów teorii kategorii i algebry przemiennej i za rozwianie wielu wątpliwości.*

Spis treści

Wstęp

Słynne twierdzenie Gelfanda-Naimarka orzeka, iż istnieje wzajemna odpowiedniość między zwartymi przestrzeniami topologicznymi a przemiennymi C^*-algebrami z jednością: zwartej przestrzeni topologicznej X odpowiada (przemienna) C^*-algebra $C(X)$ funkcji ciągłych na X. Rozmaite własności topologiczne przestrzeni X mogą być tłumaczone na język algebraiczny (i *vice versa*). Pozwala to myśleć o teorii (dowolnych, niekoniecznie przemiennych) C^*-algebr jako o *nieprzemiennej topologii*, w myśl heurystycznej zasady, że elementy C^*-algebry odpowiadają „funkcjom ciągłym na nieprzemiennej przestrzeni topologicznej". Celem niniejszej pracy jest próba przetłumaczenia pojęcia *jednostajności* (w kontekście przestrzeni metrycznych) na język C^*-algebr.

Niniejsza rozprawa składa się z dwóch części: pierwsza ma charakter wprowadzający w tematykę, druga natomiast zawiera nowe rezultaty, będące zasadniczą częścią pracy. W pierwszym rozdziale przypominamy definicje niezbędnych dla nas pojęć oraz ustalamy notację. W drugim rozdziale wyjaśniamy obszerniej odpowiedniość między zwartymi przestrzeniami topologicznymi a przemiennymi C^*-algebrami, jak również zamieszczamy definicje interesujących nas klas C^*-algebr. Rozdział trzeci ma charakter przeglądowy: jego celem jest pokazanie, że odpowiedniość między obiektami natury geometrycznej a obiektami natury algebraicznej nie ogranicza się wyłącznie do topologii i teorii C^*-algebr. Wprowadzone w tym rozdziale pojęcia nie są niezbędne dla dalszych rozważań. W kolejnym rozdziale omawiamy zagadnienia dotyczące idei jednostajności w kontekście przestrzeni metrycznych, jak np. moduł ciągłości, jednostajna zbieżność czy tw. Ascolego-Arzeli. W rozdziale piątym pokazujemy w jaki sposób z przemiennej, ośrodkowej C^*-algebry postaci $C(X)$ odtworzyć metrykę na przestrzeni X — stanowi to motywacje do rozważań z następnego rozdziału. Rozdział szósty rozpoczyna zasadniczą część rozprawy: w rozdziale tym definiujemy rodzinę metryk na przestrzeni wszystkich reprezentacji ośrodkowej C^*-algebry z jednością. Pokazujemy, że w ten sposób powstaje przestrzeń metryczna zupełna i *explicite* identyfikujemy jej topologię jako topologię zbieżności punktowo-normowej. Dowodzimy, iż skonstruowane metryki są ze sobą jednostajnie równoważne. W naturalny sposób definiujemy pojęcie jednakowej ciągłości dla rodziny elementów C^*-algebry i przy pomocy tego pojęcia konstruujemy odpowiednik modułu ciągłości w nieprzemiennym kontekście. Pokazujemy, że tak skonstruowany moduł ciągłości pozwala kontrolować jakość jednostajnej ciągłości przy zmianie jednostajnej struktury na zbiorze reprezentacji. Sprawdzamy również podstawowe własności tak skonstruowanych modułów ciągłości. W kolejnym rozdziale definiujemy klasę tzw. *zwartych* C^*-algebr, których definicja opiera się o strukturę zbioru ich reprezentacji nieprzywiedlnych. Dowodzimy własności tych algebr w kontekście naturalnych operacji na C^*-algebrach oraz związków z innymi (mniej lub bardziej klasycznymi) klasami C^*-algebr, a także ze zdefiniowaną przez nas tzw. (silną) własnością Ascolego. Rozdział ten kończymy pewnymi uwagami na temat zbieżności w C^*-algebrach. Rozważania w następnym rozdziale dotyczą *-homomorfizmów: naśladując przypadek przemienny, wprowadzamy definicję jednostajnie ciągłego *-homomorfizmu i pokazujemy, że każdy *-homomorfizm ma tę własność (co jest odpowiednikiem twierdzenia orzekającego, że odwzorowanie ciągłe między przestrzeniami zwartymi jest automatycznie jednostajnie ciągłe). Dalej wprowadzamy alternatywną definicję jednostajnie ciągłego *-homomorfizmu i dowodzimy, że definicja ta jest w istocie równoważna z wcześniejszą oraz że stosownie otrzymane moduły ciągłości są identyczne. Wreszcie na zbiorze wszystkich *-homomorfizmów określamy strukturę metryczną (podobnie jak dla reprezentacji) oraz dowodzimy analogonu tw. Ascolego-Arzeli. Przedostatni rozdział ma charakter dodatku, w którym omawiamy związek klasycznych modułów ciągłości (w przypadku przemiennym) a modułów otrzymanych w rozdziale szóstym. Podajemy również interpretację zbioru wszystkich reprezentacji przemiennej C^*-algebry. Wreszcie w ostatnim rozdziale omówione zostały krótko te problemy, które stanowić mogą przedmiot dalszych badań.

1 Preliminaria

Wszystkie rozważane przez nas przestrzenie liniowe będą nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych (chyba że zaznaczymy, że jest inaczej). Przypominamy, że algebrę Banacha $\mathfrak{A}$ nazywamy C^*-algebrą, gdy jest wyposażona w inwolucję $^* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ spełniającą warunek

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \; x \in \mathfrak{A}.$$

C^*-algebry będziemy oznaczać z reguły przez $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.... Dla C^*-algebry $\mathfrak{A}$ poprzez $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ oznaczać będziemy jej *centrum.* Symbol $\cong$ będzie oznaczał izomorfizm w stosownych kategoriach — najczęściej w kontekście C^*-algebr. Przypominamy, że izomorfizmem C^*-algebr jest bijektywny *-homomorfizm (w przypadku C^*-algebr z jednością automatycznie zachowuje jedności). Taki izomorfizm jest automatycznie izometryczny. Dla elementu x w C^*-algebrze $\mathfrak{A}$ poprzez $r(x)$ będziemy oznaczać jego promień spektralny: $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ gdzie $\sigma(x)$ jest *widmem* x. Przypominamy, że *stanem* na zadanej C^*-algebrze nazywamy nieujemny funkcjonał liniowy o normie 1. Przestrzeń wszystkich stanów na $\mathfrak{A}$ oznaczamy $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Gdy $\mathfrak{A}$ ma jedność, to $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ jest zwartą przestrzenią w topologii *-słabej (czyli w topologii zbieżności punktowej). Stan jest nazywany *czystym*, jeżeli jest punktem ekstremalnym (wypukłego) zbioru $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Zbiór wszystkich stanów czystych oznaczamy $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$. Przez $\mathcal{H}$ będziemy zazwyczaj oznaczać (na ogół ośrodkową) przestrzeń Hilberta, przez $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — algebrę wszystkich operatorów ograniczonych na $\mathcal{H}$ oraz przez $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ — grupę operatorów unitarnych na $\mathcal{H}$. Operator identycznościowy na $\mathcal{H}$ oznaczamy I — czasem pisać będziemy $I_{\mathcal{H}}$, chcąc podkreślić w jakiej przestrzeni działamy. Jeżeli $S \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), T \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ są dwoma operatorami, to $S \oplus T$ określamy jako operator w $\mathfrak{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ dany przez $(S \oplus T)(x, y) := (Sx, Ty)$. Na $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ istnieje wiele różnych topologii — do najczęściej używanych należą:

- topologia normy operatorowej: w tej normie $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ staje się C^*-algebrą,
- topologia silnej zbieżności operatorowej, w skrócie SOT (od ang. *strong operator topology*). Jest to najsłabsza topologia, w której wszystkie funkcje $T \mapsto \|T\xi\| \in \mathbb{C}$ gdzie $\xi \in \mathcal{H}$, są ciągłe; jest to zatem topologia rodziny seminorm. Innymi słowy, jest to topologia zbieżności punktowej,
- topologia słabej[1] zbieżności operatorowej, w skrócie WOT (od ang. *weak operator topology*). Jest to najsłabsza topologia, w której wszystkie funkcje $T \mapsto |\langle T\xi, \eta\rangle| \in$

[1]Nie należy mylić tej topologii ze słabą (ani z *-słabą) topologią rozumianą w sensie przestrzeni Banacha: topologia WOT jest słabsza od topologii *-słabej, która jest z kolei słabsza od topologii słabej. Na zbiorach ograniczonych topologie *-słaba i WOT się pokrywają

$\mathbb{C}$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ są ciągłe. Zaletą tej topologii jest fakt, że kula jednostkowa w $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jest zwarta względem tej topologii.

Większość interesujących z punktu widzenia teorii operatorów klas operatorów w $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ posiada czysto algebraiczną charakteryzację, zatem ich definicje przenoszą się bezpośrednio na przypadek dowolnej C^*-algebry. Przykładowo element $x \in \mathfrak{A}$ nazywamy:

- *samosprzężonym*, gdy $x = x^*$,
- *normalnym*, gdy $x^*x = xx^*$,
- *nieujemnym*, gdy $x = y^*y$ dla pewnego $y \in \mathfrak{A}$,
- *projekcją*, gdy $x^2 = x^* = x$,
- *unitarnym*, gdy $x^*x = xx^x = 1$ (algebra $\mathfrak{A}$ musi mieć jedność),
- *izometrią*, gdy $x^*x = 1$.

Uwaga 1.1. Definicja operatora zwartego nie posiada C^*-algebraicznego odpowiednika. Samosprzężony operator zwarty T jest charakteryzowany przez następujący warunek: widmo $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ jest przeliczalne, z jedynym punktem skupienia w 0 oraz wszystkie niezerowe elementy $\sigma(T)$ są skończonej krotności[2]. Zatem w charakteryzacji tej pojawia się pojęcie *krotności*, które nie jest abstrakcyjnym pojęciem C^*-algebraicznym. Przykładowo, gdy $T \in \mathfrak{B}(\ell^2)$ jest zwarty, to można rozważyć wierną reprezentację (zob. def. i ozn. poniżej) $T \mapsto \aleph_0 \odot T$. Wówczas obraz T poprzez tę reprezentację nie jest już zwarty.

Dla dowolnej rodziny C^*-algebr $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ przez $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{A}_i$ rozumiemy następujący zbiór

$$\{(a_i)_{i\in\mathcal{I}} : a_i \in \mathfrak{A}_i,\ i \in \mathcal{I},\ \sup_{i\in\mathcal{I}} \|a_i\| < \infty\}.$$

Z działaniami po współrzędnych i normą supremową staje się on C^*-algebrą. Jeżeli wszystkie algebry $\mathfrak{A}_i$ mają jedność 1_i, to $(1_i)_{i\in\mathcal{I}}$ staje się jednością w $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{A}_i$. Z kolei poprzez $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{A}_i$ oznaczamy *sumę prostą* algebr $\mathfrak{A}_i$, czyli zbiór wszystkich $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *znikających w nieskończoności* (tzn. spełniony jest warunek: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony podzbiór $\mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathcal{I}$ taki, że dla $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_\varepsilon$ zachodzi $\|a_i\| < \varepsilon$). Nawet jeżeli wszystkie algebry $\mathfrak{A}_i$ mają jedność, to $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{A}_i$ na ogół nie ma jedności: $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{A}_i$ stanowi ideał w algebrze $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{A}_i$. Jeżeli $\mathfrak{A}$ nie ma jedności, to można rozważyć najmniejszą C^*-algebrę z jednością zawierającą (izometrycznie) $\mathfrak{A}$ — taką algebrę będziemy oznaczać $\mathfrak{A}^+$ (zob. np. [42] pod kątem oznaczeń, konstrukcji oraz definicji C^*-normy). Jeżeli mamy (krótki) ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}' \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{A}'' \to 0 \tag{1.1}$$

C^*-algebr (tzn. φ jest iniektywne, ψ jest surjektywne oraz $\mathrm{im}\varphi = \ker\psi$), to mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *rozszerzeniem* $\mathfrak{A}''$ o $\mathfrak{A}'$. Innymi słowy, oznacza to, że $\varphi(\mathfrak{A}')$ jest ideałem w $\mathfrak{A}$ oraz zachodzi $\mathfrak{A}'' \cong \mathfrak{A}/\varphi(\mathfrak{A}')$. Najprostszym przykładem jest ciąg postaci:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \xrightarrow{p} \mathfrak{B} \to 0$$

[2]Dla operatora zwartego T dowolne $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ jest wartością własną, więc krotność rozumiemy standardowo, jako $\dim\ker(T - \lambda I)$.

gdzie $\iota(a) = (a, 0)$ i $p(a, b) = b$. Dołączając jedność do algebry $\mathfrak{A}$ również otrzymujemy rozszerzenie: jeżeli $\mathfrak{A}$ jest C^*-algebrą, to mamy następujący ciąg dokładny:

$$0 \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^+ \to \mathbb{C} \to 0$$

tzn. $\mathfrak{A}^+$ jest rozszerzeniem $\mathbb{C}$ o $\mathfrak{A}$ (nie na odwrót!). Podkreślmy, że teoria rozszerzeń (np. zagadnienie tzw. *rozszczepialności*) w przypadku algebr jest bardziej skomplikowana niż w kontekście np. kategorii modułów. Mówimy, że pewna własność $\mathcal{W}$ dla C^*-algebr jest *zamknięta na branie rozszerzeń*, jeżeli spełniona jest implikacja: ilekroć $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ są takie jak w (1.1) oraz mają własność $\mathcal{W}$, to $\mathfrak{A}$ również ma własność $\mathcal{W}$.
Reprezentacją C^*-algebry (na przestrzeni $\mathcal{H}$) nazywamy *-homomorfizm $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Jeżeli $\mathfrak{A}$ ma jedność, to w definicji reprezentacji zwykle zakłada się, że $\pi(1) = I$. Niekiedy przestrzeń Hilberta, na której działa algebra $\mathfrak{A}$ poprzez reprezentację π oznaczać będziemy poprzez $\mathcal{H}_\pi$. Reprezentację $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ nazywamy:

- *niezdegenerowaną*, jeżeli jedyny wektor ξ spełniający warunek $\pi(a)\xi = 0$ dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ to wektor zerowy. Ten warunek jest równoważny warunkowi: przestrzeń $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{H} = \{\pi(a)\xi : a \in \mathfrak{A}, \xi \in \mathcal{H}\}$ jest gęsta w $\mathcal{H}$,

- *cykliczną*, jeżeli istnieje wektor $\xi \in \mathcal{H}$ taki, że przestrzeń $\pi(\mathfrak{A})\xi = \{\pi(a)\xi : a \in \mathfrak{A}\}$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Taki wektor nazywamy *wektorem cyklicznym*,

- *nieprzywiedlną*, jeżeli jedyne podprzestrzenie niezmiennicze M dla wszystkich operatorów $\pi(a)$ to $M = \{0\}$ oraz $M = \mathcal{H}$. Warunek ten jest równoważny temu, że dowolny niezerowy wektor ξ jest cykliczny. Jest to z kolei równoważne równości $\pi(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}I$ gdzie $\mathfrak{S}'$ oznacza komutant zbioru $\mathfrak{S}$, tj. $\mathfrak{S}' = \{T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) : TS = ST,\ S \in \mathfrak{S}\}$.

Oczywiście każda reprezentacja cykliczna jest niezdegenerowana a każda reprezentacja nieprzywiedlna jest cykliczna; odwrotne implikacje na ogół nie zachodzą. Dla reprezentacji $\pi_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_i),\ i = 1, 2$ będziemy oznaczać przez $\pi_1 \oplus \pi_2$ ich sumę prostą zdefiniowaną następująco: $\pi_1 \oplus \pi_2 : \mathfrak{A} \ni a \mapsto \pi_1(a) \oplus \pi_2(a) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$. Analogicznie definiujemy sumę prostą $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \pi_i$ dowolnej rodziny reprezentacji $\{\pi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. W szczególności, gdy dla $i, j \in \mathcal{I}$ będzie spełnione $\pi_i = \pi_j =: \pi$ oraz $|\mathcal{I}| = \alpha$, to będziemy sumę prostą $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \pi_i$ czasem oznaczać przez $\alpha \odot \pi$. Analogiczne oznaczenie stosować będziemy dla operatorów. Na zbiorze reprezentacji algebry $\mathfrak{A}$ na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ możemy określić topologię *punktowo-normową* następująco: jeżeli $\{\pi_\sigma\}_\sigma$ jest ciągiem uogólnionym reprezentacji algebry $\mathfrak{A}$ na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to $\pi_\sigma \to \pi$ w topologii punktowo normowej, gdy dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ zachodzi $\pi_\sigma(a) \xrightarrow{\|\cdot\|} \pi(a)$. Innymi słowy, jest to topologia rodziny odwzorowań $\pi \mapsto \|\pi(a)\|$, $a \in \mathfrak{A}$. Z kolei topologię *zwarto-otwartą* określamy w sposób: gdy mamy ciąg uogólniony $\{\pi_\sigma\}_\sigma$ reprezentacji, to $\pi_\sigma \to \pi$ w topologii zwarto-otwartej, jeżeli dla dowolnego zwartego podzbioru $L \subset \mathfrak{A}$ zachodzi $\sup_{a \in L} \|\pi_\sigma(a) - \pi(a)\| \to 0$. Innymi słowy, jest to topologia zbieżności jednostajnej na zwartych podzbiorach. Dla dowolnych C^*-algebr z jednością $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ przez $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich *-homomorfizmów $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ zachowujących jedność.

2 Podstawy teorii C^*-algebr

2.1 Przemienne C^*-algebry

Podstawowym twierdzeniem z zakresu teorii przemiennych C^*-algebr jest następujące:

Twierdzenie 2.1 (Gelfand-Naimark)**.** *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest przemienną C^*-algebrą z jednością, to istnieje zwarta przestrzeń Hausdorffa X, taka że $\mathfrak{A} \cong C(X)$.*

Uwagi 2.2. Przestrzeń X powstaje jako zbiór wszystkich *charakterów* na $\mathfrak{A}$, tj. funkcjonałów liniowo-multiplikatywnych z topologią *-słabą (czyli topologią zbieżności punktowej). Zbiór ten nazywamy *widmem* (przemiennej) C^*-algebry $\mathfrak{A}$ i oznaczamy $\widehat{\mathfrak{A}}$. Izomorfizm $\mathfrak{A} \cong C(\widehat{\mathfrak{A}})$ jest zadany poprzez odwzorowanie zwane *transformacją Gelfanda*, dane wzorem:

$$\widehat{\ }: \mathfrak{A} \ni a \mapsto \hat{a} \quad , \quad \hat{a}(\omega) := \omega(a).$$

Przemienność algebry $\mathfrak{A}$ zapewnia, że dla $x \in \mathfrak{A}$ zachodzi

$$\|x\| = r(x)$$

co gwarantuje izometryczność transformacji Gelfanda. Przemienność zapewnia również istnienie obustronnych ideałów maksymalnych kowymiaru 1, co pozwala skonstruować niezerowy funkcjonał liniowo multiplikatywny na $\mathfrak{A}$. W przypadku nieprzemiennym taki funkcjonał może nie istnieć, jak pokazuje następujący:

Przykład 2.3. Niech $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\ell^2)$. Zdefiniujmy trzy operatory $T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{A}$ za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} T_1(x_1, x_2, x_3...) &= (x_2, x_3, x_4, ...), \\ T_2(x_1, x_2, ...) &= (0, x_1, 0, x_2, 0, ...), \\ T_3(x_1, x_2, x_3...) &= (x_1, x_3, x_5, ...). \end{aligned}$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $T_3T_1T_2 = I$ oraz $T_1T_3T_2 = 0$. Jeżeli zatem $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ jest multiplikatywny, to $\omega(I) = \omega(0)$, skąd ω jest stały: $\omega(T) \equiv 1$ lub $\omega(T) \equiv 0$. Zatem nie istnieje (niezerowy) charakter na $\mathfrak{A}$. Oczywiście ℓ^2 można zastąpić dowolną nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta. Dodajmy jeszcze, że powyższy argument nie zadziała dla dwóch operatorów, to znaczy: jeżeli istniałyby dwa operatory T_1, T_2, takie że $T_1T_2 = 0$ oraz $T_2T_1 = I$, to mielibyśmy

$$T_2 = IT_2 = T_2T_1T_2 = T_20 = 0,$$

skąd $T_2T_1 = 0$, co daje sprzeczność.

Okazuje się, że relacja $xy - yx = 1$ nie może być spełniona w żadnej algebrze unormowanej z jednością (zob. rozdział 13 w [35]). Można jednak skonstruować *nieograniczone* operatory A, B spełniające tę relację (przykład 13.5. w [35]). Powyższa relacja jest istotna z punktu widzenia mechaniki kwantowej i jest związana z tzw. *zasadą nieoznaczoności Heisenberga*. Niedawno Z. Liu pokazała w swojej rozprawie doktorskiej [25], że relacja ta *nie* może być spełniona w tzw. algebrze *operatorów dołączonych* do skończonej algebry von Neumanna. Z rezultatów zawartych w [29] wynika rezultat Liu dla skończonych algebr von Neumanna typu I.

Wyjaśniliśmy zatem, jak z przemiennej C^*-algebry otrzymać zwartą przestrzeń topologiczną. Odwrotnie, gdy $\mathfrak{A} = C(X)$ jest przemienną C^*-algebrą z jednością, to możemy utożsamiać X ze zbiorem $\widehat{\mathfrak{A}}$ za pomocą homeomorfizmu:

$$\delta : X \ni x \mapsto \delta_x \in \widehat{\mathfrak{A}} \quad , \quad \delta_x(f) := f(x).$$

W przypadku przemiennych algebr $\mathfrak{A}$ bez jedności przestrzeń X nie jest zwarta a jedynie *lokalnie zwarta*: wówczas $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z algebrą $C_0(X)$ — funkcji *znikających w nieskończoności*. Standardowej procedurze dołączania jedności do algebry $\mathfrak{A}$ odpowiada na poziomie topologicznym *uzwarcenie Aleksandrowa* przestrzeni X. Z kolei maksymalne uzwarcenie (uzwarcenie Čecha-Stone'a) odpowiada tzw. *algebrze mnożników* (ang. *multiplier algebra*). W istocie, wiele standardowych pojęć z topologii ma swoje odpowiedniki w świecie C^*-algebr, jak pokazuje poniższa tabela:

Topologia	**Algebra**
Punkt	Charakter
Zbiór domknięty	Ideał
Zanurzenie	Epimorfizm
(Ciągła) Surjekcja	Monomorfizm
Homeomorfizm	Automorfizm
Suma rozłączna	Suma prosta
Produkt kartezjański	Iloczyn tensorowy
Spójność	Brak nietrywialnych projekcji
Miara probabilistyczna	Stan

Powyższa tabela sugeruje, że można myśleć o wzajemnej odpowiedniości:

$$\boxed{\textbf{Zwarte przestrzenie topologiczne } T_2} \simeq \boxed{\textbf{Przemienne C*-algebry z jednością}}$$

Istotnie, twierdzenie Gelfanda-Naimarka można wypowiedzieć w abstrakcyjnym języku teorii kategorii: niech **cTop** oznacza kategorię zwartych przestrzeni topologicznych Hausdorffa, gdzie morfizmami są odwzorowania ciągłe, z kolei przez **ucCAlg** oznaczmy kategorię przemiennych C^*-algebr z jednością (od ang. *unital commutative C^*-algebras*): morfizmami w tej kategorii są *-homomorfizmy zachowujące jedność. Stosując oznaczenie $\mathbf{Cat}^{op}$ dla kategorii przeciwnej[3] do kategorii **Cat** mamy:

Twierdzenie 2.4. *Kategorie* $\boldsymbol{ucCAlg}^{op}$ *i* ***cTop*** *są naturalnie równoważne.*

Na poziomie obiektów równoważność tych kategorii ustalają przyporządkowania:

$$\mathfrak{A} \mapsto \hat{\mathfrak{A}}, \quad X \mapsto C(X).$$

[3]Przypominamy, że $\mathbf{Cat}^{op}$ ma te same obiekty co kategoria **Cat**, lecz strzałki (morfizmy) działają w przeciwnych kierunkach. Dla funktora z kategorii przeciwnej używa się również nazewnictwa *funktor kontrawariantny*.

Na poziomie morfizmów powyższa równoważność kategorii wygląda następująco: mając zadany *-homomorfizm $T : C(X) \to C(Y)$ zachowujący jedność, otrzymujemy odwzorowanie $f_T : Y \to X$, zdefiniowane za pomocą formuły:

$$f_T(\delta_y) := \delta_y \circ T$$

gdzie utożsamiamy $\delta_y \cong y$. Z kolei każde odwzorowanie ciągłe $f : Y \to X$ wyznacza *-homomorfizm (zachowujący jedności) $T_f : C(X) \to C(Y)$ za pomocą formuły:

$$T_f(g) := g \circ f.$$

W przypadku C^*-algebr bez jedności mamy również analogiczny rezultat: istnieje naturalna (kontrawariantna) równoważność pomiędzy kategorią **cCAlg** przemiennych C^*-algebr (niekoniecznie z jednością) oraz kategorią **lcTop** lokalnie zwartych przestrzeni topologicznych Hausdorffa. Jednak w tym kontekście należy staranniej zdefiniować pojęcie morfizmu dla obu rozważanych kategorii. Po stronie topologicznej mamy tzw. *właściwe* odwzorowania ciągłe, czyli takie odwzorowania ciągłe, dla których przeciwobraz zbioru zwartego jest zwarty: po stronie algebraicznej mamy natomiast *-homomorfizmy zachowujące jedności aproksymatywne.

Mając daną przemienną C^*-algebrę $\mathfrak{A}$ nie zawsze jest łatwo od razu zidentyfikować jej widmo $\hat{\mathfrak{A}}$:

Przykłady 2.5.

- Niech $\mathfrak{A} = \ell^\infty(Y)$ będzie algebrą wszystkich ograniczonych funkcji $f : Y \to \mathbb{C}$. Każdą taką funkcję możemy traktować jako ograniczoną i ciągłą funkcję, względem topologii dyskretnej na Y — taka funkcja przedłuża się więc jednoznacznie na uzwarcenie Čecha-Stone'a $\beta(Y)$. Wobec tego $\mathfrak{A} \cong C(\beta(Y))$. W przypadku $Y = \mathbb{N}$ mamy więc, że $\ell^\infty \cong C(\beta(\mathbb{N}))$. Zbiór $\beta(\mathbb{N})$ można utożsamiać z przestrzenią wszystkich ultrafiltrów na $\mathbb{N}$. W naszym ujęciu punkty $\beta(\mathbb{N})$ odpowiadają funkcjonałom brania granicy względem ultrafilru: dla ultrafiltru głównego ω_n wyznaczonego przez $n \in \mathbb{N}$ mamy $\lim_{w_n}(x) = x(n)$ gdzie $x \in \ell^\infty$. Z kolei punkty narostu $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ odpowiadają funkcjonałom brania granicy względem ultrafiltrów wolnych (których jest $2^{\mathfrak{c}}$). Do konstrukcji ultrafiltrów wolnych potrzebny jest pewnik wyboru.
  Algebra $\mathfrak{A}$ działa na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \ell^2(Y)$ za pomocą operatorów diagonalnych. Wówczas utożsamiając $\mathfrak{A}$ z podalgebrą $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ stwierdzamy, że $\mathfrak{A}$ jest domknięta w słabej topologii operatorowej, jest więc algebrą von Neumanna.

- Niech c_0 oznacza algebrę wszystkich ciągów zbieżnych do zera: wówczas c_0 stanowi ideał w ℓ^∞. Połóżmy $\mathfrak{A} := \ell^\infty / c_0$. Wówczas $\mathfrak{A}$ jest przemienną C^*-algebrą, izomorficzną z $C(\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N})$ — podzielenie przez ideał na poziomie algebraicznym odpowiada wzięciu różnicy zbiorów na poziomie topologicznym. Można pokazać, że $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ nie jest przestrzenią ekstremalnie niespójną; z kolei widmo przemiennej W^*-algebry musi spełniać ten warunek — zatem $\mathfrak{A}$ nie jest W^*-algebrą[4] Co więcej, $\mathfrak{A}$ nie posiada wiernej reprezentacji na ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Wynika to z następującego, kombinatorycznego lematu:

[4] W^*-algebrą nazywamy C^*-algebrę, która, jako przestrzeń Banacha, jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią dualną do pewnej przestrzeni Banacha. Każda W^*-algebra może być zanurzona jako podalgebra von Neumanna w $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Lemat 2.6. *Istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{F}$ nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ o własności: dla różnych zbiorów $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ zbiór $F_1 \cap F_2$ jest skończony.*

Dowód. Dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$ wybierzmy jeden ciąg liczb wymiernych $q^r = \{q^r_n\}_n$ zbieżny do r. Rozważmy rodzinę $\mathcal{F}_0$ podzbiorów $\mathbb{Q}$ złożoną ze wszystkich ciągów q^r. Wówczas $\mathcal{F}_0$ ma postulowane własności — wystarczy użyć bijekcji $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ aby zrealizować tę konstrukcję w $\mathbb{N}$. □

Mając rodzinę $\mathcal{F}$ jak wyżej, możemy dla $F \in \mathcal{F}$ określić $x_F \in \mathfrak{A}$ jako klasę ciągu

$$y_F(n) = \begin{cases} 1, & n \in F \\ 0, & n \notin F. \end{cases}$$

Wtedy $x_{F_1} x_{F_2} = 0$ (w $\mathfrak{A}$) — dostajemy zatem nieprzeliczalną rodzinę parami ortogonalnych projekcji, więc dla ośrodkowej $\mathcal{H}$ nie istnieje zanurzenie $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (mimo, że ℓ^∞ zanurza się w $\mathfrak{B}(\ell^2)$).

- Niech (X, Σ) będzie przestrzenią mierzalną oraz $\mathfrak{A} = \mathcal{L}^\infty(X, \Sigma)$ oznacza algebrę ograniczonych, mierzalnych funkcji na X z normą supremową. Wówczas (X, Σ) z działaniami sumy mnogościowej i przecięcia staje się algebrą Boole'a: można wówczas pokazać, że $\widehat{\mathfrak{A}}$ pokrywa się z przestrzenią Stone'a dla algebry Boole'a (X, Σ) (zob. np. [16]). Każdy $x \in X$ wyznacza element $\widehat{\mathfrak{A}}$ za pomocą wzoru $\delta_x(f) := f(x)$, jednak nie każde $\omega \in \widehat{\mathfrak{A}}$ jest tej postaci. Dla $X = [0, 1]$ z σ-algebrą zbiorów borelowskich $\mathcal{B}$, jak również dla $[0, 1]$ z σ-algebrą $\mathcal{L}$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, otrzymujemy dwie nieizomorficzne ze sobą C^*-algebry. Ponieważ zarówno $([0, 1], \mathcal{B})$, jak i $([0, 1], \mathcal{L})$ nie są zupełne (jako algebry Boole'a), więc ich przestrzenie Stone'a nie są ekstremalnie niespójne. Zatem $\mathcal{L}^\infty(X, \Sigma)$ nie są W^*-algebrami dla $\Sigma = \mathcal{B}, \mathcal{L}$.

- Dla przestrzeni z miarą (X, Σ, μ) niech $\mathfrak{A} = L^\infty(X, \Sigma, \mu)$. Wtedy widmo algebry $\mathfrak{A}$ jest homeomorficzne z przestrzenią Stone'a dla tzw. *algebry mierzalnej* (ang. *measure algebra*) dla (X, Σ, μ). Elementami tej algebry są klasy zbiorów mierzalnych względem relacji równoważności zdefiniowanej następująco: $E \sim F$ gdy $\mu(E \triangle F) = 0$. Nawet w prostym przypadku $X = [0, 1]$ oraz μ będącej miarą Lebesgue'a, nie jest łatwo zidentyfikować pojedynczy element $\omega \in \widehat{\mathfrak{A}}$. Jeżeli założymy, że miara μ jest zupełna, to przy pomocy tzw. *twierdzenia o liftingu* (zob. [16]) częściowo możemy zidentyfikować $\widehat{\mathfrak{A}}$.
  Jeżeli μ jest miarą σ-skończoną, to $\mathfrak{A}$ jest W^*-algebrą a jej predualna to $L^1(X, \Sigma, \mu)$. W odróżnieniu od poprzedniego przykładu, zarówno dla $\Sigma = \mathcal{B}$, jak i dla $\Sigma = \mathcal{L}$, otrzymujemy *te same* C^*-algebry.

We wszystkich powyższych przykładach widmo $\widehat{\mathfrak{A}}$ algebry $\mathfrak{A}$ jest przestrzenią niemetryzowalną, z kolei $\mathfrak{A}$ jest nieośrodkową C^*-algebrą. Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie, które będzie stanowiło punkt wyjścia dla naszych dalszych rozważań:

Twierdzenie 2.7. *Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *algebra $C(X)$ jest ośrodkowa;*

2. X jest przestrzenią metryzowalną.

Dowód. Przypuśćmy, że X jest przestrzenią metryzowalną i niech d będzie metryką na X. Skoro X jest zwarta, to X jest ośrodkowa. Wybierzmy zatem przeliczalny zbiór gęsty $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w X i połóżmy

$$f_n : X \to \mathbb{C}, \quad f_n(x) := d(x_n, x).$$

Wówczas rodzina $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rozdziela punkty X: istotnie, gdy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $f_n(x) = d(x_n, x) = d(x_n, y) = f_n(y)$, to funkcje $d(\cdot, x)$ i $d(\cdot, y)$ są równe na zbiorze gęstym, więc wszędzie, skąd $x = y$. Oczywiście wszystkie funkcje f_n są ciągłe. Rozważmy algebrę nad (przeliczalnym) ciałem $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ generowaną przez $\{f_n\}_n$. Wówczas jest ona przeliczalna oraz, z tw. Stone'a-Weierstrassa, gęsta.

Na odwrót, niech $C(X)$ będzie ośrodkowa oraz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie przeliczalnym zbiorem gęstym w domkniętej kuli jednostkowej w $C(X)$. Dla $x, y \in X$ połóżmy:

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Ponieważ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\sup_{z\in X} |f_n(z)| \leqslant 1$, to szereg definiujący $d(x, y)$ jest zbieżny. Tak określona funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ jest symetryczna i spełnia nierówność trójkąta. Gdy $x \neq y$ to (z całkowitej regularności) istnieje $f : X \to [0, 1]$ taka, że $f(x) = 0,\ f(y) = 1$ a zatem istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $f_{n_0}(x) \neq f_{n_0}(y)$, skąd $d(x, y) \neq 0$. Pozostaje pokazać, że metryka d jest zgodna z topologią X. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ przyporządkowanie $X \times X \ni (x, y) \to |f_n(x) - f_n(y)| \in \mathbb{C}$ jest ciągłe, zatem d jest ciągła. Innymi słowy, odwzorowanie identycznościowe

$$\mathrm{id} : (X, \mathrm{top}(X)) \to (X, d)$$

jest ciągłe. Stąd wynika, że (X, d) jest przestrzenią zwartą — zatem $\mathrm{id} : (X, \mathrm{top}(X)) \to (X, d)$, jako bijekcja ciągła między przestrzeniami zwartymi, jest homeomorfizmem. $\square$

Jak widzieliśmy na Przykładzie 2.3, klasyczne widmo, rozumiane jako zbiór charakterów, może być puste w przypadku nieprzemiennym. Powstaje zatem naturalne pytanie o znalezienie kandydata na analog $\widehat{\mathfrak{A}}$, gdy $\mathfrak{A}$ może być nieprzemienną C^*-algebrą. Jedna z możliwości jest oparta o pojęcie stanu, a dokładniej stanu czystego. Ponieważ zbiór $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ wszystkich stanów na $\mathfrak{A}$ jest zwarty w lokalnie wypukłej topologii (dokładniej: w topologii zbieżności punktowej), to z tw. Kreina-Milmana wynika niepustość zbioru jego punktów ekstremalnych, czyli stanów czystych. Poniższe przykłady pokazują dlaczego $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ może stanowić substytut widma:

Przykłady 2.8. Niech $\mathfrak{A} = C(X)$. Dzięki twierdzeniu Riesza o reprezentacji, przestrzeń dualna do $\mathfrak{A}$ może być utożsamiana z przestrzenią (zespolonych) miar Radona na X, zaś $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ — z przestrzenią (nieujemnych) miar probabilistycznych. Wreszcie, jeżeli nośnik takiej miary ma conajmniej dwa punkty, to można ją zapisać jako kombinację wypukłą dwóch miar probabilistycznych. Zatem taka miara nie wyznacza stanu czystego. Wobec tego zbiór stanów czystych może być utożsamiany ze zbiorem miar Diraca $\{\delta_x : x \in X\}$ gdzie $\delta_x(f) := f(x)$. Zatem w przypadku przemiennym (z jednością) mamy $\mathcal{P}(\mathfrak{A}) = \widehat{\mathfrak{A}}$.

Na odwrót, jeżeli ω jest charakterem, to jest stanem czystym. Wynika to np. z faktu, że stosowny zbiór

$$\mathcal{N}_\omega = \{x \in \mathfrak{A} : \omega(x^*x) = 0\}$$

z konstrukcji GNS w tym przypadku jest równy $\ker \omega$. Zatem przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_\omega$ z konstrukcji GNS jest jednowymiarowa, więc reprezentacja π_ω jest nieprzywiedlna. Wobec tego ω jest stanem czystym.

2.2 Klasy C^*-algebr

Zdefiniujemy teraz i omówimy w skrócie pewne (mniej lub bardziej) klasyczne typy C^*-algebr, które będą przedmiotem naszego zainteresowania.

Definicja 2.9. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. C^*-algebrę $\mathfrak{A}$ nazywamy: *n-jednorodną* (ang. *n-homogeneous*), gdy dla dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\pi)$ zachodzi $\dim \mathcal{H}_\pi = n$. Jeżeli zamiast równości spełniona jest nierówność, tj. $\dim \mathcal{H}_\pi \leqslant n$, to $\mathfrak{A}$ jest z definicji *n-podjednorodna* (ang. *n-subhomogeneous*, w skrócie n-SH). Gdy istnieje $n \in \mathbb{N}$, że $\mathfrak{A}$ jest n-jednorodna (odp. podjednorodna) to $\mathfrak{A}$ jest z definicji *jednorodna* (odp. *podjednorodna*, w skrócie (SH)).

Jednorodne C^*-algebry zostały scharakteryzowane przez: Fella w 1961 w [14] oraz przez Tomiyamę i Takesakiego. Uzyskana klasyfikacja odwoływała się do pojęcia tzw. *wiązek włóknistych* — bardziej elementarna charakteryzacja została opracowana w [28]. Z kolei podjednorodne C^*-algebry zostały scharakteryzowane w 1966 roku w [41]. Alternatywna charakteryzacja w terminach pewnej specjalnej kategorii przestrzeni topologicznych, tzw. *właściwych wież* (ang. *proper towers*), została uzyskana w [30]. Stamtąd pochodzi również następująca:

Definicja 2.10. C^*-algebrę $\mathfrak{A}$ nazywamy *kurczącą* (ang. *shrinking*), jeżeli jest rezydualnie skończenie wymiarowa oraz spełnia następujący warunek: jeżeli $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem nieprzywiedlnych reprezentacji $\mathfrak{A}$, takim że $\dim \mathcal{H}_{\pi_n} \to \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n(a)\| \to 0$ dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$.

Przypominamy, że C^*-algebra jest nazywana *rezydualnie skończenie-wymiarową* (ang. *residually finite-dimensional*, w skrócie RFD), jeżeli jej skończenie wymiarowe reprezentacje rozdzielają punkty.

Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest podjednorodną C^*-algebrą, to implikacja z warunku z definicji algebry kurczącej jest pusto spełniona, zatem dowolna podjednorodna C^*-algebra jest kurcząca. Gdy z kolei $\mathfrak{A}$ jest C^*-algebrą *z jednością* i istniałby ciąg nieprzywiedlnych reprezentacji $(\pi_n)_n$ taki, że $\dim \mathcal{H}_{\pi_n} \to \infty$, to mielibyśmy $\|\pi_n(1)\| = \|I_{\mathcal{H}_{\pi_n}}\| = 1$. Zatem widzimy, że jeżeli $\mathfrak{A}$ jest kurczącą algebrą z jednością, to $\mathfrak{A}$ musi być podjednorodna.

Definicja 2.11. C^*-algebrę $\mathfrak{A}$ nazywamy *CCR*-algebrą (ang. *completely continuous representation*), jeżeli dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ oraz dla dowolnego a operator $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ jest zwarty.

CCR algebry są czasem nazywane w literaturze *liminal* (zob. np. [13]). Nieco ogólniejszą klasę stanowią tzw. *GCR*-algebry (zwane także w literaturze *postliminal*, zob. [13]).

Klasę algebr GCR uznaje się za najszerszą klasę C^*-algebr, które mogą być badane za pomocą ich widma (rozumianego jako zbiór klas unitarnej równoważnosci reprezentacji nieprzywiedlnych).

Zauważmy prosty fakt: jeżeli $\mathfrak{A}$ ma jedność 1, to reprezentacja $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi(1) = I$:
jeżeli $\pi(a)\xi = 0$ dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ oraz $\pi(1) = I$, to w szczególności $\pi(1)\xi = \xi = 0$.
Na odwrót, przypuśćmy, że $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{H}$ jest gęsta w $\mathcal{H}$ oraz rozważmy $P = \pi(1)$. Wówczas $P = P^2 = P^*$, a zatem P jest projekcją. Jeżeli $a \in \mathfrak{A}$ oraz $\xi \in \mathcal{H}$, to mamy:

$$\pi(a)\xi = \pi(1 \cdot a)\xi = \pi(1)\pi(a)\xi = P(\pi(a)\xi) \in P(\mathcal{H}).$$

Zatem $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{H} \subset P(\mathcal{H})$, skąd $P(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ i $P = I$.
Oczywiście każda reprezentacja nieprzywiedlna jest w szczególności niezdegenerowana[5]: zatem, jeżeli $\mathfrak{A}$ ma jedność oraz π jest nieprzywiedlna, to $\pi(1) = I$. Wobec tego, gdy $\mathfrak{A}$ jest CCR z jednością, to dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji π zachodzi $\dim \mathcal{H}_\pi < \infty$. Implikacja odwrotna jest oczywiście również prawdziwa, zatem w klasie C^*-algebr z jednością, algebry CCR to dokladnie te algebry, dla których reprezentacje nieprzywiedlne są skończenie wymiarowe. Zauważmy jeszcze, że dowolna kurcząca C^*-algebra ma skończenie wymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne.

Załóżmy teraz, że mamy ciąg dokładny C^*-algebr:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{C} \longrightarrow 0.$$

Jeżeli π jest reprezentacją $\mathfrak{B}$ oraz $\pi|_{\varphi(\mathfrak{A})} = 0$, to wtedy π wyznacza reprezentację $\tilde{\pi}$ algebry $\mathfrak{C}$ za pomocą formuły: $\tilde{\pi}(\psi(b)) := \pi(b)$: ponieważ $\ker \psi = \mathrm{im}\varphi \subset \ker \pi$, to $\tilde{\pi}$ jest poprawnie określona (na całym $\mathfrak{C}$, bo ψ jest epimorfizmem). Ponadto $\pi(\mathfrak{B}) = \tilde{\pi}(\mathfrak{C})$ — jeżeli zatem $\tilde{\pi}$ jest nieprzywiedlna, to π również. Wobec tego, rozumując podobnie jak w powyższym przykładzie, widzimy, że gdy wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje algebr $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{C}$ są skończenie wymiarowe, to $\mathfrak{B}$ również ma tę własność. Widzimy więc, że własność ta jest zamknięta na branie rozszerzeń: innymi słowy klasa CCR-algebr z jednością jest zamknięta na branie rozszerzeń. To samo rozumowanie stosuje się do podjednorodnych algebr. W dalszych rozważaniach zobaczymy, że algebry kurczące nie są zamknięte na branie rozszerzeń.

3 Algebra vs. Geometria

Wzajemna odpowiedniość między przemiennymi C^*-algebrami z jednością a zwartymi przestrzeniami Hausdorffa, wynikająca z tw. Gelfanda-Naimarka, nie jest jedynym przykładem sytuacji, w której obiekty *geometryczne* odpowiadają jednoznacznie obiektom *algebraicznym.* Dialog pomiędzy geometrią a algebrą jest znacznie starszy od twierdzenia Gelfanda-Naimarka: wprowadzenie układu współrzędnych przez Kartezjusza do opisu figur geometrycznych było prawdopodobnie pierwszym krokiem w kierunku powiązania geometrii z algebrą. Zasadnicze twierdzenie algebry pozwala odtworzyć (z dokładnością do skalowania) wielomian (obiekt algebraiczny) ze zbioru jego zer (czyli obiektu geometrycznego). Dualność między algebrą i geometrią była systematycznie rozwijana w ramach

[5]Poza trywialnym przypadkiem jednowymiarowej zerowej reprezentacji.

geometrii algebraicznej na poziomie rozmaitości afinicznych, quasi afinicznych, rzutowych oraz quasi rzutowych. Przykładowo, słynne *Twierdzenie Hilberta o zerach* (*Nullstellensatz*) orzeka, że rozmaitości afiniczne w $\mathbb{K}^n$ (gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym) odpowiadają skończenie generowanym, zredukowanym algebrom nad $\mathbb{K}$ (algebra zredukowana to algebra bez elementów nilpotentnych). Pierwsze definicje abstrakcyjnej (tj. niezanurzonej) rozmaitości algebraicznej pochodzą od francuskiej szkoły bourbakistów (A. Weil, C. Chevalley), lecz definicja najbardziej ogólnego obiektu natury *geometrycznej* w kontekście geometrii algebraicznej, tzw. *schematu*, pochodzi od Grothendiecka: schematy afiniczne są tym, co odpowiada dowolnym pierścieniom przemiennym. Geometria algebraiczna zapewnia elastyczność polegającą na możliwości pracy nad dowolnymi ciałami — z drugiej strony, wszystkie struktury algebraiczne pojawiające się w ramach geometrii algebraicznej są *przemienne*, jak również obiekty algebraiczne z reguły nie posiadają dodatkowej struktury topologicznej. Szeroko zakrojony program *Nieprzemiennej Geometrii* polega na systematycznym rozwijaniu odpowiedniości pomiędzy geometrią oraz algebrą, dopuszczając nieprzemienne algebry. Różne dziedziny matematyki o (szeroko rozumianym) charakterze geometrycznym mają swoje odpowiedniki w świecie algebraicznym. Spróbujemy pokrótce omówić najważniejsze przykłady.

3.1 Topologia

Omawiane wcześniej twierdzenie Gelfanda-Naimarka pozwala tłumaczyć własności topologiczne przestrzeni X na algebraiczne własności algebry $C(X)$. Nie jest to jednak jedyny kontakt topologii z teorią C^*-algebr: w kontekście takich obiektów jak *wiązki wektorowe*, bardzo istotne jest również następujące:

Twierdzenie 3.1 (Serre-Swan)**.** *Dowolny skończenie generowany moduł projektywny nad $C(X)$ jest izomorficzny z modułem $\Gamma(X, E)$ sekcji pewnej zespolonej wiązki wektorowej $E \to X$.*

Podobnie jak w przypadku twierdzenia Gelfanda-Naimarka, twierdzenie Serre'a-Swana ustala odpowiedniość między kategorią skończenie generowanych modułów projektywnych nad $C(X)$ a kategorią (skończenie wymiarowych) zespolonych wiązek wektorowych nad X. Odwrotnie niż w przypadku tw. Gelfanda-Naimarka, odpowiedniość ta jest *kowariantna*. Zespolone wiązki wektorowe nad zwartą przestrzenią X (z dokładnością do tzw. *stabilnego izomorfizmu*) są klasyfikowane przez pewną teorię kohomologii, zwaną K-teorią. Pierwotnie K-teoria (dokładniej — *topologiczna* K-teoria, pochodząca od Atiyaha i Hirzebrucha) została zdefiniowana dla zwartej przestrzeni topologicznej, lecz okazało się, że bezpośrednio można uogólnić tę teorię na dowolną, niekoniecznie przemienną C^*-algebrę. *cyklami* w K-teorii są projekcje oraz elementy unitarne w algebrach macierzowych $M_n(\mathfrak{A})$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ może być dowolnie duże.
Każda (uogólniona) teoria (ko)homologii (tj. teoria spełniająca tzw. *aksjomaty Eilenberga-Steenroda*) posiada teorię dualną. Tym samym, K-teoria posiada stosowną teorię dualną — nazywaną *K-homologią*. Problem opisania jak wyglądają cykle w K-homologii był długo otwarty. Częściowe rozwiązanie zaproponował Atiyah: zdefiniował on tzw. *abstrakcyjne operatory eliptyczne* i pokazał istnienie surjekcji ze zbioru tych operatorów na grupy K-homologii. Wciąż jednak nie bylo wiadomo, przez jaką relację równoważności należy

podzielić zbiór operatorów eliptycznych aby uzyskać obiekt izomorficzny z grupami K-homologii. Problem ten został rozwiązany przez Kasparova i doprowadził do definicji tzw. *modułów Fredholma*. Równoważnie, cykle w K-homologii można zdefiniować używając tzw. *dualnych* C^*-algebr i ich K-teorii — podejście to zaproponował Paschke. Zagadnienia te zostały szczegółowo przedstawione w [19], gdzie została także szeroko omówiona tzw. *teoria rozszerzeń* autorstwa Browna-Douglasa-Filmore'a (BDF) i jej związek z K-homologią. Teoria ta zajmuje się klasyfikacją ciągów dokładnych postaci:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow C(X) \to 0. \tag{3.1}$$

Godnym uwagi jest fakt, że motywacją do powstania tej teorii były rozważania natury teorio-operatorowej: jako wniosek z tw. Weyla-von Neumanna (zob. Twierdzenie 2.2.5. w [19]), dowolne dwa operatory samosprzężone na ośrodkowych przestrzeniach Hilberta o tym samym widmie istotnym są *istotnie unitarnie równoważne*, lub innymi słowy, dowolne dwa elementy samosprzężone x_1, x_2 w algebrze Calkina $\mathfrak{Q}(\mathcal{H})$ o tym samym widmie są unitarnie równoważne (w $\mathfrak{Q}(\mathcal{H})$). Jeżeli dwa operatory normalne mają takie same widmo istotne, to także są istotnie unitarnie równoważne, jednak ten rezultat nie jest już wnioskiem z tw. Weyla-von Neumanna. Co więcej, dwa elementy normalne $x_1, x_2 \in \mathfrak{Q}(\mathcal{H})$ o tym samym widmie *nie muszą* być unitarnie równoważne — wynika to z faktu, że w odróżnieniu od operatorów samosprzężonych, jeżeli $\pi(S) \in \mathfrak{Q}(\mathcal{H})$ (gdzie $\pi : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{Q}(\mathcal{H})$ jest kanoniczną projekcją) jest normalny, to niekoniecznie istnieje operator normalny $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ taki, że $\pi(T) = \pi(S)$. Najprostszym przykładem jest operator jednostronnego przesunięcia S, którego obraz w algebrze Calkina jest normalny, jednak S nie może być postaci $T + K$, gdzie T jest normalny i K jest zwarty, bowiem $\mathrm{Index}(S) = -1$, podczas gdy $\mathrm{Index}(T + K) = \mathrm{Index}(T) = 0$. Brown, Douglas i Filmore dowiedli, że nieznikanie indeksu to jedyna przeszkoda do tego aby istotnie normalny operator był zwartą perturbacją operatora normalnego.
Z teorii BDF wynika, że zbiór $\mathrm{Ext}\big(C(X)\big)$ rozszerzeń (3.1) (z dokładnością do stosownie rozumianego izomorfizmu dla takich rozszerzeń) tworzy grupę i rezultat ten pozostaje prawdziwy, gdy klasę przemiennych C^*-algebr zastąpimy obszerniejszą klasą tzw. *nuklearnych* C^*-algebr: wówczas $\mathrm{Ext}(\mathfrak{A}) \cong K^1(\mathfrak{A})$.
W odróżnieniu zatem od K-teorii, która może być rozwijana w czysto „przemiennym" kontekście wiązek wektorowych, dualna teoria (w każdym znanym podejściu) prowadzi w naturalny sposób do nieprzemiennego świata C^*-algebr.

3.2 Logika i Teoria mnogości

W kontekście logiki i teorii mnogości znane jest następujące twierdzenie, pochodzące od Stone'a:

Twierdzenie 3.2. *Istnieje naturalna (kontrawariantna) równoważność między kategorią algebr Boole'a oraz kategorią przestrzeni Stone'a.*

Przestrzeń Stone'a jest tutaj rozumiana jako zwarta, zerowymiarowa przestrzeń topologiczna T_2. Każdej algebrze Boole'a B można przyporządkować przestrzeń Stone'a $S(B)$, kładąc

$$S(B) = \{\text{wszystkie ultrafiltry na } B\}$$

z bazą złożoną ze zbiorów postaci $U_b = \{p \in S(B) : b \in p\}$. Wówczas dowolna, abstrakcyjna algebra Boole'a B jest izomorficzna z algebrą Boole'a podzbiorów domknięto-otwartych $S(B)$ (ozn. $\mathrm{CO}\big(S(B)\big)$). Na poziomie strzałek dyskutowana odpowiedniość wygląda następująco: odwzorowanie ciągłe $f : X \to Y$ między dwoma przestrzeniami Stone'a indukuje odwzorowanie $\mathrm{CO}(Y) \ni C \mapsto f^{-1}(C) \in \mathrm{CO}(X)$ między odpowiadającymi im algebrami Boole'a i na odwrót, dowolny homomorfizm $\varphi : A \to B$ algebr Boole'a wyznacza odwzorowanie $S(B) \ni p \mapsto \{x \in A : \varphi(x) \in p\}$. Podobnie jak w przypadku tw. Gelfanda-Najmarka, własności topologiczne przestrzeni X można tłumaczyć na własności algebraiczne $\mathrm{CO}(X)$ i na odwrót, własności algebraiczne algebry Boole'a B można tłumaczyć na własności topologiczne $S(B)$.

Jednak w odróznieniu od sytuacji topologicznej, gdzie istnieje wielkie bogactwo przykładów nieprzemiennych C^*-algebr, w powyższym kontekście okazuje się, że:
„dowolna algebra Boole'a jest automatycznie przemienna." Wobec tego algebry Boole'a nie prowadzą do nieprzemienn

Jednak pewne idee z zakresu teorii mnogości posiadają swoje odpowiedniki w nieprzemiennym świecie: jednym z centralnych pojęć teorii algebr von Neumanna jest pojęcie *porządku Murraya-von Neumanna* [23, 36]. W przypadku algebry $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ wszystkich operatorów ograniczonych, projekcje P, Q są równoważne w sensie Murraya-von Neumanna wtedy i tylko wtedy gdy $\dim P(\mathcal{H}) = \dim Q(\mathcal{H})$. Wobec tego można w pewien sposób postrzegać klasy równoważności projekcji w algebrze von Neumanna jako „nieprzemienne liczby kardynalne". Odpowiedniość ta nie jest tak ścisła jak w tw. Gelfanda-Najmarka, jednak część pojęć i twierdzeń z zakresu teorii liczb kardynalnych ma swoje odpowiedniki w świecie algebr von Neumanna: nieprzemienne twierdzenie Cantora-Bernsteina (Twierdzenie 6.2.4 w [23]), pojęcie skończonych i nieskończonych projekcji (definicja 6.3.1 w [22]) i ich własności (Prop. 6.3.2, Tw. 6.3.8. w [23]), lemat o połowieniu projekcji (tzw. *Halving Lemma* czyli Lemat 6.3.3. w [23]) itp. Niektóre pojęcia z zakresu porządku Murraya von Neumanna nie mają swojego klasycznego odpowiednika — przykładem jest pojęcie projekcji *właściwie nieskończonej* (ang. *properly infinite*). W zależności od struktury kraty wszystkich (klas równoważności) projekcji (istnienie lub nie tzw. *projekcji abelowych*, istnienie lub nie projekcji skończonych) von Neumann wprowadził rozróżnienie wśród algebr von Neumanna na algebry typu I, II oraz III. W przypadku algebr von Neumanna, których centrum jest trywialne (tzw. *faktorów*), porządek Murraya von-Neumanna jest liniowy — wówczas np. definicja algebry von Neumanna typu I sprowadza się do istnienia projekcji *minimalnych* — co jest własnością teorio-mnogościową (porządkową).

Własności porządkowe w algebrach von Neumanna to nie jedyny związek teorii algebr von Neumanna z teorią mnogości. Okazuje się, że każda przemienna algebra von Neumanna jest charakteryzowana jednoznacznie przez zestaw liczb kardynalnych $(\alpha_0, \alpha_{\aleph_0}, \alpha_{\aleph_1}, ...)$ gdzie α_0 jest dowolna oraz α_β dla $\beta \geqslant \aleph_0$ jest albo nieskończona albo wynosi 0. Dokładniej, jeżeli $\mathfrak{A}$ jest przemienną algebrą von Neumanna, to

$$\mathfrak{A} \cong \prod_\beta \Big(L^\infty(\mathbb{T}^\beta)\Big)^{\alpha_\beta}$$

gdzie β przebiega klasę wszystkich nieskończonych liczb kardynalnych wraz z zerem, $\mathbb{T}$ oznacza okrąg, na potęgach $\mathbb{T}^\alpha$ rozważamy (skończoną) miarę Haara oraz $\mathbb{T}^0 = \{pt\}$ rozumiemy jako przestrzeń jednopunktową. W szczególności możemy jawnie wypisać wszystkie przemienne algebry von Neumanna działające na ośrodkowej przestrzeni Hilberta (z dokładnością do izomorfizmu). Wraz z odpowiadającymi im zestawami liczb kardynalnych są to:

- $\ell_n^\infty \leftrightarrow (n, 0, 0, ...)$,
- $\ell^\infty \leftrightarrow (\aleph_0, 0, 0, ...)$,
- $L^\infty[0,1] \leftrightarrow (0, \aleph_0, 0, 0, ...)$,
- $\ell_n^\infty \oplus L^\infty[0,1] \leftrightarrow (n, \aleph_0, 0, ...)$,
- $\ell^\infty \oplus L^\infty[0,1] \leftrightarrow (\aleph_0, \aleph_0, 0, 0, ...)$

gdzie przyjmujemy oznaczenie $\ell_n^\infty = \mathbb{C}^n$ z normą supremową.

3.3 Teoria miary

O teorii algebr von Neumanna często myśli się jako o *nieprzemiennej teorii miary* dzięki następującemu rezultatowi (zob. Twierdzenie 1.18.1 w [36]):

Twierdzenie 3.3. *Dowolna przemienna W^*-algebra jest *-izomorficzna z algebrą $L^\infty(X)$ dla pewnej lokalizowalnej przestrzeni z miarą (X, μ).*

Przypominamy, że przestrzeń z miarą nazywamy *lokalizowalną*, jeżeli jest sumą prostą przestrzeni z miarą skończoną. Powyższy rezultat nie ustala jednak dokładnej odpowiedniości między kategorią przemiennych W^*-algebr a kategorią przestrzeni mierzalnych (lub przestrzeni z miarą). W szczególności może się zdarzyć, że dwie nieizomorficzne przestrzenie z miarą, a nawet dwie przestrzenie z miarą o nieizomorficznych σ-algebrach, prowadzą do tej samej przemiennej W^*-algebry (zob. powyższy paragraf). Jednak powyższe twierdzenie nie jest jedynym miejscem, gdzie teoria miary spotyka się z teorią algebr von Neumanna. Innym przykładem związku między tymi dwoma dyscyplinami matematyki jest teoria spektralna: jeżeli $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jest operatorem normalnym na przestrzeni Hilberta, to istnieje dokładnie jedna *miara spektralna* E na borelowskich podzbiorach widma $\sigma(T)$ taka, że $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$. Dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subset \sigma(T)$ operator $E(B)$ jest projekcją (tzw. *projekcją spektralną*). Na ogół $E(B)$ nie należy do C^*-algebry generowanej przez operator T, jednak zawsze $E(B)$ należy do *algebry von Neumanna* generowanej przez T. Co więcej, w przypadku gdy $\mathcal{H}$ jest ośrodkową[6] przestrzenią Hilberta oraz T jest normalny, algebra von Neumanna generowana przez T pokrywa się z $\{f(T) : f : \sigma(T) \to \mathbb{C},\ f - \text{borelowska i ograniczona}\}$. Innymi słowy, tak jak teoria C^*-algebr odpowiada *ciągłemu* rachunkowi funkcyjnemu, tak teoria algebr von Neumanna odpowiada *borelowskiemu* rachunkowi funkcyjnemu.

Związek teorii algebr von Neumanna z teorią miary jest szczególnie widoczny w głębokim twierdzeniu von Neumanna orzekającym, że dowolna algebra von Neumanna jest tzw. *całką prostą* (ang. *direct integral*) faktorów. Twierdzenie to pozwala zredukować badanie ogólnych algebr von Neumanna do badania faktorów. Z kolei nietrywialnych przykładów

[6] W przypadku nieośrodkowej przestrzeni Hilberta algebra von Neumanna generowana przez operator T jest na ogół *większa* od algebry $\{f(T) : f : \sigma(T) \to \mathbb{C},\ f - \text{borelowska i ograniczona}\}$

faktorów dostarcza konstrukcja tzw. *crossed productów.* W skrócie, konstrukcja ta wygląda następująco: startujemy od *przeliczalnie separowalnej* (ang. *countably separated*) przestrzeni z miarą $(X, \mathcal{A}, \mu)$ oraz przeliczalnej grupy dyskretnej G, która działa na X za pomocą mierzalnych bijekcji $\varphi_t,\ t \in G$, zachowujących zbiory miary zero. Wówczas crossed produkt $L^\infty(X) \rtimes G$ działa na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = L^2(X) \otimes \ell^2(G)$ i jest zdefiniowany jako algebra von Neumanna generowana przez operatory $M_f \otimes I$ oraz $U_t \otimes \lambda_t$ gdzie M_f jest operatorem mnożenia przez $f \in L^\infty(X)$, $U_t(h) = \sqrt{\frac{d(\mu\circ\varphi_t^{-1})}{d\mu}}\left(h \circ \varphi_t^{-1}\right)$ oraz $(\lambda_t h)(s) = h(t^{-1}s)$ jest przesunięciem. Konstrukcja ta pozwala reprezentować zarówno $L^\infty(X)$ jak i G na *tej samej* przestrzeni Hilberta. Załóżmy, że działanie grupy jest:

- *istotnie wolne* (ang. *essentially free*[7]) tj. dla dowolnego $g \neq e$ zbiór $\{x \in X : \varphi_g(x) = x\}$ jest miary zero;
- *ergodyczne*, tj. spełniony jest następujący warunek: jeżeli $f \in L^\infty(X)$ jest taka, że dla prawie wszystkich $x \in X$ zachodzi $f \circ \varphi_g(x) = f(x)$ dla dowolnego $g \in G$, to wówczas f jest prawie wszędzie równa funkcji stałej.

Wówczas $L^\infty(X) \rtimes G$ jest faktorem — zatem własności teorio-miarowe (ergodyczność działania istotnie wolnego) decyduje o własności algebraicznej (trywialności centrum). Co więcej, w powyższej konstrukcji można otrzymać wszystkie typy faktorów i ich typ zależy od własności teorio-miarowych (zob. Prop. 8.6.10 w [23]):

Twierdzenie 3.4. *Przy powyższych założeniach o G oraz X, dla $\mathfrak{A} = L^\infty(X) \rtimes G$ mamy:*

1. *$\mathfrak{A}$ jest faktorem typu* I *wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $x_0 \in X$ takie, że $\mu(\{x_0\}) > 0$. Wówczas $\mathfrak{A}$ jest faktorem typu* $\mathrm{I}_{|G|}$,
2. *$\mathfrak{A}$ jest faktorem typu* II *wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki:*
   - *dla dowolnego $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$;*
   - *istnieje G-niezmiennicza, σ-skończona miara ν na $\mathcal{A}$, która jest absolutnie ciągła względem μ.*

   Wówczas $\mathfrak{A}$ jest faktorem typu II_1 *wtedy i tylko wtedy gdy ν jest skończona oraz $\mathfrak{A}$ jest faktorem typu* II_∞ *wtedy i tylko wtedy gdy $\nu(X) = \infty$;*
3. *$\mathfrak{A}$ jest faktorem typu* III *w pozostałych przypadkach.*

3.4 Grupy

Jeżeli chodzi o teorię grup, nie ma jednoznacznej odpowiedzi, czym miałby być nieprzemienny odpowiednik grupy. Jeżeli G jest grupą skończoną, to wszystkie funkcje na G (które można postrzegać jako $C(G)$ gdzie G ma topologię dyskretną) tworzą tzw. *algebrę Hopfa.* Nie wdając się w techniczne szczegóły: algebra Hopfa jest definiowana przez zestaw danych, w których oprócz zwykłego mnożenia i jedności znajdują się:

[7]Działanie grupy G na zbiór X nazywamy wolnym, jeżeli dla dowolnego $x \in X$, warunek $g \cdot x = x$ implikuje, że $g = e$. Zatem jeżeli działanie jest wolne, to jest istotnie wolne

- składniki w pewnym sensie dualne do mnożenia i jedności: tzw. *koprodukt* (ozn. Δ) oraz *kojedność* (ozn. ε), jak również

- tzw. odwzorowanie *antypodu* (ozn. S), będące odpowiednikiem brania elementu odwrotnego w grupie.

Wtedy, w przeciwieństwie do „czystych" algebr, skończenie wymiarowe algebry Hopfa mają następującą własność: przestrzeń dualna H' do skończenie wymiarowej algebry Hopfa H jest także algebrą Hopfa, w naturalny sposób. Działania w H' powstają za pomocą dualizacji działań w H (zob. rozdział pierwszy, sekcja 7 w [21]). Wówczas odwzorowanie dualne do mnożenia w H staje się komnożeniem w H' itd. Zatem gdy G jest grupą skończoną, to $H = (C(G))'$ staje się także algebrą Hopfa: można wtedy utożsamiać H z *algebrą grupową* grupy G, tzn. ze zbiorem $\mathbb{C}G$ wszystkich formalnych kombinacji $\sum_{g\in G} \alpha_g g$, z naturalnie zdefiniowanymi operacjami dodawania, mnożenia przez skalar oraz mnożeniem wyznaczonym przez działanie grupowe (innymi słowy — z mnożeniem splotowym). Algebra $\mathbb{C}G$ pełni też inną ważną rolę, mianowicie służy do zdefiniowania dwóch ważnych C^*-algebr związanych z grupą: tzw. *pełną* oraz *zredukowaną* C^*-algebrę grupy G, oznaczane odpowiednio $C^*(G)$ i $C^*_r(G)$. $C^*(G)$ powstaje jako uzupełnienie $\mathbb{C}G$ w normie $\|\xi\| := \sup\{\|\pi(\xi)\| : \pi$ jest *-reprezentacją $\mathbb{C}G\}$, z kolei $C^*_r(G)$, jako uzupełnienie $\mathbb{C}G$ w normie operatorowej gdzie $g \in G$ działa na $\ell^2(G)$ za pomocą operatora unitarnego U_g, zadanego przez $U_g(\xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$. Wówczas istnieje naturalna surjekcja $C^*(G) \to C^*_r(G)$, której jądro może być nietrywialne. Okazuje się, że surjekcja ta jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G dopuszcza średnią niezmienniczą[8] (zob. np. [6], Tw. 2.6.8.). Konstrukcja $C^*(G)$ oraz $C^*_r(G)$ stosuje się również w szerszym kontekście: dla dowolnych lokalnie zwartych grup topologicznych, a nawet ogólniej, dla dowolnych lokalnie zwartych *grupoidów*. W przypadku, gdy np. grupa G jest dyskretna i *przemienna*, jej grupa dualna $\widehat{G}$, na mocy teorii Pontriagina, jest zwarta i mamy izomorfizmy $C^*_r(G) \cong C^*(G) \cong C(\widehat{G})$. W nieprzemiennym przypadku możemy zatem myśleć o $C^*_r(G)$ jako o obiekcie dualnym do G. Teoria dualności dla zwartych (niekoniecznie przemiennych) grup nosi nazwę teorii *Tannaki-Kreina* (zob. [18], rozdz. 7) i jest istotnie bardziej złożona niż teoria Pontriagina. Klasyczne twierdzenie pochodzące od Tannaki identyfikowało zwartą grupę G z pewnym zbiorem operacji określonych na wszystkich skończenie wymiarowych reprezentacjach grupy G. Nieco nowsze podejście, zaproponowane przez Kreina, używało pojęcia tzw. *algebry Kreina*: w przypadku zwartych grup stosowną algebrą Kreina okazuje się być algebra wszystkich funkcji $f \in C(G; \mathbb{R})$ o tej własności, że rodzina $\{R_x f\}_{x\in G}$ (gdzie $R_x f(y) = f(yx)$) wszystkich przesunięć funkcji f rozpina skończenie wymiarową przestrzeń liniową. Takie funkcje nazywamy *reprezentatywnymi* (ang. *representative*). Algebra ta posiada równeż strukturę algebry Hopfa i w tym kontekście prawdziwy jest analog twierdzenia Gelfanda-Naimarka: zob. Twierdzenia 1.30 i 1.31 w [17]. Te dwa twierdzenia również nazywane są *Teorią dualności Tannaki-Kreina*. Równolegle do (czysto algebraicznej) teorii algebr Hopfa, istnieje rozległa teoria *grup kwantowych*, formułowana w języku C^*-algebr (zob. np. [7], [8], [26]).

[8]Po angielsku takie grupy nazywane są *amenable* co w dosłownym tłumaczeniu znaczy: *uległe*. Występuje tutaj nieprzetłumaczalna gra słów: ang. *mean* znaczy *średnia*, więc słowo *amenable* przypomina, nieistniejące w języku angielskim, słowo *ameanable*, które mogłoby znaczyć „uśrednialna".

3.5 Geometria różniczkowa

Odpowiedniość między przemiennymi C^*-algebrami z jednością i zwartymi przestrzeniami Hausdorffa, jak również odpowiedniość pomiędzy skończenie generowanymi modułami projektywnymi a zespolonymi wiązkami wektorowymi skończonej rangi pozwala zdefiniować K-teorię dla dowolnej C^*-algebry. Przejście od przestrzeni topologicznych do dowolnych C^*-algebr w kontekście K-teorii jest raczej bezpośrednie. W kontekście (klasycznej) K-teorii istotną rolę pełni tzw. *charakter Cherna* (ozn. Ch). Jest to naturalna transformacja: $\mathrm{Ch} : K^*(X) \to H^*(X, \mathbb{Q})$ o wartościach w pierścieniu kohomologii o współczynnikach wymiernych — naturalność oznacza, że zachodzi wzór $\mathrm{Ch}(f^*E) = f^*\mathrm{Ch}(E)$. $K^*(X)$ posiada strukturę pierścienia (względem sumy Whitneya oraz iloczynu tensorowego wiązek) i charakter Cherna jest homomorfizmem pierścieni tj. posiada własności: $\mathrm{Ch}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{Ch}(E_1) + \mathrm{Ch}(E_2)$ oraz $\mathrm{Ch}(E_1 \otimes E_2) = \mathrm{Ch}(E_1)\mathrm{Ch}(E_2)$. Jeżeli przestrzeń podkładowa X jest opowiednio regularna (homotopijnie równoważna z CW-kompleksem), to z dokładnością do części torsyjnej, charakter Cherna ustala izomorfizm: tzn. naturalne przedłużenie $\mathrm{Ch} : K^*(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^*(X, \mathbb{Q})$ jest izomorfizmem pierścieni. W kontekście nieprzemiennym a priori nie wiadomo w jaką teorię (ko)homologii miałby działać nieprzemienny odpowiednik charakteru Cherna. Stosowną teorię odkryli niezależnie w latach '80 Connes oraz Tsygan: teoria ta nosi nazwę *(ko)homologii cyklicznej*. Stosowny kompleks (ko)łańcuchowy tej teorii powstaje jako pewien podkompleks *kompleksu Hochschilda*.

(Ko)Homologia Hochschilda została zdefiniowana w 1945 przez Hochschilda w [20]. Motywacją dla rozważania tej teorii był min. problem klasyfikacji (klas równoważności) pewnych rodzajów rozszerzeń algebr, lecz okazało się, że teoria (ko)homologii Hochschilda posiada głębokie związki z tzw. *teorią deformacji* oraz *teorią *-produktów*, jak również, że grupy (ko)homologii Hochschilda są związane z kompleksem de Rhama. Dokładniej, stosowne twierdzenie autorstwa trójki Kostant-Hochschild-Rosenberg orzeka, że homologia Hochschilda dla algebry funkcji regularnych na gładkiej, afinicznej rozmaitości jest izomorficzna z pierścieniem form różniczkowych. Stosownie modyfikując definicję (ko)homologii Hochschilda dla algebr topologicznych okazuje się, że dla gładkiej, zwartej rozmaitości M, n-ta grupa (ciągłej) homologii Hochschilda $C^\infty(M)$ jest izomorficzna z przestrzenią n-form różniczkowych $\Omega^n(M)$ na M (Connes). Rozszerzenie tego rezultatu na przypadek dowolnej parazwartej, gładkiej rozmaitości zostało opracowane przez Telemana (zob. [40, 5]). Dualny rezultat (tzn. związek między kohomologią Hochschilda a przestrzenią tzw. *prądów* (ang. *currents*)) jest również prawdziwy (tw. 8.17 w [17]). Możemy zatem myśleć o (ko)homologii Hochschilda jako o nieprzemiennym odpowiedniku form różniczkowych (prądów).

Oprócz związku, wynikającego z porównania definicji, między (ko)homologią Hochschilda oraz cykliczną, istnieje długi ciąg dokładny łączący obie teorie. Tak jak w przypadku (ko)homologii Hochschilda, dla algebr topologicznych, istnieje również stosowna definicja ciągłej (ko)homologii cyklicznej. Wtedy dla algebry $C^\infty(M)$, n-ta grupa kohomologii cyklicznej jest izomorficzna z $Z^n \oplus H^{dR}_{n-2}(M) \oplus ... \oplus H^{dR}_k(M)$ gdzie: Z^n oznacza przestrzeń n-prądów zamkniętych, $H^{dR}_i(M)$ są grupami homologii de Rhama i $k = 0$ lub $k = 1$ gdy n jest parzyste lub nieparzyste (odpowiednio). W wielu rozważaniach wygodniej używać tzw. *periodycznej (ko)homologii cyklicznej*, ozn. $HP^i(A)$, gdzie $i = 0, 1$ odpowiada parzystej i nieparzystej teorii.

Wreszcie, w kontekście (ko)homologii cyklicznej, zdefiniować można tzw. *charakter*

Connesa-Cherna w K-teorii $\mathrm{Ch}_* : K_*(A) \to HP_*(A)$ oraz w K-homologii $\mathrm{Ch}^* : K^*(A) \to HP^*(A)$. Pomiędzy K-teorią a K-homologią istnieje kanoniczne parowanie w postaci indeksu pewnego operatora zdefiniowanego w oparciu o dane wyznaczające klasę w K-teorii i K-homologii. Wówczas znamienite tw. Connesa orzeka, że diagram

$$\begin{array}{ccc} K^*(\mathcal{A}) \times K_*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}} & \mathbb{Z} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Ch^* \times Ch_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota} \\ HP^*(\mathcal{A}) \times HP_*(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

jest przemienny: pozioma górna strzałka to wspomniane wyżej parowanie między K-teoria i K-homologią w postaci indeksu pewnego operatora, z kolei pozioma dolna strzałka to naturalne parowanie ewaluacji.

Podsumowując powyższe rozważania, mamy następujące odpowiedniości

Geometria	**Algebra**
Formy różniczkowe	Homologia Hochschilda
Prądy	Kohomologia Hochschilda
Kohomologia de Rhama	(periodyczna) Homologia cykliczna
Homologia de Rhama	(periodyczna) Kohomologia cykliczna
Charakter Cherna	Charakter Connesa-Cherna

3.6 Analiza

Jedną z podstawowych nowych idei nieprzemiennej geometrii różniczkowej jest istnienie stosownych odpowiedników klasycznych pojęć z zakresu analizy, pod zbiorczą nazwą tzw. *Quantized Calculus* (zob. rozdział 4 w [10]). Niektóre pojęcia z zakresu analizy uogólniają się na przypadek nieprzemienny w prosty sposób: np. pojęcie *zmiennej zespolonej*, jako odwzorowania $f : X \to \mathbb{C}$, zostaje zastąpione pojęciem dowolnego operatora $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, gdzie $\mathcal{H}$ jest nieskończenie wymiarową, ośrodkową przestrzenią Hilberta. Zmiennej rzeczywistej odpowiadają operatory samosprzężone. Zbiorowi wartości zmiennej f odpowiada $\sigma(T)$ (krotność spektralna widma odpowiada temu, że pewna wartość zmiennej może być przyjmowana więcej niż raz). Podobnie jak w przypadku zespolonym istotne są funkcje holomorficzne, tak w przypadku dowolnego operatora $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, rachunek funkcyjny dla T ma naturalny sens tylko w zakresie funkcji holomorficznych (w otoczeniu $\sigma(T)$). Gdy jednak operator T jest samosprzężony, to $h(T)$ jest poprawnie zdefiniowane dla dowolnej borelowskiej funkcji. W tym (operatorowym) kontekście pojęcie *nieskończenie małej* znajduje swój odpowiednik pod postacią operatora zwartego: jeżeli K jest zwarty, to możemy rozważyć nieujemny, również zwarty, operator $|K| := \sqrt{K^*K}$. Możemy ustawić jego (dodatnie) wartości własne $\{\mu_n(K)\}_n$ w ciąg malejący do 0. Wówczas asymptotyka ciągu $\{\mu_n(K)\}_n$ pozwala zdefiniować *rząd* nieskończenie małej: możemy myśleć, że operator K jest nieskończenie małą rzędu α, gdy $\mu_n(K) = O(n^{-\alpha})$.

Do zdefiniowania odpowiednika różniczki potrzebny jest samosprzężony operator $F \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ taki, że $F^2 = I$. Wówczas utożsamiając funkcję f z operatorem mnożenia M_f, wyrażenie $[F, f]$ pełni rolę różniczki df. Ta procedura przypomina kwantowanie nawiasów Poissona z mechaniki klasycznej.

Kolejnym ważnym składnikiem „kwantowego rachunku” jest analogon całki, którym jest tzw. *ślad Dixmiera* (zob. rozdział 4 w [10] oraz rozdział 7 w [17]). Ślad ten oznaczamy na ogół poprzez tr_ω. Jest on skonstruowany w następujący sposób:

- Rozważamy sumy częściowe $\sigma_n(A) := \mu_0(A) + \mu_1(A) + ... + \mu_{n-1}(A)$. Wówczas sprawdzić można, że zachodzi wzór $\sigma_n(A) = \inf\{\|S\|_1 + n\|T\| : S - \text{śladowy},\ T \in \mathfrak{K}(\mathcal{H}),\ S + T = A\}$.
- Możemy zatem dla dowolnego $\lambda \geqslant 0$ położyć $\sigma_\lambda(A) = \inf\{\|S\|_1 + \lambda\|T\| : S - \text{śladowy},\ T \in \mathfrak{K}(\mathcal{H}),\ S + T = A\}$. Rozważamy tzw. *ideał Dixmiera* zdefiniowany następująco:
$$\mathfrak{L}^{1+} = \{T \in \mathfrak{K}(\mathcal{H}) : \|T\|_{1+} := \sup_{\lambda \geqslant e} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda} < \infty\}.$$
- Dla $A \in \mathfrak{L}^{1+}$ kładziemy $\tau_\lambda(A) = \frac{1}{\log \lambda} \int_3^\infty \frac{\sigma_u(A)}{u \log u} du$.
- Rozważamy $\tau(A) \in C_b\Big([3, \infty)\Big)/C_0\Big([3, \infty)\Big)$ będące klasą funkcji $\lambda \mapsto \tau_\lambda(A)$.
- Niech ω będzie stanem na $C_b\Big([3, \infty)\Big)/C_0\Big([3, \infty)\Big)$. Ostatecznie kładziemy $\mathrm{tr}_\omega(A) := \omega(\tau(A))$

Wówczas kluczową własnością tr_ω jest to, że $\mathrm{tr}_w(K) = 0$ gdy K jest nieskończenie małą rzędu > 1 (w sensie omówionym powyżej).
Powyższa dyskusja pozwala zatem myśleć o następujących odpowiedniościach:

Geometria	**Algebra**
Zmienna zespolona	Operator w $\mathcal{H}$
Zmienna rzeczywista	Samosprzężony operator w $\mathcal{H}$
Nieskończenie mała (rzędu α)	Operator zwarty K (taki, że $\mu_n(K) = O(n^{-\alpha})$)
Różniczka funkcji df	$[F, f]$
Całka	Ślad Dixmiera

3.7 Geometria riemannowska

Na chwilę obecną prawdopodobnie najbogatszą strukturą, która doczekała się nieprzemiennego uogólnienia, jest (gładka, zwarta, spójna, bez brzegu) rozmaitość riemannowska, której nieprzemiennym wcieleniem jest tzw. *trójka spektralna*. Jest to zestaw danych postaci $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, gdzie $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jest *-podalgebrą oraz D jest pewnym (domkniętym, gęsto określonym, na ogół nieograniczonym) operatorem w $\mathcal{H}$. O operatorze D zakłada się, że jest samosprzężony, ma zwartą rezolwentę oraz komutatory $[D, a]$ są ograniczone dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$. Istnieje szereg różnych wariantów definicji trójki spektralnej (tzw. *parzysta* trójka spektralna, *rzeczywista* trójka spektralna). Najbardziej klasyczny przykład trójki spektralnej otrzymujemy startując od spin^c rozmaitości[9] M: stosowną przestrzenią Hilberta wówczas jest przestrzeń $L^2(M; S)$ sekcji wiązki spinorowej, zaś odpowiedni operator zadający strukturę trójki spektralnej to operator Diraca D. Wówczas z zestawu

[9]Gdy rozmaitość M spełnia silniejszy warunek bycia rozmaitością spinową, to na $(M, L^2(M, S), D)$ można zadać strukturę rzeczywistej trójki spektralnej.

danych $(M, L^2(M; S), D)$ można odtworzyć odległość geodezyjną na M oraz całkowanie względem formy objętości (zob. rozdział 5 w [10] po więcej szczegółów). Jednak założenie, że rozmaitość M jest spinowa, nie jest niezbędne[10]: dla dowolnej (gładkiej, zwartej, bez brzegu) rozmaitości riemannowskiej M można rozważyć przestrzeń $L^2(M; \Omega(M))$ całkowalnych z kwadratem form różniczkowych na M oraz operator $d+d^*$, gdzie d jest różniczką zewnętrzną a d^* operatorem (formalnie) sprzężonym do d. W ten sposób powstaje *przemienna* trójka spektralna. Głębokie *Twierdzenie o rekonstrukcji* Connesa orzeka, że każda przemienna trójka spektralna spełniająca szereg warunków powstaje z pewnej rozmaitości riemannowskiej (zob. Tw. 1.1 i Tw. 1.2 [11]).

Jak wspomnieliśmy wyżej, z zestawu danych $(C^\infty(M), L^2(M, S), D)$ można odwtorzyć geodezyjną odległość na rozmaitości M. Zachodzi bowiem następujący wzór:

$$d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leqslant 1\} \tag{3.2}$$

gdzie f utożsamiamy z operatorem mnożenia przez f. Warunek $\|[D, f]\| \leqslant 1$ mówi, że f nie zmienia się zbyt gwałtownie: istotnie, zachodzi bowiem $\|[D, f]\| = \|\mathrm{grad} f\|$. W sytuacji przemiennej wzór (3.2) można łatwo zmodyfikować tak, żeby otrzymać „metrykę” (o wartościach w $[0, \infty]$) na przestrzeni wszystkich stanów danej algebry. Te rozważania stały się motywacją dla teorii tzw. *kwantowych przestrzeni metrycznych* (zob. [34]), zaproponowanej przez Rieffela. Obiektem rozważań dla kwantowych przestrzeni metrycznych są tzw. *order-unit spaces* — dla takich obiektów istnieje definicja przestrzeni stanów. Wówczas kwantowa przestrzeń metryczna jest zdefiniowana jako para (A, L) gdzie A to order-unit space, zaś L jest tzw. *Lip-normą* na $\mathcal{S}(A)$. W ten sposób kwantowe przestrzenie metryczne są z jednej strony ogólniejsze od trójek spektralnych, z drugiej zaś, stanowią dużo mniej bogatą strukturę niż trójki spektralne. Naszym celem będzie zaproponowanie alternatywnego podejścia pozwalającego zdefiniować w naturalny sposób metrykę na przestrzeni wszystkich *-reprezentacji danej C^*-algebry: będziemy więc niejako pracować na poziomie *topologicznym*, a dokładniej — *metrycznym* (rozważając ośrodkowe C^*-algebry).

4 Moduły ciągłości

4.1 Wklęsłe moduły ciągłości

W dalszej części rozważań pojawi się definicja odpowiednika modułu ciągłości (dla elementu C^*-algebry) w nieprzemiennym kontekście. Ponieważ w literaturze nie istnieje jednoznaczna definicja modułu ciągłości, dlatego omówimy co dokładnie będziemy rozumieć pod tym pojęciem. Jeżeli $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest funkcją jednostajnie ciągłą, to od funkcji $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty]$ mającej być modułem (jednostajnej) ciągłości dla f żąda się, aby dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodziła nierówność:

$$d_Y\Big(f(x_1), f(x_2)\Big) \leqslant w\Big(d_X(x_1, x_2)\Big).$$

[10] Dla rozmaitości spinowych istnieje jedyny, kanoniczny operator Diraca. Ponadto rozmaitości spinowe (lub spin^c), podobnie jak trójki spektralne, są również ważne z punktu widzenia fizyki. Dlatego często myśli się o trójkach spektralnych jako o nieprzemiennych spin^c rozmaitościach

Zwykle od funkcji ω wymaga się również, aby $\omega(0) = 0$ lub czasem $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$. Naturalne jest również założenie, żeby ω była funkcją niemalejącą[11]. Jest to motywowane następującym rezultatem:

Fakt 4.1. *Dla odwzorowania $F : X \to Y$ działającego między przestrzeniami metrycznymi następujące warunki są równoważne:*

- *F jest jednostajnie ciągłe;*
- *istnieje niemalejąca funkcja $\omega : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ spełniająca $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$ oraz taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi*
$$d_Y\Big(F(x_1), F(x_2)\Big) \leqslant \omega\Big(d_X(x_1,x_2)\Big).$$

Funkcja $\omega \circ d_X$ nie musi byc metryką w ogólnym przypadku: odpowiedzi na to, kiedy tak jest udziela następujące:

Twierdzenie 4.2. *Niech $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie dowolną funkcją. Następujące warunki są równoważne:*

- *dla dowolnej metryki d, złożenie $f \circ d$ jest także metryką;*
- *$(f(t) = 0 \iff t = 0)$ oraz jeżeli $|b-c| \leqslant a \leqslant b+c$, to $f(a) \leqslant f(b) + f(c)$.*

Gdy jeden z powyższych warunków jest spełniony, to dodatkowo $f \circ d$ oraz d są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ d$ oraz d są jednostajnie równoważne, co z kolei zachodzi tylko wtedy, gdy $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$.

Jeżeli zatem ω jest niemalejąca i spełnia warunek, że dla dowolnej metryki d funkcja $\omega \circ d$ jest także metryką, to ω jest podaddytywna. Naturalne jest rozważanie *najmniejszych* modułów (jednostajnej) ciągłości — jeżeli jednak rozważymy zbiór

$$\{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : f - \text{niemalejąca, podaddytywna}, f(0) = 0\}$$

z porządkiem punktowym, to zbiór ten nie będzie zamknięty na branie punktowych kresów dolnych. Jednakże dla rodziny funkcji wklęsłych, punktowy kres dolny *jest* znowu funkcją wklęsłą oraz prawdziwy jest poniższy:

Fakt 4.3. *Jeżeli $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jest słabo rosnąca, wklęsła i spełnia $\omega(0) = 0$, to ω jest podaddytywna.*

Mając wszystkie powyższe fakty na uwadze, stawiamy następującą definicję:

Definicja 4.4. Funkcję $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nazywamy *modułem jednostajnej ciągłości* dla odwzorowania $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, jeżeli $\omega(0) = 0$, ω jest ciągła, niemalejąca, wklęsła i spełnia
$$d_Y\Big(f(x_1), f(x_2)\Big) \leqslant w\Big(d_X(x_1,x_2)\Big).$$
Będziemy stosować robocze oznaczenie:

$$\Omega = \{w : [0,\infty) \to [0,\infty) : \ \omega \text{ jest funkcją ciągłą, wklęsłą, niemalejącą, } \omega(0) = 0\}.$$

[11]można zawsze położyć $w_1(t) := \sup_{s\leqslant t} w_1(s)$

Powstaje naturalne pytanie, kiedy funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ dopuszcza wklęsły moduł ciągłości? Odpowiedzi na to pytanie udziela następujący rezultat:

Fakt 4.5. *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ dopuszcza wklęsły moduł ciągłości wtedy i tylko wtedy, gdy f jest jednostajną granicą funkcji lipschitzowskich.*

Zwróćmy uwagę, że jeżeli (X, d) jest przestrzenią zwartą, to oba warunki występujące w powyższym rezultacie są automatycznie spełnione:

- f dopuszcza wklęsły moduł ciągłości, bowiem f jest ograniczona;
- funkcje lipschitzowskie tworzą algebrę oraz rozdzielają punkty (np. funkcje postaci $d(x, \cdot)$ rozdzielają punkty), zatem z tw. Stone'a-Weierstrassa leżą gęsto w $C(X)$, czyli dowolna funkcja ciągła jest jednostajną granicą funkcji lipschitzowskich.

Uwaga 4.6. Wklęsłość ω rozumiemy jako spełnianie *słabej* nierówności: $t\omega(x) + (1 - t)\omega(y) \leqslant \omega(tx + (1-t)y)$ — w szczególności dopuszczamy żeby funkcje stałe były wklęsłe i tym samym funkcja stale równa 0 będzie mogła służyć za moduł ciągłości (dla stałej funkcji).

Jeżeli $f \in C(X)$ jest funkcją (jednostajnie) ciągłą, to możemy rozważyć jej najmniejszy moduł ciągłości $\omega_f \in \Omega$. Wówczas przyporządkowanie $f \mapsto \omega_f$ ma następujące własności:

- $\omega_{f+g} \leqslant \omega_f + \omega_g$;
- $\omega_{cf} = |c|\omega_f$;
- $\omega_{\overline{f}} = \omega_f$;
- $\omega_{fg} \leqslant \|f\|\omega_g + \|g\|\omega_f$.

Przykładowo, dla dowodu ostatniej własności, szacujemy:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ = |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| &\leqslant \|f\|\omega_g\big(d(x,y)\big) + \|g\|\omega_f\big(d(x,y)\big) = \\ &= \big(\|f\|\omega_g + \|g\|\omega_f\big)\big(d(x,y)\big). \end{aligned}$$

Dla naszych dalszych rozważań, w ktorych pojawi się odpowiednik modułu (jednostajnej) ciągłości dowolnego elementu ośrodkowej C^*-algebry z jednością, przypomnijmy następujące:

Twierdzenie 4.7 (Aronszajn-Panitchpakdi)**.** *Niech $f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ będzie funkcją niemalejącą, spełniającą warunek $f(0) = 0$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *istnieje wklęsła, niemalejąca, ciągła funkcja $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$, taka że $\omega(0) = 0$ oraz $f \leqslant \omega$;*
2. *istnieje podaddytywna, niemalejąca, ciągła funkcja $\omega : [0, \infty) \to [0; \infty)$, taka że $w(0) = 0$ oraz $f \leqslant \omega$;*
3. *zachodzi $\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$ oraz $\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} < \infty$.*

Wniosek 4.8. *Funkcja ω jak powyżej istnieje, gdy f jest niemalejąca, ograniczona i $f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$.*

4.2 Tw. Ascolego-Arzeli i uwagi dotyczące zbieżności

Dalej rozważać będziemy zagadnienie zwartości w kontekście C^*-algebr, dlatego przypomnijmy twierdzenie Ascolego-Arzeli. Najbardziej klasyczna wersja tegoż twierdzenia dotyczy podzbiorów $C([a,b])$, ale prawdziwe są rozmaite ogólniejsze warianty: dla kontekstu naszych rozważań najbardziej odpowiednie wydaje się następujące sformułowanie:

Twierdzenie 4.9. *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, przy czym zakładamy, że X jest zwarta. Wówczas podzbiór $K \subset C(X,Y)$ jest relatywnie zwarty (w topologii zbieżności jednostajnej) wtedy i tylko wtedy, gdy K jest jednakowo ciągły oraz punktowo relatywnie zwarty.*

Przypuśćmy, że X, Y są zwartymi przestrzeniami metrycznymi z metrykami d_X, d_Y (odpowiednio). Na zbiorze $C(X,Y)$ wszystkich odwzorowań ciągłych $X \to Y$ można rozważać topologię zbieżności punktowej. Wówczas okazuje się, że dla ciągu uogólnionego $(u_s)_s$ w $C(X,Y)$ mamy $u_s \to u$ punktowo wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji $f \in C(Y)$ zachodzi $f \circ u_s \to f \circ u$ (punktowo). Istotnie: jeżeli $u_s(x) \to u(x)$ dla dowolnego $x \in X$, to $f(u_s(x)) \to f(u(x))$ dla dowolnej $f \in C(Y)$. Na odwrót, załóżmy że dla dowolnej $f \in C(Y)$ i dowolnego $x \in X$ mamy $f(u_s(x)) \to f(u(x))$ oraz przypuśćmy, że dla pewnego $x_0 \in X$ mamy $u_s(x_0) \nrightarrow u(x_0)$. Ze zwartości możemy (przechodząc do podciągu) założyć, że $u_s(x_0) \to y$ dla pewnego $y \in Y$, $y \neq u(x_0)$. Wtedy jednak dla dowolnej funkcji $f \in C(Y)$ mamy $f(u_s(x_0)) \to f(y)$ oraz $f(u_s(x_0)) \to f(u(x_0))$, skąd $f(u(x_0)) = f(y)$ i (skoro funkcje ciągłe rozdzielają punkty) $u(x_0) = y$.
Na $C(X,Y)$ możemy rozważać też topologię zbieżności jednostajnej: wówczas okazuje się, że $u_n \rightrightarrows u$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji ciągłej $f \in C(Y)$ mamy $f \circ u_n \rightrightarrows f \circ u$. Istotnie, niech $u_n \rightrightarrows u$ oraz $f \in C(Y)$. Wówczas f jest jedostajnie ciągła: ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$, takie że dla $y_1, y_2 \in Y$ spełniających $d_Y(y_1, y_2) < \delta$ zachodzi $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$. Niech s_0 będzie takie, że dla $s > s_0$ zachodzi $d_Y(u_s(x), u(x)) < \delta$ jednostajnie ze względu na x: wtedy też dla $s > s_0$ mamy

$$|f(u_s(x)) - f(u(x))| < \varepsilon$$

jednostajnie ze względu na x czyli $f \circ u_n \rightrightarrows f \circ u$. Odwrotnie, załóżmy że $f \circ u_n \rightrightarrows f \circ u$, ale nie zachodzi $u_n \rightrightarrows u$. Zbieżność jednostajna $u_n \rightrightarrows u$ jest równoważna warunkowi: dla dowolnego ciągu $x_n \to x$ zachodzi $u_n(x_n) \to u(x)$ (zob. np. [24], Twierdzenie 3-5, rozdział nt. jednostajnej zbieżności), zatem nasze założenie nie wprost mówi, że $u_n(x_n) \nrightarrow u(x)$ dla pewnego $x \in X$ oraz ciągu $x_n \to x$. Ze zwartości możemy założyć, że $u_n(x_n) \to y$ i wtedy $f(u_n(x_n)) \to f(y)$, ale również (z jednostajnej zbieżności $f \circ u_n \rightrightarrows f \circ u$) zachodzi $f(u_n(x_n)) \to f(u(x))$. Z dowolności f musi być $y = u(x)$.

W klasycznym kontekście zbieżność jednostajna $u_n \rightrightarrows u$ jest bardziej naturalna od warunku zbieżności $f \circ u_n \rightrightarrows f \circ u$ dla dowolnej $f \in C(Y)$. Jednak ten drugi warunek jest umotywowany następująco: jeżeli $u \in C(X,Y)$ jest odwzorowaniem ciągłym, to u wyznacza *-homomorfizm $u^* : C(Y) \to C(X)$, $u^*(f) = f \circ u$. Wówczas zbieżność $f \circ u_n \rightrightarrows f \circ u$ jest równoważna punktowo-normowej zbieżności ciągu *-homomorfizmów $u_n^* \to u^*$.

Uwaga 4.10. Gdyby zdefiniować zbieżność $u_n \to u$ za pomocą warunku zbieżności w normie operatorowej $\|u_n^* - u^*\| \to 0$, to otrzymamy zbieżność w topologii dyskretnej, tj. ciąg zbieżny $(u_n)_n$ będzie stały od pewnego miejsca. Z tego powodu nie będziemy rozważać zbieżności w normie operatorowej na $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

5 Motywacja

Niech X będzie zwartą, metryzowalną przestrzenią oraz d — metryką na X, zgodną z topologią. Niech $R := \mathrm{diam} X > 0$ (przy założeniu, że X ma conajmniej 2 elementy) oznacza (skończoną) średnicę X. Określmy następujący zbiór:

$$E := \{f : X \to [0, R] : f \text{ jest nieoddalająca względem } d\}.$$

Wówczas E ma następujące własności:

1. $\overline{E}$ jest zwarty: istotnie, E składa się z funkcji jednakowo ciągłych oraz wprost z definicji, jest punktowo ograniczony. Zatem na mocy tw. Ascolego-Arzeli, E jest relatywnie zwarty.

2. E rozdziela punkty zbioru X: faktycznie, wystarczy rozważyć funkcje $\{f_x\}_{x\in X} \subset E$ zadane wzorem $f_x(y) := d(x, y)$.

3. Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi wzór

$$d(x, y) = \sup_{f\in E} |f(x) - f(y)| :$$

rzeczywiście, dla $f \in E$ mamy $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$, skąd $\sup_{f\in E} |f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$. Z drugiej strony, dla $f_x = d(x, \cdot)$ mamy równość.

Na odwrót, przypuśćmy, że zbiór E spełnia warunki (1) i (2) i określmy $d(x, y)$ tak jak w (3). Wzór ten faktycznie definiuje metrykę:

- d przyjmuje wartości liczbowe, bowiem dla ustalonych x, y odwzorowanie

$$C(X) \ni f \mapsto |f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}$$

jest ciągłe, a więc ograniczone na zbiorze zwartym $\overline{E}$.

- $d(x, y) = 0$ jest równoważne warunkowi $f(x) = f(y)$ dla $f \in E$, skąd z (2) mamy $x = y$.

- Warunek symetrii jest oczywisty, zaś nierówność trójkąta wynika z podaddytywności supremum.

Co więcej, metryka d jest zgodna z topologią zbioru X:
jeżeli $d(x_n, x) \to 0$ tzn. $\sup_{f\in E} |f(x_n) - f(x)| \to 0$, to dla dowolnej funkcji $f \in E$ zachodzi $f(x_n) \to f(x)$. Przypuśćmy nie wprost, że $x_n \not\to x$ — wówczas ze zwartości (ciągowej), istnieje $y \in X, y \neq x$, takie że $x_{n_k} \to y$ dla pewnego podciągu. Wtedy jednak $f(x_{n_k}) \to f(x)$ oraz $f(x_{n_k}) \to f(y)$. Ponieważ E rozdziela punkty X, to musi być $x = y$, co daje sprzeczność.

Odwrotnie, przypuścmy, że $x_n \xrightarrow{\mathrm{top} X} x$. Wtedy dla $f \in E$ mamy $f(x_n) \to f(x)$. Zwartość E gwarantuje warunek jednakowej (jednostajnej) ciągłości, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in X, f\in E}\Big(\rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big)$$

gdzie ρ jest dowolną metryką zgodną z topologią X. Ustalmy więc $\varepsilon > 0$, dobierzmy $\delta > 0$ z jednakowej ciągłości i niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie tak duże, że zachodzi $\rho(x_n, x) < \delta$. Wtedy z jednakowej ciągłości, dla dowolnego $f \in E$ będzie $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$, skąd $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Niech teraz $\mathfrak{A}$ będzie dowolną C^*-algebrą z jednością. Wówczas zachodzi:

Fakt 5.1. *Następujące warunki są równoważne:*

- $\mathfrak{A}$ *jest ośrodkowa;*
- *istnieje zbiór zwarty* K*, taki że* $C^*(K \cup \{1\}) = \mathfrak{A}$.

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że K jest jak wyżej. Wtedy K jest ośrodkowy, skąd istnieje przeliczalny zbiór gęsty $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Najmniejsza C^*-algebra z jednością zawierająca K jest domknięciem (w normie) zbioru wszystkich elementów postaci $p(x_1, ..., x_k, x_1^*, ..., x_k^*)$ gdzie $x_1, ..., x_k \in K$, $k \in \mathbb{N}$ oraz p jest wielomianem $2k$ zmiennych wolnych. Wówczas zbiór wszystkich wielomianów postaci $q(y_1, ..., y_k, y_1^*, ..., y_k^*)$ gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz q jest wielomianem $2k$ zmiennych wolnych o współczynnikach *wymiernych*, jest przeliczalny oraz gęsty w $\mathfrak{A}$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\mathfrak{A}$ jest ośrodkowa. Wybierzmy ośrodek $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w (domkniętej) kuli jednostkowej w $\mathfrak{A}$ i połóżmy

$$K := \{0\} \cup \{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Wtedy, skoro $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, to K składa się z (jednego) ciągu zbieżnego i jego granicy — jest więc zwarty. Co więcej, mamy $\mathrm{lin}K = \mathrm{lin}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i zbiór ten jest gęsty w kuli jednostkowej, zatem w całym $\mathfrak{A}$. Wobec tego generuje on całą algebrę $\mathfrak{A}$. □

6 Struktura jednostajna na zbiorze reprezentacji

6.1 Struktura metryczna na zbiorze reprezentacji

Niech teraz $\mathfrak{A}$ będzie ośrodkową C^*-algebrą z jednością oraz K będzie zwartym zbiorem generującym $\mathfrak{A}$ (jak już wiemy z poprzednich rozważań, taki zbiór istnieje). Ustalmy dwie zachowujące jedność *-reprezentacje $\mathfrak{A}$, $\pi_1, \pi_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\ell^2)$ i połóżmy

$$d_K(\pi_1, \pi_2) := \sup_{a \in K} \|\pi_1(a) - \pi_2(a)\|. \tag{6.1}$$

Oznaczmy $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}) := \{\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\ell^2) : \pi \text{ jest *-reprezentacją, } \pi(1) = I\}$. Wybór ℓ^2 jako przestrzeni Hilberta, na której działać ma $\mathfrak{A}$, jest podyktowany następującą argumentacją:

- skoro $\mathfrak{A}$ jest ośrodkowa, to istnieje wierna reprezentacja $\mathfrak{A}$ na ośrodkowej przestrzeni Hilberta — innymi slowy, reprezentacje na ℓ^2 rozdzielają punkty,
- oczywiście wszystkie ośrodkowe, nieskończenie wymiarowe przestrzenie Hilberta są ze sobą (unitarnie) równoważne, jednak wybór ℓ^2 jest podyktowany tym, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy naturalne zanurzenie $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \ell^2$. Innymi słowy, gdy π jest skończenie wymiarową reprezentacją to $\aleph_0 \odot \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi$ jest reprezentacją na przestrzeni ℓ^2.

Fakt 6.1. *Wzór* (6.1) *definiuje metrykę na* $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$.

Dowód. d_k ma wartości liczbowe: istotnie, mamy

$$\sup_{a \in K} \|\pi_1(a) - \pi_2(a)\| \leqslant \sup_{a \in K} \Big(\|\pi_1(a)\| + \|\pi_2(a)\| \Big) \leqslant 2 \sup_{a \in K} \|a\| < \infty$$

bowiem K jest ograniczony.
Jeżeli $d_K(\pi_1, \pi_2) = 0$, to dla dowolnego $a \in K$ mamy $\pi_1(a) = \pi_2(a)$. Skoro jednak K generuje algebrę $\mathfrak{A}$ oraz π_j, $j = 1, 2$ zachowują wszystkie operacje algebraiczne (i jedność), to zachodzi $\pi_1(x) = \pi_2(x)$ dla dowolnego $x \in \mathfrak{A}$, czyli $\pi_1 = \pi_2$.
Symetria d_K jest oczywista a nierówność trójkąta wynika z podaddytywności supremum. □

Uwagi 6.2. Powyższe rozumowanie pokazuje nie tylko, że d_K ma wartości liczbowe, ale dowodzi w istocie, że $(\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}), d_K)$ jest ograniczona i $\mathrm{diam}\Big(\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})\Big) \leqslant 2\mathrm{diam}(K)$. Co więcej, powyższy rezultat jest również prawdziwy gdy K jest tylko ograniczony (dowód pozostaje ten sam), jednak gdy dopuścimy wszystkie zbiory ograniczone K to topologie wyznaczone przez metryki d_K mogą być między sobą różne. Wkrótce zobaczymy, że sytuacja taka nie ma miejsca w przypadku, gdy K jest zwarty.

Jeżeli zaś K będzie ograniczony, ale nie będzie generować całej algebry $\mathfrak{A}$, to d_K będzie tylko pseudometryką.
Wprost z definicji otrzymujemy następujące własności:

- $K_1 \subset K_2 \Rightarrow d_{K_1} \leqslant d_{K_2}$,
- $d_{K_1 \cup K_2} = \max(d_{K_1}, d_{K_2})$,
- $d_{K_1 \cap K_2} = \min(d_{K_1}, d_{K_2})$.

Twierdzenie 6.3. $(\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}), d_K)$ *jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. Niech $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$. Wówczas $\sup_{a\in K}\|\pi_n(a)-\pi_m(a)\| \to 0$, czyli dla każdego $a \in K$ mamy $\|\pi_n(a)-\pi_m(a)\| \to 0$. W ten sposób otrzymujemy ciągi Cauchy'ego $(\pi_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ dla każdego $a \in K$. Niech $\mathfrak{A}_0$ oznacza *-algebrę generowaną przez zbiór $K \cup \{1\}$. Twierdzimy, że $(\pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego dla dowolnego $x \in \mathfrak{A}_0$. Każdy element $x \in \mathfrak{A}_0$ jest postaci

$$x = p(a_1, ..., a_k, a_1^*, ..., a_k^*)$$

dla pewnych: $k \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_k \in K$ oraz wielomianu $2k$ zmiennych wolnych p. Wtedy

$$\begin{aligned}\|\pi_n(x)-\pi_m(x)\| &= \|\pi_n\Big(p(a_1, ..., a_k, a_1^*, ..., a_k^*)\Big) - \pi_m\Big(p(a_1, ..., a_k, a_1^*, ..., a_k^*)\Big)\| \\ &= \|p\Big(\pi_n(a_1), ..., \pi_n(a_k), \pi_n(a_1)^*, ..., \pi_n(a_k)^*\Big) - \\ &\quad -p\Big(\pi_m(a_1), ..., \pi_m(a_k), \pi_m(a_1)^*, ..., \pi_m(a_k)^*\Big)\| \to 0\end{aligned}$$

bo każdy wielomian jest funkcją jednostajnie ciągłą na zbiorze zwartym.
Gdy teraz $x \in \mathfrak{A}$ jest dowolny, to $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ dla pewnego ciągu $(x_k)_k \subset \mathfrak{A}_0$. Wówczas, dobierając odpowiednio duże $k \in \mathbb{N}$, mamy:

$$\|\pi_n(x)-\pi_m(x)\| \leqslant \|\pi_n(x)-\pi_n(x_k)\| + \|\pi_n(x_k)-\pi_m(x_k)\| + \|\pi_m(x_k)-\pi_m(x)\| \leqslant$$

$$2\|x-x_k\| + \|\pi_n(x_k)-\pi_m(x_k)\|$$

co może być uczynione dowolnie małym. Wobec tego, dla *dowolnego* $x \in \mathfrak{A}$ ciąg $(\pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego — więc jest zbieżny. Określamy

$$\pi(x) := \lim_{n\to\infty} \pi_n(x).$$

W ten sposób powstaje nam *-reprezentacja algebry $\mathfrak{A}$, bowiem jest to punktowo-normowa granica *-reprezentacji (operacje algebraiczne w C^*-algebrze są ciągłe w normie). Z warunku Cauchy'ego względem d_K mamy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N_0}\forall_{a\in K}\ \|\pi_n(a)-\pi_m(a)\| < \varepsilon \tag{6.2}$$

Wystarczy w (6.2) przejść z $m \to \infty$ aby

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>N_0}\ d_K(\pi_n, \pi) < \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 6.4. *Topologia metryki d_K pokrywa się z topologią punktowo-normową oraz z topologią zwarto-otwartą.*

Dowód. Załóżmy, że $\pi_n \xrightarrow{d_K} \pi$. Wtedy oczywiście dla dowolnego $a \in K$ mamy $\pi_n(a) \to \pi(a)$. Analogicznie jak w powyższym dowodzie sprawdzamy, że wówczas dla dowolnego $x \in \mathfrak{A}_0$ mamy $\pi_n(x) \to \pi(x)$, gdzie $\mathfrak{A}_0$ jest *-algebrą generowaną przez K. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathfrak{A}$ mamy, że $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ skąd, podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, możemy oszacować:

$$\|\pi_n(x) - \pi(x)\| \leqslant \|\pi_n(x) - \pi_n(x_k)\| + \|\pi_n(x_k) - \pi(x_k)\| + \|\pi(x_k) - \pi(x)\| \leqslant \\ \leqslant 2\|x - x_k\| + \|\pi_n(x_k) - \pi(x_k)\| \to 0$$

Odwrotnie, przypuśćmy, że dla dowolnego $x \in \mathfrak{A}$ zachodzi $\pi_\sigma(x) \to \pi(x)$. W szczególności zachodzi to dla dowolnego $a \in K$. Skoro K jest zbiorem zwartym, to dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona $\frac{\varepsilon}{3}$-sieć $\{a_1, ..., a_N\} \subset K$. Innymi słowy, dla dowolnego $a \in K$ istnieje $i \in \{1, ..., N\}$, takie że zachodzi $\|a - a_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ponieważ punktów $a_1, ..., a_N$ jest skończenie wiele, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla $n > n_0$ zachodzi

$$\|\pi_n(a_i) - \pi(a_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

dla wszystkich $i = 1, ..., N$. Ustalmy więc $a \in K$ i wybierzmy $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tak, aby $\|a - a_{i_0}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Wówczas mamy:

$$\|\pi_n(a) - \pi(a)\| \leqslant \|\pi_n(a) - \pi_n(a_{i_0})\| + \|\pi_n(a_{i_0}) - \pi(a_{i_0})\| + \|\pi(a_{i_0}) - \pi(a)\| \\ \leqslant 2\|a - a_{i_0}\| + \|\pi_n(a_{i_0}) - \pi(a_{i_0})\| \leqslant \varepsilon$$

jednostajnie ze względu na a. Stąd $d_K(\pi_n, \pi) = \sup_{a\in K} \|\pi_n(a) - \pi(a)\| \to 0$.

Pokazaliśmy zatem, że zbieżność punktowo-normowa jest równoważna zbieżności w metryce d_K — w dowodzie tego, że zbieżność punktowo-normowa implikuje zbieżność w metryce d_K nie korzystaliśmy z faktu, że K generuje algebrę $\mathfrak{A}$: w szczególności więc to samo rozumowanie działa dla dowolnego zwartego podzbioru $L \subset \mathfrak{A}$ — czyli zbieżność punktowo-normowa implikuje zbieżność w topologii zwarto-otwartej. Na odwrót jest zawsze, zatem wszystkie topologie: punktowo-normowa, zwarto otwarta i topologia metryki d_K się pokrywają. □

Uwaga 6.5. A priori nie wiemy, czy topologia zbieżności punktowo-normowej jest metryzowalna (w szczególności czy każdy punkt ma przeliczalną bazę otoczeń), dlatego posługujemy się ciągami uogólnionymi. Ta sama uwaga tyczy się topologii zwarto-otwartej.

Z każdym $x \in \mathfrak{A}$ możemy związać funkcję $\hat{x} : \mathrm{Rep}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}(\ell^2)$, zdefiniowaną poprzez:

$$\hat{x}(\pi) := \pi(x). \tag{6.3}$$

Wtedy wyrażenie $d_K(\pi_1, \pi_2)$ można zapisać w postaci:

$$d_K(\pi_1, \pi_2) = \sup_{a\in K} \|\hat{a}(\pi_1) - \hat{a}(\pi_2)\|. \tag{6.4}$$

Twierdzenie 6.6. *Dla dowolnego $x \in \mathfrak{A}$ funkcja $\hat{x}$ jest jednostajnie ciągła (względem metryki d_K).*

Dowód. Weźmy najpierw $a \in K$. Wtedy:

$$\|\hat{a}(\pi_1) - \hat{a}(\pi_2)\| = \|\pi_1(a) - \pi_2(a)\| \leqslant \sup_{a\in K} \|\pi_1(a) - \pi_2(a)\| = d_K(\pi_1, \pi_2),$$

skąd $\hat{a}$ jest zwężająca (lipschitzowska, ze stałą Lipschitza równą 1). Mamy kolejno, że:

- kombinacja liniowa funkcji lipschitzwoskich jest funkcją lipschitzowską,
- jeżeli $\hat{a}$ jest lipschitzowska, to $\widehat{a^*}$ także (z tą samą stałą), bowiem:

$$\|\widehat{a^*}(\pi_1) - \widehat{a^*}(\pi_2)\| = \|\pi_1(a^*) - \pi_2(a^*)\| = \|\Big(\pi_1(a) - \pi_2(a)\Big)^*\| = \\ = \|\pi_1(a) - \pi_2(a)\| = \|\hat{a}(\pi_1) - \hat{a}(\pi_2)\|,$$

- jeśli $\hat{a}, \hat{b}$ są lipschitzowskie, to $\widehat{ab}$ także. Istotnie, oznaczmy stałe Lipschitza dla $\hat{a}, \hat{b}$ przez L_a, L_b odpowiednio. Mamy wtedy:

$$\|\widehat{ab}(\pi_1) - \widehat{ab}(\pi_2)\| = \|\pi_1(ab) - \pi_2(ab)\| == \|\pi_1(a)\pi_1(b) - \pi_2(a)\pi_2(b)\| \leqslant \\ \leqslant \|\pi_1(a)\pi_1(b) - \pi_2(a)\pi_1(b)\| + \|\pi_2(a)\pi_1(b) - \pi_2(a)\pi_2(b)\| \leqslant \\ \leqslant \underbrace{\|\pi_1(a) - \pi_2(a)\|}_{\leqslant L_a d_K(\pi_1,\pi_2)} \|b\| + \|a\| \underbrace{\|\pi_1(b) - \pi_2(b)\|}_{\leqslant L_b d_K(\pi_1,\pi_2)} \leqslant \Big(L_a\|b\| + L_b\|a\|\Big) d_K(\pi_1, \pi_2).$$

Wynika stąd, że dla $x \in \mathfrak{A}_0$, gdzie $\mathfrak{A}_0$ jest *-algebrą generowaną przez $K \cup \{1\}$, funkcje $\hat{x}$ są lipschitzowskie, a więc jednostajnie ciągłe. Weźmy dowolny element $x \in \mathfrak{A}$ i przedstawmy go w postaci $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, gdzie $x_k \in \mathfrak{A}_0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$, wybierzmy $k \in \mathbb{N}$ tak duże, aby $\|x - x_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$ oraz połóżmy $\delta := \frac{\varepsilon}{3L_k}$, gdzie L_k jest stałą Lipschitza dla $\widehat{x_k}$. Jeżeli $d_K(\pi_1, \pi_2) < \delta$, to szacujemy:

$$\|\hat{x}(\pi_1) - \hat{x}(\pi_2)\| = \|\pi_1(x) - \pi_2(x)\| \leqslant \\ \leqslant \|\pi_1(x) - \pi_1(x_k)\| + \|\pi_1(x_k) - \pi_2(x_k)\| + \|\pi_2(x_k) - \pi_2(x)\| \leqslant \\ \leqslant 2\|x - x_k\| + \|\pi_1(x_k) - \pi_2(x_k)\| == 2\|x - x_k\| + \|\hat{x}(\pi_1) - \hat{x}(\pi_2)\| \leqslant \\ \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + L_k d_K(\pi_1, \pi_2) < \varepsilon.$$

□

Fakt, że π jest *-reprezentacją (tzn. *-homomorfizmem), można przetłumaczyć na język odwzorowania $x \mapsto \hat{x}$: jeżeli na zbiorze wszystkich funkcji ciągłych, określonych na $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ zdefiniujemy strukturę *-algebry w naturalny sposób (definiując wszystkie działania po współrzędnych), to przyporządkowanie $x \mapsto \hat{x}$ stanie się *-homomorfizmem. Jednak nie da się w naturalny sposób na zbiorze funkcji ciągłych na $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ zdefiniować normy tak, by otrzymać C^*-algebrę:

Przykład 6.7. Przestrzeń $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ na ogół nie jest ośrodkowa: weźmy dla przykładu $\mathfrak{A} := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ i ustalmy projekcję $P \in \mathfrak{B}(\ell^2)$. Zdefiniujmy π_P za pomocą warunków

$$\begin{cases} \pi_P(1,0) = P \\ \pi_P(0,1) = I - P \end{cases}$$

i przedłużmy liniowo na $\mathfrak{A}$. Skoro P jest projekcją, to otrzymane przedłużenie faktycznie staje się *-reprezentacją. Wówczas, gdy P i Q są różnymi projekcjami, to mamy:

$$1 \leqslant \|P - Q\| = \|\pi_P(1,0) - \pi_Q(1,0)\| \leqslant d_K(\pi_P, \pi_Q)$$

dla dowolnego (zwartego) zbioru generującego K, zawierającego $(1,0)$. Ponieważ w $\mathfrak{B}(\ell^2)$ istnieje continuum parami różnych projekcji ortogonalnych, to widzimy, że $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ nie może być ośrodkowa. Stąd też wynika, że $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ nie jest zwarta, bo zwarta przestrzeń metryczna jest zawsze ośrodkowa. W szczególności zatem, funkcje ciągłe na $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ nie muszą być ograniczone i nie ma sensu rozważanie normy supremowej na $C(\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}))$.

Uwaga 6.8. Na zbiorze $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ można zdefiniować również słabszą topologię, w której zbieżność jest określona następująco: ciąg uogólniony $\{\pi_s\}_{s\in S}$ zbiega do π, jeżeli dla dowolnego $a\in\mathfrak{A}$ oraz dowolnych $\xi,\eta\in\ell^2$ zachodzi $\langle\pi_s(a)\xi,\eta\rangle\to\langle\pi(a)\xi,\eta\rangle$. Innymi słowy, jest to topologia zdefiniowana przez rodzinę seminorm $\{p_{a,\xi,\eta} : a\in\mathfrak{A},\xi,\eta\in\ell^2\}$ gdzie $p_{a,\xi,\eta}(\pi):=|\langle\pi(a)\xi,\eta\rangle|$. Wówczas $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ z tak zdefiniowaną topologią staje się przestrzenią ośrodkową[12], a nawet przestrzenią polską — zob. [1], Rozdział 4.

Przypuśćmy teraz, że mamy dane *dwa* zwarte zbiory generujące $K,L\subset\mathfrak{A}$. Topologia metryki d_K jest topologią punktowo-normową — tak samo topologia metryki d_L. Wobec tego metryki d_K oraz d_L są równoważne. Jednak widzieliśmy, że przestrzeń $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ nie jest na ogół zwarta, wobec tego nie możemy stąd wydedukować *jednostajnej* równoważności metryk d_K i d_L. Okazuje się jednak, że taka jednostajna równoważność zachodzi:

Twierdzenie 6.9. *Niech K,L będą jak powyżej. Wówczas metryki d_K i d_L są jednostajnie równoważne.*

Dowód. Wystarczy udowodnić, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$, że dla każdych $\pi,\pi'\in\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ warunek $d_K(\pi,\pi')<\delta$ implikuje warunek $d_L(\pi,\pi')<\varepsilon$ — na odwrót dowód będzie ten sam.
Ustalmy więc $\varepsilon>0$ i rozważmy $\frac{\varepsilon}{6}$-sieć $\{a_1',...,a_N'\}$ dla L. Innymi słowy, układ $\{a_1',...,a_n'\}$ spełnia warunek $\forall_{a'\in L}\exists_{i\in\{1,...,N\}}\|a'-a_i'\|<\frac{\varepsilon}{6}$. Ponieważ K generuje $\mathfrak{A}$, to dla każdego a_i, $i=1,...,N$, możemy dobrać element x_i z *-algebry generowanej przez K, taki że $\|a_i-x_i\|<\frac{\varepsilon}{6}$. Wtedy

$$\forall_{a'\in L}\exists_{i\in\{1,...,N\}}\|a'-x_i\|\leqslant\|a'-a_i\|+\|a_i'-x_i\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Wówczas dla dowolnego $a'\in L$ szacujemy:

$$\begin{aligned}\|\pi(a')-\pi'(a')\|&\leqslant\|\pi(a')-\pi(x_i)\|+\|\pi(x_i)-\pi'(x_i)\|+\|\pi'(x_i)-\pi'(a')\|\leqslant\\&\leqslant 2\|a'-x_i\|+\|\pi(x_i)-\pi'(x_i)\|<\frac{2\varepsilon}{3}+\|\pi(x_i)-\pi'(x_i)\|.\end{aligned}$$

Wystarczy teraz dobrać δ na tyle małe, aby zachodził warunek:

$$d_K(\pi,\pi')<\delta\Rightarrow\|\pi(x_i)-\pi'(x_i)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Taki wybór jest możliwy, bo jest skończenie wiele elementów x_i oraz każda spośród funkcji $\widehat{x_i}$ jest jednostajnie ciągła (względem d_K). □

[12] Ściśle rzecz biorąc, autor [1] definiuje $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ nieco inaczej: jako sumę rozłączną $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}\mathrm{Rep}_n(\mathfrak{A})$, gdzie $\mathrm{Rep}_n(\mathfrak{A})$ to wszystkie n-wymiarowe reprezentacje na pewnej, ustalonej odgórnie przestrzeni Hilberta wymiaru n.

6.2 Moduły ciągłości

Definicja 6.10. Ustalmy zwarty zbiór K generujący algebrę $\mathfrak{A}$. Podzbiór $L \subset \mathfrak{A}$ nazwiemy *jednakowo ciągłym*, gdy spełniony jest następujący warunek: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla dowolnych $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, takich że $d_K(\pi, \pi') < \delta$, zachodzi $\|\pi(x) - \pi'(x)\| < \varepsilon$ dla dowolnego $x \in L$.

Zauważmy, że gdy K_1, K_2 są dwoma zwartymi zbiorami generującymi $\mathfrak{A}$ oraz $L \subset \mathfrak{A}$ jest jednakowo ciągły względem d_{K_1}, to jest też jednakowo ciągły względem d_{K_2}: istotnie ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta_1 > 0$ „dobre" dla jednakowej ciągłości L względem d_{K_1}. Z jednostajnej równoważności metryk d_{K_1} i d_{K_2} istnieje $\delta_2 > 0$ takie, że dla dowolnych reprezentacji π, π' zachodzi implikacja $(d_{K_2}(\pi, \pi') < \delta_2 \Rightarrow d_{K_1}(\pi, \pi') < \delta_1)$. Wtedy δ_2 jest „dobre" dla jednakowej ciągłości L względem d_{K_2}. Innymi słowy: jednakowa ciągłość nie zależy od wyboru zwartego zbioru generującego K.

Ustalmy podzbiór $L \subset \mathfrak{A}$, który jest jednakowo ciągły i ograniczony. Określmy następującą funkcję:

$$f_L^K(t) := \sup\{\|\hat{a}(\pi) - \hat{a}(\pi')\| : \pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A}), d_K(\pi, \pi') \leqslant t, a \in L\}, \;\; f_L^K : [0, \infty) \to [0, \infty].$$

Wprost z definicji, mamy następujące własności:

- jeżeli $L_1 \subset L_2$, to $f_{L_1}^K \leqslant f_{L_2}^K$,
- jeżeli $K_1 \subset K_2$, to $f_L^{K_1} \geqslant f_L^{K_2}$.

Pokażemy, że tak określona funkcja spełnia wszystkie warunki z Wniosku 4.8.
Po pierwsze, dla dowolnego $a \in L$ mamy

$$\|\hat{a}(\pi) - \hat{a}(\pi')\| \leqslant f_L^K\Big(d_K(\pi, \pi')\Big).$$

Ponieważ zbiór L jest jednakowo ciągły, to spełniony jest warunek:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\pi,\pi'\in\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})}\forall_{a\in L}\Big(d_K(\pi, \pi') < \delta \Rightarrow \|\hat{a}(\pi) - \hat{a}(\pi')\| < \varepsilon\Big), \tag{6.5}$$

więc gdy $d_K(\pi, \pi') \to 0$, to $\|\hat{a}(\pi) - \hat{a}(\pi')\| \to 0$ jednostajnie ze względu na $a \in L$. To dowodzi, że $\lim_{t\to 0^+} f_L^K(t) = 0$.
Dalej, skoro L jest ograniczony, to

$$\|\hat{a}(\pi) - \hat{a}(\pi')\| = \|\pi(a) - \pi'(a)\| \leqslant 2\|a\| \leqslant 2\mathrm{diam}L$$

niezależnie od $a \in L$ oraz od π, π', skąd f_L^K jest ograniczona (przez $2\mathrm{diam}L$).
Wreszcie f_L^K jest niemalejąca, bo gdy $t_1 < t_2$, to w definicji $f_L^K(t_2)$ bierzemy supremum po większym zbiorze. Pokazaliśmy zatem, że f_L^K spełnia wszystkie warunki z Wniosku 4.8. Wobec tego istnieje wklęsła, ciągła, niemalejąca funkcja $\tilde{\omega}_L^K$ spełniająca $\tilde{\omega}_L^K(0) = 0$ oraz $f_L^K \leqslant \tilde{\omega}_L^K$. Kładziemy dalej $\omega_L^K(t) := \inf\{\omega(t) : \omega \in \Omega, \omega \geqslant f_L^K\}$. Definicja jest poprawna, bowiem $\tilde{\omega}_L^K$ należy do zbioru, po którym bierzemy infimum. W szczególności możemy rozważyć zbiór jednoelementowy $L = \{a\}$ — stosujemy wówczas oznaczenia f_a^K, $\tilde{\omega}_a^K$ oraz ω_a^K. Niech teraz K, K' będą dwoma zwartymi zbiorami generującymi. Wiemy już, że d_{K_1} i d_{K_2} są jednostajnie równoważne. Prawdziwy jest jednak silniejszy rezultat:

Twierdzenie 6.11. *Istnieje wklęsła, ciągła, niemalejąca funkcja ω, spełniająca $\omega(0) = 0$ oraz*

$$d_{K'} \leqslant \omega \circ d_K.$$

Dowód. Kładziemy $\omega = \omega^K_{K'} \in \Omega$ — wówczas $f^K_{K'} \leqslant \omega$. W szczególności, dla dowolnych reprezentacji $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, zachodzi

$$f^K_{K'}\Big(d_K(\pi, \pi')\Big) \leqslant \omega\Big(d_K(\pi, \pi')\Big).$$

Jednak

$$f^K_{K'}\Big(d_K(\pi, \pi')\Big) = \sup\{\| \underbrace{\hat{a}(\pi_1) - \hat{a}(\pi_2)}_{=\pi_1(a)-\pi_2(a)} \| : d_K(\pi_1, \pi_2) \leqslant d_K(\pi, \pi'), a \in K'\} \geqslant$$
$$\geqslant \sup\{\|\hat{a}(\pi) - \hat{a}(\pi')\| : a \in K'\} = d_{K'}(\pi, \pi'),$$

więc tym bardziej $d_{K'} \leqslant w \circ d_K$. □

Twierdzenie 6.12. *Przy powyższych oznaczeniach zachodzi $\omega^{K'}_a \leqslant \omega^K_a \circ \omega^{K'}_K$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że funkcja $\omega^K_a \circ \omega^{K'}_K$ należy do Ω oraz majoryzuje $f^{K'}_a$. Złożenie funkcji ciągłych/wklęsłych/niemalejących ma tę samą własność oraz $\omega^K_a \circ \omega^{K'}_K(0) = \omega^K_a(0) = 0$. Zatem pozostaje jedynie pokazać stosowne szacowanie. Twierdzimy, że zachodzi:

$$f^{K'}_a \leqslant f^K_a \circ f^{K'}_K \tag{6.6}$$

a to już zakończy dowód, bowiem wtedy tym bardziej $f^{K'}_a \leqslant \omega^K_a \circ \omega^{K'}_K$ i wystarczy przejść do kresu z lewej strony żeby otrzymać tezę.
Dla dowodu (6.6) rozpiszmy lewą i prawą stronę:

$$L(t) = \sup\{\|\hat{a}(\tau) - \hat{a}(\tau')\| : d_{K'}(\tau, \tau') \leqslant t\}$$
$$R(t) = f^K_a\left(\sup\{\|\hat{b}(\pi) - \hat{b}(\pi')\| : b \in K, d_{K'}(\pi, \pi') \leqslant t\right) =$$
$$\sup\left\{\|\hat{a}(\tau) - \hat{a}(\tau')\| : d_K(\tau, \tau') \leqslant \sup\{|\hat{b}(\pi) - \hat{b}(\pi')\| : b \in K, d_{K'}(\pi, \pi') \leqslant t\}\right\}$$

Zbiór, po którym bierzemy supremum dla wyrażenia z lewej strony, jest zawarty w zbiorze, po którym bierzemy supremum w wyrażeniu z prawej strony: istotnie, załóżmy, że τ, τ' spełniają $d_{K'}(\tau, \tau') \leqslant t$. Wtedy

$$d_K(\tau, \tau') = \sup\{\|\hat{b}(\tau) - \hat{b}(\tau')\| : b \in K\} \leqslant \sup\{\|\hat{b}(\pi) - \hat{b}(\pi')\| : b \in K, d_{K'}(\pi, \pi') \leqslant t\}.$$

□

Uwaga 6.13. Powyższy dowód działa również, gdy w miejsce a wstawimy dowolny jednakowo ciągły, ograniczony zbiór L. Innymi słowy zachodzi:

$$\omega^{K'}_L \leqslant w^K_L \circ w^{K'}_K. \tag{6.7}$$

Własności 6.14. *Gdy K jest zwarty i generujący oraz $a, b \in \mathfrak{A}, \lambda \in \mathbb{C}$ to:*

1. $\omega^K_{a+\lambda 1} = \omega_a = \omega_{a^*}$,
2. $\omega^K_a = 0 \iff a \in \mathbb{C}1$,
3. $\omega^K_{\lambda a} = |\lambda|\omega^K_a$,
4. $\omega^K_{a+b} \leqslant \omega^K_a + \omega^K_b$,
5. $\omega^K_{ab} \leqslant \|a\|\omega^K_b + \|b\|\omega^K_a$.

Dowód. Ad. 1. Dla dowolnych π, π' zachodzą równości

$$\|\pi(a^*) - \pi'(a^*)\| = \|\big(\pi(a) - \pi'(a)\big)^*\| = \|\pi(a) - \pi'(a)\|,$$
$$\|\pi(a+\lambda 1) - \pi'(a+\lambda 1)\| = \|\pi(a) + \lambda I - \pi'(a) - \lambda I\| = \|\pi(a) - \pi'(a)\|,$$

skąd wynika, że $f^K_{a+\lambda 1} = f^K_{a^*} = f^K_a$, co daje (1).

Ad. 2. Jeżeli $a = \lambda 1$, to oczywiście $\omega^K_a = 0$.
Odwrotnie, niech $\omega^K_a = 0$: wtedy dla dowolnych $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ zachodzi $\pi(a) = \pi'(a)$. Ustalmy π i połóżmy $\pi'(\cdot) := U^*\pi(\cdot)U$ gdzie $U \in \mathfrak{B}(\ell^2)$ jest unitarny. Wówczas dostajemy $\pi(a) = U^*\pi(a)U$, czyli $U\pi(a) = \pi(a)U$. Skoro każdy operator w $\mathfrak{B}(\ell^2)$ jest kombinacją liniową czterech operatorów unitarnych (zob. np. [36]), to $\pi(a) \in \mathfrak{Z}\big(\mathfrak{B}(\ell^2)\big) = \mathbb{C}I$. Zatem, dla dowolnej reprezentacji $\pi \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, istnieje liczba $\lambda_\pi \in \mathbb{C}$, taka że $\pi(a) = \lambda_\pi I$. Wobec tego, dla wiernej reprezentacji $\pi_0 \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, dostajemy

$$\pi_0(a) = \lambda_{\pi_0} I = \pi_0(\lambda_{\pi_0} 1),$$

a zatem $a = \lambda_{\pi_0} 1$ (i w istocie stała λ_π nie zależy od wyboru reprezentacji).

Ad. 3. Skoro

$$\sup\{\|\pi(\lambda a) - \pi'(\lambda a)\| : d_K(\pi, \pi') \leqslant t\} = \sup\{|\lambda|\|\pi(a) - \pi'(a)\| : d_K(\pi, \pi') \leqslant t\} =$$
$$= |\lambda| \sup\{\|\pi(a) - \pi'(a)\| : d_K(\pi, \pi') \leqslant t\},$$

to $f^K_{\lambda a} = |\lambda| f^K_a$, co daje (3).

Ad. 4. Mamy

$$\sup\{\|\pi(a+b) - \pi'(a+b)\| : d_K(\pi, \pi') \leqslant t\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\|\pi(a) - \pi'(a)\| + \|\pi(b) - \pi'(b)\| : d_K(\pi, \pi) \leqslant t\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\|\pi(a) - \pi'(a)\| : d_K(\pi, \pi') \leqslant t\} + \sup\{\|\pi(b) - \pi'(b)\| : d_K(\pi, \pi') \leqslant t\},$$

czyli $f^K_{a+b} \leqslant f^K_a + f^K_b \leqslant \omega^K_a + \omega^K_b$. Ponieważ suma dwóch niemalejących/ciągłych/wklęsłych oraz znikających w zerze funkcji również ma tę własność, to $\omega^K_{a+b} \leqslant \omega^K_a + \omega^K_b$.

Ad. 5. Zachodzi

$$\|\pi(ab) - \pi'(ab)\| = \|\pi(a)\pi(b) - \pi'(a)\pi'(b)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\pi(a)\pi(b) - \pi(a)\pi'(b)\| + \|\pi(a)\pi'(b) - \pi'(a)\pi'(b)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|\|\pi(b) - \pi'(b)\| + \|b\|\|\pi(a) - \pi'(a)\|,$$

skąd $f^K_{ab} \leqslant \|a\| f^K_b + \|b\| f^K_a \leqslant \|a\|\omega^K_b + \|b\|\omega^K_a$ i jak poprzednio, $\|a\|\omega^K_b + \|b\|\omega^K_a \in \Omega$, co daje tezę. □

Skonstruowany wyżej moduł ciągłości ω_a^K można utożsamiać z minimalnym modułem ciągłości dla funkcji $\hat{a}$:

Twierdzenie 6.15. *Dla* $a \in \mathfrak{A}$ *zachodzi* $\omega_a^K = \omega_{\hat{a}}^K$.

Dowód. Dla dowodu nierówności $\omega_a^K \leqslant \omega_{\hat{a}}^K$ wystarczy pokazać, że $f_a^K \leqslant \omega_{\hat{a}}^K$. Ustalmy $t \geqslant 0$ oraz $\pi, \pi \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, takie że $d_K(\pi, \pi') \leqslant t$. Wówczas mamy:

$$\|\pi(a) - \pi'(a)\| = \|\hat{a}(\pi) - \hat{a}(\pi')\| \leqslant \omega_{\hat{a}}^K\Big(d_K(\pi, \pi')\Big) \leqslant \omega_{\hat{a}}^K(t). \tag{6.8}$$

Przechodząc do kresu w (6.8), dostajemy $f_a^K(t) \leqslant \omega_{\hat{a}}^K(t)$.

Z drugiej strony mamy:

$$\|\pi(a) - \pi'(a)\| \leqslant f_a^K\Big(d_K(\pi, \pi')\Big) \leqslant w_a^K\Big(d_K(\pi, \pi')\Big),$$

skąd z minimalności dostajemy $\omega_{\hat{a}}^K \leqslant \omega_a^K$. □

7 Zwartość oraz własność Ascolego

7.1 Własności i przykłady

Niech π będzie *nieprzywiedlną* reprezentacją ośrodkowej C^*-algebry $\mathfrak{A}$: wówczas albo $\mathcal{H}_\pi$ jest skończenie wymiarowa, albo $\mathcal{H}_\pi$ jest ośrodkowa i nieskończenie wymiarowa. Zatem używając stosownego operatora unitarnego, możemy założyć, że $\mathcal{H}_\pi = \ell^2$ albo $\mathcal{H}_\pi = \mathbb{C}^n$. Jeżeli zachodzi ten drugi przypadek, możemy rozważyć reprezentację $\pi^\infty := \aleph_0 \odot \pi$. Nadużywając nieco nazewnictwa (o ile nie będzie prowadziło to do nieporozumień) π^∞ rownież będziemy nazywać *nieprzywiedlną* reprezentacją, jeżeli π była nieprzywiedlna — w ten sposób wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne możemy zrealizować jako podzbiór $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$. Kładziemy

$$\Sigma_f(\mathfrak{A}) := \overline{\{\pi^\infty : \pi \text{ jest nieprzywiedlna, skończenie wymiarowa}\}}$$

$$\Sigma_\infty(\mathfrak{A}) := \overline{\{\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\ell^2), \pi \text{ jest nieprzywiedlna}\}}.$$

$$\Sigma(\mathfrak{A}) := \Sigma_f(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_\infty(\mathfrak{A}).$$

przy czym domykamy w topologii metryki d_K, dla pewnego zwartego zbioru generującego K (lub równoważnie w topologii punktowo-normowej). Dla wygody wprowadźmy jeszcze następujące oznaczenia:

$$\Sigma_f^0(\mathfrak{A}) = \{\pi^\infty : \pi \text{ jest nieprzywiedlna, skończenie wymiarowa}\}$$

oraz

$$\Sigma_\infty^0(\mathfrak{A}) = \{\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\ell^2), \pi \text{ jest nieprzywiedlna}\}$$

a także $\Sigma^0(\mathfrak{A}) := \Sigma_f^0(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_\infty^0(\mathfrak{A})$. Wówczas $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest zupełną podprzestrzenią $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ oraz $\Sigma^0(\mathfrak{A})$ jest gęstym podzbiorem w $\Sigma(\mathfrak{A})$.

Definicja 7.1. C^*-algebrę $\mathfrak{A}$ nazywamy *zwartą*, jeżeli $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest zwartą przestrzenią topologiczną.

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest przemienną, ośrodkową C^*-algebrą z jednością, to wtedy przestrzenie $\Sigma(\mathfrak{A})$ i $\widehat{\mathfrak{A}}$ są ze sobą homeomorficzne.*

Dowód. Homeomorfizm ma postać $\widehat{\mathfrak{A}} \ni \omega \mapsto \aleph_0 \odot \omega \in \Sigma(\mathfrak{A})$. □

W szczególności więc przemienne (ośrodkowe, z jednością) C^*-algebry są zwarte.

Przykłady 7.3. 1. Niech $\mathfrak{A} = C(X)$ będzie przemienną, ośrodkową C^*-algebrą oraz niech d będzie ustaloną metryką na X. Każda nieprzywiedlna reprezentacja π algebry $\mathfrak{A}$ jest jednowymiarowa, czyli jest postaci $\pi(a) = \omega(a)$ gdzie ω jest funkcjonałem liniowo multiplikatywnym. Wtedy $\pi(a) = \delta_x(a)$ dla pewnego $x \in \mathfrak{A}$. Utożsamiając $\pi \simeq \pi^\infty$ (=: π_x), gdzie $\pi^\infty \in \Sigma(\mathfrak{A})$ mamy, że

$$\pi_x(a) = \delta_x(a) I_{\ell^2}.$$

Jeżeli zatem $\pi_x, \pi_y \in \Sigma(\mathfrak{A})$ są reprezentacjami odpowiadającymi punktom $x, y \in X$, to wtedy

$$\|\pi_x(f) - \pi_y(f)\| = \|f(x)I - f(y)I\| = |f(x) - f(y)|.$$

Wobec tego, gdy weźmiemy

$$K := \{f : X \to [0, \mathrm{diam} X] : f \text{ jest nieoddalająca względem } d\},$$

to otrzymamy $d_K(\pi_x, \pi_y) = d(x, y)$. Innymi słowy, przestrzenie metryczne (X, d) oraz $(\Sigma(\mathfrak{A}), d_K)$ są ze sobą *izometryczne*. Zatem parę $(\Sigma(\mathfrak{A}), d_K)$, gdzie $K \subset \mathfrak{A}$ jest zwartym zbiorem generującym ośrodkową C^*-algebrę z jednością $\mathfrak{A}$, będziemy postrzegać jako uogólnienie (klasycznego) widma ośrodkowej C^*-algebry z jednością, traktowanego jako przestrzeń metryczna.
Zwróćmy jeszcze uwagę, że gdy zrezygnujemy z założenia o zwartości K, to topologia metryki d_K może (drastycznie) różnić się od topologii punktowo-normowej. Zdefiniujmy bowiem K jako kulę jednostkową w $\mathfrak{A}$. Wówczas dla $x, y \in X, x \neq y$ możemy znaleźć $f \in K$, taką że $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$. Stąd dostajemy $d_K(\pi(x), \pi(y)) \geqslant 1$, skąd reprezentacje nieprzywiedlne w $\Sigma(\mathfrak{A})$ tworzą zbiór dyskretny.

2. Jeżeli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są dowolnymi C^*-algebrami, to zbiór $\mathrm{Irr}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$ reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ można utożsamiać z sumą rozłączną $\mathrm{Irr}(\mathfrak{A}) \sqcup \mathrm{Irr}(\mathfrak{B})$ w następujący sposób: jeżeli $\pi : \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jest nieprzywiedlną reprezentacją, to albo istnieje nieprzywiedlna reprezentacja $\pi_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ spełniająca $\pi(a, b) = \pi_1(a)$, albo istnieje nieprzywiedlna reprezentacja $\pi_2 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, taka że $\pi(a, b) = \pi_2(b)$. Stąd wynika, że $\Sigma(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}) = \Sigma(\mathfrak{A}) \sqcup \Sigma(\mathfrak{B})$, zatem suma prosta zwartych C^*-algebr jest także zwarta.

Powyższy przykład okazuje się być szczególnym przypadkiem następującego rezultatu:

Twierdzenie 7.4. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są C^*-algebrami, $\mathfrak{A}$ jest zwarta oraz $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest *-epimorfizmem, to $\mathfrak{B}$ jest również zwarta.*

Dowód. Określmy $\alpha^* : \Sigma(\mathfrak{B}) \to \Sigma(\mathfrak{A})$ za pomocą $\alpha^*(\rho) := \rho \circ \alpha$. Wówczas α^* faktycznie działa w $\Sigma(\mathfrak{A})$, bowiem jeżeli ρ jest nieprzywiedlna, to $(\rho \circ \alpha(\mathfrak{A}))' = (\rho(\mathfrak{B}))' = \mathbb{C}I$, czyli $\alpha^*(\rho)$ jest także nieprzywiedlna; z ciągłości α^* (względem topologii punktowo-normowej) mamy więc, że $\alpha^*(\rho) \in \Sigma(\mathfrak{A})$ dla $\rho \in \Sigma(\mathfrak{B})$.

Weźmy zwarty zbiór K generujący $\mathfrak{A}$: wtedy $\alpha(K)$ jest także zwarty oraz generuje $\mathfrak{B}$. Wówczas otrzymujemy, dla $\rho, \rho' \in \Sigma(\mathfrak{B})$:

$$d_K(\alpha^*(\rho), \alpha^*(\rho')) = \sup\{\|\rho(\alpha(a)) - \rho'(\alpha(a))\| : a \in K\} = \\ = \sup\{\|\rho(b) - \rho'(b)\| : b \in \alpha(K)\} = d_{\alpha(K)}(\rho, \rho').$$

Dostajemy zatem izometryczne włożenie $(\Sigma(\mathfrak{B}), d_{\alpha(K)}) \hookrightarrow (\Sigma(\mathfrak{A}), d_K)$, skąd wynika, że $\Sigma(\mathfrak{B})$ jest zwarta. $\square$

Wniosek 7.5. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest zwartą C^*-algebrą oraz $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ jest ideałem, wówczas $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ jest również zwarta.*

Przy przyjętej konwencji, że wszystkie rozważane przez nas C^*-algebry posiadają jedność, pytanie o zwartość dla ideału $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ przy założeniu, że $\mathfrak{A}$ jest zwarta, generalnie nie jest dobrze sformułowane. Żeby móc uwzględnić przypadek algebr bez jedności stawiamy następującą:

Definicja 7.6. C^*-algebrę bez jedności $\mathfrak{A}$ nazywamy *zwartą*, jeżeli $\mathfrak{A}^+$ jest zwarta.

Uwaga 7.7. Jeżeli $\mathfrak{A}$ już posiada jedność to możemy mimo wszystko zastosować procedurę dołączania jedności do $\mathfrak{A}$ i rozważać $\mathfrak{A}^+$. W takiej sytuacji mamy izomorfizm $\mathfrak{A}^+ \cong \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ (zob. np. [42]) skąd $\Sigma(\mathfrak{A}^+) = \Sigma(\mathfrak{A}) \sqcup \{\delta\}$ gdzie $\delta(x, \lambda) = \lambda$ dla $x \in \mathfrak{A}, \lambda \in \mathbb{C}$. Zatem $\mathfrak{A}$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^+$ jest zwarta.

Przy takiej definicji mamy następujący:

Fakt 7.8. *Jeżeli $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ jest ideałem w C^*-algebrze z jednością $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{I}$ jest zwarty.*

Dowód. Jeżeli π jest reprezentacją nieprzywiedlną dla $\mathfrak{I}$, to π ma jednoznaczne rozszerzenie do reprezentacji $\mathfrak{A}$ (która oczywiście nadal jest nieprzywiedlna). Innymi słowy, dowolna reprezentacja nieprzywiedlna dla $\mathfrak{I}$ jest zacieśnieniem nieprzywiedlnej reprezentacji $\mathfrak{A}$, czyli otrzymujemy surjekcję $\mathrm{Irr}(\mathfrak{A}) \ni \pi \mapsto \pi|_{\mathfrak{I}} \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{I}) \cup \{0\}$, a po dołączeniu jedności do $\mathfrak{I}$ — surjekcję $\mathrm{Irr}(\mathfrak{A}) \ni \pi \mapsto \pi|_{\mathfrak{I}^+} \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{I}^+)$. Możemy rozważać to odwzorowanie jako $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{Rep}(\mathfrak{I}^+)$ i oczywiście jest to ciągłe w topologii punktowo-normowej — wówczas powyższe uwagi pokazują, że jest to surjekcja pomiędzy $\Sigma(\mathfrak{A}) \to \Sigma(\mathfrak{I}^+)$. Skoro zatem $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest przestrzenią zwartą, to $\Sigma(\mathfrak{I}^+)$ także, skąd $\mathfrak{I}$ jest zwarty. $\square$

Dowody powyższych rezultatów pokazują, że epimorfizm pomiędzy C^*-algebrami wyznacza włożenie na poziomie przestrzeni $\Sigma(-)$, z kolei włożenie ideału w C^*-algebrę produkuje epimorfizm na poziomie przestrzeni $\Sigma(-)$.

Bogatej klasy przykładów zwartych C^*-algebr dostarczają C^*-algebry (z jednością), które są podjednorodne:

Twierdzenie 7.9. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest N-podjednorodną C^*-algebrą, to $\mathfrak{A}$ jest zwarta.*

Dowód. Dla liczby naturalnej n określmy

$$X_n := \{\pi : \mathfrak{A} \to M_n : \pi \text{ jest *-reprezentacją, zachowującą jedność}\}$$

i rozważmy na X_n topologię zbieżności punktowej. Twierdzimy, że wówczas X_n jest zwarta. Istotnie, rozważmy odwzorowanie

$$\iota : X_n \ni \pi \mapsto (\pi(a))_{a\in\mathfrak{A}} \in \prod_{a\in\mathfrak{A}} B\Big(0, \|a\|\Big) \subset \prod_{a\in\mathfrak{A}} M_n$$

przy czym w przeciwdziedzinie rozważamy topologię produktową. W oczywisty sposób jest to odwzorowanie różnowartościowe oraz dla $\{\pi_i\}_i \subset X_n$ zachodzi $\pi_i \to \pi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\iota(\pi_i) \to \iota(\pi)$ — wobec tego jest to włożenie. Co więcej, to włożenie jest domknięte: żeby to uzasadnić, przypuśćmy, że $z_i \to z$ gdzie $z_i \in \iota(X_n)$ — zatem $z_i = (\pi_i(a))_{a\in\mathfrak{A}}$. Niech z ma postać $z = (z_a)_{a\in\mathfrak{A}}$ — wtedy dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ mamy $\pi_i(a) \to z_a$. Wówczas odwzorowanie $\mathfrak{A} \ni a \mapsto z_a$ staje się *-reprezentacją zachowującą jedność: przykładowo

$$z_{ab} = \lim_i \pi_i(ab) = \lim_i(\pi_i(a)\pi_i(b)) = \lim_i \pi_i(a) \lim_i \pi_i(b) = z_a z_b$$

(podobnie rozumujemy dla pozostałych działań). Oznaczmy otrzymaną w ten sposób reprezentację jako π: wtedy $\pi_i \to \pi$ i w konsekwencji $z = \iota(\pi) \in \iota(X_n)$.
Ponieważ z tw. Tichonowa produkt $\prod_{a\in\mathfrak{A}} B\Big(0, \|a\|\Big)$ jest zwarty, to $\iota(X_n)$ jest zwarty i w konsekwencji X_n jest zwarty.
Skoro $\mathfrak{A}$ jest N-podjednorodna, to $\mathrm{Irr}(\mathfrak{A}) \subset \bigsqcup_{n=1}^N X_n$ a ponieważ odwzorowanie $\pi \mapsto \aleph_0 \odot \pi$ jest włożeniem, to zbiór $\aleph_0 \odot \bigsqcup_{n=1}^N X_n$ jest zwartym podzbiorem $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ (zawierającym $\Sigma^0(\mathfrak{A})$). Zatem domykając, dostajemy $\Sigma(\mathfrak{A}) \subset \aleph_0 \odot \bigsqcup_{n=1}^N X_n$ i w konsekwencji $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest zwarta, toteż $\mathfrak{A}$ jest zwartą C^*-algebrą. □

Powyższy rezultat jest prawdziwy także, dla kurczących algebr:

Twierdzenie 7.10. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest kurczącą C^*-algebrą, to $\mathfrak{A}$ jest zwarta (na ogół jako C^*-algebra bez jedności).*

Dowód. Niech $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^+$. Jako, że $\mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$ oraz $\Sigma(\mathfrak{B})$ są przestrzeniami metryzowalnymi, to zwartośc można sprawdzać posługując się warunkiem ciągowym. Co więcej, skoro $\mathfrak{B}$ jest kurcząca, to $\Sigma^0_\infty(\mathfrak{B}) = \emptyset$, więc $\Sigma^0(\mathfrak{B}) = \Sigma^0_f(\mathfrak{B})$ i $\Sigma(\mathfrak{B}) = \overline{\Sigma^0_f(\mathfrak{A})}$. Wobec tego wystarczy sprawdzić ciągową zwartośc dla $\Sigma^0_f(\mathfrak{A})$. Weźmy zatem ciąg $(\pi_n)_n \subset \mathrm{Irr}(\mathfrak{A})$ — jeżeli (liczbowy) ciąg $(\dim \mathcal{H}_{\pi_n})_n$ ma podciąg ograniczony, to wtedy ten podciąg jest zawarty w $\bigsqcup_{n=1}^N X_n$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$, gdzie X_n są takie jak w dowodzie 7.9. Zatem, na mocy rozumowania z dowodu 7.9, podciąg ten ma dalszy podciąg zbieżny, powiedzmy $(\pi_{n_{k_m}})_m$. Wtedy ciąg $(\pi^\infty_{n_{k_m}})_m$ jest zbieżny w $\Sigma(\mathfrak{B})$. Jeżeli natomiast $\dim \mathcal{H}_{\pi_n} \to \infty$, to wtedy $\pi^\infty_n \to \delta^\infty$ gdzie $\delta(a+\lambda 1) = \lambda$ jest jednowymiarową (nieprzywiedlną) reprezentacją, bowiem dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ mamy

$$\|\pi^\infty_n(a + \lambda 1) - \delta^\infty(a + \lambda 1)\| = \|\pi^\infty_n(a)\| \to 0.$$

□

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy: pojęcie jednakowej ciągłości zbioru $L \subset \mathfrak{A}$, funkcje f^K_L zdefiniowane jako $f^K_L(t) = \sup_{\{} |\pi(a) - \pi'(a)\| : a \in L, d_K(\pi, \pi') \leqslant t\}$, stosowne moduły ciągłości ω^K_a itp. Wszystkie te pojęcia można zdefiniować na nowo, nie używając wszystkich reprezentacji, lecz jedynie reprezentacji należących do $\Sigma(\mathfrak{A})$. Oczywiście, jeżeli zbiór $L \subset \mathfrak{A}$ jest jednakowo ciągły względem $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, to jest także jednakowo ciągły względem $\Sigma(\mathfrak{A})$; z kolei stosowne moduły ciągłości względem $\Sigma(\mathfrak{A})$ będą oszacowane z góry przez moduły ciągłości względem $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$. Dowody rezultatów z poprzedniego rozdziału pozostają słuszne, gdy zastąpimy $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ poprzez $\Sigma(\mathfrak{A})$ — pewne trudności pojawią się w następnym rozdziale, gdy będziemy rozważać morfizmy pomiędzy C^*-algebrami[13]. Zauważmy, że gdyby zdefiniować pojęcie jednakowej ciągłości oraz moduły ciągłości posługując się tylko reprezentacjami nieprzywiedlnymi (bez brania domknięcia), to wówczas otrzymalibyśmy równoważne definicje, jak gdyby rozważać całe $\Sigma(\mathfrak{A})$. Zatem rozróżnienie czy rozważamy strukturę jednostajną w oparciu o $\mathrm{Irr}(\mathfrak{A})$ czy o $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest mało istotne, w przeciwieństwie do rozróżnienia pomiędzy $\Sigma(\mathfrak{A})$ oraz $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$. W Dodatku na końcu pracy omawiamy, w jaki sposób w przypadku przemiennym oba podejścia są ze sobą związane oraz jak interpretować można $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$.

Definicja 7.11. Powiemy, że C^*-algebra $\mathfrak{A}$ ma *własność Ascolego*, jeżeli zachodzi następujący warunek: dowolny podzbiór $L \subset \mathfrak{A}$ jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki:

(Asc1) L jest ograniczony,

(Asc2) L jest punktowo relatywnie zwarty, tj. dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji π zbiór $\pi(L) = \{\pi(a) : a \in L\}$ jest relatywnie zwarty w $\|\cdot\|$,

(Asc3) L jest jednakowo ciągły.

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ ma *silną własność Ascolego*, jeżeli zachodzi następujący warunek: dowolny podzbiór $L \subset \mathfrak{A}$ jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki:

(sAsc1) L jest ograniczony,

(sAsc2) L jest jednakowo ciągły.

Uwagi 7.12. Wprost z definicji, jeżeli $\mathfrak{A}$ ma silną własność Ascolego, to $\mathfrak{A}$ ma własność Ascolego.
Oczywiście istotą powyższej definicji jest to, aby przytoczone warunki były *wystarczające* dla zwartości. Każdy zbiór zwarty posiada bowiem wszystkie wymienione własności — ograniczoność i punktowa relatywna zwartość są oczywiste. Z kolei dla dowodu jednakowej ciągłości zauważmy, że jeżeli L jest zwarty, to możemy rozważyć zwarty zbiór generujący K, taki że $L \subset K$. Wtedy dla dowolnego $x \in L$ oraz $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ zachodzi

$$\|\pi(x) - \pi'(x)\| \leqslant \sup_{y \in L} \|\pi(y) - \pi'(y)\| \leqslant \sup_{y \in K} \|\pi(y) - \pi'(y)\| = d_K(\pi, \pi'),$$

co dowodzi jednakowej ciągłości (względem $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ więc i względem $\Sigma(\mathfrak{A})$).

[13]Jest to spowodowane tym, że reprezentacje nieprzywiedlne nie zachowuja się *funktorialnie*: mówiąc ściślej, jeżeli π jest nieprzywiedlną reprezentacją oraz α jest *-homomorfizmem C^*-algebr, to złożenie $\pi \circ \alpha$ nie musi być reprezentacją nieprzywiedlną.

Przykład 7.13. 1. Załóżmy, że $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mają własność Ascolego. Pokażemy, że wówczas $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ również ma własność Ascolego. Jeżeli K_1, K_2 są zwartymi zbiorami generującymi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (odpowiednio), to zbiór $K := K_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times K_2$ jest zwarty i generuje $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. Przypuśćmy, że $L \subset \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ jest ograniczony, punktowo relatywnie zwarty i jednakowo ciągły (względem d_K) oraz oznaczmy przez $p_1 : \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ i $p_2 : \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ naturalne projekcje. Wtedy oczywiście $p_i(L), i = 1, 2$ są ograniczone; dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji π algebry $\mathfrak{A}$ możemy rozważyć $\tilde{\pi}(a, b) := \pi(a)$ — wtedy $\tilde{\pi}$ jest nieprzywiedlna i zbiór $\tilde{\pi}(L) = \pi\Big(p_1(L)\Big)$ jest relatywnie zwarty. Identycznie rozumujemy dla p_2. Wreszcie, ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ z jednakowej ciągłości L, takie że dla dowolnych $\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$ spełniających $d_K(\pi, \pi') < \delta$ zachodzi $\|\pi(a, b) - \pi'(a, b)\| < \varepsilon$. Zauważmy, że gdy $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{A})$ oraz $\tilde{\pi_1}, \tilde{\pi_2}$ oznaczają naturalne rozszerzenia do $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, to zachodzi:

$$d_{K_1}(\pi_1, \pi_2) = \sup\{\|\pi_1(a) - \pi_2(a)\| : a \in K_1\} =$$
$$= \sup\{\|\tilde{\pi_1}(a, b) - \tilde{\pi_2}(a, b)\| : (a, b) \in K\} = d_K(\tilde{\pi_1}, \tilde{\pi_2}),$$

zatem to samo δ świadczy o jednakowej ciągłości $p_1(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$ (dla p_2 rozumowanie jest identyczne). Z faktu, iż $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ mają własność Ascolego, wnioskujemy więc, że $p_1(L), p_2(L)$ są relatywnie zwarte, skąd $p_1(L) \oplus p_2(L)$ także więc $L \subset p_1(L) \oplus p_2(L)$ również.

2. Rozważmy $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}(\ell^2)^+$ — C^*-algebrę operatorów zwartych, z dołączoną jednością. Wówczas $\mathfrak{A}$ nie jest zwarta: niech K będzie zwartym zbiorem generującym $\mathfrak{A}$, zawierającym zbiór $\{\frac{1}{n}P_n : n \in \mathbb{N}\}$ gdzie P_n jest rzutem na $\mathrm{lin}\{e_n\}$ oraz e_n jest n-tym wektorem bazy kanonicznej ℓ^2. Rozważmy operatory unitarne $U_{n,m}$ zdefiniowane na bazie ortonormalnej następująco:

$$U_{n,m}(e_k) = \begin{cases} e_k, \ k \neq n \ i \ k \neq m, \\ e_n, \ k = m, \\ e_m, \ k = n \end{cases}$$

Spełniają one $U_{n,m} = U^*_{n,m} = U^{-1}_{n,m}$. Rozważmy reprezentacje nieprzywiedlne:

$$\pi_{n,m}(A) := U_{n,m}AU_{n,m} \ (= U_{n,m}AU^{-1}_{n,m}).$$

Wówczas, dla $m \neq m', m, m' > 1$ mamy, że

$$\pi_{1,m}(P_1)e_m = U_{1,m}P_1U_{1,m}e_m = U_{1,m}P_1e_1 = U_{1,m}e_1 = e_m,$$
$$\pi_{1,m'}(P_1)e_m = U_{1,m'}P_1U_{1,m'}e_m = U_{1,m'}P_1e_m = 0.$$

Zatem

$$d_K(\pi_{1,m}, \pi_{1,m'}) \geqslant \|\pi_{1,m}(P_1) - \pi_{1,m'}(P_1)\| \geqslant 1,$$

czyli z ciągu $\{\pi_{1,n}\}_{n \geqslant 2}$ nie da się wybrać podciągu zbieżnego.
Istotą powyższego argumentu jest to, że możemy rozważać *równoważne*, ale wciąż *różne* między sobą reprezentacje: algebra $\mathfrak{K}(\ell^2)$ posiada bowiem, z dokładnością do unitarnej równoważności, dokładnie *jedną* reprezentację nieprzywiedlną (zob. np. wnioski z Twierdzenia 1.4.4. w [1].)

Można pokazać, że $\Sigma(\mathfrak{A})$ nie tylko nie jest zwarta, ale nie jest nawet *lokalnie zwarta*. Istotnie, dowolna nieprzywiedlna reprezentacja $\pi \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ jest postaci $\pi_U(\cdot) = U(\cdot)U^{-1}$ dla pewnego $U \in \mathfrak{U}(\ell^2)$. Zatem $\Sigma_0(\mathfrak{A})$ jest ciągłym obrazem $\mathfrak{U}(\ell^2)$ poprzez odwzorowanie

$U \mapsto \pi_U$ — skoro $\mathfrak{U}(\ell^2)$ jest spójna, to $\Sigma_0(\mathfrak{A})$ również, skąd także $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest spójna. Gdyby zatem $\Sigma(\mathfrak{A})$ była lokalnie zwarta, to z tw. Aleksandrova (jako lokalnie zwarta, spójna przestrzeń metryczna) byłaby ośrodkowa a stąd σ-zwarta. Wówczas zbiór X, będący obrazem $\Sigma(\mathfrak{A})$ poprzez odwzorowanie $\pi \mapsto \pi(P_1)\xi$ (gdzie ξ jest pewnym, ustalonym wektorem jednostkowym), byłby σ-zwarty: jednak można sprawdzić, że X jest sferą w ℓ^2. Pozostaje zauważyć, że sfera S w ℓ^2 nie jest σ-zwarta: gdyby bowiem tak było, to także *kula* B w ℓ^2 byłaby σ-zwarta, jako obraz poprzez ciągłe odwzorowanie $S \times [0,1] \ni (\xi, t) \mapsto t\xi \in B$ — gdyby jednak $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ gdzie K_n są zwarte, to z tw. Baire'a któryś ze zbiorów K_n musiałby mieć niepuste wnętrze — sprzeczność. To rozumowanie dowodzi, że $\Sigma(\mathfrak{A})$ nie jest lokalnie zwarta.

Jednak $\mathfrak{A}$ ma własność Ascolego: istotnie, załóżmy że L jest punktowo relatywnie zwarty i rozważmy (nieprzywiedlną) reprezentację identycznościową $\iota : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}(\ell^2)$. Wtedy $L = \iota(L)$ jest relatywnie zwarty.

3. Niech S jest operatorem jednostronnego przesunięcia, tzn. $S : \ell^2 \to \ell^2$ jest zadany za pomocą formuły $S(x_1, x_2, ...) := (0, x_1, x_2, ...)$. Wówczas S jest (nieunitarną) izometrią — w szczególności, S nie jest operatorem normalnym. Wobec tego C^*-algebra generowana przez S, $\mathfrak{A} := C^*(S)$ jest nieprzemienna. Stosunkowo nietrudno sprawdzić, że $\mathfrak{A}$ zawiera wszystkie operatory zwarte: okazuje się, że $\mathfrak{A}$ jest rozszerzeniem $C(\mathbb{T})$ o $\mathfrak{K}(\ell^2)$, tzn. mamy następujący, krótki ciąg dokładny C^*-algebr (zob. np. [9]):

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}(\ell^2) \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.$$

Podobnie zatem jak dla $\mathfrak{K}(\ell^2)$, i tym razem reprezentacja identycznościowa jest nieprzywiedlna, co pozwala stwierdzić, że $\mathfrak{A}$ ma własność Ascolego. Ponadto, za zwarty zbiór generujący $\mathfrak{A}$ można wziąć $K_1 = K \cup \{S\}$, gdzie K jest zdefiniowany jak w poprzednim przykładzie — wówczas analogicznie jak poprzednio stwierdzamy, że $\mathfrak{A}$ nie jest zwarta.

Uwaga 7.14. Powyższy przykład można zmodyfikować w taki sposób, aby otrzymać ciąg rozproszony nie tylko w normie, ale w słabszej topologii SOT. Wystarczy wziąć na przykład:

$$U_n(e_k) = \begin{cases} e_k, \ k \neq 1 \ i \ k \neq n, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_n), \ k = n, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_n) \ k = 1 \end{cases}$$

Będziemy chcieli uogólnić rozumowanie z powyższego przykładu i pokazać, że jeżeli $\mathfrak{A}$ jest zwarta, to jej każda nieprzywiedlna reprezentacja jest skończenie wymiarowa. Na potrzeby dalszych rozważań przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 7.15. *Orbitą* operatora $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ nazywamy zbiór:

$$\mathrm{Orb}(T) := \{UTU^{-1} : U \in \mathfrak{U}(\mathcal{H})\}.$$

Twierdzenie 7.16. *Niech $\mathcal{H}$ będzie nieskończenie wymiarowa oraz $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Następujące warunki są równoważne:*

1. $\overline{\mathrm{Orb}(T)}$ *jest zwarty w* $\|\cdot\|$*;*

2. $\overline{\mathrm{Orb}(T)}^{SOT}$ *jest zwarty w SOT;*

3. istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$, taka że $T = \lambda I$.

Dowód. Jeżeli $T = \lambda I$, to $\overline{\mathrm{Orb}(T)}$ jest jednoelementowy.

Przypuśćmy więc, że T nie jest postaci λI. Wtedy istnieje $\xi \in \mathcal{H}$, taki że $T\xi$ i ξ są liniowo niezależne. Oczywiście można założyć, że $\|\xi\| = 1$. Połóżmy

$$\begin{cases} e_1 := \xi \\ e_2 := \alpha\xi + \beta T\xi \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ są tak dobrane, aby $\|e_2\| = 1$ i $e_1 \perp e_2$. W szczególności $\beta \neq 0$, skąd można wyliczyć $Te_1 = ae_1 + be_2$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Uzupełniamy $\{e_1, e_2\}$ do układu[14] ortonormalnego $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Niech U_n będzie operatorem (unitarnym) zamieniającym e_2 oraz e_n. Wtedy $U_n^* = U_n = U_n^{-1}$ oraz $U_nTU_ne_1 = ae_1 + be_n$, skąd dostajemy:

$$\|(U_nTU_n^{-1} - U_mTU_m^{-1})e_1\| = \|be_n - be_m\| = \sqrt{2}|b| > 0.$$

To przeczy temu, że $\mathrm{Orb}(T)$ jest relatywnie SOT-zwarty.
Reszta dowodu wynika z faktu, że topologia SOT jest słabsza od topologii normy. □

Uwagi 7.17. 1. Oczywiście, jeżeli $\dim \mathcal{H} < \infty$, to topologie $\|\cdot\|$ oraz SOT się pokrywają. Ponadto, $\mathrm{Orb}(T)$ jest zawsze zbiorem ograniczonym, więc w wymiarze skończonym $\overline{\mathrm{Orb}(T)}$ jest zwarty dla dowolnego $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Zauważmy również, że odwzorowanie

$$\mathfrak{U}(\mathcal{H}) \ni U \mapsto UTU^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

jest ciagłe i przeprowadza zwartą grupę $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ na $\mathrm{Orb}(T)$. W szczegolności więc, $\mathrm{Orb}(T)$ jest automatycznie domknięta.

2. Zwróćmy uwagę na to, że powyższy dowód pokazuje nieco więcej, mianowicie: jeżeli T nie jest postaci λI, to istnieje taki wektor $\xi \in \mathcal{H}$, że zbiór $\mathrm{Orb}(T)\xi \subset \mathcal{H}$ nie jest relatywnie zwarty. W istocie jednak prawdziwe jest następujące twierdzenie, którego dowód przypomina dowód twierdzenia Banacha-Alaoglu (zob. również np. dowód Twierdzenia 7.9):

Twierdzenie 7.18. *Podzbiór $\mathcal{S} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jest relatywnie SOT zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ zbiór $\mathcal{S}\xi$ jest relatywnie zwarty w $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$.*

3. Jeżeli $\dim \mathcal{H} = \infty$, $\mathcal{H}$ jest ośrodkowa oraz $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jest normalny, to zachodzi następujące twierdzenie (zob. np. Twierdzenie 1.1. w pracy [38] oraz bibliografię tamże):

Twierdzenie 7.19. *Przy powyższych założeniach, następujące warunki są równoważne:*

- *$S \in \overline{\mathrm{Orb}(T)}$,*
- *S jest normalny, $\sigma(S) = \sigma(T)$ oraz dla dowolnej izolowanej wartości własnej $\lambda \in \sigma(S)$ zachodzi:*

$$\dim\ker(T - \lambda I) = \dim\ker(S - \lambda I).$$

[14] Jeżeli $\mathcal{H}$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, to wtedy można założyć, że $\{e_n\}_n$ jest *bazą* ortonormalną; w ogólnym przypadku można by rozważyć bazę $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ gdzie $\mathcal{I}$ jest zbiorem indeksów, takim że $1, 2 \in \mathcal{I}$.

Widzimy więc, że w ogólnym przypadku $\mathrm{Orb}(T)$ nie musi być domknięta.

4. Istnieje szereg różnych topologii na $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (oprócz wymienionych we wstępie), jak na przykład: topologia ultrasłaba (zwana też σ-słabą), ultrasilna (zwana też σ-silną) a także *-ultrasilna i *-ultrasłaba (zob. np. [36], [3]). Okazuje się, że na zbiorze $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ wszystkie te topologie są jednakowe i równe topologii SOT lub WOT (zob. [3], Prop. I.3.2.9). Jednakże domknięcia względem tych topologii mogą być różne. Mamy bowiem

$$\overline{\mathfrak{U}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} = \mathfrak{U}(\mathcal{H}),$$

$$\overline{\mathfrak{U}(\mathcal{H})}^{SOT} = \{T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) : T \text{ jest izometrią}\},$$

$$\overline{\mathfrak{U}(\mathcal{H})}^{WOT} = \{T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) : \|T\| \leqslant 1\}.$$

Twierdzenie 7.20. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest zwartą C^*-algebrą oraz $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\pi)$ jest nieprzywiedlną reprezentacją, to* $\dim \mathcal{H}_\pi < \infty$.

Dowód. Dla $U \in \mathfrak{U}(\mathcal{H}_\pi)$ oznaczmy $\pi_U := U\pi U^{-1}$. Jest to oczywiście nieprzywiedlna reprezentacja. Skoro $\mathfrak{A}$ jest zwarta, to $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest zwarta, skąd w szczególności rodzina $\{\pi_U(a) : U \in \mathfrak{U}(\mathcal{H}_\pi)\}$ powinna być relatywnie zwarta, dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$. Jednak gdy oznaczymy $A := \pi(a)$, to powyższa rodzina jest równa $\mathrm{Orb}(A)$, wobec tego musi być $\dim \mathcal{H}_\pi < \infty$. □

Wniosek 7.21. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest nieskończenie wymiarową, prostą C^*-algebrą, to $\mathfrak{A}$ ma własność Ascolego i nie jest zwarta.*

Dowód. Skoro $\mathfrak{A}$ jest prosta, jej dowolna reprezentacja (niezerowa) jest wierna: w szczególności każda reprezentacja nieprzywiedlna jest wierna — zatem $\mathfrak{A}$ ma własność Ascolego. Z drugiej strony, skoro $\mathfrak{A}$ jest nieskończenie wymiarowa, to nie posiada skończenie wymiarowej (wiernej) nieprzywiedlnej reprezentacji a więc nie może być zwarta. □

Przykład 7.22. Podamy nietrywialny przykład nieskończenie wymiarowej, prostej C^*-algebry, zdefiniowanej za pomocą generatorów i relacji. Algebra ta jest nazywana *nieprzemiennym torusem* (ang. *noncommutative torus* lub *(irrational) rotation algebra*) i oznaczana jest przez A_θ, gdzie $\theta \in [0, 1]$ jest parametrem (niewymiernym). Wówczas A_θ jest zdefiniowana jako *uniwersalna* C^*-algebra z jednością generowana przez dwa elementy unitarne u, v spełniające relację $vu = e^{2\pi i\theta}uv$. Uniwersalność rozumiemy tutaj następująco: jeżeli $\mathfrak{A}$ jest inną C^*-algebrą z jednością, zawierającą dwa elementy unitarne $U, V \in \mathfrak{A}$, spełniające $VU = e^{2\pi i\theta}UV$, to istnieje morfizm $\alpha : A_\theta \to \mathfrak{A}$, taki że $\alpha(u) = U, \alpha(v) = V$. Jeżeli $\theta = 0$, to dostajemy przemienną C^*-algebrę izomorficzną z algebrą funkcji ciągłych na torusie $C(\mathbb{T}^2)$ — to uzasadnia nazwę „nieprzemienny torus”. Dla $\theta = \frac{p}{q}$ (gdzie p, q są względnie pierwsze, $q > 0$) istnieje (zespolona) wiązka wektorowa E rangi q, taka że $A_\theta \cong \Gamma(\mathbb{T}^2, \mathrm{End}(E))$ (zob. np. [21], Prop. 1.1.1) — wtedy A_θ jest wprawdzie nieprzemienna, ale w pewien sposób jest „bliska” algebrze przemiennej (dokładniej: jest *równoważna w sensie Mority* z przemienną algebrą — zob. np. [33], Rozdział 3 po niezbędne definicje). Najciekawszy jest więc przypadek, gdy θ jest liczbą niewymierną. Wówczas okazuje się, że A_θ jest prosta (zob. np. Tw. VI.1.4 w [12]). A_θ może być opisana za pomocą konkretnej reprezentacji na $L^2(\mathbb{S}^1)$, mianowicie:

$$(Uf)(t) = e^{2\pi t}f(t), \quad Vf(t) = f(t + \theta)$$

gdzie na okrąg $\mathbb{S}^1$ patrzymy jak na $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (tzn. stosujemy addytywną notację). W świetle powyższych rezultatów A_θ (dla θ niewymiernego) nie jest zwarta, ale ma własność Ascolego. Duzo więcej na temat algebry A_θ i jej różnych opisów (oraz wariantów) znaleźć można w [21].

Przykład 7.23. Istnieją C^*-algebry z jednością, które nie są zwarte, ale wszystkie ich nieprzywiedlne reprezentacje są skończenie wymiarowe. Poniżej podamy przykład takiej algebry. Połóżmy $\mathfrak{A} := \prod_{n=1}^{\infty} M_{2^n}$ i rozważmy ideał $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$, zadany jako $\mathfrak{I} := \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_{2^n}$. Oznaczmy również $\mathfrak{F} = \{(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{A} : A_1 - \text{diagonalna},\ A_{n+1} = A_n \oplus A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$: wtedy $\mathfrak{F}$ jest przemienną C^*-algebrą, izomorficzną z $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Wówczas zachodzi $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{F} = 0$. Niech $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{F} \dot{+} \mathfrak{I}$. Ponieważ $\mathfrak{F}$ jest skończenie wymiarowa, to $\mathfrak{A}_0$ jest domknięta w $\mathfrak{A}$ — zatem $\mathfrak{A}_0$ jest C^*-algebrą. Pokażemy, że wówczas $\mathfrak{A}_0$ nie jest zwarta, jednak każda jej nieprzywiedlna reprezentacja jest skończenie wymiarowa.
Mamy następujący krótki ciąg dokladny C^*-algebr

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{A}_0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0.$$

Skoro $\mathfrak{I} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_{2^n}$, to $\operatorname{Irr}(\mathfrak{I}) = \bigsqcup_n \operatorname{Irr}(M_{2^n})$ — jednak $\operatorname{Irr}(M_k) = \{U(\cdot)U^{-1} : U \in \mathfrak{U}_n\}$. Zatem każda nieprzywiedlna reprezentacja $\mathfrak{I}$ jest skończenie wymiarowa. Ponieważ sama algebra $\mathfrak{F}$ jest skończenie wymiarowa, to również każda jej nieprzywiedlna reprezentacja jest skończenie wymiarowa. Skoro $\mathfrak{A}_0$ jest rozszerzeniem $\mathfrak{F}$ o $\mathfrak{I}$, to $\mathfrak{A}_0$ ma również skończenie wymiarowe nieprzywiedlne reprezentacje.

Jednak $\mathfrak{A}_0$ nie jest zwarta: żeby to zobaczyć, ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i dla operatora unitarnego $U \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}^{2^n})$ rozważmy reprezentację zadaną wzorem $\pi_{n,U}(a) := UA_nU^{-1}$ gdzie $a = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in M_{2^n}(\mathbb{C})$. Rozpatrując $\pi_{n,U}$ jako reprezentację $\mathfrak{I}$ stwierdzamy, że jest ona nieprzywiedlna. Wobec tego określając $\pi_{n,U}$ tym samym wzorem na $\mathfrak{A}_0$ również otrzymujemy nieprzywiedlną reprezentację. Wobec tego $\rho_n := \aleph_0 \odot \pi_{n,U} \in \Sigma(\mathfrak{A}_0)$. Rozważmy macierz $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wówczas V jest rzeczywistą macierzą symetryczną, spełniającą $V^2 = I$ — zatem V jest unitarna oraz $V^{-1} = V$. Jeżeli $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, to $VAV^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$.

Rozważmy operatory unitarne na C^{2^n} zdefiniowane wzorem

$$U_n = \underbrace{I_2 \oplus I_2 \oplus ... \oplus I_2}_{2^{n-1}-1} \oplus V$$

oraz weźmy stowarzyszone reprezentacje nieprzywiedlne π_{n,U_n}. Za zbiór K generujący $\mathfrak{A}_0$ weźmy dowolny zbiór zawierający $a = (A, A \oplus A, A \oplus A \oplus A \oplus A, ...) \in \mathfrak{F}$ gdzie np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech np. $n < m$ — wówczas mamy:

$$\begin{aligned} d_K(\rho_n, \rho_m) \geqslant \|\rho_n(a) - \rho_m(a)\| = \|\aleph_0 \odot U_n(A^{\oplus 2^{n-1}})U_n - \aleph_0 \odot U_m(A^{\oplus 2^{m-1}})U_m\| = \\ = \|\aleph_0 \odot \Big((0_{2^n-2} \oplus B) \oplus (0_{2^n-2} \oplus B) \oplus ... \oplus (0_{2^n-2} \oplus B) \oplus 0_{2^n}\Big)\| = \\ = \|(0_{2^n-2} \oplus B)\| = \|B\| \end{aligned}$$

gdzie $B = VAV^{-1} - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. W ten sposób otrzymujemy nieskończony podzbiór dyskretny $\Sigma(\mathfrak{A}_0)$, skąd $\mathfrak{A}_0$ nie może być zwarta.

Uwaga 7.24. Ideał $\mathfrak{I}$ z powyższego przykładu stanowi algebrę kurczącą (bez jedności), jest zatem zwarty. Oczywiście $\mathfrak{F}$ jest także zwarta (jako przemienna albo jako skończenie wymiarowa algebra). Wobec tego, powyższy przykład pokazuje, że zwartość nie zachowuje się przy braniu rozszerzeń: de facto przykład ten pokazuje również, że własność bycia algebrą kurczącą nie jest zamknięta na branie rozszerzeń.

Zanim udowodnimy następne twierdzenie o związku między zwartością a silną własnością Ascolego, potrzebny nam będzie następujący:

Lemat 7.25. *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami metrycznymi, przy czym X jest zwarta a Y zupełna oraz niech $K \subset C(X, Y)$ będzie rodziną jednakowo ciągłą. Wówczas zbiór*

$$F := \{x \in X : K(x) - \text{relatywnie zwarta}\}$$

jest domknięty, gdzie $K(x) := \{f(x) : f \in K\}$.

Dowód. Ponieważ Y jest przestrzenią zupełną, to relatywna zwartość jest równoważna całkowitej ograniczoności, zatem $F = \{x \in X : K(x) - \text{całkowicie ograniczona}\}$. Ustalmy $x \in \overline{F}$ oraz $\varepsilon > 0$. Z jednakowej ciągłości istnieje $\delta > 0$, taka że dla dowolnej funkcji $f \in K$ oraz dowolnych $a, b \in X$, spełniających $d_X(a, b) < \delta$ zachodzi $d_Y(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Skoro $x \in \overline{F}$, to istnieje $a \in F$, takie że $d_X(x, a) < \delta$. Ponieważ $a \in F$, to $K(a)$ jest całkowicie ograniczony, czyli istnieją $z_1, ..., z_N \in Y$ takie, że zachodzi:

$$K(a) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(z_j, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Twierdzimy, że wówczas

$$K(x) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(z_j, \frac{\varepsilon}{2}). \tag{7.1}$$

Niech $f \in K$: skoro $d_X(x, a) < \delta$, to $d_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{4}$; ponadto $f(a) \in K(a)$, skąd istnieje $j \in \{1, ..., N\}$, takie że $f(a) \in B(z_j, \frac{\varepsilon}{4})$. Otrzymujemy stąd:

$$d_Y(f(x), z_j) \leqslant d_Y(f(x), f(a)) + d_Y(f(a), z_j) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

co dowodzi (7.1). Uzyskaną w ten sposób $\frac{\varepsilon}{2}$-sieć w Y można zmodyfikować do ε-sieci w $K(x)$, definiując y_j jako dowolny[15] punkt ze zbioru $K(x) \cap B(z_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Wówczas dla dowolnego elementu $f(x) \in K(x)$, gdzie $f \in K$, istnieje $z_j \in Y$, takie że $d_Y(f(x), z_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ i wtedy:

$$d_Y(f(x), y_j) \leqslant d_Y(f(x), z_j) + d_Y(z_j, y_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

co pokazuje, że $K(x) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(y_j, \varepsilon)$, czyli $\{y_1, ..., y_N\}$ jest ε-siecią. □

[15] Jeżeli $K(x) \cap B(z_j, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$, to możemy pominąć kulę $B(z_j, \frac{\varepsilon}{2})$ i dalej $K(x) \subset \bigcup_{i \neq j} B(z_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Zatem bez straty ogólności możemy zakładać, że dla dowolnego $j = 1, ..., N$ mamy $K(x) \cap B(z_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$.

Wniosek 7.26. *Jeżeli (przy oznaczeniach i założeniach powyższego lematu) zbiór $K(x)$ jest relatywnie zwarty dla wszystkich x z pewnego zbioru gęstego $D \subset X$, to dla dowolnego $x \in X$ również tak jest.*

Twierdzenie 7.27. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest zwartą C^*-algebrą, to $\mathfrak{A}$ ma silną własność Ascolego.*

Dowód. Ustalmy podzbiór $L \subset \mathfrak{A}$ ograniczony i jednakowo ciągły. Dla dowolnego $x \in L$ rozważmy $\hat{x}$ jako odwzorowanie $\hat{x} : \Sigma(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}(\ell^2)$. Wówczas jest to odwzorowanie (jednostajnie) ciągłe, określone na *zwartej* przestrzeni metrycznej (o wartościach w przestrzeni metrycznej) — w takim kontekście można korzystać z klasycznego twierdzenia Ascolego-Arzeli. Sprawdzimy, że założenia twierdzenia Ascolego-Arzeli są spełnione:

1. skoro L jest jednakowo ciągły, to rodzina $\{\hat{x} : x \in L\}$ jest jednakowo ciągła,

2. niech $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ będzie postaci $\aleph_0 \odot \pi'$ gdzie π' jest nieprzywiedlna. Skoro $\mathfrak{A}$ jest zwartą C^*-algebrą, to π' jest skończenie wymiarowa, powiedzmy $\pi' : \mathfrak{A} \to M_n$. Wówczas

   $$\{\hat{x}(\pi) : x \in L\} = \{\pi(x) : x \in L\} = \{\aleph_0 \odot \pi'(x) : x \in L\}.$$

   Oczywiście przyporządkowanie $M_n \ni A \mapsto \aleph_0 \odot A \in \mathfrak{B}(\ell^2)$ jest izometrią, zatem wystarczy stwierdzić, że $\{\pi'(x) : x \in L\}$ jest relatywnie zwarty — jednak jest to ograniczony podzbiór $\mathbb{C}^n$, zatem jest relatywnie zwarty.

Ponieważ $\Sigma_f^0(\mathfrak{A})$ jest gęste w $\Sigma_f(\mathfrak{A}) = \Sigma(\mathfrak{A})$, to zbiór $\pi(L)$ jest relatywnie zwarty dla dowolnego $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ (Wniosek 7.26). Zatem z twierdzenia Ascolego-Arzeli zbiór $\{\hat{x} : x \in L\}$ jest relatywnie zwarty. Ponieważ odwzorowanie $x \mapsto \hat{x}$ jest izometrią[16], to L także musi być relatywnie zwarty. $\square$

Uwaga 7.28. Zwróćmy uwagę, że bez znajomości Twierdzenia 7.20 (oraz Wniosku 7.26) można analogicznie pokazać słabszy rezultat mówiący, że każda zwarta C^*-algebra ma własność Ascolego.

7.2 Zbieżność punktowa i zbieżność jednostajna

Definicja 7.29. Powiemy, że ciąg uogólniony $(a_s)_s \subset \mathfrak{A}$ zbiega do $a \in \mathfrak{A}$ *punktowo*, jeżeli dla dowolnej reprezentacji $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ zachodzi $\|\pi(a_s) - \pi(a)\| \to 0$.

Uwagi 7.30. Oczywiście, jeżeli $\mathfrak{A} = C(X)$ jest przemienną C^*-algebrą, to dowolna reprezentacja z $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest automatycznie nieprzywiedlna i jest postaci $f \mapsto f(x)$ dla pewnego $x \in X$. Zatem powyżej zdefiniowana zbieżność, to w tym przypadku zwyczajna zbieżność punktowa. Z drugiej strony, gdyby w powyższej definicji rozważać wszystkie reprezentacje z $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, to w szczególności możnaby wziąć reprezentację wierną i tak zdefiniowana zbieżność byłaby zwykłą zbieżnością w normie.

[16] Jest to sprawdzone np. w dowodzie Twierdzenia 7.37.

Powyższa zbieżność pochodzi od topologii lokalnie wypukłej, zadanej przez rodzinę seminorm określonych w sposób: $a \mapsto \|\pi(a)\|$, $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. Przy tak zdefiniowanej topologii, wszystkie operacje C^*-algebry (tj. dodawania, mnożenia, inwolucji) stają się ciągłe — przykładowo, dla sprawdzenia ciągłości mnożenia, jeżeli $a_s \to a$, $b_s \to b$ punktowo oraz $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, to mamy:

$$\|\pi(a_s b_s) - \pi(ab)\| \leqslant \|\pi(a_s)\pi(b_s) - \pi(a)\pi(b_s)\| + \|\pi(a)\pi(b_s) - \pi(a)\pi(b)\| \leqslant$$
$$\|\pi(a_s) - \pi(a)\| \cdot \|\pi(b_s)\| + \|\pi(a)\|\|\pi(b_s) - \pi(b)\| \to 0$$

gdyż ciąg $\{\|\pi(b_s)\|\}_s$ jest ograniczony od pewnego miejsca.
W kontekście (niekoniecznie przemiennych) zwartych C^*-algebr zachodzi następujący analog klasycznego Twierdzenia Diniego:

Twierdzenie 7.31. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie zwartą C^*-algebrą z jednością oraz $(a_n)_n$ będzie rosnącym ciągiem zbieżnym do a punktowo. Wówczas $a_n \to a$ w normie.*

Dowód. Oznaczmy dla wygody $b_n := a - a_n$ — wtedy $b_n \geqslant 0$ oraz $b_n \to 0$ punktowo. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $K_n = \{\pi \in \Sigma(\mathfrak{A}) : \|\pi(b_n)\| < \varepsilon\}$. Ponieważ $\big(\pi(b_n)\big)_n$ jest malejącym ciągiem elementów nieujemnych, to $\big(\|\pi(b_n)\|\big)_n$ jest malejący, więc $\{K_n\}_n$ jest wstępującym ciągiem zbiorów otwartych. Z naszego założenia wynika równość $\Sigma(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Ponieważ $\Sigma(\mathfrak{A})$ jest zwarta, to istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że $K_n = \Sigma(\mathfrak{A})$ dla wszystkich $n > N$. Wobec tego jeżeli $n > N$, to dla dowolnej $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ zachodzi $\|\pi(b_n)\| < \varepsilon$, zatem $\sup_{\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})} \|\pi(b_n)\| = \|b_n\| < \varepsilon$, co dowodzi zbieżności w normie. □

Dalej będziemy chcieli opisać związki powyżej wprowadzonej zbieżności punktowej ze słabą zbieżnością (w sensie przestrzeni Banacha). Potrzebne nam będzie następujące twierdzenie (zob. np. [32]):

Twierdzenie 7.32 (Choquet)**.** *Niech E będzie przestrzenią Banacha oraz $K \subset E^*$ będzie zwartym, wypukłym i metryzowalnym podzbiorem przestrzeni dualnej. Wówczas dowolne $\psi \in K$ ma postać*

$$\psi(x) = \int_{\mathrm{Ex}(K)} \varphi(x) d\mu(\varphi)$$

dla pewnej miary probabilistycznej na zbiorze $\mathrm{Ex}(K)$ *punktów ekstremalnych K.*

Lemat 7.33. *Jeżeli $(x_n)_n \subset \mathfrak{A}$ jest ograniczonym ciągiem, to $x_n \to 0$ słabo wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego stanu czystego φ zachodzi $\varphi(x_n) \to 0$*

Dowód. Załóżmy, że dla dowolnego stanu czystego $\varphi \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ zachodzi $\varphi(x_n) \to 0$. Jeżeli określimy $f_n : \mathcal{P}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$ za pomocą formuły $f_n(\varphi) = \varphi(x_n)$, to wtedy f_n są *-słabo ciągłe oraz $\|f_n\| = \|x_n\|$, zatem $(f_n)_n$ są jednostajnie ograniczone. Nasze założenie mówi, że $f_n \to 0$ punktowo, zatem z tw. Lebesgue'a, dla dowolnej miary probabilistycznej μ na $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ zachodzi $\int_{\mathcal{P}(\mathfrak{A})} f_n(\varphi) d\mu(\varphi) = \int_{\mathcal{P}(\mathfrak{A})} \varphi(x_n) d\mu(\varphi) \to 0$. Ponieważ zbiór wszystkich stanów $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ jest *-słabo zwarty, wypukły i metryzowalny (jeśli $\mathfrak{A}$ jest ośrodkowa), to z tw. Choqueta dowolny stan $\psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$ jest postaci

$$\psi(x) = \int_{\mathcal{P}(\mathfrak{A})} \varphi(x) d\mu(\varphi)$$

z pewną miarą probabilistyczną μ na $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$. Zatem otrzymujemy $\psi(x_n) \to 0$ dla dowolnego stanu ψ. Skoro dowolny funkcjonał liniowy i ciągły na $\mathfrak{A}$ jest kombinacją liniową stanów, to $x_n \to 0$ słabo. □

Twierdzenie 7.34. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie ośrodkową C^*-algebrą z jednością oraz $(x_n)_n \subset \mathfrak{A}$ będzie ograniczonym ciągiem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *$x_n \to 0$ w słabej topologii;*
2. *dla dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ zachodzi $\pi(x_n) \to 0$ w topologii WOT;*
3. *dla dowolnej reprezentacji $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ zachodzi $\pi(x_n) \to 0$ w topologii WOT.*

Dowód. Załóżmy, że $x_n \to 0$ słabo, ustalmy (dowolną) reprezentację π oraz dowolne $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$. Określmy $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\varphi(x) := \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle.$$

Wówczas φ jest liniowym i ciągłym funkcjonałem, zatem $\varphi(x_n) \to 0$ co oznacza, że $\pi(x_n) \to 0$ w topologii WOT.

Załóżmy natomiast, że dla dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej π zachodzi $\pi(x_n) \to 0$ w topologii WOT i ustalmy $\varphi \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$. Wówczas φ generuje reprezentację nieprzywiedlną $\pi_\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\varphi)$, taką że

$$\varphi(x) = \langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$$

gdzie $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ jest (jednostkowym) wektorem cyklicznym. Z założenia $\langle \pi(x_n)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \to 0$, czyli $\varphi(x_n) \to 0$, a zatem z lematu $x_n \to 0$ słabo. □

Oczywiście, jeżeli wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry $\mathfrak{A}$ są skończenie wymiarowe, to dla takiej reprezentacji π zbieżność $\pi(x_n) \to 0$ w WOT jest równoważna zbieżności $\pi(x_n) \to 0$ w normie i dostajemy następujący:

Wniosek 7.35. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest CCR-algebrą z jednością, to dla ograniczonego ciągu $(x_n)_n \subset \mathfrak{A}$ następujące warunki są równoważne:*

- *$x_n \to 0$ punktowo,*
- *$x_n \to 0$ w słabej topologii.*

W szczególności, powyższa równoważność ma miejsce, gdy $\mathfrak{A}$ jest zwartą C^*-algebrą. □

Możemy również rozważać następującą zbieżność:

Definicja 7.36. Powiemy, że ciąg $(a_s)_s$ zbiega do *a jednostajnie*, gdy $\|\pi(a_s) - \pi(a)\| \to 0$ jednostajnie ze względu na $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$.

Wprost z definicji widzimy, że zbieżność jednostajna $a_s \to a$ to po prostu jednostajna zbieżność $\widehat{a_s} \to \hat{a}$ jako odwzorowań $\Sigma(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}(\ell^2)$. W szczególności więc, zbieżność ta pochodzi od metryki — czyli w tym kontekście wystarczy badać zwykłe ciągi. Wówczas okazuje się, że tak zdefiniowana zbieżność pokrywa się ze zbieżnością w normie:

Twierdzenie 7.37. *Ciąg* $(a_n)_n \subset \mathfrak{A}$ *jest zbieżny do* $a \in \mathfrak{A}$ *jednostajnie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\|a_n - a\| \to 0$.

Dowód. Ze wzoru $\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})\} = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{A})\}$ (zob. 2.7.1 i 2.7.3 w [13]) wynika, że

$$\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi \in \Sigma(\mathfrak{A})\},$$

skąd otrzymujemy tezę. □

8 Jednostajna ciągłość morfizmów

8.1 Dwa podejścia i ich równoważność

Przypuśćmy, że X, Y są zwartymi przestrzeniami metrycznymi oraz $\alpha : C(X) \to C(Y)$ jest *-homomorfizmem (zachowującym jedność). Wówczas α indukuje ciągłe odwzorowanie $u : Y \to X$, takie że $\alpha(f) = f \circ u$. Wtedy dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ zachodzi:

$$|\alpha(f)(y_1) - \alpha(f)(y_2)| = |f(u(y_1)) - f(u(y_2))| \leqslant \\ \omega_f\Big(d_X\Big(u(y_1), u(y_2)\Big)\Big) \leqslant \omega_f\Big(w_u\Big(d_Y(y_1, y_2)\Big)\Big)$$

gdzie ω_f, ω_u są (minimalnymi) modułami ciągłości dla f oraz u (odp.). Wobec tego, gdy $\omega_{\alpha(f)}$ oznacza minimalny moduł ciągłości dla $\alpha(f) \in C(Y)$, to mamy

$$\omega_{\alpha(f)} \leqslant \omega_f \circ \omega_u.$$

Dla rozpatrzenia nieprzemiennej sytuacji załóżmy, że $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są dwiema ośrodkowymi C^*-algebrami z jednością oraz K, L są zwartymi zbiorami generującymi $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ (odpowiednio). Powyższe rozumowanie prowadzi do następującej definicji:

Definicja 8.1. *-homomorfizm $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ nazywamy *jednostajnie ciągłym*, jeżeli istnieje $\omega \in \Omega$, taka że dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ zachodzi

$$\omega^L_{\alpha(a)} \leqslant \omega^K_a \circ \omega.$$

Oznaczamy $\omega^{K,L}_\alpha = \inf\{\omega \in \Omega : \omega^L_{\alpha(a)} \leqslant \omega^K_a \circ \omega, a \in \mathfrak{A}\}$.

Fakt 8.2. *Powyższa definicja jednostajnej ciągłości nie zależy od wyboru zwartych zbiorów* K, L *generujących algebry* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\alpha : (\mathfrak{A}, K) \to (\mathfrak{B}, L)$ jest jednostajnie ciągłym *-homomorfizmem oraz K', L' są innymi zwartymi zbiorami generującymi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (odpowiednio). Mamy wówczas $\omega^L_{\alpha(a)} \leqslant \omega^K_a \circ \omega^{K,L}_\alpha$ i szacujemy

$$\omega^{L'}_{\alpha(a)} \leqslant \omega^L_{\alpha(a)} \circ \omega^{L'}_L \leqslant \omega^K_a \circ \omega^{K,L}_\alpha \circ \omega^{L'}_L \leqslant \omega^{K'}_a \circ \omega^K_{K'} \circ \omega^{K,L}_\alpha \circ \omega^{L'}_L \tag{8.1}$$

co dowodzi jednostajnej ciągłości α jako odwzorowania $(\mathfrak{A}, K') \to (\mathfrak{B}, L')$: w istocie dostajemy nierówność $\omega^{K',L'}_\alpha \leqslant \omega^K_{K'} \circ w^{K,L}_\alpha \circ \omega^{L'}_L$. □

Jeżeli $\alpha : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2, \beta : \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3$ są *-homomorfizmami C^*-algebr oraz $K_i,\ i = 1,2,3$ oznaczają odpowiednie zwarte zbiory generujące, to zachodzi:

$$\omega^{K_3}_{\beta\circ\alpha(a)} \leqslant \omega^{K_2}_{\alpha(a)} \circ w_\beta \leqslant \omega^{K_1}_a \circ (\omega_\alpha \circ \omega_\beta)$$

skąd wynika, że $\omega_{\beta\circ\alpha} \leqslant \omega_\alpha \circ \omega_\beta$. W szczególności więc widzimy, że złożenie jednostajnie ciągłych *-homomorfizmów jest nadal jednostajnie ciągłe.

Twierdzenie 6.12 pokazuje, że odwzorowanie identycznościowe

$$\mathrm{id} : (\mathfrak{A}, K) \to (\mathfrak{A}, K')$$

jest jednostajnie ciągłe. W istocie jednak mamy następujące:

Twierdzenie 8.3. *Jeżeli $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest *-homomorfizmem, to α jest jednostajnie ciągły.*

Dowód. Ustalmy zwarte zbiory K, L generujące $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ oraz niech $a_0 \in \mathfrak{A}$. Twierdzimy, że dla $t \geqslant 0$ zachodzi:

$$f^L_{\alpha(a_0)}(t) \leqslant f^K_{a_0} \circ f^L_{\alpha(K)}(t). \tag{8.2}$$

Ustalmy $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$, takie że $d_L(\tau_1, \tau_2) \leqslant t$ oraz połóżmy $\pi_i := \tau_i \circ \alpha \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A}),\ i = 1, 2$. Wówczas

$$\sup\{\|\tau_1(\alpha(a)) - \tau_2(\alpha(a))\| : a \in K\} \leqslant \sup\{\|\tau(\alpha(a)) - \tau'(\alpha(a))\| : a \in K, d_L(\tau, \tau') \leqslant t\}.$$

Lewa strona powyższej nierówności to $d_K(\tau_1 \circ \alpha, \tau_2 \circ \alpha) = d_K(\pi_1, \pi_2)$, zaś prawa strona to $\sup\{\|\tau(b) - \tau'(b)\| : b \in \alpha(K), d_L(\tau, \tau') \leqslant t\} = f^L_{\alpha(K)}(t)$. Otrzymujemy zatem, że gdy $d_L(\tau_1, \tau_2) \leqslant t$, to:

$$d_K(\pi_1, \pi_2) \leqslant f^L_{\alpha(K)}(t). \tag{8.3}$$

Teraz lewa strona nierówności (8.2) wynosi $\sup\{\|\tau(\alpha(a_0) - \tau'(\alpha(a_0))\| : d_L(\tau, \tau') \leqslant t\}$, z kolei prawa to $\sup\{\|\pi(a_0) - \pi'(a_0)\| : d_K(\pi, \pi') \leqslant f^L_{\alpha(K)}(t)\}$. Wobec tego (8.3) pokazuje, że zbiór, po którym bierzemy supremum z lewej strony (8.2), jest zawarty w zbiorze, po którym bierzemy supremum z prawej strony (8.2) oraz dla τ_i, π_i jak powyżej mamy $\|\pi_1(a_0) - \pi_2(a_0)\| = \|\tau_1(\alpha(a_0)) - \tau_2(\alpha(a_0))\|$ — co dowodzi nierówności (8.2).

Wystarczy przejść do kresów w (8.2), aby otrzymać $\omega^L_{\alpha(a_0)} \leqslant \omega^K_{\alpha(a_0)} \circ \omega^L_{\alpha(K)}$. W szczególności $\omega^{K,L}_\alpha \leqslant \omega^L_{\alpha(K)}$. □

Możemy również rozważyć alternatywną definicję:

Definicja 8.4. *-homomorfizm $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ nazywamy *jednostajnie ciągłym*, gdy odwzorowanie

$$\alpha^* : (\mathrm{Rep}(\mathfrak{B}), d_L) \ni \pi \to \pi \circ \alpha \in (\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}), d_K)$$

jest jednostajnie ciągłe.

Gdy α jest epimorfizmem, to możemy rozważać to odwzorowanie między $\Sigma(\mathfrak{B})$ oraz $\Sigma(\mathfrak{A})$ i żądać, aby takie odwzorowanie było jednostajnie ciągłe.

Zwróćmy uwagę, że gdy $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest epimorfizmem, to indukowane odwzorowanie α^* jest monomorfizmem, zarówno jako odwzorowanie $\Sigma(\mathfrak{B}) \to \Sigma(\mathfrak{A})$, jak i $\mathrm{Rep}(\mathfrak{B}) \to \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$. Jeżeli $\{\pi_n\}_n \subset \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$ zbiega do $\pi \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$ w topologii punktowo-normowej (czyli w topologii metryki d_K gdzie K jest zwartym zbiorem generującym), to dla dowolnego $b \in \mathfrak{B}$ mamy $\pi_n(b) \to \pi(b)$. Gdy zatem $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest *-homomorfizmem, to w szczególności dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ zachodzi $\pi_n(\alpha(a)) \to \pi(\alpha(a))$, więc $\alpha^*(\pi_n) = \pi_n \circ \alpha \to \pi \circ \alpha = \alpha^*(\pi)$ w topologii punktowo-normowej. Wobec tego α^* jest zawsze odwzorowaniem *ciągłym.*

Jeżeli $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \beta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ są *-homomorfizmami C^*-algebr, to mamy $(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$, zatem złożenie jednostajnie ciągłych *-homomorfizmów jest nadal jednostanie ciągłym *-homomorfizmem. W istocie zachodzi następujące:

Twierdzenie 8.5. *Jeżeli* $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *jest *-homomorfizmem, to* α *jest jednostajnie ciągły.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że powyższa definicja jednostajnej ciągłości nie zależy od wyboru zwartych zbiorów generujących K i L: jeżeli bowiem $K' \subset \mathfrak{A}, L' \subset \mathfrak{B}$ są innymi zwartymi zbiorami generującymi, to z Twierdzenia 6.9 metryki d_K i $d_{K'}$ oraz d_L i $d_{L'}$ są parami jednostajnie równoważne. Zatem jednostajna ciągłość α^* nie zależy od wyborów metryk d_K, d_L. Niech więc $K \subset \mathfrak{A}, L \subset \mathfrak{B}$ będą zwartymi zbiorami generującymi oraz załóżmy[17], że $\alpha(K) \subset L$. Wówczas dla $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$ mamy:

$$\begin{aligned} d_K(\alpha^*(\pi), \alpha^*(\pi')) = d_K(\pi \circ \alpha, \pi' \circ \alpha) &= \sup_{a \in K} \|\pi(\alpha(a)) - \pi'(\alpha(a))\| \\ &\leqslant \sup_{b \in L} \|\pi(b) - \pi'(b)\| = d_L(\pi, \pi') \end{aligned}$$

co dowodzi, że odwzorowanie α^* jest jednostajnie ciągłe (a nawet zwężające). □

Zatem dla dowolnego *-homomorfizmu $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, odwzorowanie

$$\alpha^* : \Big(\mathrm{Rep}(\mathfrak{B}), d_L\Big) \to \Big(\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}), d_K\Big)$$

posiada swój moduł ciągłości, który oznaczać będziemy $\tilde{\omega}_\alpha^{K,L}$. Wówczas spełniona jest nierówność:

$$d_K(\pi \circ \alpha, \pi' \circ \alpha) \leqslant \tilde{\omega}_\alpha^{K,L}\Big(d_L(\pi, \pi')\Big), \quad \pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{B}). \tag{8.4}$$

Fakt 8.6. *Przy powyższych oznaczeniach zachodzi równość* $\omega_\alpha^{K,L} = \tilde{\omega}_\alpha^{K,L}$.

Dowód. Dla dowodu nierówności $\omega_\alpha^{K,L} \leqslant \tilde{\omega}_\alpha^{K,L}$, podobnie jak w poprzednich rozumowaniach, wystarczy stwierdzić, że dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ zachodzi nierówność $f^L_{\alpha(a)} \leqslant f^K_a \circ \tilde{\omega}_\alpha^{K,L}$ — czyli, że dla dowolnego $t \geqslant 0$ zachodzi:

$$\sup_{d_L(\pi,\pi') \leqslant t} \|\pi(\alpha(a)) - \pi'(\alpha(a))\| \leqslant \sup\{\|\tau(a) - \tau'(a)\| : d_K(\tau, \tau') \leqslant \tilde{\omega}_\alpha^{K,L}(t)\}. \tag{8.5}$$

Weźmy $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$ spełniające $d_L(\pi, \pi') \leqslant t$. Wtedy kładąc $\tau := \pi \circ \alpha, \tau' := \pi' \circ \alpha$, mamy z nierówności (8.4), że:

$$d_K(\tau, \tau') \leqslant \tilde{\omega}_\alpha^{K,L}\Big(d_L(\pi, \pi')\Big) \leqslant \tilde{\omega}_\alpha^{K,L}(t).$$

[17]Każdy *-homomorfizm jest ciągły, więc $\alpha(K)$ jest zwarty.

Wobec tego τ, τ' należą do zbioru, po którym bierzemy supremum z prawej strony (8.5), co dowodzi nierówności (8.5).

Dla dowodu przeciwnej nierówności wystarczy pokazać, że dla $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$ zachodzi

$$d_K(\pi \circ \alpha, \pi' \circ \alpha) \leqslant \omega_\alpha^{K,L}\Big(d_L(\pi, \pi')\Big). \tag{8.6}$$

Jeżeli $a_0 \in K$ oraz $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ spełniają $d_K(\pi, \pi') \leqslant t$, to $\|\pi(a_0) - \pi'(a_0)\| \leqslant t$ i przechodząc do kresu po wszystkich takich reprezentacjach, mamy $f_{a_0}^K(t) \leqslant t$, czyli dla dowolnego $t \geqslant 0$ zachodzi $\omega_{a_0}^K(t) \leqslant t$. Wobec tego, dla dowolnego $a \in K$ oraz dowolnych $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{B})$, zachodzi

$$\|\pi(\alpha(a)) - \pi'(\alpha(a))\| \leqslant \omega_{\alpha(a)}^L\Big(d_L(\pi, \pi')\Big) \leqslant (\omega_a^K \circ \omega_\alpha^{K,L})\Big(d_L(\pi, \pi')\Big) \leqslant \omega_\alpha^{K,L}\Big(d_L(\pi, \pi')\Big),$$

skąd przechodząc do kresu po $a \in K$, dostajemy

$$d_K(\pi \circ \alpha, \pi' \circ \alpha) \leqslant \omega_\alpha^{K,L}\Big(d_L(\pi, \pi')\Big),$$

co dowodzi nierówności (8.6). □

Powyższy rezultat pokazuje, że oba omawiane podejścia produkują ten sam moduł ciągłości dla *-homomorfizmu $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Możemy zatem pisać $\omega_\alpha^{K,L}$ lub krótko ω_α, gdy wiadomo jak wybrane są zbiory K, L.

8.2 Zbieżność morfizmów

Na zbiorze $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ możemy rozważać:

- topologię zbieżności punktowo-normowej: w tej topologii mamy zbieżność $\alpha_s \to \alpha$, gdy $\alpha_s(a) \xrightarrow{\|\cdot\|} \alpha(a)$ dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$,
- topologię zwarto-otwartą: w topologii tej zachodzi $\alpha_s \to \alpha$, gdy dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathfrak{A}$ spełnione jest

$$\sup_{a \in K} \|\alpha_s(a) - \alpha(a)\| \to 0.$$

Możemy również zdefiniować topologię przy pomocy metryki w podobny sposób, jak na zbiorze $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, mianowicie: wybieramy zwarty zbiór generujący $K \subset \mathfrak{A}$ i kładziemy, dla $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

$$d_K(\alpha, \beta) := \sup\{\|\alpha(a) - \beta(a)\| : a \in K\}. \tag{8.7}$$

Fakt 8.7. *Wzór* (8.7) *definiuje metrykę na zbiorze* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Faktu 6.1. □

Co więcej, topologia metryki d_K na $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zachowuje się podobnie jak w przypadku $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ — mianowicie mamy następujące:

Twierdzenie 8.8. *Topologia metryki d_K pokrywa się z topologią zbieżności punktowo-normowej oraz topologią zbieżności niemal jednostajnej.*

Dowód. Zob. dowód Twierdzenia 6.4. □

Uwaga 8.9. Możemy zdefiniować również zbieżność $\alpha_n \to \alpha$ za pomocą warunku jednostajnej zbieżności $\alpha_n^* \rightrightarrows \alpha^*$. Skoro dla dowolnego $x \in \mathfrak{A}$ zachodzi $\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi \text{ jest reprezentacją nieprzywiedlną}\} = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})\}$, to otrzymujemy

$$\sup_{\pi\in\Sigma(\mathfrak{B})} d_K(\pi\circ\alpha, \pi\circ\beta) = \sup\{\|\pi(\alpha(a) - \pi(\beta(a))\| : a \in K, \pi \in \Sigma(\mathfrak{B})\} =$$
$$= \sup_{a\in K} \|\alpha(a) - \beta(a)\| = d_K(\alpha, \beta)$$

zatem tak zdefiniowana zbieżność pokrywa się ze zbieżnością punktowo-normową (i to bez względu na to, czy postrzegamy α jako działające między $\Sigma(-)$ czy $\mathrm{Rep}(-)$).

Wreszcie, tak samo jak dowodziliśmy zupełności przestrzeni $(\mathrm{Rep}(\mathfrak{A}), d_K)$, można pokazać, że przestrzeń $(\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), d_K)$ jest zupełna. Zwróćmy uwagę, że powyższe rezultaty nie wymagają aby algebra $\mathfrak{B}$ była ośrodkowa — w szczególności dla $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\ell^2)$ otrzymujemy dokładnie poprzednie rezultaty dla reprezentacji.
Gdy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są przemiennymi C^*-algebrami, to $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ można utożsamiać z $C(Y, X)$. Możemy zatem myśleć o elementach $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jako o odwzorowaniach ciągłych między „nieprzemiennymi" przestrzeniami zwartymi. Wówczas możemy sformułować pytanie o analogon tw. Ascolego-Arzeli, tzn. o znalezienie warunków koniecznych i wystarczających na to, aby zadana rodzina $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ była (relatywnie) zwarta:

Twierdzenie 8.10. *Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ będą ośrodkowymi C^*-algebrami z jednością oraz przypuśćmy, że $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- *rodzina $\mathcal{F}$ jest relatywnie zwarta (w topologii zbieżności punktowo-normowej);*
- *dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ rodzina $\mathcal{F}(a) \subset \mathfrak{B}$ jest relatywnie zwarta.*

Dowód. Skoro dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ odwzorowanie

$$\mathfrak{F} \ni \alpha \mapsto \alpha(a) \in \mathcal{F}(a) \subset \mathfrak{B}$$

jest ciągłe, to jeżeli $\mathcal{F}$ jest relatywnie zwarta, to $\mathcal{F}(a)$ także.

Na odwrót, przypuśćmy, że dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ rodzina $\mathcal{F}(a) \subset \mathfrak{B}$ jest relatywnie zwarta. Rozważmy odwzorowanie

$$\iota : \overline{\mathcal{F}} \ni \alpha \mapsto \Big(\alpha(a)\Big)_{a\in\mathfrak{A}} \in \prod_{a\in\mathfrak{A}} \overline{\mathcal{F}(a)}$$

przy czym w przeciwdziedzinie rozpatrujemy topologię punktowo-normową. Wówczas ι jest włożeniem. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 7.9 wnioskujemy, że włożenie ι jest domknięte. Ponieważ zakładamy, że dla $a \in \mathfrak{A}$ zbiór $\overline{\mathcal{F}(a)}$ jest zwarty, to produkt $\prod_{a\in\mathfrak{A}} \overline{\mathcal{F}(a)}$ jest zwarty z tw. Tichonowa. Wobec tego $\iota(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{\iota(\mathcal{F})}$ jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego, więc jest zwarty i w konsekwencji $\mathcal{F}$ jest relatywnie zwarta. □

Wniosek 8.11. *Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ będą ośrodkowymi C^*-algebrami z jednością a także niech $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

- *Jeżeli $\mathfrak{B}$ ma własność Ascolego, to $\mathcal{F}$ jest relatywnie zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathfrak{A}$ zbiór $\mathcal{F}(a)$ jest ograniczony, punktowo relatywnie zwarty oraz jednakowo ciągły.*

- *Jeżeli $\mathfrak{B}$ ma silną własność Ascolego, to $\mathcal{F}$ jest relatywnie zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathfrak{A}$ zbiór $\mathcal{F}(a)$ jest ograniczony i jednakowo ciągły.*

Na $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ możemy również zdefiniować topologię za pomocą następującej zbieżności: $\alpha_s \to \alpha$, jeżeli dla dowolnej reprezentacji $\pi \in \Sigma(\mathfrak{B})$ zachodzi $\pi \circ \alpha_s \to \pi \circ \alpha$ w topologii zbieżności punktowo-normowej. Innymi słowy, jest to warunek na zbieżność punktową $\alpha_s^* \to \alpha^*$ gdzie $\alpha_s^*, \alpha^* : \Sigma(\mathfrak{A}) \to \mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$. Jeżeli $\alpha_n \to \alpha$ w topologii punktowo-normowej, to dla dowolnego $a \in \mathfrak{A}$ zachodzi $\alpha_n(a) \to \alpha(a)$ i dla dowolnej reprezentacji $\pi \in \Sigma(\mathfrak{B})$ mamy $\pi(\alpha_n(a)) \to \pi(\alpha(a))$. Odwrotna implikacja nie musi zachodzić:

Przykłady 8.12. 1. Niech $\mathfrak{A}_1 = C(X), \mathfrak{A}_2 = C(Y)$ będą przemiennymi C^*-algebrami oraz $\alpha_n, \alpha : C(Y) \to C(X)$ będą *-homomorfizmami. Wówczas istnieją ciągłe odwzorowania $u_n, u : X \to Y$, takie że $\alpha_n(f) = f \circ u_n, \alpha(f) = f \circ u$. Wówczas zbieżność punktowo-normowa $\alpha_n^* \to \alpha^*$ jest równoważna zbieżności $\|f \circ u_n - f \circ u\|_\infty \to 0$ (a ten warunek, jak wyjaśniliśmy wcześniej, jest równoważny zbieżności jednostajnej $u_n \rightrightarrows u$). Z kolei zdefiniowana powyżej zbieżność jest równoważna zbieżności punktowej $f \circ u_n \to f \circ u$ (a to jest równoważne zbieżności punktowej $u_n \to u$).

2. Niech $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}(\ell^2)^+$. Wówczas reprezentacja identycznościowa jest nieprzywiedlna skąd zbieżność punktowo-normowa jest równoważna powyżej zdefiniowanej zbieżności.

Wreszcie można rozważać jednostajną zbieżność $\alpha_n^* \to \alpha^*$ — jednak wówczas jest ona równoważna zbieżności punktowo-normowej (lub zbieżności w metryce d_K). Istotnie, mamy bowiem

$$\sup_{\pi \in \Sigma(\mathfrak{B})} d_K(\alpha_n^*(\pi), \alpha^*(\pi)) = \sup_{\pi \in \Sigma(\mathfrak{B})} \sup_{a \in K} \|\pi(\alpha_n(a)) - \pi(\alpha(a))\| =$$

$$= \sup_{a \in K} \|\alpha_n(a) - \alpha(a)\| = d_K(\alpha_n, \alpha).$$

9 Dodatek

9.1 Porównanie modułów ciągłości względem $\Sigma(-)$ i $\mathrm{Rep}(-)$

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną o średnicy $R > 0$ oraz niech

$$K := \{f : X \to [-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}] : \mathrm{Lip}(f) \leqslant 1\}$$

(równoważnie można przyjąć $K := \{f : X \to \mathbb{R} : \mathrm{Lip}(f) \leqslant 1, f(a) = 0 \text{ dla pewnego } a\}$). Wówczas zachodzi $d(x, y) = \sup_{f \in K} |f(x) - f(y)|$. Dla $f : X \to \mathbb{R}$ mamy, że f jest zwężająca, tj. $\mathrm{Lip}(f) \leqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $c \in \mathbb{R}$, że $f - c \in K$. Zatem dla rzeczywistej funkcji f, warunek $\mathrm{Lip}(f) \leqslant s$ jest równoważny istnieniu $c \in \mathbb{R}$, takiego że $\frac{1}{s} f - c \in K$.

Ustalmy teraz dwie reprezentacje $\pi, \pi' : C(X) \to \mathfrak{B}(\ell^2)$ oraz weźmy $f \in C(X; \mathbb{R})$. Wówczas klasyczny moduł ciągłości $\omega := \omega_f$ dla f pokrywa się z modułem ciągłości ω_f^Σ dla f jako elementu w C^*-algebrze, skonstruowanym w oparciu o reprezentacje nieprzywiedlne oraz zachodzi $\omega_f = \omega_f^\Sigma \leqslant \omega_f^{\mathrm{Rep}}$, gdzie ω_f^{Rep} jest modułem ciągłości dla f skonstruowanym w oparciu o wszystkie reprezentacje z $\mathrm{Rep}(C(X))$. Pokażemy, że w istocie zachodzi równość dla funkcji o rzeczywistych wartościach. W tym celu będziemy potrzebować narzędzia w postaci tzw. *transformacji Fenchela* (lub Fenchela-Legendre'a lub tzw. *convex conjugate*). Kontekst jest następujący: rozważamy skończenie wymiarowe przestrzenie euklidesowe E z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, - \rangle$ oraz odwzorowania $h : E \to [-\infty, \infty]$. Określamy *sprzężenie Fenchela* za pomocą wzoru

$$h^*(\varphi) = \sup_{x \in E}(\langle \varphi, x \rangle - h(x)), \quad h^* : E \to [-\infty, \infty].$$

Jeżeli h nie jest tożsamościowo równa $+\infty$, to $h^*(\varphi) > -\infty$ dla dowolnego $\varphi \in E$. Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że h^* jest zawsze funkcją wypukłą, a także, że zawsze zachodzi $h^{**} \leqslant h$. Powstaje naturalne pytanie, kiedy zachodzi $h = h^{**}$ lub innymi słowy, kiedy $h = g^*$ dla pewnej funkcji g. Odpowiedzi udziela następujące, nietrywialne twierdzenie (zob. Tw. 4.2.1. w [4]):

Twierdzenie 9.1 (Fenchel-Moreau)**.** *Niech $h : E \to (-\infty, \infty]$ będzie dowolną funkcją. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *$h^{**} = h$,*
2. *$h = g^*$ dla pewnej funkcji $g : E \to (-\infty, \infty]$,*
3. *h jest funkcją wypukłą i ma nadwykres domknięty,*
4. *dla dowolnego $x \in E$ zachodzi $h(x) = \sup\{\alpha(x) : \alpha \leqslant h, \alpha - \text{afiniczna}\}$.*

Połóżmy, dla $s \geqslant 0$

$$\delta(s) = \frac{1}{2} \sup_{t \geqslant 0}(\omega_f(t) - st).$$

Uwaga 9.2. Można pokazać, że tak określona funkcja jest odległością funkcji f od zbioru wszystkich funkcji spełniających warunek Lipschitza ze stałą $\leqslant s$ — mianowicie spełniony jest następujący wzór: $\delta(s) = \inf\{\|f - u\|_\infty : \mathrm{Lip}(u) \leqslant s\} < \infty$.

Wówczas, używając transformacji Fenchela, można otrzymać związek między δ oraz (klasycznym) modułem ciągłości dla f, mianowicie zachodzi:

Twierdzenie 9.3. *Przy powyższych oznaczeniach i założeniach*

$$\omega_f(t) = \inf_{s \geqslant 0}(2\delta(s) + st).$$

Dowód. Oznaczmy $\omega := \omega_f$ i połóżmy $\alpha(t) = \begin{cases} -\omega(-t) & gdy \quad t \leqslant 0, \\ +\infty & gdy \quad t > 0 \end{cases}$, a także przedłużmy funkcję δ, kładąc $\delta(s) = +\infty$ dla $s < 0$. Wówczas tak określona funkcja α jest wypukła. Ponadto mamy, dla $s \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(st-\alpha(t)\Big) = \sup_{t\leqslant 0}\Big(st-\alpha(t)\Big) = \\ &= \sup_{t\leqslant 0}\Big(st+\omega(-t)\Big) = \sup_{t\geqslant 0}\Big(\omega(t)-st\Big) = 2\delta(s)\end{aligned}$$

(dla $s > 0$ także zachodzi $\alpha^*(s) = 2\delta(s)$ bo obie strony są nieskończone). Zatem α spełnia założenia[18] Tw. Fenchela-Moreau, skąd $\alpha^{**} = \alpha$. Wobec tego

$$\alpha(s) = \Big(2\delta(s)\Big)^* = \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(st-2\delta(t)\Big) = \sup_{t\geqslant 0}\Big(st-2\delta(t)\Big),$$

skąd, dla $s \leqslant 0$, dostajemy

$$\omega(-s) = -\sup_{t\geqslant 0}\Big(st-2\delta(t)\Big) = \inf_{t\geqslant 0}\Big(2\delta(t)-st\Big).$$

Podmieniając $-s$ na $s \geqslant 0$ dostajemy tezę. □

Optymalną funkcją realizującą odległość w definicji δ jest funkcja

$$f_s := \delta(s) + \inf_{y\in X}(f(y) + sd(\cdot, y)).$$

Wówczas zachodzi $\mathrm{Lip}(f_s) \leqslant s$ (istotnie $\mathrm{Lip}(sd(\cdot, y)) \leqslant s$, zatem biorąc translacje oraz kres dolny stała Lipschitza się nie zwiększy), zatem istnieje $c \in \mathbb{R}$, taka że $\frac{1}{s}f_s - c \in K$. Ponadto zachodzi $\|f - f_s\|_\infty = \delta(s)$, bowiem:

$$f(x) - f_s(x) \leqslant \delta(s) \iff f(x) - \delta(s) - \inf_{y\in X}\{f(y) + sd(x,y)\} \leqslant \delta(s) \iff$$
$$f(x) + \sup_{y\in X}\{-f(y) - sd(x,y)\} \leqslant 2\delta(s) \iff \sup_{y\in X}\{f(x) - f(y) - sd(x,y)\} \leqslant 2\delta(s)$$

jednak ostatnia nierówność jest spełniona, ponieważ

$$f(x) - f(y) - sd(x,y) \leqslant |f(x) - f(y)| - sd(x,y) \leqslant \omega\Big(d(x,y)\Big) - sd(x,y) \leqslant 2\delta(s)$$

i wystarczy przejść do kresu.
Na odwrót:

$$\begin{aligned}f_s(x) - f(x) \leqslant \delta(s) \iff \delta(s) + \inf_{y\in X}\{f(y) + sd(x,y)\} - f(x) \leqslant \delta(s) \iff \\ \inf_{y\in X}\{f(y) - f(x) + sd(x,y)\} \leqslant 0\end{aligned}$$

jednak dla $y = x$ otrzymujemy $f(y) - f(x) + sd(x,y) = 0$, zatem kres dolny tego wyrażenia jest $\leqslant 0$. Wobec tego pokazaliśmy, że $|f(x) - f_s(x)| \leqslant \delta(s)$, skąd $\|f - f_s\| \leqslant \delta(s)$.
Niech teraz $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(C(X))$ — wówczas szacujemy:

$$\|\pi(f_s) - \pi'(f_s)\| = s\|\pi\Big(\frac{1}{s}f_s - c\Big) - \pi'\Big(\frac{1}{s}f_s - c\Big)\| \leqslant sd_K(\pi, \pi')$$

[18] α przyjmuje wartości skończone na przedziale domkniętym i jest tam ciągła, zatem nadwykres α jest zbiorem domkniętym

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\|\pi(f)-\pi'(f)\| &\leqslant \|\pi(f)-\pi(f_s)\| + \|\pi(f_s)-\pi'(f_s)\| + \|\pi'(f_s)-\pi'(f)\| \\ &\leqslant \|f-f_s\| + sd_K(\pi,\pi') + \|f-f_s\| \leqslant 2\delta(s) + sd_K(\pi,\pi').\end{aligned}$$

Biorąc dowolne $t \geqslant 0$ oraz przechodząc do kresu mamy:

$$\sup\{\|\pi(f)-\pi'(f)\| : \pi,\pi' \in \mathrm{Rep}(C(X)), d_K(\pi,\pi') \leqslant t\} \leqslant \inf_{t\geqslant 0}(2\delta(s)+st) = \omega(t)$$

co daje $\omega_f^{\mathrm{Rep}} = \omega$. Widzimy więc, że w przypadku rzeczywistej funkcji nie ma znaczenia, czy rozważamy jej moduł ciągłości względem wszystkich reprezentacji, czy względem reprezentacji nieprzywiedlnych.

W dowolnym (zespolonym) przypadku mamy następującą sytuację: dla $f \in C(X)$ przedstawmy $f = u + iv$ gdzie u, v są rzeczywiste. Wtedy mamy

$$\omega_f = \omega_{u+iv} \leqslant \omega_u + \omega_v,$$

$$\omega_u = \omega_{\frac{f+f^*}{2}} \leqslant \underbrace{\omega_{\frac{f}{2}}}_{=\frac{1}{2}\omega_f} + \underbrace{\omega_{\frac{f^*}{2}}}_{=\frac{1}{2}\omega_f} = \omega_f,$$

Analogicznie mamy:

$$\omega_v = \omega_{\frac{f-f^*}{2i}} \leqslant \omega_{\frac{f}{2}} + \omega_{\frac{f^*}{2}} \leqslant \omega_f$$

skąd wynikają nierówności

$$\omega_f \leqslant \omega_f^{\mathrm{Rep}} \leqslant \omega_u^{\mathrm{Rep}} + \omega_v^{\mathrm{Rep}} = \omega_u + \omega_v \leqslant 2\omega_f. \tag{9.1}$$

9.2 Interpretacja Rep(−)

Z drugiej strony, można zapytać o interpretacje zbioru $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$, gdy $\mathfrak{A} = C(X)$ jest przemienną C^*-algebrą. Okazuje się, że $\mathrm{Rep}(\mathfrak{A})$ ma następującą interpretację:

$$\mathrm{Rep}\Big(C(X)\Big) = \{\text{miary spektralne na } X\}.$$

Omówimy w skrócie na czym polega powyższa odpowiedniość: niech $\pi : C(X) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ będzie *-reprezentacją oraz niech $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Rozważmy przyporządkowanie

$$\varphi_{\xi,\eta} : C(X) \ni f \to \langle \pi(f)\xi, \eta\rangle \in \mathbb{C}.$$

Jest to funkcjonał liniowy i ograniczony: zachodzi $\|\varphi_{\xi,\eta}\| \leqslant \|\xi\|\|\eta\|$, wobec tego z tw. Riesza, istnieje dokładnie jedna (regularna, borelowska) miara $\mu_{\xi,\eta}$, taka że

$$\langle \pi(f)\xi, \eta\rangle = \int_X f d\mu_{\xi,\eta}$$

oraz $\|\varphi_{\xi,\eta}\| = \|\mu_{\xi,\eta}\| (= |\mu_{\xi,\eta}|(X)) \leqslant \|\xi\|\|\eta\|$. Ustalmy borelowski zbiór A i rozważmy przyporządkowanie

$$(\xi, \eta) \mapsto \mu_{\xi,\eta}(A).$$

Wówczas jest to półtora-liniowa, ograniczona forma na $\mathcal{H}$, wobec tego odpowiada jej dokładnie jeden operator (ograniczony), który oznaczymy $E(A)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że zachodzą następujące warunki:

- $0 \leqslant E(A) \leqslant I$,
- $E(X) = I$,
- $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = WOT - \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)$ dla ciągu parami rozłącznych zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Nietrywialna jest własność $E(A \cap B) = E(A)E(B)$. Równość ta jest zawsze prawdziwa dla zbiorów mierzalnych względem sigma ciała generowanego przez wszystkie zbiory domknięte, które są G_δ. W przypadku metryzowalnym, każdy zbiór domknięty jest automatycznie G_δ, skąd równość ta zachodzi dla zbiorów z sigma ciała generowanego przez zbiory domknięte, czyli dla wszystkich zbiorów borelowskich. W przypadku, gdy X nie jest przestrzenią metryzowalną, należy skorzystać z regularności miar $\mu_{\xi,\eta}$ oraz z faktu, że dla dowolnej pary zbiorów K, U, takich że K jest domknięty, U jest otwarty oraz $K \subset U$ można znaleźć zbiór domknięty F, będący zbiorem G_δ i taki, że $K \subset F \subset U$.

W kontekście powyższych rozważań, warto również wspomnieć o wzorze Kantorovicha, pozwalającym przedłużyć metrykę na X do metryki określonej na wszystkich możliwych miarach probabilistycznych na X. Dokładniej: jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to można przedłużyć metrykę d na zbiór $\mathrm{Prob}(X)$ wszystkich regularnych, borelowskich miar probabilistycznych na X, za pomocą formuły

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \sup\{\Big| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \Big| : f : X \to \mathbb{R},\ f - \text{nieoddalająca}\}. \tag{9.2}$$

Używamy tutaj utożsamienia $x \simeq \delta_x$ gdzie $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

Wtedy

$$|\int_X f d\delta_x - \int_X f d\delta_y| = |f(x) - f(y)|$$

skąd $\tilde{d}(\delta_x, \delta_y) = d(x, y)$, zatem otrzymana funkcja faktycznie stanowi przedłużenie metryki d.

Twierdzenie 9.4. *Jeżeli (X, d) jest zwartą przestrzenią metryczną, to $\tilde{d}$ jest metryką na* $\mathrm{Prob}(X)$.

Dowód. Zauważmy, że w definicji $\tilde{d}$ możemy brać supremum po zbiorze funkcji nieoddalających, nieujemnych, zerujących się w pewnym punkcie. Istotnie, niech f będzie dowolną funkcją nieoddalającą oraz $c := \min_{x\in X} f(x)$. Wtedy dla $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(X)$ mamy:

$$\int_X f d\mu - \int_X f d\nu = c + \int_X (f - c) d\mu - \Big(c + \int_X (f - c) d\nu\Big) = \int_X (f - c) d\mu - \int_X (f - c) d\nu.$$

Jednak

$$\sup\{\Big| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \Big| : f : X \to \mathbb{R}, f - \text{nieoddalająca, zerująca się w pewnym punkcie}\}$$

jest skończone. Faktycznie, dla każdej takiej funkcji f mamy

$$f(x) = |f(x) - f(x_f)| \leqslant d(x, x_f) \leqslant \mathrm{diam} X$$

gdzie x_f jest takie, że $f(x_f) = 0$. Zatem $\int_X f d\mu \leqslant \int_X \mathrm{diam}(X) d\mu \leqslant \mathrm{diam}(X)$, a więc $\tilde{d}(\mu, \nu) < \infty$.
Jeżeli $\tilde{d}(\mu, \nu) = 0$, to dla dowolnej nieoddalającej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ mamy $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$. Zatem dla funkcji f będącej dowolną kombinacją liniową funkcji nieoddalających — czyli dla dowolnej funkcji lipschitzowskiej — zachodzi $\int_X g d\mu = \int_X g d\nu$. Równość ta zachodzi więc dla wszystkich funkcji z domknięcia zbioru funkcji lipschitzowskich. Jednak funkcje lipschitzowskie stanowią podalgebrę $C(X)$, która rozdziela punkty, więc z tw. Stone'a Weierstrassa jest to gęsta podalgebra, skąd $\int_X g d\mu = \int_X g d\nu$ dla dowolnej $g \in C(X)$, czyli $\mu = \nu$. Pozostałe warunki na metrykę są jasne. □

Twierdzenie 9.5. *Topologia wyznaczona przez metrykę $\tilde{d}$ pokrywa się z topologią *-słabą.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 6.4. □

Co więcej, przyporządkowanie $(X, d) \mapsto (\mathrm{Prob}(X), \tilde{d})$ jest funktorialne: odwzorowanie ciągłe $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ indukuje $f_* : (\mathrm{Prob}(X), \tilde{d_X}) \to (\mathrm{Prob}(Y), \tilde{d_Y})$ poprzez transport miary $f_*(\mu) = \mu \circ f^{-1}$ i zachodzi $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Jeżeli (X, d) jest nieskończoną przestrzenią metryczną, to $(\mathrm{Prob}(X), \tilde{d})$ jest homeomorficzna z kostką Hilberta (jest to treść Twierdzenia Kellera, zob. np. [2], Twierdzenie 3.1).

10 Do dalszych rozważań

Na koniec spróbujmy omówić krótko kwestie, których nie rozważaliśmy w tej pracy, a które wydaja się naturalne w kontekście dyskutowanych zagadnień.

Badaliśmy rozmaite własności algebr zwartych: w szczególności widzieliśmy, że klasa zwartych algebr jest zamknięta na branie ideałów, na sumy proste jak również na ilorazowanie. Wobec tego naturalne wydaje się następujące pytanie:

Problem 10.1. Czy prawdą jest, że jeżeli $\mathfrak{A}$ jest zwartą C^*-algebrą (ośrodkową, z jednością) oraz $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ jest C^*-podalgebrą, to $\mathfrak{B}$ jest również zwarta?

Załóżmy, że K jest zwartym zbiorem generującym C^*-algebrę $\mathfrak{A}$. Wówczas dla $a \in \mathfrak{A}$ rozważać możemy moduły ciągłości ω_a^K oraz określić zbiór $\tilde{K} = \{a \in \mathfrak{A} : \omega_a^K(t) \leqslant t,\ t \in [0, \infty)\}$. Wówczas oczywiście $K \subset \tilde{K}$, więc w szczególności $\tilde{K}$ również generuje $\mathfrak{A}$. Oczywiście $\tilde{K}$ nie jest ograniczony, bowiem dla $\lambda \in \mathbb{C}$ zachodzi $\omega_{\lambda 1}^K = 0$. Możemy jednak rozważyć $K' := \tilde{K} \cap B$ gdzie B jest kulą (domkniętą) np. o promieniu $\mathrm{diam} K$. Wówczas otrzymujemy ograniczony zbiór generujący — zatem możemy rozważyć metrykę $d_{K'}$.

Problem 10.2. Jak wygląda topologia metryki $d_{K'}$?

Uwaga 10.3. Zwróćmy uwagę, że oczywiście K' jest jednakowo ciągły oraz ograniczony — zatem jeżeli algebra $\mathfrak{A}$ ma silną własność Ascolego, to wtedy K' jest zwarty i metryka $d_{K'}$ jest jednostajnie równoważna z metryką d_K. W szczególności więc będzie tak dla zwartych C^*-algebr.

W naszych rozważaniach zdefiniowaliśmy pojęcie zbieżności punktowej za pomocą rodziny seminorm $a \mapsto \|\pi(a)\|$ gdzie $\pi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. Można również rozważać podobną rodzinę seminorm, lecz brać jedynie reprezentacje nieprzywiedlne (lub reprezentacje postaci $\aleph_0 \odot \pi$ gdzie π jest nieprzywiedlna). Wówczas (określona wcześniej) zbieżność punktowa implikuje tak zdefiniowaną zbieżność. Pojawia się naturalne pytanie:

Problem 10.4. Czy można skonstruować ciąg uogólniony $(a_s)_s \subset \mathfrak{A}$ taki, że dla dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{A})$ zachodzi $\pi(a_s) \to 0$, ale $(a_s)_s$ nie zbiega punktowo do 0?

Wreszcie interesujące wydaje się być zbadanie, jak wyglądać może zbiór $\Sigma(\mathfrak{A})$ dla rozmaitych C^*-algebr. Widzieliśmy na przykład, że gdy $\mathfrak{A}$ jest N-podjednorodną C^*-algebrą, to $\Sigma(\mathfrak{A})$ zawiera conajwyżej N-wymiarowe reprezentacje (dokładniej, reprezentacje postaci $\aleph_0 \odot \pi$ gdzie π jest conajwyżej N-wymiarowa).

Problem 10.5. Czy jeżeli $\mathfrak{A}$ jest CCR-algebrą z jednością, to może zdarzyć się, że $\Sigma(\mathfrak{A})$ zawiera reprezentację nie będącą postaci $\aleph_0 \odot \pi$ gdzie π jest skończenie wymiarową reprezentacją?

Literatura

[1] W. Arveson, *An invitation to C^*-algebras*, Springer Verlag, New York, 1976.

[2] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Warszawa, 1975.

[3] B. Blackadar, *Operator Algebras. Theory of C^*-algebras and von Neumann Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[4] J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Minicourse Notes based on Convex Analysis and Nonlinear Optimalization*, Springer Verlag, 1999.

[5] J.P. Brasselet, A. Legrand, N. Teleman, *Hochschild homology of algebras of controlled functions*, preprint, Ancona, 1998.

[6] N.P. Brown, N. Ozawa, *C^*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.

[7] M. Chaichian, A. Demichev, *Introduction to Quantum Groups*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1996.

[8] V. Chari, A. Pressley, A Guide to Quantum Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[9] L. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 73, Number 5, 1967, 722-726.

[10] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London, 1994.

[11] A. Connes, *On spectral characterization of manifolds*, J. Noncommut. Geom. 7 (2013), 1-82.

[12] K.R. Davidson, *C^*-algebras by example*, American Mathematical Society, Providence, 1991.

[13] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

[14] J.M.G. Fell, *The structure of algebrs of operators fields*, Acta Math. 106, 1961, 233-280.

[15] D. Fremlin, *Measure theory volume 2*, Torres Fremlin, Colchester 2001.

[16] D. Fremlin, *Measure theory volume 3*, Torres Fremlin, Colchester 2001.

[17] J.M. Gracia-Bondia, H. Figueroa, J. Varilly, *Elements of noncommutative geometry*, Birkhauser Advanced Texts, Boston, Berlin, 2001.

[18] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis volume 2*, Springer Verlag, New York, Berlin 1997.

[19] N. Higson, J. Roe, *Analytic K-homology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[20] G. Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra*, Ann. of Math. (2) 46, (1945), 58-67.

[21] M. Khalkhali, *Basic Non-commutative Geometry*, European Mathematical Society, 2009.

[22] R.V. Kadison, J.R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of the operator Algebras, volume 1*, Academic Press, New York, 1983.

[23] R.V. Kadison, J.R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of the operator Algebras, volume 2*, Academic Press, London, 1986.

[24] K. Kuratowski, *Topology vol. 1*, PWN, Warszawa, 1966.

[25] Z. Liu, *On some mathematical aspects of the Heisenberg relation*, Sci. China 54, (2011), 2427–2452.

[26] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[27] P. Niemiec, *Unitary equivalence and decompositions of finite systems of closed densely defined operators in Hilbert spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 482, 2012.

[28] P. Niemiec, *Elementary approach to homogeneous C^*-algebras*, arXiv: 1203.0857.

[29] P. Niemiec, A. Wegert, *Algebra of Operators Affiliated with a Finite Type I von Neumann Algebra*, arXiv: 1307.4696.

[30] P. Niemiec, *Models for subhomogeneous C^*-algebras*, arXiv: 1310.5595.

[31] G.K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.

[32] R.R. Phelps, *Lecture notes on Chouquet's theorem*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.

[33] I. Raeburn, D. Williams, *Morita equivalence and continuous trace C^*-algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 60, Providence, 1998.

[34] M. Rieffel, *Compact quantum metric spaces*, Operator algebras, quantization and noncommutative geometry, Contemp. Math. 365, Amer. Math. Soc., Providence, 2004, 315-330.

[35] W. Rudin *Funcional Analysis*, PWN, Warszawa, 2011.

[36] S. Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[37] J.T. Schwartz, *W^*-algebras*, Gordon and Breach, Science Publishers Inc., New York, 1967.

[38] D. Sherman, *Unitary orbits of normal operators in von Neumann algebras*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 605, 2007, 95-132.

[39] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[40] N. Teleman, *Microlocalisation de l'homologie de Hochschild*, C.R. Acad. Sci. Paris 326, 1998, 1261-1264.

[41] N.B. Vasil'ev, *C^*-algebras with finite dimensional irreducible representations*, Russian Math. Surveys 21, 1966, 137-155.

[42] N.E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras. A friendly approach*, Oxford University Press, Oxford, 1993.