



UNIwersytet MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI



Stochastyczne równania różniczkowe względem procesów o skończonej p -wariacji

Adrian Falkowski

*Praca doktorska napisana
w Katedrze Teorii Prawdopodobieństwa
i Analizy Stochastycznej pod kierunkiem
prof. dr. hab. Leszka Słomińskiego*

TORUŃ 2015

Spis treści

Wstęp	3
1 Wiadomości wstępne	7
1.1 Przestrzeń Skorochoda $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$	7
1.2 Całka względem funkcji i procesów o skończonej p -wariacji	10
1.3 Rozwiązania równań względem funkcji i procesów o skończonej p -wariacji	13
1.4 Zbieżność procesów stochastycznych	16
2 Równania z barierami względem funkcji o skończonej p-wariacji	21
2.1 Lipschitzowskość rozwiązań problemu Skorochoda w normie p -wariacyjnej	21
2.2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań z barierami	30
2.3 Aproksymacja oraz stabilność rozwiązań równań z barierami	37
3 Srr z barierami względem procesów o skończonej p-wariacji	47
3.1 Zbieżność całek względem procesów o skończonej p -wariacji	47
3.2 Mocne rozwiązania srr z barierami względem procesów o skończonej p -wariacji	49
3.3 Słabe rozwiązania srr z barierami względem procesów o skończonej p -wariacji	52
4 Srr z barierami względem p-semimartyngałów	57
4.1 Zbieżność całek stochastycznych względem p -semimartyngałów	57
4.2 Stabilność rozwiązań srr z barierami względem p -semimartyngałów	60
4.3 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań srr z barierami względem p -semimartyngałów	65
5 Srr względem ułamkowego ruchu Browna	71
5.1 Aproksymacja całki względem ułamkowego ruchu Browna	71
5.2 Aproksymacja rozwiązań srr względem ułamkowego ruchu Browna	78
5.3 Aproksymacja rozwiązań srr z barierami względem ułamkowego ruchu Browna	81
5.4 Zastosowania w matematyce finansowej	83
Bibliografia	89
Skorowidz oznaczeń	95
Indeks	97

Wstęp

W rozprawie badany jest problem istnienia, jednoznaczności oraz aproksymacji rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych (srr) z odbijającymi barierami U i L postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dB_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{i})$$

oraz

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{ii})$$

gdzie A jest procesem posiadającym trajektorie o lokalnie skończonej p -wariacji dla $p \in (1, 2)$, a B, Z są odpowiednio procesem posiadającym trajektorie o lokalnie skończonej wariacji i semimartyngałem. Rozwiązaniem równania (i) (lub (ii)) jest para procesów (X, K) takich, że $X_t \in [L_t, U_t]$, $t \in \mathbb{R}^+$, a K kompensuje odbicia od barier U i L (definicje rozwiązań (i) i (ii) znajdują się w rozdziałach 3. i 4.). Równanie (i) jest szczególnym przypadkiem równania (ii). W pracy równania te badamy jednak oddzielnie, gdyż wymagają one różnych definicji rozwiązań i różnych założeń na współczynniki. Duża część uzyskanych w pracy wyników jest nowa nawet w przypadku równań bez barier, tzn. gdy $K \equiv 0$.

Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań bez barier względem procesów o skończonej p -wariacji był przedmiotem badań wielu autorów. Rozważali je między innymi Dudley [18], Kubilius [37–42], Lyons [46], Norvaiša [57], Nualart z Rășcanu [59] i Guerrą [30] oraz Ruzmaikina [68]. Ze względu na szereg praktycznych zastosowań w modelach finansowych, teorii kolejek i teorii ryzyka badania skoncentrowane były głównie na równaniach względem ułamkowego ruchu Browna B^H z parametrem $H \in (1/2, 1)$, którego trajektorie posiadają lokalnie skończoną p -wariację dla $p > 1/H$.

Równania z barierami postaci (ii) jako pierwszy badał Skorochod w pracy [73] w przypadku, gdy $L \equiv 0$, $U \equiv \infty$, $A_t = t$ oraz $Z = W$, gdzie W jest standardowym procesem Wienera. W późniejszym czasie szersze klasy barier oraz procesów całkujących rozważane były między innymi przez Tanakę [83], Lionsa i Sznitmana [45], Saisho [69], Dupuisa i Ishi [20], Słomińskiego [75] oraz Rozkosza [66]. W ostatnich latach Besalú i Rovira [6] oraz Ferrante i Rovira [27] opublikowali pierwsze prace dotyczące równań z barierami postaci (i) dla $L \equiv 0$, $U \equiv \infty$, $B_t = t$, $A = B^H$. Tak duże zainteresowanie równaniami z barierami wynika z faktu, iż zagadnienie to znajduje zastosowanie m.in. w teorii kolejek, analizie niezawodności sejsmicznej oraz matematyce finansowej (patrz np. [2, 21, 36, 71]). Można zauważyć, że

równanie (ii) jest równoważne tzw. problemowi zmiatania ze stochastycznym zaburzeniem:

$$\begin{cases} dX_t \in \Phi(t, X_t) + N(C_t; X_t), \\ X_0 = x_0 \in C_0, \\ X_t \in C_t, \end{cases} \quad (\text{iii})$$

gdzie $C_t = [L_t, U_t]$, $\Phi(t, X_t) = f(t, X_t) dA_t + g(t, X_t) dZ_t$, a $N(C_t; X_t)$ oznacza wewnętrzny wektor normalny do C_t w punkcie X_t , $t \in \mathbb{R}^+$. Tego typu zagadnienia po raz pierwszy badał Moreau w latach 70. W pracach [53–55] Moreau rozważał deterministyczny odpowiednik inkluzji stochastycznej (iii) dla wypukłego, zmieniającego się w czasie zbioru C_t oraz $\Phi \equiv 0$. W kolejnych pracach Benabdellah [3], Castaing, Dúc Hā i Valadier [10], Castaing i Monteiro Marques [11], Colombo i Goncharov [13], Colombo i Monteiro Marques [14] oraz Thibault [84] rozszerzali wyniki Moreau, dodając dodatkowe zaburzenie Φ lub osłabiając założenia na zbiór C_t . W pracy [5] Bernicot oraz Venel rozważali inkluzję stochastyczną postaci (iii) dla $A_t = t$, $Z = W$. Zarówno w przypadku deterministycznym, jak i stochastycznym problem zmiatania (iii) również posiada wiele praktycznych zastosowań, m.in. w mechanice niegładkiej, analizie zjawiska histerezy, matematyce finansowej oraz modelowaniu ruchu w sieciach z przełączaniem obwodów (patrz np. monografie [1, 16, 52] oraz cytowane w nich prace).

W rozprawie duża uwaga zwrócona została na przypadek procesu $A = Y^H = \int_0^\cdot \sigma_s dB_s^H$, gdzie $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ nie musi być funkcją ciągłą, którego trajektorie posiadają lokalnie skończoną p -wariację dla $p > 1/H$. Zaproponowana została nowa metoda aproksymacji procesu Y^H oraz rozwiązań równań względem Y^H . Metoda ta, oparta na reprezentacji całkowitego ułamkowego ruchu Browna z pracy Decreusefonda i Üstünela [15], stanowi rozszerzenie rezultatów z wcześniejszych prac: Nieminen [56], Sottinen [79], Słomińskiego i Ziemkiewicza [78] dotyczących aproksymacji ułamkowego ruchu Browna oraz Parczewskiego [60] dotyczącej aproksymacji procesu Y^H w przypadku ciągłej funkcji σ .

Poniżej została opisana szczegółowo treść pracy.

Rozdział 1. zawiera definicje i twierdzenia wykorzystywane w dalszej części pracy. Są tam między innymi opisane podstawowe własności topologii Skorochoda J_1 na przestrzeni $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, p -wariacji oraz całek względem funkcji i procesów o skończonej p -wariacji. Znajdują się tam również kryteria zbieżności procesów stochastycznych w topologii J_1 oraz przegląd dotychczasowych wyników dotyczących równań względem funkcji i procesów o skończonej p -wariacji.

W rozdziale 2. udowodniono wyniki dotyczące istnienia, jednoznaczności i aproksymacji deterministycznego odpowiednika równania (i) postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-}) db_s + \int_0^t g(s, x_{s-}) da_s + k_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{iv})$$

gdzie $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ jest funkcją o lokalnie skończonej wariacji, $a \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ jest funkcją o lokalnie skończonej p -wariacji, a k jest funkcją kompensującą odbicia od barier u i $l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Szczególny przypadek równania (iv) był badany wcześniej w pracy [27], gdzie autorzy rozważali równania z jedną barierą $l \equiv 0$ względem funkcji λ -hölдеровских. Wiadomo, że każda funkcja λ -hölдеровская posiada skończoną p -wariację dla $p \geq 1/\lambda$. W pracy [27] podano warunki zapewniające istnienie rozwiązań, jednak jednoznaczność została uzyskana

jedynie na małych przedziałach czasu. Kluczowym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie 2.6. W twierdzeniu tym udowodniono lipschitzowskość rozwiązań problemu Skorochoda z dwiema barierami w normie p -wariacyjnej. Uzyskany rezultat stanowi główne narzędzie dowodowe przy badaniu istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania (iv). Warto nadmienić, że w [27, Remark 3.6] pokazano, iż powyższa własność nie zachodzi w normie λ -hölderowskiej, co jest głównym powodem, dla którego w [27] autorzy nie byli w stanie uzyskać globalnej jednoznaczności. Rozważane są dwa zbiory warunków: liniowy wzrost funkcji f i hölderowskość funkcji g (założenie (H1)) oraz lokalna lipschitzowskość f i lokalna hölderowskość pochodnej każdego współczynnika $g^{i,j}$, $i, j = 1, \dots, d$ (założenie (H2)). W twierdzeniu 2.26 pokazano istnienie rozwiązań (iv) przy założeniu (H1) oraz dodatkowym założeniu ciągłości funkcji f . W tym celu wykorzystano naturalny odpowiednik schematu Eulera dla równania (iv) oraz rezultaty dotyczące relatywnej zwartości i zbieżności całek względem funkcji o skończonej p -wariacji opisane w faktach 2.21 i 2.22. W twierdzeniu 2.18 pokazano istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (iv) przy założeniach (H1) oraz (H2) z wykorzystaniem ciągu kolejnych iteracji Picarda dla (iv). W podrozdziale 2.3 opisano metodę aproksymacji rozwiązań równania (iv) oraz udowodniono stabilność rozwiązań ze względu na wartość początkową x_0 i współczynniki f, g . Główne wyniki tego rozdziału w trochę mniej ogólnej postaci (dla f i g jednorodnych w czasie oraz jednej bariery $l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$) zostały opublikowane w pracy [24]. Wyniki dotyczące przypadku z dwiema barierami oraz funkcjami f i g zależnymi od czasu zostały zebrane w [25]. Praca została wysłana do czasopisma, znajduje się obecnie w recenzji.

W rozdziale 3. badany jest problem istnienia, jednoznaczności i aproksymacji mocnych oraz słabych rozwiązań równania (i). W twierdzeniach 3.1 i 3.2 udowodniono wyniki dotyczące jednostajnej jędrności i zbieżności całek stochastycznych względem procesów posiadających trajektorie o lokalnie skończonej p -wariacji. W twierdzeniu 3.5 wykorzystano rezultaty z rozdziału 2. do uzyskania istnienia i jednoznaczności mocnych rozwiązań równania (i) przy założeniach (H1) i (H2). W podrozdziale 3.2 opisano metodę aproksymacji mocnych rozwiązań za pomocą odpowiedniego schematu Eulera. Podrozdział 3.3 dotyczy zagadnienia istnienia, jednoznaczności i aproksymacji słabych rozwiązań równania (i). We wniosku 3.11 pokazano, że przy założeniu (H1) oraz dodatkowym założeniu ciągłości funkcji f istnieją słabe rozwiązania równania (i) będące granicami według rozkładu ciągów zdefiniowanych w oparciu o odpowiedni schemat Eulera.

Rozdział 4. poświęcony jest zagadnieniu istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania (ii). W podrozdziale 4.1 badana jest jednostajna jędrność i zbieżność całek stochastycznych względem p -semimartyngałów tzn. procesów X o rozkładzie $X = X_0 + A + Z$, gdzie A jest procesem posiadającym trajektorie o lokalnie skończonej p -wariacji dla $p \in (1, 2)$, a Z jest semimartyngałem (patrz definicja 4.1). Rozpatrywany jest nowy zestaw założeń: (G1) i (G2). Są one podobne do warunków (H1) i (H2). Różnią się jedynie zakresami wykładników w warunku Höldera. W twierdzeniu 4.13 pokazano stabilność rozwiązań równania (ii) przy założeniu (G1) oraz dodatkowym założeniu ciągłości funkcji f . W twierdzeniu 4.14 udowodniono istnienie słabych rozwiązań przy założeniu (G1) oraz założeniu ciągłości funkcji f , natomiast przy założeniach (G1) oraz (G2) uzyskano istnienie i jednoznaczność mocnych rozwiązań (twierdzenie 4.16).

Rozdział 5. dotyczy aproksymacji procesu Y^H i rozwiązań równań względem Y^H oraz względem W i Y^H . Badane są również zastosowania w matematyce finansowej. W podrozdziale 5.1 pokazano zbieżność według rozkładu ciągu $\{Y^{H,n}\}$ skonstruowanego za pomocą tablicy różnic martyngałowych $\{\{X_{nk}\}\}$ oraz reprezentacji całkowitej ułamkowego ruchu Browna z pracy [15] do procesu Y^H (twierdzenie 5.2). Przy pewnych dodatkowych założeniach na tablicę $\{\{X_{nk}\}\}$ uzyskano zbieżność jednostajną na kompaktach według prawdopodobieństwa oraz oszacowano tempo zbieżności w normie \mathbb{L}^2 . W dalszej części tego rozdziału badana jest aproksymacja rozwiązań równań względem procesu Y^H wykorzystująca wyniki z podrozdziału 5.1. W twierdzeniu 5.9 pokazano zbieżność według rozkładu ciągów skonstruowanych za pomocą odpowiednika schematu Eulera z wykorzystaniem aproksymacji $\{Y^{H,n}\}$, opisanych w podrozdziale 5.1, do słabych rozwiązań równania (i) bez barier z $A = Y^H$ i $B = b$, gdzie $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ jest funkcją deterministyczną o lokalnie skończonej wariacji. Twierdzenia 5.12 i 5.13 dotyczą aproksymacji mocnych rozwiązań równań z barierami postaci (i) dla $A = Y^H$ i $B = b$ za pomocą ciągu $\{Y^{H,n}\}$. Wniosek 5.14 poświęcony jest z kolei aproksymacji słabych rozwiązań (i) dla $A = Y^H$ i $B = b$. Podobny rezultat został otrzymany dla równania (ii) z $A = Y^H$ oraz $Z = W$ (wniosek 5.15). W ostatnim podrozdziale badane jest zagadnienie aktuarialnej wyceny opcji na rynkach finansowych modelowanych za pomocą procesu Y^H . W twierdzeniu 5.17 uzyskano jawny wzór na cenę aktuarialną w przypadku opcji zależnych od ceny akcji w chwili wykupu. W szczególności dla europejskiej opcji kupna otrzymano analogiczną formułę Blacka-Scholesa (wniosek 5.18). Z kolei w twierdzeniu 5.19 opisano metodę numerycznej wyceny opcji zależnych od całej trajektorii procesu ceny akcji. Większość wyników z rozdziału 5. została opublikowana w pracach [23, 26].

Pragnę serdecznie podziękować Panu Profesorowi Leszkowi Słomińskiemu za opiekę nad przebiegiem mojej pracy naukowej, propozycję ciekawego tematu, cenne uwagi i sugestie, cierpliwość w oczekiwaniu na rezultaty oraz za niezwykle życzliwość.

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

1.1 Przestrzeń Skorochoda $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$

$\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oznaczać będzie przestrzeń funkcji *càdlàg* $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ tzn. funkcji prawostronnie ciągłych oraz posiadających w każdym punkcie lewostronne granice. Dla $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}^+$ przyjmujemy, że x_t oznacza wartość funkcji x w punkcie t , x_{t-} jej granicę lewostronną w t (przy czym zakładamy, że $x_{0-} = x_0$), a $\Delta x_t = x_t - x_{t-}$ skok funkcji w chwili t . Ponadto x_- oznacza funkcję: $t \mapsto x_{t-}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Dla $x, y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ piszemy, że $x \leq y$ jeśli $x_t^i \leq y_t^i$ dla wszystkich $i = 1, \dots, d$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Jeżeli $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to dla dowolnych $T, \varepsilon > 0$ funkcja x posiada na przedziale $[0, T]$ skończoną liczbę skoków o normie większej niż ε . Stąd w szczególności liczba wszystkich skoków x jest co najwyżej przeliczalna.

Na przestrzeni $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będziemy rozważać topologię Skorochoda J_1 , zdefiniowaną przez Skorochoda [72] dla przestrzeni $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R}^d)$, a następnie rozszerzoną na przestrzeń $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ przez Stone'a [82] i Lindvalla [44].

Twierdzenie 1.1. *Na przestrzeni $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ istnieje metryzowalna topologia (nazywana topologią Skorochoda J_1), dla której $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ jest zupełna i ośrodkowa. Można ją scharakteryzować w następujący sposób: ciąg $\{x^n\}$ zbiega do x w J_1 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{\lambda^n\}$ funkcji ściśle rosnących i ciągłych $\lambda^n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\lambda_0^n = 0$ taki, że*

$$\sup_t |\lambda_t^n - t| \longrightarrow 0$$

oraz dla wszystkich $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{t \leq T} |x^n \circ \lambda_t^n - x_t| \longrightarrow 0.$$

Dowód. Patrz [7, Section 12] dla przestrzeni $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ oraz [32, Chapter VI, Theorem 1.14] dla $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. \square

Jeżeli ciąg $\{x^n\}$ zbiega do x w topologii J_1 , to piszemy, że $x^n \rightarrow x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Nietrudno zauważyć, że topologia J_1 jest słabsza niż topologia zbieżności jednostajnej na kompaktach. Ponadto jeżeli x jest funkcją ciągłą, to $\{x^n\}$ zbiega do x w J_1 wtedy i tylko wtedy, gdy zbiega do x w topologii zbieżności jednostajnej na kompaktach.

Poniżej zaprezentujemy kilka faktów dotyczących topologii J_1 , wykorzystywanych w dalszej części pracy.

Fakt 1.2 ([32, Chapter VI, Proposition 2.1]). *Niech $x^n \rightarrow x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz $t \in \mathbb{R}^+$. Wówczas*

- (i) *istnieje ciąg $t_n \rightarrow t$ taki, że $x_{t_n}^n \rightarrow x_t$, $x_{t_n-}^n \rightarrow x_{t-}$, $\Delta x_{t_n}^n \rightarrow \Delta x_t$;*
- (ii) *jeżeli $t_n \rightarrow t$, $\Delta x_{t_n}^n \rightarrow \Delta x_t$ oraz $\Delta x_t \neq 0$, to dla każdego ciągu $\{t'_n\}$ o takich samych własnościach jak ciąg $\{t_n\}$, $t'_n = t_n$ dla odpowiednio dużych n . Ponadto:*
 - (ii.1) *jeżeli $t''_n \rightarrow t$ i $t''_n < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, to $x_{t''_n}^n \rightarrow x_{t-}$,*
 - (ii.2) *jeżeli $t''_n \rightarrow t$ i $t''_n \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$, to $x_{t''_n-}^n \rightarrow x_{t-}$,*
 - (ii.3) *jeżeli $t''_n \rightarrow t$ i $t''_n \geq t_n$, $n \in \mathbb{N}$, to $x_{t''_n}^n \rightarrow x_t$,*
 - (ii.4) *jeżeli $t''_n \rightarrow t$ i $t''_n > t_n$, $n \in \mathbb{N}$, to $x_{t''_n-}^n \rightarrow x_t$,*
 - (ii.5) *jeżeli $t''_n \rightarrow t$ i $\Delta x_t = 0$, to $x_{t''_n}^n \rightarrow x_t$ i $x_{t''_n-}^n \rightarrow x_{t-}$.*

Fakt 1.3. *Niech $x^n \rightarrow x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz $y^n \rightarrow y$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) *dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ istnieje ciąg $t_n \rightarrow t$ taki, że $\Delta x_{t_n}^n \rightarrow \Delta x_t$ i $\Delta y_{t_n}^n \rightarrow \Delta y_t$,*
- (ii) *$(x^n, y^n) \rightarrow (x, y)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$,*
- (iii) *$x^n + y^n \rightarrow x + y$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.*

Dowód. Wynika z faktu 1.2 oraz [32, Chapter VI, Proposition 2.2]. □

Uwaga 1.4. *Jeżeli $(x^n, y^n) \rightarrow (x, x)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to*

$$\sup_{t \leq T} |x_t^n - y_t^n| \rightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (1.1)$$

Istotnie, z faktu 1.3 mamy, że $x^n - y^n \rightarrow 0$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, co jest równoważne z (1.1).

Fakt 1.5 ([74, Lemma C]). *Niech $(x^n, y^n) \rightarrow (x, y)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ oraz dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ zachodzi zbieżność: $\sup_{t \leq T} |y_t^n - y_t| \rightarrow 0$. Jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ $\Delta x_t \neq 0 \Rightarrow \Delta y_t \neq 0$, to*

$$\sup_{t \leq T} |x_t^n - x_t| \rightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Twierdzenie 1.6. *Niech $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ będzie ciągiem podziałów takim, że $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ i $\text{diam}(\pi_n) = \max_{k \in \mathbb{N}} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \rightarrow 0$. Wówczas*

- (i) *jeżeli*

$$x_t^{(n)} = x_{t_{n,k}} \quad \text{dla } t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

to $x^{(n)} \rightarrow x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$;

(ii) jeżeli dodatkowo prawdziwa jest implikacja

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \Delta x_t \neq 0 \Rightarrow t \in \liminf_{n \rightarrow \infty} \pi_n,$$

to

$$\sup_{t \leq T} |x_t^{(n)} - x_t|, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Aby udowodnić (i), wystarczy zastosować [32, Chapter VI, Proposition 6.37] dla funkcji deterministycznej. W celu uzasadnienia (ii) pokażemy, że w rozważanym przypadku $(x^{(n)}, x) \rightarrow (x, x)$ i skorzystamy z uwagi 1.4. Połóżmy $\varrho_n^*(t) = \min\{t_{n,k}; t_{n,k} \geq t\}$ oraz zauważmy, że $\varrho_n^*(t) \rightarrow t$ i

$$\Delta x_{\varrho_n^*(t)}^{(n)} \rightarrow \Delta x_t, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ponadto, jeżeli $\Delta x_t \neq 0$, to dla dostatecznie dużych n mamy, że $t \in \pi_n$ i w konsekwencji $\Delta x_{\varrho_n^*(t)}^{(n)} = \Delta x_t$. Zatem dla dowodu (ii) wystarczy skorzystać z faktu 1.3. \square

Wniosek 1.7. Niech $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $\{\delta_n\}$ będzie ciągiem dodatnich stałych takim, że $\delta_n \downarrow 0$ oraz $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ będzie ciągiem podziałów zdefiniowanym następująco:

$$t_{n,0} = 0, \quad t_{n,k+1} = \min\{t_{n,k} + \delta_n, \inf\{t > t_{n,k}; |\Delta x_t| > \delta_n\}\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas dla $x^{(n)}$ zdefiniowanego jak w (1.2)

$$\sup_{t \leq T} |x_t^{(n)} - x_t| \rightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Jeśli $\Delta x_t \neq 0$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}^+$, to $|\Delta x_t| > \delta_n$ dla odpowiednio dużych n . Stąd dla tych samych n mamy, że $t \in \pi_n$. Korzystając z twierdzenia 1.6 (ii), otrzymujemy tezę. \square

Fakt 1.8. Niech $(x^n, y^n) \rightarrow (x, y)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d'})$ oraz $\{\delta_k\}$ będzie ciągiem dodatnich stałych takim, że $\delta_k \downarrow 0$. Definiujemy: $t_{k,0}^n = 0$, $t_{k,i+1}^n = \min\{t_{k,i}^n + \delta_{k,i}, \inf\{t > t_{k,i}^n; |\Delta x_t^n| > \delta_k\}\}$ i $t_{k,0} = 0$, $t_{k,i+1} = \min\{t_{k,i} + \delta_{k,i}, \inf\{t > t_{k,i}; |\Delta x_t| > \delta_k\}\}$, gdzie $\delta_k/2 \leq \delta_{k,i} \leq \delta_k$ $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Jeżeli

$$|\Delta x_t| \neq \delta_k \text{ oraz } |\Delta x_{t_{k,i} + \delta_{k,i}}| + |\Delta y_{t_{k,i} + \delta_{k,i}}| = 0, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

to

$$\begin{aligned} t_{k,i}^n &\longrightarrow t_{k,i}, & x_{t_{k,i}^n}^n &\longrightarrow x_{t_{k,i}}, & x_{t_{k,i}^n-}^n &\longrightarrow x_{t_{k,i}-}, \\ y_{t_{k,i}^n}^n &\longrightarrow y_{t_{k,i}}, & y_{t_{k,i}^n-}^n &\longrightarrow y_{t_{k,i}-}, & & i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ponadto jeśli $x_t^{n,(k)} = x_{t_{k,i}^n}^n$, $t \in [t_{k,i}^n, t_{k,i+1}^n)$ oraz $x_t^{(k)} = x_{t_{k,i}}$, $t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1})$ dla $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$, to $(x^n, x^{n,(k)}, y^n) \rightarrow (x, x^{(k)}, y)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d+d'})$, $k \in \mathbb{N}$.

Dowód. Przebiega podobnie jak dowody [32, Chapter VI, Proposition 2.7] oraz [32, Chapter VI, Corollary 2.8]. \square

1.2 Całka względem funkcji i procesów o skończonej p -wariacji

Zaczynamy od definicji i podstawowych własności p -wariacji.

Definicja 1.9. Niech $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Mówimy, że x ma skończoną p -wariację, jeżeli

$$v_p(x)_{[a,b]} = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^n |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p < \infty,$$

gdzie supremum przebiega po wszystkich podziałach $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ przedziału $[a, b]$. Ponadto przyjmujemy następujące oznaczenia: $V_p(x)_{[a,b]} = (v_p(x)_{[a,b]})^{1/p}$, $\bar{V}_p(x)_{[a,b]} = V_p(x) + |x_a|$. Dla uproszczenia notacji przez $v_p(x)_T$, $V_p(x)_T$, $\bar{V}_p(x)_T$ będziemy oznaczać odpowiednio: $v_p(x)_{[0,T]}$, $v_p(x)_{[0,T]}$, $\bar{V}_p(x)_{[0,T]}$.

Oznaczmy przez $\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d)$ zbiór wszystkich funkcji $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ o skończonej p -wariacji. Poniższe fakty zostały zaczerpnięte z [17].

Uwaga 1.10. 1. Dla $p \geq 1$, V_p jest seminormą na $\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d)$, $V_p(x)_{[a,b]} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest stała. Ponadto \bar{V}_p jest normą na $\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d)$ oraz przestrzeń $(\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d), \bar{V}_p)$ jest przestrzenią Banacha.

2. Dla ustalonego x , $V_p(x)_{[a,b]}$ jest nierosnącą funkcją p . Zatem jeśli $p < q$, to $\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d) \subset \mathcal{W}_q([a, b], \mathbb{R}^d)$.

3. Jeżeli $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to funkcja $t \mapsto V_p(x)_t$ jest funkcją càdlàg.

Uwaga 1.11. Niech $a < c < b$, $1 \leq p < q$ oraz $x \in \mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d)$. Wówczas mamy:

$$(i) \quad v_p(x)_{[a,c]} + v_p(x)_{[c,b]} \leq v_p(x)_{[a,b]} \leq 2^{p-1} (v_p(x)_{[a,c]} + v_p(x)_{[c,b]}),$$

$$(ii) \quad V_p(x)_{[a,b]} \leq V_p(x)_{[a,c]} + V_p(x)_{[c,b]},$$

$$(iii) \quad \lim_{t \uparrow b} v_p(x)_{[t,b]} = |\Delta x_b|^p,$$

$$(iv) \quad \sup_{t \in [a,b]} |x_t| \leq \bar{V}_p(x)_{[a,b]},$$

$$(v) \quad V_q(x)_{[a,b]} \leq \text{Osc}(x)_{[a,b]}^{1-p/q} V_p(x)_{[a,b]}^{p/q}, \text{ gdzie } \text{Osc}(x)_{[a,b]} = \sup\{|x_t - x_s|; a \leq t, s \leq b\}.$$

Lemat 1.12. Załóżmy, że $x^n \rightarrow x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Wówczas dla dowolnych $p \geq 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ mamy, że $V_p(x)_T \leq \liminf_n V_p(x^n)_T$.

Dowód. Niech $T \in \mathbb{R}^+$ będzie punktem ciągłości funkcji x . Zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$ składający się z punktów ciągłości x taki, że

$$v_p(x)_T \leq \sum_{i=1}^m |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p + \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |x_{t_i}^n - x_{t_{i-1}}^n|^p + \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} v_p(x^n)_T + \varepsilon.$$

Korzystając z uwagi 1.10.3. oraz dowolności $\varepsilon > 0$ uzyskujemy tezę. \square

Uwaga 1.13. Niech \mathbb{M}^d oznacza zbiór $d \times d$ -wymiarowych macierzy rzeczywistych. Dla $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{M}^d$ przyjmujemy, że $|\cdot|$ w definicji p -wariacji oznacza normę macierzową zdefiniowaną wzorem: $|A| = \sup\{|Av'|; v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\}$. Ponadto przez $\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{M}^d)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^d$ o skończonej p -wariacji. Wszystkie wymienione powyżej własności p -wariacji pozostają prawdziwe dla funkcji o wartościach w \mathbb{M}^d .

Niech $y \in \mathcal{W}_q([a, b], \mathbb{M}^d)$, $x \in \mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d)$ dla $p, q > 0$ takich, że $1/p + 1/q > 1$. Jeżeli funkcje x i y nie mają wspólnych prawostronnych punktów nieciągłości oraz wspólnych lewostronnych punktów nieciągłości, to istnieje *uogólniona całka Riemanna-Stieltjesa* $\int_a^b y_s dx_s$ zdefiniowana jako granica sum riemannowskich po zagnieżdżających się ciągach podziałów. W szczególności jeśli $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{M}^d)$, $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz istnieją $p, q > 0$, $1/p + 1/q > 1$ takie, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ $V_p(x)_T < \infty$ i $V_q(y)_T < \infty$, to istnieje całka $\int_0^t y_{s-} dx_s$ oraz dla wszystkich $0 \leq a < b$

$$V_p\left(\int_a^\cdot y_{s-} dx_s\right)_{[a,b]} \leq K_{p,q} \bar{V}_q(y)_{[a,b]} V_p(x)_{[a,b]}, \quad (1.3)$$

gdzie $K_{p,q} = 2\zeta(p^{-1} + q^{-1})$, ζ oznacza funkcję zeta Riemanna tzn. $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^t$ (patrz np. [17–19]). Ponieważ x i y są funkcjami càdlàg, więc również odwzorowanie $t \mapsto \int_0^t y_{s-} dx_s$ jest càdlàg.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją.

Definicja 1.14. Mówimy, że proces stochastyczny $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ ma *lokalnie skończoną p -wariację*, jeśli $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$.

Uwaga 1.15. Jeżeli X ma lokalnie skończoną p -wariację dla $p = 1$, to mówimy, że X ma *lokalnie skończoną wariację*.

Rozważmy procesy stochastyczne: X o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p -wariacji oraz Y o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{M}^d)$ i lokalnie skończonej q -wariacji, gdzie $p, q > 0$, $1/p + 1/q > 1$. Z faktów przytoczonych powyżej wiemy, że dla P -prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ oraz każdego $t > 0$ istnieje całka $\int_0^t Y_{s-}(\omega) dX_s(\omega)$. Oznaczmy $J_t = \int_0^t Y_{s-} dX_s$, $t \in \mathbb{R}^+$. Proces $J = \{J_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będziemy nazywać *całką Riemanna-Stieltjesa po trajektoriach*.

Fakt 1.16. J jest procesem stochastycznym na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Ponadto jeżeli X i Y są $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowane, to J jest również $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany.

Dowód. Wynika z faktu, iż J jest P -p.w. granicą odpowiednich sum riemannowskich (dyskretnych procesów $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanych). \square

Poniżej zaprezentujemy przykład procesu o skończonej p -wariacji, który będzie wykorzystywany w rozdziale 5. Zaczniemy od przytoczenia wyniku dotyczącego skończoności p -wariacji w przypadku procesów gaussowskich.

Twierdzenie 1.17 ([33, Theorem 3.2]). Niech $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będzie jednowymiarowym, scentrowanym i ośrodkowym procesem gaussowskim. Jeżeli

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^n (E|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|)^q < \infty$$

dla pewnego $q \geq 1$, gdzie supremum przebiega po wszystkich podziałach $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ przedziału $[a, b]$, to dla $p > q$

$$P(V_p(X)_{[a,b]} < \infty) = 1.$$

Niech $B^H = \{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będzie ułamkowym ruchem Browna z wykładnikiem Hursta $H \in (1/2, 1)$ tzn. jednowymiarowym, scentrowanym procesem gaussowskim o ciągłych trajektoriach takim, że $B_0^H = 0$ oraz $EB_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$ dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Rozważymy całkę Wienera z funkcji deterministycznej względem B^H z parametrem $H > 1/2$. Można ją zdefiniować jako granicę w przestrzeni \mathbb{L}^2 w następujący sposób.

Niech $\sigma \in \mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$ tzn. $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\|\sigma\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}} = \left(\int_0^T |\sigma_s|^{1/H} ds\right)^H < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$. Oznaczmy przez \mathcal{E} zbiór wszystkich funkcji schodkowych tzn. funkcji postaci $\sigma_t = \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$, $t \in [0, T]$, gdzie $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ jest pewnym podziałem odcinka $[0, T]$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$. Dla $\sigma \in \mathcal{E}$ całkę względem B^H definiujemy następująco:

$$\int_0^T \sigma_s dB_s^H = \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} (B_{t_i}^H - B_{t_{i-1}}^H).$$

Można zauważyć, że $EB_t^H B_s^H = H(2H - 1) \int_0^t \int_0^s |u - v|^{2H-2} du dv$, co pociąga, że dla wszystkich $\sigma^1, \sigma^2 \in \mathcal{E}$ mamy

$$E \left(\int_0^T \sigma_s^1 dB_s^H \int_0^T \sigma_s^2 dB_s^H \right) = \langle \sigma^1, \sigma^2 \rangle_T^H, \quad (1.4)$$

gdzie

$$\langle \sigma^1, \sigma^2 \rangle_T^H = H(2H - 1) \int_0^T \int_0^T \sigma_t^1 \sigma_s^2 |t - s|^{2H-2} ds dt. \quad (1.5)$$

Pipiras i Taqqu w pracy [61] pokazali, że $\langle \cdot, \cdot \rangle_T^H$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$. Ponadto na mocy nierówności (2.1) z pracy [47] istnieje stała $c(2, H)$ taka, że dla każdego $\sigma \in \mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$

$$\sqrt{\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H} \leq c(2, H) \|\sigma\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}. \quad (1.6)$$

Niech $\{\sigma^n\}$ będzie ciągiem funkcji schodkowych takim, że $\sigma^n \rightarrow \sigma$ w $\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$. Wówczas z (1.4) oraz (1.6) wynika, że ciąg $\{\int_0^T \sigma_s^n dB_s^H\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w \mathbb{L}^2 . Ponieważ przestrzeń \mathbb{L}^2 jest zupełna, więc dla $\sigma \in \mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$ całka $\int_0^T \sigma_s dB_s^H \in \mathbb{L}^2$ definiowana jest jako granica ciągu $\{\int_0^T \sigma_s^n dB_s^H\}$ przy $n \rightarrow \infty$.

Fakt 1.18. Niech $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$ (tzn. $\int_0^T |\sigma_s|^{1/H} ds < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$). Proces $Y^H = \{Y_t^H\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dany wzorem:

$$Y_t^H = \int_0^t \sigma_s dB_s^H, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.7)$$

jest scentrowanym procesem gaussowskim o ciągłych trajektoriach oraz dla każdego $p > 1/H$

$$P(V_p(Y^H)_T < \infty) = 1, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (1.8)$$

Dowód. Ciągłość trajektorii procesu Y^H została udowodniona w [51, Section 1.11]. Z twierdzenia 1.1 w [47] dla każdego $r > 0$ istnieje stała $C(r, H)$ taka, że

$$E|Y_{t_2}^H - Y_{t_1}^H|^r \leq C(r, H) \left(\int_{t_1}^{t_2} |\sigma_s|^{1/H} ds \right)^{rH} \quad (1.9)$$

dla wszystkich $0 \leq t_1 \leq t_2$. Stąd dla dowolnego podziału $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ odcinka $[0, T]$ mamy, że

$$\sum_{i=1}^n (E|Y_{t_i}^H - Y_{t_{i-1}}^H|)^{1/H} \leq (C(1, H))^{1/H} \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\sigma_s|^{1/H} ds \right) = (C(1, H))^{1/H} \|\sigma\|_{\mathbb{L}_{[0, T]}^{1/H}}.$$

Na mocy powyższej nierówności oraz twierdzenia 1.17 proces Y^H spełnia (1.8). \square

1.3 Rozwiązania równań względem funkcji i procesów o skończonej p -wariacji

Nasze rozważania zaczniemy od równania deterministycznego postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s) da_s, \quad t \in [0, T], \quad (1.10)$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $V_p(a)_T < \infty$ dla pewnego $p \in [1, 2)$. Równanie (1.10) badali wcześniej Lyons [46] i Dudley [18].

Twierdzenie 1.19 (Lyons [46]). *Jeżeli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją α -hölдеровską dla $\alpha \in (p-1, 1]$, to istnieje rozwiązanie równania (1.10) w przestrzeni $\mathcal{W}_q([0, T], \mathbb{R}^d)$ dla $q > p$.*

Aby uzyskać jednoznaczność rozwiązań, autorzy potrzebowali mocniejszych założeń na funkcję f .

Twierdzenie 1.20 (Lyons [46], Dudley [18]). *Jeżeli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy \mathcal{C}^1 oraz f' jest ograniczoną funkcją γ -hölдеровską dla $\gamma \in (p-1, 1]$, to równanie (1.10) posiada jednoznaczne rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{W}_p([0, T], \mathbb{R}^d)$.*

Analogiczny wynik uzyskał Norvaiša [57] dla równań postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_{s-}) da_s, \quad t \in [0, T], \quad (1.11)$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ oraz $V_p(a)_T < \infty$ dla pewnego $p \in [1, 2)$.

Twierdzenie 1.21 (Norvaiša [57]). *Jeżeli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, spełniającą warunek Lipschitza oraz f' jest funkcją lokalnie γ -hölдеровską dla $\gamma \in (p-1, 1]$, to równanie (1.11) posiada jednoznaczne rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{W}_p([0, T], \mathbb{R}^d)$.*

Podobnym zagadnieniem zajmowali się Nualart i Raşcanu [59]. Badali oni problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań deterministycznych postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s) ds + \int_0^t g(s, x_s) da_s, \quad t \in [0, T], \quad (1.12)$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$ oraz $a : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest funkcją spełniającą warunek

$$\sup_{0 < s < t < T} \left(\frac{|a_t - a_s|}{(t-s)^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|a_u - a_s|}{(u-s)^{2-\alpha}} du \right) < \infty$$

dla pewnego $\alpha \in (0, 1/2)$. Można zauważyć, że jeżeli a spełnia powyższy warunek, to jest również funkcją $(1-\alpha)$ -hölderowską, co pociąga, iż posiada skończoną p -wariację dla $p \geq 1/(1-\alpha)$.

Rozważmy następujący zestaw założeń.

(i) Istnieją: funkcja $f_0 \in \mathbb{L}_{[0, T]}^q$, gdzie $q \geq 2$, oraz $L > 0$ takie, że

$$|f(t, x)| \leq L|x| + f_0(t), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T].$$

(ii) Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje $L_N > 0$ taka, że

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_N|x - y|, \quad |x|, |y| < N, t \in [0, T].$$

(iii) Istnieje $C > 0$ taka, że

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T].$$

(iv) Istnieje $\beta > 0$ taka, że dla wszystkich $i = 1, \dots, d$

$$|g(t, x) - g(s, x)| + |\partial_{x_i} g(t, x) - \partial_{x_i} g(s, x)| \leq C|t - s|^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^d, t, s \in [0, T].$$

(v) Istnieje $\delta \in (0, 1]$ oraz dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje C_N takie, że

$$|\partial_{x_i} g(t, x) - \partial_{y_i} g(t, y)| \leq C_N|x - y|^\delta, \quad |x|, |y| < N, t \in [0, T], i = 1, \dots, d.$$

Oznaczmy przez $\mathcal{W}^{\alpha, \infty}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ przestrzeń funkcji mierzalnych $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ spełniających warunek

$$\sup_{t \leq T} \left(|\phi_t| + \int_0^t \frac{|\phi_t - \phi_s|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \right) < \infty.$$

Twierdzenie 1.22 (Nualart, Rășcanu [59]). *Niech f i g spełniają założenia (i)–(v) dla $\beta > 0$, $\delta \leq 1$, $q = 1/\alpha$. Jeżeli $\alpha < \min\{1/2, \beta, \delta/(1+\delta)\}$, to równanie (1.12) posiada jednoznaczne rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{W}^{\alpha, \infty}([0, T]; \mathbb{R}^d)$. Ponadto rozwiązanie to jest $(1-\alpha)$ -hölderowskie.*

Jako bezpośredni wniosek z twierdzenia 1.21 otrzymujemy następujący rezultat dotyczący stochastycznych równań różniczkowych postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_{s-}) dA_s, \quad t \in [0, T], \quad (1.13)$$

gdzie $X_0 \in \mathbb{R}$, a A jest procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ takim, że $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$ dla pewnego $p \in [1, 2)$.

Wniosek 1.23. *Jeżeli $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia założenia twierdzenia 1.21, to równanie (1.13) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie X wśród procesów o lokalnie skończonej p -wariacji (w sensie definicji 3.3).*

Uwaga 1.24. Zauważmy, że na mocy (1.8) proces A w powyższym wniosku możemy zastąpić przez ułamkowy ruch Browna B^H lub proces Y^H .

Kubilius [37], Lin [43], Nualart i Rășcanu [59] oraz Ruzmaikina [68] badali równania względem ułamkowego ruchu Browna postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s^H, \quad t \in [0, T], \quad (1.14)$$

gdzie całka względem B^H jest zdefiniowana jako całka Riemenna-Stieltjesa po trajektoriach. Dla przykładu podamy najbardziej ogólny wynik pochodzący z pracy [59].

Twierdzenie 1.25 (Nualart, Rășcanu [59]). *Niech B^H oznacza d -wymiarowy, ułamkowy ruch Browna, X_0 będzie d -wymiarową zmienną losową oraz $\alpha_0 = \min\{1/2, \beta, \delta/(1+\delta)\}$, $\alpha \in (1-H, \alpha_0)$. Jeżeli funkcje f i g spełniają (i)–(v) dla $\beta > 1-H$, $\delta > 1/H-1$, $q \geq 1/\alpha$, to równanie (1.14) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie wśród procesów o trajektoriach należących do $\mathcal{W}^{\alpha, \infty}([0, T]; \mathbb{R}^d)$. Ponadto rozwiązanie to posiada trajektorie $(1-\alpha)$ -hölderowskie.*

Kubilius [38–42] badał również zagadnienie istnienia, jednoznaczności oraz aproksymacji słabych i mocnych rozwiązań równań postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) dW_s + \int_0^t g(X_s) dB_s^H, \quad t \in [0, T],$$

gdzie W jest procesem Wienera oraz ich ogólniejszej wersji:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_{s-}) dM_s + \int_0^t g(X_{s-}) dA_s, \quad t \in [0, T].$$

W powyższym równaniu M oznacza lokalny martyngał względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, natomiast A jest $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanym procesem o lokalnie skończonej p -wariacji.

Nieco ogólniejsze równania względem procesu Wienera oraz ułamkowego ruchu Browna rozważali Guerra i Nualart [30].

Twierdzenie 1.26 (Guerra, Nualart [30]). *Niech B^H będzie d -wymiarowym, ułamkowym ruchem Browna, W d -wymiarowym procesem Wienera oraz B^H i W będą niezależne. Załóżmy, że $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ i $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$ są funkcjami ciągłymi spełniającymi (i) dla $f_0 \equiv L$ oraz globalnie warunek (ii). Ponadto niech $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$ będzie funkcją ciągłą spełniającą (iii), (iv) oraz globalnie warunek (v). Jeżeli $1-H < \alpha < \min\{1/2, \beta, \delta/2\}$, to równanie*

$$X_t = X_0 + \int_0^t h(s, X_s) ds + \int_0^t f(s, X_s) dW_s + \int_0^t g(s, X_s) dB_s^H, \quad t \in [0, T],$$

posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie wśród procesów o trajektoriach należących do $\mathcal{W}^{\alpha, \infty}([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

W ostatnich latach ukazały się również pierwsze prace dotyczące stochastycznych równań różniczkowych z odbiciem względem ułamkowego ruchu Browna. W pracy [27] (patrz również [6]) Ferrante i Rovira zajmowali się równaniami postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s^H + K_t, \quad t \in [0, T], \quad (1.15)$$

gdzie K jest procesem kompensującym odbicie od dolnej bariery $L \equiv 0$. Autorzy pokazali istnienie słabych rozwiązań powyższego równania, zakładając, że funkcje f i g są ograniczone, spełniają warunek Lipschitza względem zmiennej x oraz że funkcja g jest hölderowska względem czasu. Nie byli natomiast w stanie pokazać globalnej jednoznaczności rozwiązań (definicja rozwiązania równania (1.15) zawarta jest w rozdziale 3.).

1.4 Zbieżność procesów stochastycznych

Rozważmy ciąg $\{X^n\}$ elementów losowych o wartościach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ (tzn. procesów o trajektoriach càdlàg) określonych na (być może różnych) przestrzeniach probabilistycznych $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ oraz element losowy X o wartościach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ określony na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) .

Definicja 1.27. Powiemy, że ciąg $\{X^n\}$:

- (i) *zbiega według rozkładu* do X w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ (co oznaczamy $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$), jeżeli $Ef(X^n) \rightarrow Ef(X)$ dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $f : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$;
- (ii) jest *jednostajnie jędrny* w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $K \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ zwarty taki, że $P(X^n \notin K) < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Przyjmijmy dla X następujące oznaczenie: $J(X) = \{t \in \mathbb{R}^+; P(\Delta X_t \neq 0) > 0\}$. Można pokazać, że dla dowolnego procesu o trajektoriach càdlàg zbiór $J(X)$ jest co najwyżej przeliczalny (patrz np. [32, Chapter VI, Lemma 3.12]).

Definicja 1.28. Powiemy, że rozkłady skończenie wymiarowe $\{X^n\}$ zbiegają do rozkładów skończenie wymiarowych X (co oznaczamy $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}_f} X$), jeżeli

$$(X_{t_1}^n, X_{t_2}^n, \dots, X_{t_m}^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \quad \text{w } (\mathbb{R}^d)^m$$

dla dowolnych $t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R}^+ \setminus J(X)$, $m \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 1.29 ([7, Theorem 13.1]). $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- (i) $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}_f} X$,
- (ii) X^n jest *jednostajnie jędrny* w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Twierdzenie 1.30. *Załóżmy, że dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$ $X_t^n \xrightarrow{\mathcal{P}} X_t$, gdzie X jest procesem o ciągłych trajektoriach. Jeżeli $\{X^n\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to*

$$\sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Ponieważ X ma ciągłe trajektorie, więc także $\{(X^n, X)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$. Stąd $(X^n, X) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, X)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$. Zatem $X^n - X \xrightarrow{\mathcal{D}} X - X = 0$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, co implikuje, że $\sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. \square

Twierdzenie 1.31 ([31, Lemma 1.1]). *Niech $\{X^n\}$ będzie ciągiem procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. $\{X^n\}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch podciągow $\{m\} \subset \{n\}$, $\{l\} \subset \{n\}$ istnieją dalsze podciągi $\{m_k\} \subset \{m\}$, $\{l_k\} \subset \{l\}$ takie, że $(X^{m_k}, X^{l_k}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, X')$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ oraz $P(X_t = X'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$.*

Twierdzenie 1.32 ([32, Chapter VI, Corollary 3.33]). *Jeżeli $\{Y^n\}$ jest jednostajnie \mathcal{C} -jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ (tzn. $\{Y^n\}$ jest jednostajnie jędrny i każdy jego punkt skupienia ma ciągłe trajektorie) oraz $\{X^n\}$ jest jednostajnie jędrny (odp. jednostajnie \mathcal{C} -jędrny) w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to $\{(X^n, Y^n)\}$ jest jednostajnie jędrny (odp. jednostajnie \mathcal{C} -jędrny) w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$.*

Twierdzenie 1.33 ([74, Proposition 2]). *Niech $\{X^n\}$ będzie ciągiem procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.*

- (i) *Załóżmy, że istnieją trzy rodziny stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$, $\{q_i\}$, gdzie $\delta_k \rightarrow 0$, $\delta_{k,i} \rightarrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$, $q_i \rightarrow \infty$ przy $i \rightarrow \infty$ oraz dla ustalonych $n, k \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $\{\tau_{k,j}^n\}$ momentów zatrzymania względem $\{\mathcal{F}_t^n\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ taki, że $0 = \tau_{k,0}^n < \tau_{k,1}^n < \dots$, $\lim_j \tau_{k,j}^n = \infty$ P -p.w.,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\max_{j \in D_{k,i}^n} (\tau_{k,j+1}^n - \tau_{k,j}^n) > \delta_k) = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\min_{j \in D_{k,i}^n} (\tau_{k,j+1}^n - \tau_{k,j}^n) \leq \delta_{k,i}) = 0, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

gdzie $D_{k,i}^n = \{j; \tau_{k,j+1}^n \leq q_i\}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jeżeli dodatkowo

$$\left\{ \sup_{t \leq q_i} |X_t^n| \right\} \text{ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, } i \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{t \leq \delta_k} |X_t^n| \geq \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\max_{j \in D_{k,i}^n} \sup_{\tau_{k,j}^n \leq t < \tau_{k,j+1}^n} |X_t^n - X_{\tau_{k,j}^n}^n| \geq \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

to $\{X^n\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

- (ii) *Jeżeli ciąg $\{X^n\}$ jest zbieżny według rozkładu w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to istnieją rodziny stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$, $\{q_i\}$ oraz momentów zatrzymania $\{\{\tau_{k,i}^n\}\}$ spełniające warunki z punktu (i).*

Twierdzenie 1.34 ([78, Lemma 2.4]). *Niech $\{X^n\}$ będzie ciągiem procesów dyskretnych postaci $X_t^n = X_{t_{n,k}}^n$ dla $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, gdzie $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ jest ciągiem podziałów takim, że $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\text{diam}(\pi_n) \rightarrow 0$. Jeżeli ciąg zmiennych losowych $\{|X_0^n|\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz istnieją stałe $\gamma, \varepsilon > 0$ i ciągła, niemalejąca funkcja $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że*

$$P(|X_t^n - X_s^n| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^\gamma} |F_{\varrho_t^n} - F_{\varrho_s^n}|^{1+\varepsilon}, \quad t, s \in \mathbb{R}^+, \quad (1.16)$$

gdzie $\varrho_t^n = t_{n,k}$, $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, to ciąg $\{X^n\}$ jest jednostajnie \mathcal{C} -jędry w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Uwaga 1.35. Zamiast (1.16) możemy założyć, że istnieją stałe $\gamma, \varepsilon > 0$ takie, że

$$E|X_t^n - X_s^n|^\gamma \leq |F_{\varrho_t^n} - F_{\varrho_s^n}|^{1+\varepsilon}$$

dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Fakt 1.36. *Niech $\{X^n\}$ będzie ciągiem procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takim, że ciąg $\{V_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa dla pewnego $p \geq 1$. Jeżeli $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to $P(V_p(X) < \infty) = 1$.*

Dowód. Patrz dowód [40, Lemma 3]. □

Semimartyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ nazywamy każdy $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces $Z = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, który można przedstawić w postaci

$$Z_t = Z_0 + M_t + B_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie Z_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalną zmienną losową, M jest lokalnym martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, a B jest $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanym procesem o lokalnie skończonej wariacji. Wiadomo, że dla każdego $a > 0$ semimartyngał Z posiada jednoznaczny rozkład

$$Z_t = Z_0 + J_t^a + M_t^a + D_t^a, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.17)$$

gdzie $J_t^a = \sum_{s \leq t} \Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s| > a\}}$, $t \in \mathbb{R}^+$, M^a jest lokalnym martyngałem całkowalnym z kwadratem, D^a jest procesem prognozowalnym z lokalnie skończoną wariacją, $|\Delta M^a| \leq 2a$, $|\Delta D^a| \leq a$, $M_0^a = D_0^a = 0$.

Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $Z^n = \{Z_t^n\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będzie semimartyngałem zdefiniowanym na przestrzeni $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ i adaptowanym do pewnej filtracji $\{\mathcal{F}_t^n\}_{t \in \mathbb{R}^+}$. Mówimy, że ciąg $\{Z^n\}$ spełnia warunek (UT), jeżeli dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ rodzina zmiennych losowych

$$\left\{ U_0^n Z_0^n + \int_0^T U_s^n dZ_s^n; n \in \mathbb{N}, U^n \in \mathcal{U}_T^n \right\}$$

jest ograniczona według prawdopodobieństwa. \mathcal{U}_T^n oznacza rodzinę prognozowalnych procesów prostych postaci $U_s^n = U_0^n + \sum_{i=0}^k U_i^n \mathbf{1}_{\{t_i < s \leq t_{i+1}\}}$ takich, że $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ oraz U_i^n jest $\mathcal{F}_{t_i}^n$ mierzalne, $|U_i^n| \leq 1$ dla każdego $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

Rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozkład Z^n postaci $Z_t^n = Z_0^n + J_t^{n,a} + M_t^{n,a} + D_t^{n,a}$, $t \in \mathbb{R}^+$, gdzie $J^{n,a}$, $M^{n,a}$ i $D^{n,a}$ spełniają analogiczne warunki jak w (1.17).

Dla d -wymiarowego procesu X niech $[X]_t = \sum_{i=1}^d [X^i]_t$, $\langle X \rangle_t = \sum_{i=1}^d \langle X^i \rangle_t$, $t \in \mathbb{R}^+$, gdzie $[X^i] = \{[X^i]_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\langle X^i \rangle = \{\langle X^i \rangle_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ oznaczają odpowiednio wariację kwadratową procesu X^i oraz kompensator prognozowalnej wariacji kwadratowej procesu X^i , $i = 1, \dots, d$.

Twierdzenie 1.37 ([48, Théorème 1.4]). *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) $\{Z^n\}$ spełnia (UT),
- (ii) dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$ ciągi zmiennych losowych $\{Z_0^n\}$, $\{V_1(J^{n,a})_t\}$, $\{V_1(D^{n,a})_t\}$, $\{[M^{n,a}]_t\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa,
- (iii) dla dowolnych $t \in \mathbb{R}^+$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego procesu prognozowalnego H^n zachodzi implikacja

$$P(\sup_{s \leq t} |H_s^n| > \delta) < \delta \Rightarrow P\left(\sup_{s \leq t} \left|H_0^n Z_0^n + \int_0^s H_u^n dZ_u^n\right| > \varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Uwaga 1.38. Ponieważ skoki $M^{n,a}$ są ograniczone, więc ciąg $\{[M^{n,a}]_t\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczony według prawdopodobieństwa jest ciąg $\{[M^{n,a}]_t\}$.

Twierdzenie 1.39 ([35, Théorème 2.6]). *Niech $\{Z^n\}$ będzie ciągiem semimartyngałów spełniających warunki (UT). Jeżeli $\{X^n\}$, $\{H^n\}$ są ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych takich, że $(H^n, X^n, Z^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, X, Z)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d})$, to Z jest semimartyngałem adaptowanym do filtracji generowanej przez (H, X, Z) oraz*

$$\left(H^n, X^n, Z^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dZ_s^n\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(H, X, Z, \int_0^\cdot X_{s-} dZ_s\right) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d+1}).$$

Twierdzenie 1.40 (Skorochoła o reprezentacji). *Jeżeli $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to istnieje przestrzeń probabilistyczna $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$, procesy \hat{X}^n, \hat{X} takie, że $\mathcal{L}(\hat{X}^n) = \mathcal{L}(X^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(\hat{X}) = \mathcal{L}(X)$ oraz*

$$\hat{X}^n(\omega) \longrightarrow \hat{X}(\omega) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \quad \text{dla } \hat{P} - \text{prawie wszystkich } \omega \in \hat{\Omega}.$$

Fakt 1.41 ([42, Lemma 3], [58, Theorem 4.4]). *Każdy lokalny martyngał $M = \{M_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ posiada lokalnie skończoną p -wariację dla dowolnego $p > 2$. Jeżeli M jest dodatkowo całkowalny z kwadratem i $M_0 = 0$, to dla dowolnego $p > 2$ istnieje stała $K(p)$ zależna tylko od p taka, że dla każdego momentu zatrzymania τ względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ mamy*

$$EV_p(M)_\tau^2 \leq K(p)E[M]_\tau$$

oraz

$$EV_p(M)_{\tau-}^2 \leq K(p)(E\langle M \rangle_{\tau-} + E[M]_{\tau-}).$$

Rozdział 2

Równania z barierami względem funkcji o skończonej p -wariacji

2.1 Lipschitzowskość rozwiązań problemu Skorochoda w normie p -wariacyjnej

Skorochod w roku 1961 udowodnił następujący lemat.

Lemat 2.1 (Skorochod [73]). *Dla dowolnej funkcji ciągłej y , $y_0 \geq 0$ istnieją funkcje x, k takie, że*

- (i) $x_t = y_t + k_t \geq 0$ dla $t \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) $k_0 = 0$, k jest niemalejąca oraz $\int_0^t x_s dk_s = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Ponadto funkcja k dana jest wzorem

$$k_t = \sup_{s \leq t} (y_s)^-, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Łatwo zauważyć, że powyższy lemat pozostaje prawdziwy, jeśli zamiast funkcji ciągłych, rozważa się funkcje càdlàg. Oprócz tego barierę równą zero można również zastąpić funkcją càdlàg. Dokładniej dla dowolnych funkcji $y, l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $l_0 \leq y_0$ istnieje para funkcji $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ taka, że

- (i) $x_t = y_t + k_t \geq l_t$, $t \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) $k_0 = 0$, $k = (k^1, \dots, k^d)$, gdzie k^i są funkcjami niemalejącymi oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ mamy

$$\int_0^t (x_s^i - l_s^i) dk_s^i = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Parę (x, k) nazywamy rozwiązaniem problemu Skorochoda stowarzyszonego z y oraz dolną barierą l . Będziemy stosowali oznaczenie $(x, k) = SP_l(y)$. Ponieważ $SP_l(y) = SP_0(y - l)$,

gdzie parametr 0 oznacza funkcję stałą równą zero, na mocy lematu 2.1 otrzymujemy, że dla $(x, k) = SP_l(y)$ mamy

$$k_t = \sup_{s \leq t} (y_s - l_s)^-, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.1)$$

Podobnie można rozważać problem Skorochoda z barierą górną. Dla dowolnych funkcji $y, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $u_0 \geq y_0$ istnieje para funkcji $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ taka, że

$$(i) \quad x_t = y_t + k_t \leq u_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

(ii) $k_0 = 0$, $k = (k^1, \dots, k^d)$, gdzie k^i są funkcjami nierosnącymi oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ mamy

$$\int_0^t (x_s^i - u_s^i) dk_s^i = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Funkcja k dana jest wzorem

$$k_t = -\sup_{s \leq t} (y_s - u_s)^+, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

Parę (x, k) będziemy nazywać rozwiązaniem problemu Skorochoda stowarzyszonego z y i górną barierą u oraz będziemy stosować oznaczenie $(x, k) = SP^u(y)$.

W pracy [9] Burdzy, Kang oraz Ramanan podali definicję tzw. rozszerzonego problemu Skorochoda z dwiema barierami.

Definicja 2.2. Niech $y, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą takie, że $l \leq u$ oraz $l_0 \leq y_0 \leq u_0$. Powiemy, że para $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ jest rozwiązaniem *rozszerzonego problemu Skorochoda* stowarzyszonego z y oraz barierami l, u jeżeli

$$(i) \quad x_t = y_t + k_t \in [l_t, u_t], \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

(ii) $k_0 = 0$, $k = (k^1, \dots, k^d)$, gdzie dla dowolnych $0 \leq t \leq q$, $i = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} k_q^i - k_t^i &\geq 0, & \text{jeśli } x_s^i < u_s^i \text{ dla wszystkich } s \in (t, q], \\ k_q^i - k_t^i &\leq 0, & \text{jeśli } x_s^i > l_s^i \text{ dla wszystkich } s \in (t, q] \end{aligned}$$

oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$, $\Delta k_t^i \geq 0$, jeśli $x_t^i < u_t^i$ i $\Delta k_t^i \leq 0$, jeśli $x_t^i > l_t^i$.

Będziemy stosowali oznaczenie $(x, k) = ESP(y, l, u)$.

Uwaga 2.3. 1. W [9, Theorem 2.6] pokazano, że dla dowolnych $y, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takich, że $l \leq u$ oraz $l_0 \leq y_0 \leq u_0$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $(x, k) = ESP(y, l, u)$.

2. Jak zostało zauważone w [76], zamiast (ii) w definicji rozszerzonego problemu Skorochoda można rozważać następujący zestaw warunków: dla dowolnych $0 \leq t \leq q$, $i = 1, \dots, d$ takich, że $\inf_{s \in [t, q]} (u_s^i - l_s^i) > 0$ funkcja k^i posiada skończoną wariację na $[t, q]$ oraz

$$\int_{[t, q]} (x_s^i - l_s^i) dk_s^i \leq 0 \quad \text{i} \quad \int_{[t, q]} (x_s^i - u_s^i) dk_s^i \leq 0. \quad (2.3)$$

W powyższym wzorze $\int_{[t, q]} w_s dv_s$ oznacza całkę po przedziale domkniętym $[t, q]$, tzn. $\int_{[t, q]} w_s dv_s = w_t \Delta v_t + \int_t^q w_s dv_s$, gdzie $\int_t^q w_s dv_s$ oznacza tradycyjną całkę po przedziale $(t, q]$. Definicja z [9] jest równoważna definicji z [76].

3. Na mocy (2.3), jeżeli $u_t^i > l_t^i$, to $(x_t^i - l_t^i)\Delta k_t^i \leq 0$ oraz $(x_t^i - u_t^i)\Delta k_t^i \leq 0$. W konsekwencji, jeśli $\Delta k_t^i > 0$, to $x_t^i = l_t^i$, natomiast jeżeli $\Delta k_t^i < 0$, to $x_t^i = u_t^i$, $i = 1, \dots, d$. Zatem dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$

$$x_t = \max\{\min\{(x_{t-} + \Delta y_t), u_t\}, l_t\} \quad \text{oraz} \quad k_t = \max\{\min\{k_{t-}, u_t - y_t\}, l_t - y_t\},$$

co oznacza, że x_t jest rzutem $x_{t-} + \Delta y_t$ na przedział $[u_t, l_t]$ oraz k_t jest rzutem k_{t-} na przedział $[u_t - y_t, l_t - y_t]$.

4. W definicji klasycznego problemu Skorochoda (patrz np. [67]) zakłada się, że funkcja k posiada skończoną wariację na każdym ograniczonym przedziale $[t, q]$, albo równoważnie $k = k^{(+)} - k^{(-)}$, gdzie $k^{(+),i}$, $k^{(-),i}$ są niemalejącymi prawostronnie ciągłymi funkcjami, $k_0 = k_0^{(+)} = k_0^{(-)} = 0$ oraz $k^{(+),i}$ rośnie tylko na zbiorze $\{t; x_t^i = l_t^i\}$, natomiast $k^{(-),i}$ rośnie tylko na zbiorze $\{t; x_t^i = u_t^i\}$, $i = 1, \dots, d$. Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$ i $\inf_{t \leq T} (u_t - l_t) > 0$, $T \in \mathbb{R}^+$, to k jest funkcją o skończonej wariacji oraz (x, k) jest rozwiązaniem klasycznego problemu Skorochoda (patrz np. [9, Corollary 2.4]).

W przypadku jednej bariery lipschitzowskość rozwiązań problemu Skorochoda w normie supremum jest bezpośrednią konsekwencją postaci funkcji k . Jeżeli $(x, k) = SP_l(y)$ (odp. $(x, k) = SP^u(y)$) oraz $(x', k') = SP_{l'}(y')$ (odp. $(x', k') = SP^{u'}(y')$), to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{t \leq T} |x_t - x'_t| \leq 2 \sup_{t \leq T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leq T} |l_t - l'_t| \quad (\text{odp.} \quad \sup_{t \leq T} |x_t - x'_t| \leq 2 \sup_{t \leq T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leq T} |u_t - u'_t|)$$

oraz

$$\sup_{t \leq T} |k_t - k'_t| \leq \sup_{t \leq T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leq T} |l_t - l'_t| \quad (\text{odp.} \quad \sup_{t \leq T} |k_t - k'_t| \leq \sup_{t \leq T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leq T} |u_t - u'_t|).$$

Analogiczny rezultat dla rozszerzonego problemu Skorochoda z dwiema barierami został udowodniony w pracy [76].

Lemat 2.4 ([76, Theorem 2.6]). Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$ i $(x', k') = ESP(y', l', u')$, to

$$\sup_{t \leq T} |x_t - x'_t| \leq 2 \sup_{t \leq T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leq T} \max\{|l_t - l'_t|, |u_t - u'_t|\}$$

oraz

$$\sup_{t \leq T} |k_t - k'_t| \leq \sup_{t \leq T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leq T} \max\{|l_t - l'_t|, |u_t - u'_t|\}.$$

Jako wniosek z powyższych oszacowań otrzymujemy stabilność rozwiązań problemu Skorochoda w topologii J_1 .

Wniosek 2.5 ([76, Theorem 2.8]). Załóżmy, że $(x^n, k^n) = ESP(y^n, l^n, u^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $(x, k) = ESP(y, l, u)$. Jeżeli $(y^n, l^n, u^n) \rightarrow (y, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d})$, to

$$(x^n, k^n, y^n, l^n, u^n) \longrightarrow (x, k, y, l, u) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d}).$$

Analogicznie, jeżeli $(x^n, k^n) = SP_{l^n}(y^n)$ (odp. $(x^n, k^n) = SP^{u^n}(y^n)$), $n \in \mathbb{N}$, $(x, k) = SP_l(y)$ (odp. $(x, k) = SP^u(y)$) oraz $(y^n, l^n) \rightarrow (y, l)$ (odp. $(y^n, u^n) \rightarrow (y, u)$) w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$, to

$$(x^n, k^n, y^n, l^n) \longrightarrow (x, k, y, l) \quad (\text{odp.} \quad (x^n, k^n, y^n, u^n) \longrightarrow (x, k, y, u)) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}).$$

W dalszej części tego podrozdziału będziemy zajmować się lipschitzowskością rozwiązań problemu Skorochoda w normie p -wariacyjnej. Najpierw rozważać będziemy przypadek jednowymiarowy.

Twierdzenie 2.6. *Ustalmy $p \geq 1$. Niech $y^1, y^2, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ będą takie, że $l_0 \leq y_0^1, y_0^2 \leq u_0$ oraz $l \leq u$. Jeżeli $(x^j, k^j) = ESP(y^j, l, u)$, $j = 1, 2$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ mamy:*

$$\bar{V}_p(k^1 - k^2)_T \leq \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T.$$

Dowód. Postępujemy podobnie jak w dowodzie [24, Theorem 2.1].

Krok 1. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Załóżmy dodatkowo, że y^1, y^2, l oraz u są funkcjami schodkowymi postaci:

$$y_t^j = Y_i^j, l_t = L_i, u_t = U_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

oraz $y_t^j = Y_n^j, l_t = L_n, u_t = U_n, t \in [t_{n-1}, t_n = T]$, $j = 1, 2$ dla pewnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ przedziału $[0, T]$. Z uwagi 2.3.3. wynika, że $k_t^j = K_i^j, t \in [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, $k_t^j = K_n^j, t \in [t_{n-1}, t_n = T]$, $j = 1, 2$, gdzie $K_0^1 = K_0^2 = 0$ oraz $K_i^j = \max\{\min\{K_{i-1}^j, U_i - Y_i^j\}, L_i - Y_i^j\}$, $i = 1, \dots, n, j = 1, 2$.

Łatwo zauważyć, że

$$L_i - Y_i^j \leq K_i^j \leq U_i - Y_i^j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $v_p(k^1 - k^2)_T > 0$. Zatem istnieje taki indeks i , że $K_i^1 \neq K_{i-1}^1$ lub $K_i^2 \neq K_{i-1}^2$. Dalej, również bez zmniejszenia ogólności założymy, że dla każdego $i = 1, \dots, n-1$, mamy:

$$K_i^1 \neq K_{i-1}^1 \quad \text{lub} \quad K_i^2 \neq K_{i-1}^2. \quad (2.5)$$

(Jeżeli (2.5) nie zachodziłoby, to kładąc $v_0 = 0$,

$$v_k = \inf\{i > v_{k-1}; K_i^1 \neq K_{i-1}^1 \text{ lub } K_i^2 \neq K_{i-1}^2\} \wedge n, \quad k = 1, \dots, n,$$

$\tilde{n} = \inf\{k; v_k = n\}$, $\tilde{y}_t^j = Y_{v_k}^j, \tilde{l}_t = L_{v_k}, \tilde{u}_t = U_{v_k}, t \in [t_{v_{k-1}}, t_{v_k})$ dla $k = 1, \dots, \tilde{n}-1$, $\tilde{y}_t^j = Y_{\tilde{n}}^j, \tilde{l}_t = L_{\tilde{n}}, \tilde{u}_t = U_{\tilde{n}}$ dla $t \in [t_{v_{\tilde{n}-1}}, t_{v_{\tilde{n}}} = T]$, $j = 1, 2$, dostalibyśmy, że (2.5) zachodzi dla funkcji \tilde{y}^j , $(\tilde{x}^j, \tilde{k}^j) = ESP(\tilde{y}^j, \tilde{l}, \tilde{u})$, $j = 1, 2$. Ponadto, $\bar{V}_p(k^1 - k^2)_T = \bar{V}_p(\tilde{k}^1 - \tilde{k}^2)_T$ oraz $\bar{V}_p(\tilde{y}^1 - \tilde{y}^2)_T \leq \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T$.) Jest oczywiste, że przy poczynionych wcześniej założeniach istnieje skończony ciąg indeksów $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_m = n$ taki, że

$$v_p(k^1 - k^2)_T = \sum_{k=1}^m |(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \quad (2.6)$$

oraz

$$(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2) \neq 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Zatem, jeśli $m \geq 2$, to dla wszystkich $k = 2, \dots, m$ mamy, że

$$\left((K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2) \right) \left((K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2) \right) < 0. \quad (2.8)$$

Istotnie, jeżeli (2.8) nie zachodzi dla pewnego $k = 2, \dots, m$, to korzystając z (2.7), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & |(K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2)|^p + |(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \\ & < |(K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2) + (K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \\ & = |(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-2}}^2)|^p, \end{aligned}$$

co przeczy (2.6).

Pokażemy, że istnieje $0 = i_0 \leq r_1^\wedge \leq i_1$ (odp. $0 = i_0 \leq r_1^\vee \leq i_1$) takie, że jeśli $K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2 \leq 0$ (odp. $K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2 \geq 0$), to

$$Y_{r_1^\wedge}^2 - Y_{r_1^\wedge}^1 \leq K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2 \quad (\text{odp. } K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2 \leq Y_{r_1^\vee}^2 - Y_{r_1^\vee}^1) \quad (2.9)$$

oraz że dla $k = 2, \dots, m$ istnieją $i_{k-1} \leq r_k^\wedge, r_k^\vee \leq i_k$ takie, że

$$Y_{r_k^\wedge}^2 - Y_{r_k^\wedge}^1 \leq K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 \leq Y_{r_k^\vee}^2 - Y_{r_k^\vee}^1. \quad (2.10)$$

Ustalmy $k = 1, \dots, m$. Połóżmy $r_k^j = \max\{i \leq i_k; K_i^j = U_i - Y_i^j \text{ lub } K_i^j = L_i - Y_i^j\}$, $j = 1, 2$ (przyjmujemy konwencję: $\max \emptyset = 0$). Z (2.5) wynika, że $r_k^1 = i_k$ lub $r_k^2 = i_k$. Dla ustalenia uwagi założymy, że $r_k^1 = i_k$. Wówczas mogą zajść następujące przypadki:

- (a) $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = (L_{i_k} - Y_{i_k}^1) - (L_{r_k^2} - Y_{r_k^2}^2)$ (lub $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = (U_{i_k} - Y_{i_k}^1) - (U_{r_k^2} - Y_{r_k^2}^2)$),
- (b) $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = L_{i_k} - Y_{i_k}^1$ oraz $r_k^2 = 0$ (lub $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = U_{i_k} - Y_{i_k}^1$ oraz $r_k^2 = 0$),
- (c) $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = (L_{i_k} - Y_{i_k}^1) - (U_{r_k^2} - Y_{r_k^2}^2)$ (lub $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = (U_{i_k} - Y_{i_k}^1) - (L_{r_k^2} - Y_{r_k^2}^2)$).

Korzystając z (2.4), we wszystkich przypadkach otrzymujemy

$$K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = L_{i_k} - Y_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 \leq L_{i_k} - Y_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 + K_{i_k}^2 - (L_{i_k} - Y_{i_k}^2) = Y_{i_k}^2 - Y_{i_k}^1,$$

co pociąga, że możemy przyjąć $r_k^\vee = i_k$. W celu znalezienia r_k^\wedge musimy rozpatrzyć przypadki (a), (b), (c) osobno.

W przypadku (a), jeśli $r_k^2 = i_k$, to

$$K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 = L_{i_k} - Y_{i_k}^1 - (L_{i_k} - Y_{i_k}^2) = Y_{i_k}^2 - Y_{i_k}^1,$$

więc przyjmujemy $r_k^\wedge = i_k$. Jeżeli $r_k^2 < i_k$, to kładąc $r^* = \max\{i < i_k; K_i^1 = U_i - Y_i^1\} \vee r_k^2$, możemy zauważyć, że $K_{r^*}^2 = K_{r^*+1}^2 = \dots = K_{i_k}^2$. Ponieważ dla $r^* < v \leq i_k$, $K_v^1 = \max\{K_{v-1}, L_v - Y_v^1\}$, korzystając z (2.5), uzyskujemy

$$K_{r^*}^1 - K_{r^*}^2 < K_{r^*+1}^1 - K_{r^*+1}^2 < \dots < K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2. \quad (2.11)$$

Z powyższego wynika również, że $Y_{r^*}^2 - Y_{r^*}^1 < K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2$. Istotnie, jeżeli $r^* > r_k^2$ (odp. $r^* = r_k^2$) to $K_{r^*}^1 = U_{r^*} - Y_{r^*}^1$ (odp. $K_{r^*}^2 = L_{r^*} - Y_{r^*}^2$) oraz na mocy (2.4)

$$K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 > K_{r^*}^1 - K_{r^*}^2 \geq U_{r^*} - Y_{r^*}^1 - U_{r^*} + Y_{r^*}^2 = Y_{r^*}^2 - Y_{r^*}^1$$

(odp. $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 > K_{r^*}^1 - K_{r^*}^2 \geq L_{r^*} - Y_{r^*}^1 - L_{r^*} + Y_{r^*}^2 = Y_{r^*}^2 - Y_{r^*}^1$). Niech $r_k^\wedge = r^*$. Dla dowodu tezy w przypadku (a) pozostaje pokazać, że $i_{k-1} \leq r^*$. Jest to oczywiste dla $k = 1$, więc założymy, że $k \geq 2$ oraz $i_{k-1} > r^*$. Na mocy (2.11) wnosimy, iż $(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2) > 0$, co razem z (2.8) pociąga: $(K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2) < 0$. W konsekwencji korzystając z (2.11), otrzymujemy, że $i_{k-2} < r^*$. Stosując ponownie (2.11), uzyskujemy $(K_{r^*}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{r^*}^2 - K_{i_{k-1}}^2) < 0$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 &> (K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2) \\ &> (K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2) + (K_{r^*}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{r^*}^2 - K_{i_{k-1}}^2) \\ &= (K_{r^*}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{r^*}^2 - K_{i_{k-2}}^2) \end{aligned}$$

oraz

$$|(K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2)|^p < |(K_{r^*}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{r^*}^2 - K_{i_{k-1}}^2)|^p. \quad (2.12)$$

Podobnie

$$\begin{aligned} 0 &< (K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2) \\ &< (K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2) - (K_{r^*}^1 - K_{i_{k-1}}^1) + (K_{r^*}^2 - K_{i_{k-1}}^2) \\ &= (K_{i_k}^1 - K_{r^*}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{r^*}^2), \end{aligned}$$

co implikuje, że

$$|(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2)|^p < |(K_{i_k}^1 - K_{r^*}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{r^*}^2)|^p. \quad (2.13)$$

Z (2.12) i (2.13) dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned} &|(K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2)|^p + |(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \\ &< |(K_{r^*}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{r^*}^2 - K_{i_{k-2}}^2)|^p + |(K_{i_k}^1 - K_{r^*}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{r^*}^2)|^p, \end{aligned}$$

które przeczy (2.6) oraz kończy dowód faktu, iż $i_{k-1} \leq r^*$. Ostatecznie w przypadku (a) przyjmujemy: $r_k^\wedge = r^*$.

W przypadku (b) (odp. (c)) kładziemy $r^* = \max\{i < i_k; K_i^1 = U_i - Y_i^1\}$ (odp. $r^* = \max\{i < i_k; K_i^2 = L_i - Y_i^2 \text{ lub } K_i^1 = U_i - Y_i^1\}$). Dla $r^* < v \leq i_k$ mamy, że $K_v^1 = \max\{K_{v-1}^1, L_v - Y_v^1\}$ oraz $K_v^2 = \min\{K_{v-1}^2, U_v - Y_v^2\}$. Podobnie jak w przypadku (a) wnioskujemy z powyższego oraz z (2.5), że

$$K_{r^*}^1 - K_{r^*}^2 < K_{r^*+1}^1 - K_{r^*+1}^2 < \dots < K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2.$$

Stosując te same argumenty jak w przypadku (a), możemy pokazać oszacowanie: $i_{k-1} \leq r^*$. Ponadto, jeśli $r^* > 0$ oraz $K_{r^*}^1 = U_{r^*} - Y_{r^*}^1$ (odp. $K_{r^*}^2 = L_{r^*} - Y_{r^*}^2$), to na mocy (2.4)

$$K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 > (U_{r^*} - Y_{r^*}^1) - K_{r^*}^2 \geq (U_{r^*} - Y_{r^*}^1) - (U_{r^*} - Y_{r^*}^2) = Y_{r^*}^2 - Y_{r^*}^1$$

(odp. $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 > K_{r^*}^1 - (L_{r^*} - Y_{r^*}^2) \geq (L_{r^*} - Y_{r^*}^1) - (L_{r^*} - Y_{r^*}^2) = Y_{r^*}^2 - Y_{r^*}^1$). Zatem przyjmujemy $r_k^\wedge = r^*$. Ponieważ, jeśli $r^* = 0$, to $k = 1$, dowód istnienia r_k^\wedge, r_k^\vee spełniających (2.9) i (2.10) został zakończony.

Zauważmy dalej, że jeżeli $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 > K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-1}}^2$ dla pewnego $k = 2, \dots, m$, to na mocy (2.10):

$$0 < (K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2) - (K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-1}}^2) \leq (Y_{r_k^\vee}^2 - Y_{r_k^\vee}^1) - (Y_{r_{k-1}^\wedge}^2 - Y_{r_{k-1}^\wedge}^1).$$

Zatem

$$|(K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2) - (K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \leq |(Y_{r_k^\vee}^1 - Y_{r_k^\vee}^2) - (Y_{r_{k-1}^\wedge}^1 - Y_{r_{k-1}^\wedge}^2)|^p. \quad (2.14)$$

Podobnie, jeśli $K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2 < K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-1}}^2$, to

$$|(K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2) - (K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \leq |(Y_{r_k^\wedge}^1 - Y_{r_k^\wedge}^2) - (Y_{r_{k-1}^\vee}^1 - Y_{r_{k-1}^\vee}^2)|^p. \quad (2.15)$$

W przypadku, gdy $k = 1$, nierówność $K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2 > 0$ pociąga, że

$$|(K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2) - (K_{i_0}^1 - K_{i_0}^2)|^p = |K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2|^p \leq |Y_{r_1^\vee}^1 - Y_{r_1^\vee}^2|^p, \quad (2.16)$$

natomiast, jeżeli $K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2 < 0$, to

$$|(K_{i_1}^1 - K_{i_1}^2) - (K_{i_0}^1 - K_{i_0}^2)|^p \leq |Y_{r_1^\wedge}^1 - Y_{r_1^\wedge}^2|^p. \quad (2.17)$$

Z (2.14)–(2.17) wnioskujemy, że

$$\sum_{k=1}^m |(K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2) - (K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \leq |Y_{r_1^\vee}^1 - Y_{r_1^\vee}^2|^p + \sum_{k=2}^m |(Y_{\tilde{r}_k}^1 - Y_{\tilde{r}_k}^2) - (Y_{\tilde{r}_{k-1}}^1 - Y_{\tilde{r}_{k-1}}^2)|^p,$$

gdzie $\tilde{r}_k = r_k^\wedge$ lub $\tilde{r}_k = r_k^\vee$ oraz $i_{k-1} \leq \tilde{r}_k \leq i_k$, $k = 1, \dots, m$. W konsekwencji:

$$\begin{aligned} \bar{V}_p(k^1 - k^2)_T &= V_p(k^1 - k^2)_T \\ &= \left(\sum_{k=1}^m |(K_{i_k}^1 - K_{i_k}^2) - (K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(|Y_{r_1^\vee}^1 - Y_{r_1^\vee}^2|^p + \sum_{k=2}^m |(Y_{\tilde{r}_k}^1 - Y_{\tilde{r}_k}^2) - (Y_{\tilde{r}_{k-1}}^1 - Y_{\tilde{r}_{k-1}}^2)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq |y_0^1 - y_0^2| + \left(\sum_{k=1}^m |(y_{t_{\tilde{r}_k}^1}^1 - y_{t_{\tilde{r}_k}^2}^2) - (y_{t_{\tilde{r}_{k-1}}^1}^1 - y_{t_{\tilde{r}_{k-1}}^2}^2)|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

dla pewnego podziału $0 = t_{\tilde{r}_0} < t_{\tilde{r}_1} < \dots < t_{\tilde{r}_m} \leq T$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku schodkowych funkcji y^1, y^2, l oraz u .

Krok 2. Przypadek ogólny.

Niech $\{y^{1,(n)}\}, \{y^{2,(n)}\}, \{l^{(n)}\}$ oraz $\{u^{(n)}\}$ będą ciągami dyskretyzacji funkcji y^1, y^2, l oraz u , odpowiednio, zdefiniowanymi tak jak w twierdzeniu 1.6. Z twierdzenia 1.6 wynika, że $(y^{1,(n)}, y^{2,(n)}, l^{(n)}, u^{(n)}) \rightarrow (y^1, y^2, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^4)$. Połóżmy dla $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$

$(x^{j,n}, k^{j,n}) = ESP(y^{j,(n)}, l^{(n)}, u^{(n)})$. Korzystając z wniosku 2.5, otrzymujemy zbieżność: $(k^{1,n}, k^{2,n}, y^{1,n}, y^{2,n}) \rightarrow (k^1, k^2, y^1, y^2)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^4)$, co pociąga, że

$$k^{1,n} - k^{2,n} \longrightarrow k^1 - k^2 \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}). \quad (2.18)$$

Korzystając z Kroku 1. dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$, mamy: $\bar{V}_p(k^{1,n} - k^{2,n})_T \leq \bar{V}_p(y^{1,(n)} - y^{2,(n)})_T$. Jest jasne, że $\bar{V}_p(y^{1,(n)} - y^{2,(n)})_T \leq \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$. Stąd, z (2.18) oraz lematu 1.12 wynika, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(k^1 - k^2)_T \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_p(k^{1,n} - k^{2,n})_T \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_p(y^{1,(n)} - y^{2,(n)})_T \leq \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T.$$

Dowód twierdzenia został zakończony. \square

Uwaga 2.7. 1. Przypadek $p = 1$ był wcześniej badany w [76, Theorem 2.14] (patrz również [70]).

2. Założenie: $l^1 = l^2$ oraz $u^1 = u^2$, jest konieczne (patrz np. [76, Example 2.15]).

Wniosek 2.8. Niech $p \geq 1$, $y, y', l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą takie, że $l_0 \leq y_0, y'_0 \leq u_0$. Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$ oraz $(x', k') = ESP(y', l, u)$, to

$$\bar{V}_p(x - x')_T \leq (d+1)\bar{V}_p(y - y')_T \quad \text{oraz} \quad \bar{V}_p(k - k')_T \leq d\bar{V}_p(y - y')_T$$

dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$.

Dowód. Korzystając z twierdzenia 2.6, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{V}_p(k - k')_T &\leq d^{(p-1)/p} \left(\sum_{i=1}^d v_p(k^i - k'^i)_T \right)^{1/p} \leq d^{(p-1)/p} \left(\sum_{i=1}^d \bar{V}_p(y^i - y'^i)_T^p \right)^{1/p} \\ &\leq d \max_i \bar{V}_p(y^i - y'^i)_T \leq d\bar{V}_p(y - y')_T. \end{aligned}$$

Ponieważ $\bar{V}_p(x - x')_T \leq \bar{V}_p(y - y')_T + \bar{V}_p(k - k')_T$, dowód wniosku został zakończony. \square

Wniosek 2.9. Niech $p \geq 1$, $y, l, h, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą takie, że $l_0 \leq y_0 \leq u_0$, $l \leq h \leq u$. Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$, to

$$\bar{V}_p(k)_T \leq d\bar{V}_p(y)_T + d\bar{V}_p(h)_T \quad \text{oraz} \quad \bar{V}_p(x)_T \leq (d+1)\bar{V}_p(y)_T + d\bar{V}_p(h)_T$$

dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$.

Dowód. Zauważmy, że $(h, 0) = ESP(h, l, u)$. Zatem z wniosku 2.8 mamy

$$\bar{V}_p(k)_T \leq d\bar{V}_p(y - h)_T \leq d\bar{V}_p(y)_T + d\bar{V}_p(h)_T.$$

Druga nierówność jest bezpośrednią konsekwencją pierwszej. \square

Podobne oszacowania można pokazać dla rozwiązań problemu Skorochoda z jedną barierą. W tym przypadku nie jest konieczne założenie o równości barier.

Wniosek 2.10. Niech $p \geq 1$, $y, y', l, l', u, u' \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$,

(i) jeżeli $l_0 \leq y_0$, $l'_0 \leq y'_0$ oraz $(x, k) = SP_l(y)$, $(x', k') = SP_{l'}(y')$, to

$$\bar{V}_p(k - k')_T \leq d\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(l - l')_T$$

oraz

$$\bar{V}_p(x - x')_T \leq (d + 1)\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(l - l')_T;$$

(ii) jeżeli $u_0 \geq y_0$, $u'_0 \geq y'_0$ oraz $(x, k) = SP^u(y)$, $(x', k') = SP^{u'}(y')$, to

$$\bar{V}_p(k - k')_T \leq d\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(u - u')_T$$

oraz

$$\bar{V}_p(x - x')_T \leq (d + 1)\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(u - u')_T.$$

Dowód. (i) Załóżmy najpierw, że $l = l'$. Wówczas $(x, k) = ESP(y, l, \max\{y, y', l, \})$ oraz $(x', k') = ESP(y', l, \max\{y, y', l, \})$. Zatem korzystając z wniosku 2.8, mamy

$$\bar{V}_p(k - k')_T \leq d\bar{V}_p(y - y')_T. \quad (2.19)$$

W ogólnym przypadku bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $l_0 \leq l'_0$, co pociąga, iż $l_0 \leq y'_0$. Połóżmy $(\bar{x}, \bar{k}) = ESP(y', l, \max\{y, y', l, \}) = SP_l(y')$. Stosując (2.19), otrzymujemy

$$\bar{V}_p(k - \bar{k})_T \leq d\bar{V}_p(y - y')_T. \quad (2.20)$$

Ponieważ $(x' - l', k') = SP_0(y' - l')$ oraz $(\bar{x} - l, \bar{k}) = SP_0(y' - l)$, więc korzystając ponownie z (2.19), uzyskujemy

$$\bar{V}_p(\bar{k} - k')_T \leq d\bar{V}_p(l - l')_T. \quad (2.21)$$

Z (2.20) i (2.21) wnioskujemy pierwszą nierówność w (i). Druga nierówność w (i) jest konsekwencją pierwszej. Podobnie pokazujemy (ii). \square

Wniosek 2.11. Niech $p \geq 1$, $y, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$,

(i) jeżeli $l_0 \leq y_0$ i $(x, k) = SP_l(y)$, to

$$\bar{V}_p(k)_T \leq d\bar{V}_p(y)_T + d \sup_{t \leq T} |l_t| \quad \text{oraz} \quad \bar{V}_p(x)_T \leq (d + 1)\bar{V}_p(y)_T + d \sup_{t \leq T} |l_t|;$$

(ii) jeżeli $u_0 \geq y_0$ i $(x, k) = SP^u(y)$, to

$$\bar{V}_p(k)_T \leq d\bar{V}_p(y)_T + d \sup_{t \leq T} |u_s| \quad \text{oraz} \quad \bar{V}_p(x)_T \leq (d + 1)\bar{V}_p(y)_T + d \sup_{t \leq T} |u_s|.$$

Dowód. (i) Ponieważ dla każdego $i = 1, \dots, d$ funkcja $k^i = \sup_{t \leq \cdot} (y_s^i - l_s^i)^-$ jest niemalejąca, to $V_p(k^i)_T = k_T^i \leq \sup_{t \leq T} |y_t^i| + \sup_{t \leq T} |l_t^i|$, $T \in \mathbb{R}^+$. W konsekwencji

$$\begin{aligned} \bar{V}_p(k)_T &\leq d^{(p-1)/p} \left(\sum_{i=1}^d v_p(k^i)_T \right)^{1/p} \leq d^{(p-1)/p} \left(\sum_{i=1}^d \left(\bar{V}_p(y^i)_T + \sup_{t \leq T} |l_t^i| \right)^p \right)^{1/p} \\ &\leq d \max_i \left(\bar{V}_p(y^i)_T + \sup_{t \leq T} |l_t^i| \right) \leq d \left(\bar{V}_p(y)_T + \sup_{t \leq T} |l_t| \right). \end{aligned}$$

Ponieważ $\bar{V}_p(x)_T \leq \bar{V}_p(y)_T + \bar{V}_p(k)_T$, dowód (i) został zakończony. Stosując analogiczne argumenty, pokazujemy (ii). \square

Na zakończenie niniejszego podrozdziału podamy wniosek dotyczący lipschitzowskości operatora supremum w normie p -wariacyjnej.

Wniosek 2.12. *Jeżeli $p \geq 1$, $y, y' \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$*

$$\bar{V}_p(\sup_{s \leq \cdot} y_s - \sup_{s \leq \cdot} y'_s)_T \leq \bar{V}_p(y - y')_T.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $y_0 = y'_0 = 0$. Wówczas korzystając z wniosku 2.10 dla $(x, k) = SP^0(y)$ i $(x', k') = SP^0(y')$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} V_p(\sup_{s \leq \cdot} y_s - \sup_{s \leq \cdot} y'_s)_T &= \bar{V}_p(\sup_{s \leq \cdot} y_s - \sup_{s \leq \cdot} y'_s)_T \\ &= \bar{V}_p(k - k')_T \leq \bar{V}_p(y - y')_T = V_p(y - y')_T, \quad T \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (2.22)$$

W ogólnym przypadku mamy

$$\begin{aligned} \bar{V}_p(\sup_{s \leq \cdot} y_s - \sup_{s \leq \cdot} y'_s)_T &= |y_0 - y'_0| + V_p(\sup_{s \leq \cdot} y_s - \sup_{s \leq \cdot} y'_s)_T \\ &= |y_0 - y'_0| + V_p(\sup_{s \leq \cdot} (y_s - y_0) - \sup_{s \leq \cdot} (y'_s - y'_0))_T, \end{aligned}$$

więc korzystając z (2.22), uzyskujemy

$$\begin{aligned} \bar{V}_p(\sup_{s \leq \cdot} y_s - \sup_{s \leq \cdot} y'_s)_T &\leq |y_0 - y'_0| + V_p((y - y_0) - (y' - y'_0))_T \\ &= |y_0 - y'_0| + V_p(y - y')_T = \bar{V}_p(y - y')_T. \end{aligned}$$

\square

Uwaga 2.13. Inny dowód wniosku 2.12 można znaleźć w [24].

2.2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań z barierami

Niech $p \in (1, 2)$, $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $a, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $V_1(b)_T < \infty$, $V_p(a)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l \leq u$. Będziemy badać problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań deterministycznych równań z barierami postaci:

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-}) db_s + \int_0^t g(s, x_{s-}) da_s + k_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.23)$$

gdzie $l_0 \leq x_0 \leq u_0$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$ są danymi funkcjami, a całka względem a jest uogólnioną całką Riemanna-Stieltjesa.

Definicja 2.14. Powiemy, że para $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ jest rozwiązaniem równania (2.23), jeżeli $V_p(x)_T < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $(x, k) = ESP(y, l, u)$, gdzie

$$y_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-}) db_s + \int_0^t g(s, x_{s-}) da_s, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Uwaga 2.15. Będziemy zakładać dodatkowo, że istnieje funkcja $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ o własnościach: $l \leq h \leq u$ i $V_p(h)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$. Nietrudno zauważyć, że to dodatkowe założenie jest konieczne, aby rozwiązanie problemu Skorochoda $(x, k) = ESP(y, l, u)$ posiadało lokalnie skończoną p -wariację dla dowolnej funkcji y o lokalnie skończonej p -wariacji (jest ono spełnione, jeśli $\inf_{t \leq T} (u_t - l_t) > 0$, $T \in \mathbb{R}^+$, ponieważ w tym przypadku możemy przyjąć $h = x'$, gdzie $(x', k') = ESP(y', l, u)$, $y' \equiv l_0$ oraz korzystając z uwagi 2.3.4, wywnioskować, iż funkcja h posiada lokalnie skończoną wariację).

Rozważać będziemy założenia.

(H1) (a) Istnieje $C_f > 0$ taka, że

$$|f(t, x)| \leq C_f(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Istnieją $\beta \in (1 - 1/p, 1]$, $\alpha \in (p - 1, 1]$ oraz $C_g > 0$ takie, że

$$|g(t, x) - g(s, y)| \leq C_g(|t - s|^\beta + |x - y|^\alpha), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, t, s \in \mathbb{R}^+.$$

(H2) (a) Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje $C_{f,N} > 0$ taka, że

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq C_{f,N}|x - y|, \quad |x|, |y| < N, t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) g jest różniczkowalną funkcją zmiennej x . Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieją $\alpha_N \in (p - 1, 1]$ i $C_{g,N} > 0$ takie, że

$$|\nabla_x g(t, x)| \leq C_{g,N}$$

oraz

$$|\nabla_x g(t, x) - \nabla_x g(s, y)| \leq C_{g,N}(|t - s|^\beta + |x - y|^{\alpha_N}), \quad |x|, |y| < N, t, s \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie $\nabla_x g(t, x) = (\nabla_x g^{i,j}(t, x))_{i,j=1,\dots,d}$, $|\nabla_x g(t, x)|^2 = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_k}(t, x) \right|^2$.

Uwaga 2.16. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz połóżmy $C_g^T = C_g((T \vee 1) + 2) + |g(0, 0)|$. Przy założeniu (H1) (b) dla wszystkich $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|g(t, x)| \leq C_g^T(1 + |x|). \quad (2.24)$$

Ponadto dla wszystkich $q \geq p/\alpha \vee 1/\beta$, $w \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ mamy:

$$\bar{V}_q(g(\cdot, w))_t \leq C_g^T(1 + \bar{V}_p(w)_t). \quad (2.25)$$

Aby dowieść (2.25), wystarczy skorzystać z nierówności $|ab| \leq \alpha|a|^{1/\alpha} + (1 - \alpha)|b|^{1/(1-\alpha)}$ i zauważyć, że

$$\begin{aligned} \bar{V}_q(g(\cdot, w))_t &\leq C_g \left(t^\beta + V_p(w)_t^\alpha + |w_0|^\alpha \right) + |g(0, 0)| \\ &\leq C_g \left(T^\beta + \alpha \bar{V}_p(w)_t + 2(1 - \alpha) \right) + |g(0, 0)|. \end{aligned}$$

Podobnie dowodzimy (2.24).

Będziemy przybliżać rozwiązania równania (2.23) za pomocą ciągu iteracji Picarda postaci: $(x^0, k^0) = ESP(x_0, l, u)$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} y_t^n = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-}^{n-1}) db_s + \int_0^t g(s, x_{s-}^{n-1}) da_s, & t \in \mathbb{R}^+, \\ (x^n, k^n) = ESP(y^n, l, u). \end{cases} \quad (2.26)$$

Zauważmy, że użyte powyżej całki są poprawnie określone. Istotnie, dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ na mocy wniosku 2.9 $\bar{V}_p(x^0)_T \leq (d+1)|x_0| + d\bar{V}_p(h)_T$ oraz gdy $\bar{V}_p(x^{n-1})_T < \infty$, to funkcja $f(\cdot, x_{-}^{n-1})$ jest ograniczona na $[0, T]$, a (2.25) implikuje, że $\bar{V}_q(g(\cdot, x_{-}^{n-1}))_T < \infty$ dla $q = p/\alpha \vee 1/\beta$, co pociąga istnienie całek w (2.26). Ponadto korzystając jeszcze raz z wniosku 2.9, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{V}_p(x^n)_T &\leq (d+1)\bar{V}_p(y^n)_T + d\bar{V}_p(h)_T \\ &\leq (d+1) \left(|x_0| + V_p \left(\int_0^\cdot f(s, x_{s-}^{n-1}) db_s \right)_T + V_p \left(\int_0^\cdot g(s, x_{s-}^{n-1}) da_s \right)_T \right) \\ &\quad + d\bar{V}_p(h)_T, \end{aligned} \quad (2.27)$$

gdzie

$$V_p \left(\int_0^\cdot f(s, x_{s-}^{n-1}) db_s \right)_T \leq \sup_{s \leq T} |f(s, x_{s-}^{n-1})| V_1(b)_T \leq C_f(1 + \bar{V}_p(x^{n-1})_T) V_1(b)_T \quad (2.28)$$

oraz na mocy (1.3) i (2.25)

$$\begin{aligned} V_p \left(\int_0^\cdot g(s, x_{s-}^{n-1}) da_s \right)_T &\leq K_{p,q} \bar{V}_q(g(\cdot, x^{n-1}))_T V_p(a)_T \\ &\leq K_{p,q} C_g^T (1 + \bar{V}_p(x^{n-1})_T) V_p(a)_T. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Zatem w szczególności $\bar{V}_p(x^n)_T < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$.

Pokażemy, że w istocie zachodzi mocniejsze oszacowanie.

Lemat 2.17. *Przy założeniu (H1) dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ istnieje stała $D > 0$ zależna od $d, p, \alpha, \beta, x_0, C_g^T, C_f, V_1(b)_T, V_p(a)_T$ i $\bar{V}_p(h)_T$ taka, że*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_p(x^n)_T \leq D.$$

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$, przyjmijmy $q = p/\alpha \vee 1/\beta$, $C_0 = (d+1)|x_0| + d\bar{V}_p(h)_T$, $C_1 = (d+1) \max\{C_f, K_{p,q}C_g^T\}$ oraz zauważmy, że dzięki (2.27), (2.28) i (2.29) mamy oszacowanie

$$\bar{V}_p(x^n)_t \leq C_0 + C_1(1 + \bar{V}_p(x^{n-1})_t)(V_1(b)_t + V_p(a)_t), \quad n \in \mathbb{N}, t \leq T.$$

Kładąc $t_1 = \inf\{t; C_1(V_1(b)_t + V_p(a)_t) > 1/2\} \wedge T$, otrzymujemy

$$\bar{V}_p(x^n)_{t_1-} \leq C_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{V}_p(x^{n-1})_{t_1-}, \quad n \in \mathbb{N},$$

co pociąga, iż $\sup_n \bar{V}_p(x^n)_{t_1-} \leq 2(C_0 + 1/2)$. Stosując wniosek 2.9, (2.24) oraz punkty (iii), (iv) z uwagi 1.11, dostajemy

$$\begin{aligned} |\Delta x_{t_1}^n| &= \lim_{m \rightarrow \infty} V_p(x^n)_{[t_1-1/m, t_1]} \\ &\leq (d+1) \left(|x_{t_1-}^{n-1}| + |f(t_1, x_{t_1-}^{n-1})\Delta b_{t_1}| + |g(t_1, x_{t_1-}^{n-1})\Delta a_{t_1}| \right) + d\bar{V}_p(h)_{t_1} \\ &\leq C_0 + (1+d)\bar{V}_p(x^{n-1})_{t_1-} + C_1(1 + \bar{V}_p(x^{n-1})_{t_1-})(V_1(b)_T + V_p(a)_T). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Zatem korzystając ponownie z uwagi 1.11 (iii), wnioskujemy, że istnieje stała D_1 zależna od $d, p, q, x_0, C_g^T, C_f, V_1(b)_T, V_p(a)_T$ i $\bar{V}_p(h)_T$ o własności:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_p(x^n)_{t_1} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bar{V}_p(x^n)_{t_1-} + |\Delta x_{t_1}^n| \right) \leq D_1.$$

Niech $t_k = \inf\{t > t_{k-1}; C_1(V_1(b)_{[t_{k-1}, t]} + V_p(a)_{[t_{k-1}, t]}) > 1/2\} \wedge T$, $k \geq 2$. Używając podobnych argumentów jak poprzednio, otrzymujemy, iż $\sup_n V_p(x^n)_{[t_{k-1}, t_k]} \leq D_k$, gdzie $D_k = D_k(d, p, q, x_0, C_g^T, C_f, V_1(b)_T, V_p(a)_T, \bar{V}_p(h)_T)$, $k \geq 2$. Dlatego dla dowodu wystarczy pokazać, że $m = \sup\{k; t_k < T\} \leq C$, gdzie C zależy tylko od $p, C_1, V_1(b)_T, v_p(a)_T$. W tym celu zauważmy, że bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, iż $C_1 \geq 1$. Wówczas $1/2 < C_1(V_1(b)_{[t_{k-1}, t_k]} + V_p(a)_{[t_{k-1}, t_k]}) \leq 2C_1 \max\{V_1(b)_{[t_{k-1}, t_k]}, V_p(a)_{[t_{k-1}, t_k]}\}$ i w konsekwencji $2/(4C_1)^p < V_1(b)_{[t_{k-1}, t_k]} + v_p(a)_{[t_{k-1}, t_k]}$ dla każdego $k \leq m$. Stąd

$$m \frac{2}{(4C_1)^p} < \sum_{k=1}^m (V_1(b)_{[t_{k-1}, t_k]} + v_p(a)_{[t_{k-1}, t_k]}) \leq V_1(b)_T + v_p(a)_T, \quad (2.31)$$

co kończy dowód lematu. \square

Twierdzenie 2.18. *Założmy (H1), (H2) oraz dodatkowo, że istnieje $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ o lokalnie skończonej p -wariacji, spełniająca warunek: $l \leq h \leq u$. Niech $\{(x^n, k^n)\}$ oznacza ciąg iteracji Picarda zdefiniowany w (2.26). Wówczas dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$*

$$\bar{V}_p(x^n - x)_T \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \bar{V}_p(k^n - k)_T \longrightarrow 0,$$

gdzie (x, k) jest jednoznaczным rozwiązaniem równania (2.23).

Dowód. Krok 1. Zbieżność iteracji Picarda.

Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Ponieważ $x_0^n = x_0^{n-1} = x_0$, $n \in \mathbb{N}$, więc korzystając z wniosku 2.8, dla każdego $n \geq 2$ oraz dowolnego $t \leq T$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{V}_p(x^n - x^{n-1})_t &= V_p(x^n - x^{n-1})_t \\ &\leq (d+1)V_p \left(\int_0^\cdot f(s, x_{s-}^{n-1}) - f(s, x_{s-}^{n-2}) db_s + \int_0^\cdot g(s, x_{s-}^{n-1}) - g(s, x_{s-}^{n-2}) da_s \right)_t \\ &\leq (d+1)V_p \left(\int_0^\cdot f(s, x_{s-}^{n-1}) - f(s, x_{s-}^{n-2}) db_s \right)_t \\ &\quad + (d+1)V_p \left(\int_0^\cdot g(s, x_{s-}^{n-1}) - g(s, x_{s-}^{n-2}) da_s \right)_t. \end{aligned}$$

Na mocy lematu 2.17 $\sup_{t \leq T} |x_t^n| \leq N$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, gdzie $N = \sup_n \bar{V}_p(x^n)_T < \infty$.
Zatem

$$\begin{aligned} V_p \left(\int_0^\cdot f(s, x_{s-}^{n-1}) - f(s, x_{s-}^{n-2}) db_s \right)_t &\leq C_{f,N} V_1(b)_t \sup_{s \leq t} |x_s^{n-1} - x_s^{n-2}| \\ &\leq C_{f,N} V_1(b)_t V_p(x^{n-1} - x^{n-2})_t \end{aligned}$$

oraz dzięki (1.3)

$$V_p \left(\int_0^\cdot g(s, x_{s-}^{n-1}) - g(s, x_{s-}^{n-2}) da_s \right)_t \leq K_{p,r} V_r(g(\cdot, x^{n-1}) - g(\cdot, x^{n-2}))_t V_p(a)_t,$$

gdzie $r = (p/\alpha_N) \vee (1/\beta)$. W celu oszacowania prawej strony powyższej nierówności wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 2.19. *Niech $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia (H2) (b) dla pewnych $\alpha_N, \beta \in (0, 1]$, $N \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli dla $x, y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz $p \geq 1$ $V_p(x)_T < \infty$, $V_p(y)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, to dla wszystkich $N \in \mathbb{R}^+$ takich, że $\sup_{t \leq T} |x_t| \leq N$, $\sup_{t \leq T} |y_t| \leq N$ oraz $r = (p/\alpha_N) \vee (1/\beta)$ zachodzi następujące oszacowanie:*

$$V_r(g(\cdot, x) - g(\cdot, y))_T \leq C_{g,N} \left(V_r(x - y)_T + \sup_{t \leq T} |x_t - y_t| \left(T^\beta + V_p(x)_T^{\alpha_N} + V_p(y)_T^{\alpha_N} \right) \right).$$

Dowód lematu. Łatwo zauważyć, że dla wszystkich $t, s \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &|g(t, x_t) - g(t, y_t) - g(s, x_s) + g(s, y_s)| \\ &= \left| \int_0^1 \nabla_x g(t, \theta x_t + (1-\theta)y_t)(x_t - y_t) - \nabla_x g(s, \theta x_s + (1-\theta)y_s)(x_s - y_s) d\theta \right|. \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} &|g(t, x_t) - g(t, y_t) - g(s, x_s) + g(s, y_s)| \\ &\leq \int_0^1 |\nabla_x g(t, \theta x_t + (1-\theta)y_t)| |x_t - y_t - x_s + y_s| d\theta \\ &\quad + \int_0^1 |\nabla_x g(t, \theta x_t + (1-\theta)y_t) - \nabla_x g(s, \theta x_s + (1-\theta)y_s)| |x_s - y_s| d\theta \\ &\leq C_{g,N} \left(|x_t - y_t - x_s + y_s| + |x_s - y_s| (|t - s|^\beta + |x_t - x_s|^{\alpha_N} + |y_t - y_s|^{\alpha_N}) \right). \end{aligned}$$

Aby zakończyć dowód lematu, wystarczy zastosować powyższe oszacowanie dla każdej pary punktów $t = t_i$, $s = t_{i-1}$ należących do podziału $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ przedziału $[0, T]$ oraz skorzystać z nierówności Minkowskiego. \square

Z lematu 2.19 dla wszystkich $i, j = 1, \dots, d$ mamy

$$\begin{aligned} V_r(g_{i,j}(\cdot, x^{n-1}) - g_{i,j}(\cdot, x^{n-2}))_t &\leq C_{g,N} \left(V_r(x^{n-1} - x^{n-2})_t \right. \\ &\quad \left. + \sup_{s \leq t} |x_s^{n-1} - x_s^{n-2}| \left(t^\beta + V_p(x^{n-1})_t^{\alpha_N} + V_p(x^{n-2})_t^{\alpha_N} \right) \right), \end{aligned}$$

co pociąga, że

$$\begin{aligned} V_r(g(\cdot, x^{n-1}) - g(\cdot, x^{n-2}))_t &\leq \sum_{i,j=1}^d V_r(g_{i,j}(\cdot, x^{n-1}) - g_{i,j}(\cdot, x^{n-2}))_t \\ &\leq (C_{g,N})^{d^2} \left(V_r(x^{n-1} - x^{n-2})_t \right. \\ &\quad \left. + \sup_{s \leq t} |x_s^{n-1} - x_s^{n-2}| \left(t^\beta + V_p(x^{n-1})_t^{\alpha_N} + V_p(x^{n-2})_t^{\alpha_N} \right) \right). \end{aligned}$$

Z powyższych oszacowań, lematu 2.17 oraz faktu, że

$$\sup_{s \leq t} |x_s^{n-1} - x_s^{n-2}| \leq V_p(x^{n-1} - x^{n-2})_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

wynika istnienie stałej D zależnej tylko od $d, p, \beta, N, \alpha_N, C_{g,N}, C_{f,N}$ i T o własności:

$$\bar{V}_p(x^n - x^{n-1})_t \leq D(V_1(b)_t + V_p(a)_t) \bar{V}_p(x^{n-1} - x^{n-2})_t, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.32)$$

Położmy $t_1 = \inf\{t > 0; (D(V_1(b)_t + V_p(a)_t)) \geq 1/2\} \wedge T$ oraz zauważmy, że

$$\bar{V}_p(x^n - x^{n-1})_{t_1-} \leq 2^{-(n-1)} \bar{V}_p(x^1 - x^0)_{t_1-}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem $\{x^n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni funkcji càdlàg określonych na $[0, t_1]$ z normą p -wariacyjną. W konsekwencji istnieje funkcja càdlàg x taka, że $\bar{V}_p(x^n - x)_{t_1-} \rightarrow 0$. Podobnie możemy pokazać, że $\bar{V}_p(k^n - k)_{t_1-} \rightarrow 0$ dla pewnej funkcji càdlàg k . Analogicznie jak w (2.28) i (2.29) dla tej samej stałej D mamy:

$$V_p \left(\int_0^\cdot (f(s, x_{s-}^n) - f(s, x_{s-})) db_s \right)_{t_1-} \leq DV_1(b)_{t_1-} \bar{V}_p(x^n - x)_{t_1-} \rightarrow 0$$

oraz

$$V_p \left(\int_0^\cdot (g(s, x_{s-}^n) - g(s, x_{s-})) da_s \right)_{t_1-} \leq DV_p(a)_{t_1-} \bar{V}_p(x^n - x)_{t_1-} \rightarrow 0,$$

więc $\sup_{t < t_1} |y^n - y| \rightarrow 0$, gdzie $y = x_0 + \int_0^\cdot f(s, x_{s-}) db_s + \int_0^\cdot g(s, x_{s-}) da_s$. Dlatego korzystając z wniosku 2.5, otrzymujemy, że (x, k) jest rozwiązaniem (2.23) na przedziale $[0, t_1]$. Jeśli przyjmiemy

$$x_{t_1} = \max\{\min\{x_{t_1-} + f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\}$$

oraz $k_{t_1} = k_{t_1-} + \Delta x_{t_1} - (f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1})$, to na mocy uwagi 2.3.3 otrzymamy rozwiązanie (2.23) na domkniętym przedziale $[0, t_1]$. Ponadto

$$\begin{aligned} x_{t_1}^n &= \max\{\min\{x_{t_1-}^n + f(t_1, x_{t_1-}^{n-1})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-}^{n-1})\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\} \\ &\longrightarrow \max\{\min\{x_{t_1-} + f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\} = x_{t_1} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} k_{t_1}^n &= k_{t_1-}^n + \Delta x_{t_1}^n - (f(t_1, x_{t_1-}^{n-1})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-}^{n-1})\Delta a_{t_1}) \\ &\longrightarrow k_{t_1-} + \Delta x_{t_1} - (f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1}) = k_{t_1}, \end{aligned}$$

co pociąga, że $\bar{V}_p(x^n - x)_{t_1} \rightarrow 0$ i $\bar{V}_p(k^n - k)_{t_1} \rightarrow 0$. Łatwo zauważyć, że możemy powtórzyć powyższe rozumowanie dla przedziału $[t_1, t_2]$, gdzie $t_2 = \inf\{t > 0; D(V_1(b)_{[t_1, t]} + V_p(a)_{[t_1, t]}) \geq 1/2\} \wedge T$, a następnie na przedziałach $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$, \dots . Ponieważ $V_1(b)_T < \infty$ i $V_p(a)_T < \infty$, po skończeniu wielu krokach możemy skonstruować rozwiązanie (x, k) równania (2.23) na całym przedziale $[0, T]$ oraz pokazać, że $\bar{V}_p(x^n - x)_T \rightarrow 0$ i $\bar{V}_p(k^n - k)_T \rightarrow 0$.

Krok 2. Jednoznaczność rozwiązania (2.23).

Załóżmy, że istnieją dwa rozwiązania (x^1, k^1) oraz (x^2, k^2) . Niech t_1 będzie zdefiniowane tak jak w poprzednim kroku. Używając argumentów z poprzedniego kroku, pokazujemy, że $V_p(x^1 - x^2)_{t_1-} \leq 2^{-1}\bar{V}_p(x^1 - x^2)_{t_1-}$. W konsekwencji $x^1 = x^2$ na przedziale $[0, t_1]$. Z uwagi 2.3.3 wiemy, że

$$x_{t_1}^j = \max\{\min\{x_{t_1-}^j + f(t_1, x_{t_1-}^j)\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-}^j)\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\}, \quad j = 1, 2,$$

więc $x^1 = x^2$ na domkniętym przedziale $[0, t_1]$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla przedziałów $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, \dots , w skończeniu wielu krokach pokażemy, że $x^1 = x^2$ na $[0, T]$ dla wszystkich $T \in \mathbb{R}^+$. Podobnie pokazujemy równość funkcji k^1 i k^2 . \square

Uwaga 2.20. 1. Przy założeniach (H1) i (H2) można pokazać odpowiednik wyniku z twierdzenia 2.18 dla równań z jedną barierą. Jedyną modyfikacją w dowodzie polega na tym, że zamiast korzystać z wniosków 2.8 i 2.9 stosujemy wnioski 2.10 oraz 2.11. Nie jest wtedy wymagane istnienie funkcji h . Wynika to z faktu, iż dla równań z jedną barierą funkcja k kompensująca odbicie od bariery jest monotoniczna. W tym przypadku w celu oszacowania normy p -wariacyjnej rozwiązań równań z dolną barierą (odp. z górną barierą) zamiast $\bar{V}_p(h)_T$ możemy użyć $\sup_{t \leq T} |l_t|$ (odp. $\sup_{t \leq T} |u_t|$).

2. Podobnie można również udowodnić odpowiedni wynik dla równań bez barier. Dokładniej dla równania postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-}) db_s + \int_0^t g(s, x_{s-}) da_s, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.33)$$

gdzie f, g, a, b są takie jak w (2.23), rozważmy ciąg $\{x^n\}$ iteracji Picarda zdefiniowany wzorem: $x^0 \equiv x_0$,

$$x^n = x_0 + \int_0^\cdot f(s, x_{s-}^{n-1}) db_s + \int_0^\cdot g(s, x_{s-}^{n-1}) da_s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli funkcje f i g spełniają (H1) i (H2), to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ $\bar{V}_p(x^n - x)_T \rightarrow 0$, gdzie x jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.33).

2.3 Aproksymacja oraz stabilność rozwiązań równań z barierami

Na początku niniejszego podrozdziału udowodnimy wyniki dotyczące relatywnej zwartości i zbieżności całek względem funkcji o skończonej p -wariacji.

Fakt 2.21. *Niech $\{z^n\} \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $\{x^n\}, \{y^n\} \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą ciągami takimi, że $\sup_n \bar{V}_q(y^n)_T < \infty$ oraz $\sup_n V_p(x^n)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, gdzie $1/p + 1/q > 1$, $p, q \geq 1$. Jeżeli $\{(z^n, x^n)\}$ jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d})$ (tzn. z każdego jego podciągu można wybrać dalszy podciąg zbieżny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d})$), to*

$$\left\{ \left(z^n, x^n, \int_0^\cdot y_{s-}^n dx_s^n \right) \right\} \text{ jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d+1}).$$

Dowód. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że

$$(z^n, x^n) \longrightarrow (z, x) \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d}).$$

Ponieważ zbiór punktów nieciągłości funkcji x i z jest co najwyżej przeliczalny, istnieje rodzina stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ takich, że $\delta_k \downarrow 0$, $|\Delta x_t| \neq \delta_k$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\delta_k/2 \leq \delta_{k,i} \leq \delta_k$ oraz $|\Delta z_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta x_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| = 0$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $\{\{x^{n,(k)}\}\}$, $\{x^{(k)}\}$ będą ciągami zdefiniowanymi tak samo jak w fakcie 1.8, z wykorzystaniem rodziny stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ opisanych powyżej. Wówczas dla dowolnych $k, n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$ $V_p(x^{n,(k)})_T \leq V_p(x^n)_T < \infty$ i w konsekwencji

$$\sup_{k,n \in \mathbb{N}} V_p(x^n - x^{n,(k)})_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (2.34)$$

Stosując fakt 1.8, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (z^n, x^n, x^{n,(k)}, t_{k,1}^n, x_{t_{k,1}^n}^n, t_{k,2}^n, x_{t_{k,2}^n}^n, \dots) \\ & \longrightarrow (z, x, x^{(k)}, t_{k,1}, x_{t_{k,1}}, t_{k,2}, x_{t_{k,2}}, \dots) \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+2d}) \times \mathbb{R}^\infty. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ponadto, argumentując tak samo jak w dowodzie wniosku 1.7, uzyskujemy

$$\sup_{t \leq T} |x_t^{(k)} - x_t| \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

co razem z (2.35) pociąga, iż

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} |x_t^{n,(k)} - x_t^n| = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (2.36)$$

Z drugiej strony $\int_0^t y_{s-}^n dx_s^{n,(k)} = \sum_{j \leq i} y_{t_{k,j}^n}^n (x_{t_{k,j}^n}^n - x_{t_{k,j-1}^n}^n)$, $t \in [t_{k,i}^n, t_{k,i+1}^n)$. Korzystając z (2.35), twierdzenia 1.33 oraz z faktu, że $\sup_n \bar{V}_q(y^n)_T < \infty$ pociąga ograniczoność ciągu $\{\sup_{t \leq T} |y_t^n|\}$, wnioskujemy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \left(z^n, x^n, \int_0^\cdot y_{s-}^n dx_s^{n,(k)} \right) \right\} \text{ jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d+1}). \quad (2.37)$$

Niech $p' > p$ będzie takie, że $1/p' + 1/q > 1$. Z (1.3) wynika, że

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t y_{s-}^n d(x^n - x^{n,(k)})_s \right| \leq K_{p',q} \bar{V}_q(y^n)_T V_{p'}(x^n - x^{n,(k)})_T, \quad k, n \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R}^+.$$

Ponadto na mocy uwagi 1.11 (v) dla dowolnych $k, n \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} V_{p'}(x^n - x^{n,(k)})_T &\leq \text{Osc}(x^n - x^{n,(k)})_T^{1-p/p'} V_p(x^n - x^{n,(k)})_T^{p/p'} \\ &\leq \left(2 \sup_{t \leq T} |x^n - x_t^{n,(k)}| \right)^{1-p/p'} V_p(x^n - x^{n,(k)})_T^{p/p'}. \end{aligned}$$

Zatem mając na uwadze (2.34) i (2.36), otrzymujemy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t y_{s-}^n d(x^n - x^{n,(k)})_s \right| = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (2.38)$$

Teza wynika z (2.37) i (2.38). \square

Fakt 2.22. Niech $\{z^n\} \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $\{x^n\}, \{y^n\} \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą takie, że dla wszystkich $T \in \mathbb{R}^+$ $\sup_n \bar{V}_q(y^n)_T < \infty$ i $\sup_n V_p(x^n)_T < \infty$, gdzie $1/p + 1/q > 1$, $p, q \geq 1$. Jeżeli

$$(z^n, x^n, y^n) \longrightarrow (z, x, y) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+2d}),$$

to

$$\left(z^n, x^n, y^n, \int_0^\cdot y_{s-}^n dx_s^n \right) \longrightarrow \left(z, x, y, \int_0^\cdot y_{s-} dx_s \right) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+2d+1}).$$

Dowód. Z lematu 1.12 mamy, że $V_q(y)_T \leq \liminf_n V_q(y^n)_T < \infty$ dla $T \in \mathbb{R}^+$ oraz analogicznie $V_p(x)_T \leq \liminf_n V_p(x^n)_T < \infty$ dla $T \in \mathbb{R}^+$. W konsekwencji całka $\int_0^\cdot y_{s-} dx_s$ istnieje jako uogólniona całka Riemanna-Stieltjesa. Niech $\{x^{n,(k)}\}, \{x^{(k)}\}$ będą ciągami funkcyjnymi zdefiniowanymi tak samo jak w fakcie 1.8, z wykorzystaniem rodziny stałych $\{\delta_k\}, \{\{\delta_{k,i}\}\}$ takich, że $\delta_k \downarrow 0$, $|\Delta x_t| \neq \delta_k, t \in \mathbb{R}^+, \delta_k/2 \leq \delta_{k,i} \leq \delta_k$ oraz $|\Delta y_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta z_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta x_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| = 0, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N}$. Korzystając z faktu 1.8, mamy

$$\begin{aligned} &(z^n, x^n, y^n, x^{n,(k)}, t_{k,1}^n, x_{t_{k,1}^n}^n, t_{k,2}^n, x_{t_{k,2}^n}^n, \dots) \\ &\longrightarrow (z, x, y, x^{(k)}, t_{k,1}, x_{t_{k,1}}, t_{k,2}, x_{t_{k,2}}, \dots) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+3d}) \times \mathbb{R}^\infty. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ponieważ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $\int_0^t y_{s-} dx_s^{(k)} = \sum_{j \leq i} y_{t_{k,j}-} (x_{t_{k,j}} - x_{t_{k,j-1}}), t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1})$, więc na mocy (2.39)

$$\left(z^n, x^n, y^n, \int_0^\cdot y_{s-}^n dx_s^{n,(k)} \right) \longrightarrow \left(z, x, y, \int_0^\cdot y_{s-} dx_s^{(k)} \right) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+2d+1}). \quad (2.40)$$

Podobnie jak w dowodzie faktu 2.21 pokazujemy, że zachodzi (2.38) oraz że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t y_{s-} d(x - x^{(k)})_s \right| = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

co razem z (2.40) pociąga tezę. \square

Ustalmy $p \in (1, 2)$. Niech $a^n, l^n, u^n, h^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $b^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $x_0^n \in \mathbb{R}$ będą takie, że $l_0^n \leq x_0^n \leq u_0^n$, $l^n \leq h^n \leq u^n$ oraz $\max\{V_1(b^n)_T, V_p(a^n)_T, V_p(h^n)_T\} < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$. Będziemy rozważać ciąg rozwiązań równań postaci

$$x_t^n = x_0^n + \int_0^t f(s, x_{s-}^n) db_s^n + \int_0^t g(s, x_{s-}^n) da_s^n + k_t^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}. \quad (2.41)$$

Analogicznie do równania (2.23) mówimy, że $(x^n, k^n) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ jest rozwiązaniem (2.41), jeżeli $(x^n, k^n) = ESP(x_0^n + \int_0^\cdot f(s, x_{s-}^n) db_s^n + \int_0^\cdot g(s, x_{s-}^n) da_s^n, l^n, u^n)$ oraz $V_p(x^n)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.23. *Załóżmy (H1) oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Jeżeli $b^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ i $h^n, a^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ są takie, że $\sup_n \max\{V_1(b^n)_T, V_p(a^n)_T, V_p(h^n)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz*

$$(x_0^n, b^n, a^n, l^n, u^n) \longrightarrow (x_0, b, a, l, u) \quad \text{w } \mathbb{R}^d \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}),$$

to ciąg $\{(x^n, k^n)\}$ rozwiązań równań (2.41) jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ oraz każdy jego punkt skupienia jest rozwiązaniem (2.23).

Dowód. Pokażemy najpierw, że jeżeli (x, k) jest rozwiązaniem równania (2.23), to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ istnieje stała D zależna tylko od $d, p, \alpha, \beta, x_0, C_g^T, C_f, V_1(b)_T, V_p(a)_T$ i $\bar{V}_p(h)_T$ taka, że

$$\bar{V}_p(x)_T \leq D. \quad (2.42)$$

W tym celu postępujemy tak samo jak w dowodzie lematu 2.17. Najpierw przyjmując $q = p/\alpha \vee 1/\beta$, $C_0 = (d+1)|x_0| + d\bar{V}_p(h)_T$, $C_1 = (d+1) \max\{C_f, K_{p,q}C_g^T\}$ oraz korzystając z wniosku 2.9, uzyskujemy oszacowanie:

$$\bar{V}_p(x)_t \leq C_0 + C_1(1 + \bar{V}_p(x)_t)(V_1(b)_t + V_p(a)_t), \quad t \leq T.$$

Następnie kładąc $t_1 = \inf\{t; C_1(V_1(b)_t + V_p(a)_t) > 1/2\} \wedge T$, otrzymujemy

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_p(x)_{t_1-} \leq 2(C_0 + 1/2)$$

oraz $|\Delta x_{t_1}| \leq C_0 + (1+d)\bar{V}_p(x)_{t_1-} + C_1(1 + \bar{V}_p(x)_{t_1-})(V_1(b)_T + V_p(a)_T)$. W konsekwencji istnieje stała D_1 zależna od $d, p, q, x_0, C_g^T, C_f, V_1(b)_T, V_p(a)_T$ i $\bar{V}_p(h)_T$ taka, że $\bar{V}_p(x)_{t_1} \leq D_1$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla $t_k = \inf\{t > t_{k-1}; C_1(V_1(b)_{[t_{k-1}, t]} + V_p(a)_{[t_{k-1}, t]}) > 1/2\} \wedge T$, wnioskujemy, iż $V_p(x)_{[t_{k-1}, t_k]} \leq D_k = D_k(d, p, q, x_0, C_g^T, C_f, V_1(b)_T, V_p(a)_T, \bar{V}_p(h)_T)$, $k \geq 2$. Stosując argumenty z dowodu (2.31), pokazujemy, że $m = \sup\{k; t_k < T\} \leq C(p, C_1, V_1(b)_T, v_p(a)_T)$, kończąc tym samym dowód (2.42).

Z (2.42) wynika, że $\sup_n \bar{V}_p(x^n)_T < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Dzięki (2.25) również

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_q(g(\cdot, x^n))_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+, \quad (2.43)$$

gdzie $q = p/\alpha \vee 1/\beta$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, istnieje ciąg funkcji lipschitzowskich $\{f^k\}$ taki, że $\sup_{(t,u) \in K} |f^k(t, u) - f(t, u)| \rightarrow 0$ dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Zatem

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_p(f^k(\cdot, x^n))_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N} \quad (2.44)$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} |f^k(t, x_t^n) - f(t, x_t^n)| = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (2.45)$$

Na mocy (2.43), (2.44) oraz faktu 2.21 dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \left(\int_0^\cdot f^k(s, x_{s-}^n) db_s^n, b^n, \int_0^\cdot g(s, x_{s-}^n) da_s^n, a^n \right) \right\} \text{ jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}),$$

co razem z (2.45) pociąga, że

$$\left\{ \left(\int_0^\cdot f(s, x_{s-}^n) db_s^n, b^n, \int_0^\cdot g(s, x_{s-}^n) da_s^n, a^n \right) \right\} \text{ jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}).$$

W konsekwencji, ciąg $\{(y^n, b^n, a^n, l^n, u^n)\}$, gdzie

$$y^n = x_0^n + \int_0^\cdot f(s, x_{s-}^n) db_s^n + \int_0^\cdot g(s, x_{s-}^n) da_s^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d+1})$. Kładąc $(x^n, k^n) = ESP(y^n, l^n, u^n)$ oraz korzystając z wniosku 2.5, uzyskujemy, że

$$\{(x^n, k^n, b^n, a^n, l^n, u^n)\} \text{ jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1}).$$

Założmy, że $(x^n, k^n, b^n, a^n, l^n, u^n) \rightarrow (x, k, b, a, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Stosując fakt 2.22 dla funkcji g i f^k , $k \in \mathbb{N}$ oraz (2.45), dostajemy $(y^n, l^n, u^n) \rightarrow (y, l, u)$, gdzie $y = x_0 + \int_0^\cdot f(s, x_{s-}) db_s + \int_0^\cdot g(s, x_{s-}) da_s$. Mając na uwadze wniosek 2.5, otrzymujemy zbieżność:

$$(x^n, k^n) = ESP(y^n, l^n, u^n) \longrightarrow ESP(y, l, u) = (x, k) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Z kolei na mocy lematu 1.12 oraz (2.42) dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ mamy oszacowanie: $V_p(x)_T \leq \liminf_n V_p(x^n)_T \leq D$, więc (x, k) jest rozwiązaniem równania 2.23, co kończy dowód twierdzenia. \square

Uwaga 2.24. Przy założeniach twierdzenia 2.23 istnieje funkcja $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ taka, że $l \leq h \leq u$ oraz $V_p(h)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$. Możemy np. jako h przyjąć pierwszą współrzędną rozwiązania równania (2.23). Istnienie funkcji h można też uzyskać za pomocą bezpośrednich rachunków z wykorzystaniem topologii S , wprowadzonej przez Jakubowskiego w pracy [34]. Istotnie, warunek $\sup_n \bar{V}_p(h^n)_T < \infty$ implikuje, że ciąg $\{h^n\}$ jest relatywnie zwarty w topologii S na przestrzeni $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}^d)$ (patrz [34, Theorem 2.13]). Istnieje, więc podciąg $\{n'\}$ oraz funkcja $h \in \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}^d)$ takie, że $h^{n'} \rightarrow h$ w S . Korzystając z [34, Corollary 2.9] możemy wybrać dalszy podciąg $\{n''\}$ taki, że $h_t^{n''} \rightarrow h_t$ dla wszystkich $t \leq T$ z wyjątkiem pewnego przeliczalnego zbioru $D \in [0, T]$. Ponieważ $\sup_n \bar{V}_p(h^n)_T < \infty$, więc powtarzając argumenty z dowodu lematu 1.12 (z tą różnicą, że zamiast punktów ciągłości funkcji granicznej rozważamy zbiór punktów ciągłości h pomniejszony o zbiór D), uzyskujemy, że $V_p(h)_T < \infty$.

Wniosek 2.25. Załóżmy (H1), (H2) oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech a^n , l^n , u^n , $h^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $b^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ będą takie, że $l_0^n \leq x_0^n \leq u_0^n$, $l^n \leq h^n \leq u^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\sup_n \max\{V_1(b^n)_T, V_p(h^n)_T, V_p(a^n)_T\} < \infty$ oraz

$$\sup_{t \leq T} (|b_t^n - b_t| + |a_t^n - a_t| + |l_t^n - l_t| + |u_t^n - u_t|) \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (2.46)$$

Jeżeli $\{(x^n, k^n)\}$ jest ciągiem rozwiązań równań postaci (2.41) i $x_0^n \rightarrow x_0$, to

$$\sup_{t \leq T} (|x_t^n - x_t| + |k_t^n - k_t|) \rightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.23).

Dowód. Z twierdzenia 2.23 oraz jednoznaczności rozwiązań wynika, że

$$(x^n, k^n, b^n, a^n, l^n, u^n) \rightarrow (x, k, b, a, l, u) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1}).$$

Ponieważ dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ mamy

$$\Delta x_t \neq 0 \Rightarrow \Delta b_t \neq 0 \text{ lub } \Delta a_t \neq 0 \text{ lub } \Delta l_t \neq 0 \text{ lub } \Delta u_t \neq 0,$$

więc fakt 1.5 implikuje, że $\sup_{t \leq T} |x_t^n - x_t| \rightarrow 0$, $T \in \mathbb{R}^+$. Analogicznie pokazujemy jednostajną na kompaktach zbieżność k^n do k . \square

W celu aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych często używa się schematu Eulera. Niech ciąg podziałów $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ będzie taki, że $\lim_{i \rightarrow \infty} t_{n,i} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\text{diam}(\pi_n) \rightarrow 0$. Rozważmy schemat Eulera dla równania (2.23) postaci: $x_0^n = x_0$, $k_0^n = 0$,

$$\begin{cases} y_{t_{n,i+1}}^n &= y_{t_{n,i}}^n + f(t_{n,i}, x_{t_{n,i}}^n)(b_{t_{n,i+1}} - b_{t_{n,i}}) + g(t_{n,i}, x_{t_{n,i}}^n)(a_{t_{n,i+1}} - a_{t_{n,i}}), \\ x_{t_{n,i+1}}^n &= \max\{\min\{x_{t_{n,i}}^n + (y_{t_{n,i+1}}^n - y_{t_{n,i}}^n), u_{t_{n,i+1}}\}, l_{t_{n,i+1}}\}, \\ k_{t_{n,i+1}}^n &= k_{t_{n,i}}^n + (x_{t_{n,i+1}}^n - x_{t_{n,i}}^n) - (y_{t_{n,i+1}}^n - y_{t_{n,i}}^n) \end{cases} \quad (2.47)$$

oraz $x_t^n = x_{t_{n,i}}^n$, $k_t^n = k_{t_{n,i}}^n$, $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.26. *Załóżmy (H1) oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $a, l, u, h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $\max\{V_1(b)_T, V_p(h)_T, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l_0 \leq x_0 \leq u_0$, $l \leq h \leq u$. Wówczas ciąg $\{(x^n, k^n)\}$ zdefiniowany w (2.47) jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz każdy jego punkt skupienia jest rozwiązaniem (2.23). W szczególności równanie (2.23) posiada rozwiązanie.*

Dowód. Bez trudu można sprawdzić, że

$$\begin{cases} (x^n, k^n) = ESP(y^n, l^n, u^n), \\ \text{gdzie } y_t^n = x_0 + \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, x_{s-}^n) db_s^n + \int_0^t g(\varrho_{s-}^n, x_{s-}^n) da_s^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.48)$$

oraz $b_t^n = b_{t_{n,i}}^n$, $a_t^n = a_{t_{n,i}}^n$, $l_t^n = l_{t_{n,i}}^n$, $u_t^n = u_{t_{n,i}}^n$, $\varrho_t^n = t_{n,i}$, $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Zdefiniujmy dodatkowo: $h_t^n = h_{t_{n,i}}^n$ dla $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Mając na uwadze fakt, że

$$V_1(b^n)_T \leq V_1(b)_T, \quad V_p(a^n)_T \leq V_p(a)_T, \quad V_p(h^n)_T \leq V_p(h)_T, \quad \varrho_T^n \leq T, \quad n \in \mathbb{N}$$

i postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.23, dostajemy

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_p(x^n)_T < \infty. \quad (2.49)$$

Niech

$$\begin{cases} (\bar{x}^n, \bar{k}^n) = ESP(\bar{y}^n, l^n, u^n), \\ \text{gdzie } \bar{y}_t^n = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-}^n) db_s^n + \int_0^t g(s, x_{s-}^n) da_s^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Korzystając z lematu 2.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T} |x_t^n - \bar{x}_t^n| &\leq 2 \sup_{t \leq T} |y_t^n - \bar{y}_t^n| \leq 2 \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, x_{s-}^n) - f(s, x_{s-}^n) db_s^n \right| \\ &\quad + 2V_p \left(\int_0^t g(\varrho_{s-}^n, x_{s-}^n) - g(s, x_{s-}^n) da_s^n \right)_T \\ &\leq 2I^{n,1} + 2I^{n,2} \end{aligned}$$

oraz $\sup_{t \leq T} |k_t^n - \bar{k}_t^n| \leq I^{n,1} + I^{n,2}$. Z ciągłości funkcji f oraz z (2.49) wynika zbieżność:

$$I^{n,1} \leq \sup_{t \leq T} |f(\varrho_{t-}^n, x_{t-}^n) - f(t, x_{t-}^n)| V_1(b)_T \longrightarrow 0. \quad (2.50)$$

Niech $q = p/\alpha \vee 1/\beta$ oraz $\gamma \in (1 - 1/p, 1/q)$. Na mocy (1.3), (2.25), (2.49), uwagi 1.11 (v) oraz faktu, że g jest β -hölderowska względem czasu mamy:

$$\begin{aligned} I^{n,2} &\leq K_{p,1/\gamma} V_{1/\gamma} \left(g(\varrho_{-}^n, x_{-}^n) - g(\cdot, x_{-}^n) \right)_T V_p(a)_T \\ &\leq K_{p,1/\gamma} \text{Osc}(g(\varrho_{-}^n, x_{-}^n) - g(\cdot, x_{-}^n))_{[0,T]}^{1-q\gamma} V_q \left(g(\varrho_{-}^n, x_{-}^n) - g(\cdot, x_{-}^n) \right)_T^{q\gamma} V_p(a)_T \\ &\leq K_{p,1/\gamma} \left(2 \sup_{t \leq T} |g(\varrho_{-}^n, x_{-}^n) - g(\cdot, x_{-}^n)| \right)^{1-q\gamma} \left(2C_g^T (1 + \bar{V}_p(x^n)_T) \right)^{q\gamma} V_p(a)_T \\ &\leq D(1 + \bar{V}_p(x^n)_T) \sup_{t \leq T} |\varrho_{t-}^n - t|^{\beta(1-q\gamma)} \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

gdzie D jest stałą zależną od p, q, γ, C_g^T, C_g i $V_p(a)_T$. Biorąc pod uwagę (2.50) i (2.51), uzyskujemy

$$\sup_{t \leq T} |x_t^n - \bar{x}_t^n| \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \sup_{t \leq T} |k_t^n - \bar{k}_t^n| \longrightarrow 0. \quad (2.52)$$

Ponieważ na mocy twierdzenia 1.6 $(b^n, a^n, l^n, u^n) \rightarrow (b, a, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1})$, więc powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 2.23, wnioskujemy, że $\{(\bar{x}^n, \bar{k}^n, b^n, a^n, l^n, u^n)\}$ jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$, co razem z (2.52) pociąga relatywną zwartość ciągu $\{(x^n, k^n, b^n, a^n, l^n, u^n)\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$.

Założmy, że $(x^n, k^n, b^n, a^n, l^n, u^n) \rightarrow (x, k, b, a, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.23 rozważając ciąg $\{f^k\}$ funkcji lipshitzowskich zbieżny jednostajnie na kompaktach do f oraz korzystając z faktu 2.22, uzyskujemy zbieżność: $(\bar{y}^n, l^n, u^n) \rightarrow (y, l, u)$, gdzie $y = x_0 + \int_0^\cdot f(s, x_{s-}) db_s + \int_0^\cdot g(s, x_{s-}) da_s$. W konsekwencji wniosek 2.5 implikuje, że

$$(\bar{x}^n, \bar{k}^n) = ESP(\bar{y}^n, l^n, u^n) \longrightarrow ESP(y, l, u) = (x, k) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

co razem z (2.52) pociąga zbieżność: $(x^n, k^n) \rightarrow (x, k)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$. Ponieważ na mocy lematu 1.12 oraz (2.49) dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ mamy: $V_p(x)_T \leq \liminf_n V_p(x^n)_T < \infty$, dowód twierdzenia został zakończony. \square

Wniosek 2.27. Załóżmy (H1), (H2) oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $a, l, u, h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $\max\{V_1(b)_T, V_p(h)_T, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l_0 \leq x_0 \leq u_0$, $l \leq h \leq u$. Jeżeli $\{(x^n, k^n)\}$ jest ciągiem zdefiniowanym w (2.47), to

$$(x^n, k^n) \longrightarrow (x, k) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}). \quad (2.53)$$

Ponadto dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\max_{t_{n,i} \leq T} |x_{t_{n,i}}^n - x_{t_{n,i}}| \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \max_{t_{n,i} \leq T} |k_{t_{n,i}}^n - k_{t_{n,i}}| \longrightarrow 0, \quad (2.54)$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.23).

Dowód. Zbieżność (2.53) wynika z twierdzenia 2.26 oraz jednoznaczności rozwiązań równania (2.23). Dla dowodu (2.54) pokażemy, że

$$(x^n, x^{(n)}, k^n, k^{(n)}) \longrightarrow (x, x, k, k) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}), \quad (2.55)$$

gdzie $x_t^{(n)} = x_{t_{n,i}}$, $k_t^{(n)} = k_{t_{n,i}}$ dla $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $\{b^n\}$, $\{a^n\}$, $\{l^n\}$, $\{u^n\}$ będą takie jak w dowodzie twierdzenia 2.26. Połóżmy $\varrho_n^*(t) = \min\{t_{n,i}; t_{n,i} \geq t\}$ oraz zauważmy, że podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1.6 dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ $\varrho_n^*(t) \rightarrow t$ oraz $x_{\varrho_n^*(t)}^{(n)} \rightarrow \Delta x_t$, $\Delta k_{\varrho_n^*(t)}^{(n)} \rightarrow \Delta k_t$, $\Delta b_{\varrho_n^*(t)}^n \rightarrow \Delta b_t$, $\Delta a_{\varrho_n^*(t)}^n \rightarrow \Delta a_t$, $\Delta l_{\varrho_n^*(t)}^n \rightarrow \Delta l_t$ i $\Delta u_{\varrho_n^*(t)}^n \rightarrow \Delta u_t$. Z faktu 1.2 (i) wynika natomiast, że dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ istnieje ciąg $t_n \rightarrow t$ o własności:

$$\Delta x_{t_n}^n \longrightarrow \Delta x_t \quad \text{i} \quad \Delta k_{t_n}^n \longrightarrow \Delta k_t. \quad (2.56)$$

Na mocy faktu 1.2 (ii.5) oraz faktu 1.3, aby zakończyć dowód (2.55), wystarczy pokazać, że jeśli $\Delta x_t \neq 0$ lub $\Delta k_t \neq 0$, to $t_n = \varrho_n^*(t)$ dla odpowiednio dużych $n \in \mathbb{N}$.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje podciąg $\{n_j\}$ taki, że $t_{n_j} < \varrho_{n_j}^*(t)$ lub $t_{n_j} > \varrho_{n_j}^*(t)$, $j \in \mathbb{N}$. W obu przypadkach na mocy (2.24), (2.49) oraz faktu 1.2 (ii.1)-(ii.4) mamy, że

$$\begin{aligned} |\Delta x_{t_{n_j}}^n| &\leq |f(t_{n_j}, x_{t_{n_j}}^{n_j}) \Delta b_{t_{n_j}}^{n_j}| + |g(t_{n_j}, x_{t_{n_j}}^{n_j}) \Delta a_{t_{n_j}}^{n_j}| + |\Delta u_{t_{n_j}}^{n_j}| + |\Delta l_{t_{n_j}}^{n_j}| \\ &\leq C_f(1 + \bar{V}_p(x^{n_j})_T) |\Delta b_{t_{n_j}}^{n_j}| + C_g^T(1 + \bar{V}_p(x^{n_j})_T) |\Delta a_{t_{n_j}}^{n_j}| + |\Delta u_{t_{n_j}}^{n_j}| + |\Delta l_{t_{n_j}}^{n_j}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

oraz

$$|\Delta k_{t_{n_j}}^n| \leq C_f(1 + \bar{V}_p(x^{n_j})_T) |\Delta b_{t_{n_j}}^{n_j}| + C_g^T(1 + \bar{V}_p(x^{n_j})_T) |\Delta a_{t_{n_j}}^{n_j}| + |\Delta u_{t_{n_j}}^{n_j}| + |\Delta l_{t_{n_j}}^{n_j}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

co przeczy (2.56) i kończy dowód (2.55). Z (2.55) oraz z uwagi 1.4 możemy wywnioskować zbieżność (2.54) i tym samym zakończyć dowód wniosku. \square

Wniosek 2.28. Załóżmy (H1), (H2) oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $a, l, u, h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $\max\{V_1(b)_T, V_p(h)_T, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l_0 \leq x_0 \leq u_0$, $l \leq h \leq u$. Ponadto, niech ciąg podziałów $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ będzie taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\text{diam}(\pi_n) \rightarrow 0$. Jeżeli dla

$b_t^n = b_{t_{n,i}}$, $a_t^n = a_{t_{n,i}}$, $l_t^n = l_{t_{n,i}}$, $u_t^n = u_{t_{n,i}}$, $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi (2.46) oraz $\{(x^n, k^n)\}$ jest ciągiem zdefiniowanym w (2.47), to

$$\sup_{t \leq T} (|x_t^n - x_t| + |k_t^n - k_t|) \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.23).

Dowód. Wystarczy powtórzyć argumenty z dowodu wniosku 2.25. Jedyna różnica polega na tym, że zamiast z twierdzenia 2.23 korzystamy z twierdzenia 2.26. \square

Wniosek 2.29. Załóżmy (H1), (H2) oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $a, l, u, h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $\max\{V_1(b)_T, V_p(h)_T, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l_0 \leq x_0 \leq u_0$, $l \leq h \leq u$. Jeżeli $\{(x^n, k^n)\}$ jest ciągiem zdefiniowanym w (2.47) dla $t_{n,0} = 0$,

$$t_{n,i} = \inf \{t > t_{n,i-1}; \max\{|\Delta b_t|, |\Delta a_t|, |\Delta l_t|, |\Delta u_t|\} > 1/n\} \wedge (t_{n,i-1} + 1/n), \quad i, n \in \mathbb{N},$$

to

$$\sup_{t \leq T} (|x_t^n - x_t| + |k_t^n - k_t|) \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.23).

Dowód. Łatwo zauważyć, że ciąg podziałów $\pi^n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ spełnia założenia wniosku 2.28. Ponadto z wniosku 1.7 wynika zbieżność (2.46). Zatem korzystając z wniosku 2.28, otrzymujemy tezę. \square

Twierdzenie 2.30. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $a, l, u, h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $\max\{V_1(b)_T, V_p(h)_T, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, $l_0 \leq x_0 \leq u_0$, $l \leq h \leq u$ oraz dla $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ będą funkcjami spełniającymi (H1), (H2) z takimi samymi stałymi C_f, α, β, C_g . Jeżeli $l_0 \leq x_0^\varepsilon \leq u_0$, $(x^\varepsilon, k^\varepsilon)$ oznacza rozwiązanie równania (2.23) z $x_0^\varepsilon, f_\varepsilon, g_\varepsilon$ zamiast x_0, f, g , $x_0^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} x_0$ oraz $\sup_{(t,u) \in K} |f_\varepsilon(t, u) - f(t, u)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ i $\sup_{(t,u) \in K} |g_\varepsilon(t, u) - g(t, u)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ dla dowolnego zbioru zwartego $K \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ mamy, że

$$\bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_T \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{oraz} \quad \bar{V}_p(k^\varepsilon - k)_T \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem (2.23).

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz zauważmy, że na mocy (2.42)

$$N = \sup_{\varepsilon > 0} \bar{V}_p(x^\varepsilon)_T < \infty, \quad (2.57)$$

co pociąga, że $\sup_{t \leq T} |x_t^\varepsilon| \leq N$. Korzystając z wniosku 2.8, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_T}{(d+1)} &\leq |x_0^\varepsilon - x_0| + V_p \left(\int_0^\cdot f_\varepsilon(s, x_{s-}^\varepsilon) - f(s, x_{s-}) db_s \right)_T \\ &\quad + V_p \left(\int_0^\cdot g_\varepsilon(s, x_{s-}^\varepsilon) - g(s, x_{s-}) da_s \right)_T \\ &\leq |x_0^\varepsilon - x_0| + V_p \left(\int_0^\cdot (f_\varepsilon - f)(s, x_{s-}^\varepsilon) db_s \right)_T + V_p \left(\int_0^\cdot (g_\varepsilon - g)(s, x_{s-}^\varepsilon) da_s \right)_T \\ &\quad + V_p \left(\int_0^\cdot f(s, x_{s-}^\varepsilon) - f(s, x_{s-}) db_s \right)_T + V_p \left(\int_0^\cdot g(s, x_{s-}^\varepsilon) - g(s, x_{s-}) da_s \right)_T \\ &= |x_0^\varepsilon - x_0| + I_T^{\varepsilon,1} + I_T^{\varepsilon,2} + I_T^{\varepsilon,3} + I_T^{\varepsilon,4}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że

$$I_T^{\varepsilon,1} \leq \sup_{\substack{|v| < N \\ t \leq T}} |f_\varepsilon(t, v) - f(t, v)| V_1(b)_T \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.26 przyjmując $q = p/\alpha \vee 1/\beta$, $\gamma \in (1 - 1/p, 1/q)$, następnie korzystając z (1.3), (2.25), (2.57) oraz uwagi 1.11 (v), wnioskujemy, że istnieje stała D_1 zależna od p, q, γ, C_g^T i $V_p(a)_T$ taka, że

$$\begin{aligned} I_T^{\varepsilon,2} &\leq K_{p,1/\gamma} \bar{V}_{1/\gamma}((g_\varepsilon - g)(\cdot, x^\varepsilon))_T V_p(a)_T \\ &\leq K_{p,1/\gamma} \left(\text{Osc}((g_\varepsilon - g)(\cdot, x^\varepsilon))_T^{1-q\gamma} V_q((g_\varepsilon - g)(\cdot, x^\varepsilon))_T^{q\gamma} + |(g_\varepsilon - g)(0, x_0^\varepsilon)| \right) V_p(a)_T \\ &\leq D_1 \sup_{\substack{|v| < N \\ t \leq T}} (|g_\varepsilon(t, v) - g(t, v)|^{1-q\gamma} + |g_\varepsilon(0, v) - g(0, v)|). \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$I_T^{\varepsilon,1} + I_T^{\varepsilon,2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.58)$$

Korzystając ponownie z (2.57) oraz argumentów z dowodu nierówności (2.32), otrzymujemy, że istnieje stała D_2 o własności

$$(I_t^{\varepsilon,3} + I_t^{\varepsilon,4}) \leq D_2 (V_1(b)_t + V_p(a)_t) \bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_t, \quad t \leq T.$$

Analogicznie do dowodu twierdzenia 2.18 przyjmijmy

$$t_1 = \inf\{t; D_2(V_1(b)_t + V_p(a)_t) > 1/2\} \wedge T$$

oraz zauważmy, że

$$\bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_{t_1-} \leq (|x_0^\varepsilon - x_0| + I_T^{\varepsilon,1} + I_T^{\varepsilon,2}) + \frac{1}{2} \bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_{t_1-}.$$

Z powyższej nierówności oraz z (2.58) mamy $\bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_{t_1-} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Używając argumentów z dowodu twierdzenia 2.18, pokazujemy, że $\bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_{t_1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Powtarzając powyższe rozumowanie skończenie wiele razy na kolejnych przedziałach $[t_i, t_{i+1}]$, uzyskujemy tezę. \square

Uwaga 2.31. 1. Podobne rezultaty dotyczące aproksymacji oraz stabilności rozwiązań można pokazać dla równań z jedną barierą. Analogicznie do uwagi 2.20.1 nie jest wtedy wymagane istnienie funkcji h , a jedyna modyfikacja w dowodach polega na tym, że zamiast korzystać z wniosków 2.8 i 2.9 stosujemy wnioski 2.10 oraz 2.11.

2. Podobnie możemy uzyskać wyniki dotyczące aproksymacji oraz stabilności rozwiązań równań bez barier postaci (2.33).

Rozdział 3

Srr z barierami względem procesów o skończonej p -wariacji

3.1 Zbieżność całek względem procesów o skończonej p -wariacji

Niniejszy rozdział rozpoczynamy od sformułowania wyników dotyczących jednostajnej jędrności i zbieżności całek względem procesów o lokalnie skończonej p -wariacji.

Twierdzenie 3.1. *Niech $\{H^n\}$ będzie ciągiem procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $\{X^n\}$, $\{A^n\}$ będą ciągami procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że dla pewnych $p, q \geq 1$ o własności $1/p + 1/q > 1$ ciągi $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli $\{(H^n, A^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d})$, to*

$$\left\{ \left(H^n, A^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dA_s^n \right) \right\} \text{ jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d+1}).$$

Dowód. Postępujemy podobnie jak w dowodzie faktu 2.21. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że

$$(H^n, A^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, A) \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d}).$$

Niech $\tau_{k,0}^n = 0$, $\tau_{k,i+1}^n = \min\{\tau_{k,i}^n + \delta_{k,i}, \inf\{t > \tau_{k,i}^n; |\Delta A_t^n| > \delta_k\}\}$ i $\tau_{k,0} = 0$, $\tau_{k,i+1} = \min\{\tau_{k,i} + \delta_{k,i}, \inf\{t > \tau_{k,i}; |\Delta A_t| > \delta_k\}\}$, gdzie $\{\delta_k\}$, $\{\delta_{k,i}\}$ są stałymi takimi, że $\delta_k \downarrow 0$, $P(|\Delta A_t| \neq \delta_k, t \in \mathbb{R}^+) = 1$, $\delta_k/2 \leq \delta_{k,i} \leq \delta_k$ i $P(|\Delta A_{\tau_{k,i} + \delta_{k,i}}| + |\Delta H_{\tau_{k,i} + \delta_{k,i}}| = 0) = 1$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Dla $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$A_t^{n,(k)} = A_{\tau_{k,i}^n}^n, t \in [\tau_{k,i}^n, \tau_{k,i+1}^n) \text{ oraz } A_t^{(k)} = A_{\tau_{k,i}}^n, t \in [\tau_{k,i}, \tau_{k,i+1}).$$

Wtedy dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ rodzina zmiennych losowych

$$\{\{\bar{V}_p(A^n - A^{n,(k)})_T\}\} \text{ jest ograniczona według prawdopodobieństwa.} \quad (3.1)$$

Korzystając z faktu 1.8, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (H^n, A^n, A^{n,(k)}, \tau_{k,1}^n, A_{\tau_{k,1}^n}^n, \tau_{k,2}^n, A_{\tau_{k,2}^n}^n, \dots) \\ & \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, A, A^{(k)}, \tau_{k,1}, A_{\tau_{k,1}}, \tau_{k,2}, A_{\tau_{k,2}}, \dots) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d}) \times R^\infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ponieważ

$$\int_0^t X_{s-}^n dA_s^{n,(k)} = \sum_{j \leq i} X_{\tau_{k,j}^n}^n (A_{\tau_{k,j}^n}^n - A_{\tau_{k,j-1}^n}^n), \quad t \in [\tau_{k,i}^n, \tau_{k,i+1}^n)$$

i $\{\sup_{t \leq T} |X_t^n|\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, z (3.2) oraz z twierdzenia 1.33 wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \left(H^n, A^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dA_s^{n,(k)} \right) \right\} \quad \text{jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}). \quad (3.3)$$

Argumentując podobnie jak w dowodzie faktu 2.21, dostajemy

$$\sup_{t \leq T} |A_t^{(k)} - A_t| \longrightarrow 0 \quad P\text{-p.w.}, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

co razem z (3.2) pociąga, iż

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{t \leq T} |A_t^{n,(k)} - A_t^n| \geq \varepsilon) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (3.4)$$

Wyberzmy takie $p' > p$ aby $1/p' + 1/q > 1$. Wówczas biorąc pod uwagę (1.3), dla dowolnych $D, \varepsilon > 0$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} & P \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(A^n - A^{n,(k)})_s \right| \geq \varepsilon \right) \\ & \leq P(\bar{V}_q(X^n)_T V_{p'}(A^n - A^{n,(k)})_T \geq \varepsilon / K_{p',q}) \\ & \leq P(\bar{V}_q(X^n)_T > D) + P(V_{p'}(A^n - A^{n,(k)})_T \geq \varepsilon / (K_{p',q} D)), \\ & \leq P(\bar{V}_q(X^n)_T > D) + P(V_p(A^n - A^{n,(k)})_T^{p/p'} > D) \\ & \quad + P((2 \sup_{t \leq T} |A^n - A_t^{n,(k)}|)^{1-p/p'} \geq \varepsilon / (K_{p',q} D^2)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Stąd oraz z (3.1) i (3.4) mamy, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(A^n - A^{n,(k)})_s \right| \geq \varepsilon \right) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (3.6)$$

Teza twierdzenia wynika z (3.3) i (3.6). \square

Twierdzenie 3.2. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 3.1. Jeżeli dodatkowo $(H^n, A^n, X^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, A, X)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d})$, to*

$$\left(H^n, A^n, X^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dA_s^n \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(H, A, X, \int_0^\cdot X_{s-} dA_s \right) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d+1}).$$

Dowód. Na mocy faktu 1.36 $P(V_q(X)_T < \infty) = 1$ i $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$, zatem istnieje całka $\int_0^t X_{s-} dA_s$. Niech $\{\{A^{n,(k)}\}\}$, $\{A^{(k)}\}$ będą ciągami procesów zdefiniowanymi tak samo jak w dowodzie twierdzenia 3.1, z tą różnicą, że w konstrukcji wykorzystujemy rodzinę stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ takich, że $\delta_k \downarrow 0$, $P(|\Delta A_t| \neq \delta_k, t \in \mathbb{R}^+) = 1$, $\delta_k/2 \leq \delta_{k,i} \leq \delta_k$ i $P(|\Delta A_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta H_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta X_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| = 0) = 1$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Wówczas z faktu 1.8 otrzymujemy, że

$$(H^n, A^n, X^n, A^{n,(k)}, \tau_{k,1}^n, A_{\tau_{k,1}^n}^n, \tau_{k,2}^n, A_{\tau_{k,2}^n}^n, \dots) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, A, X, A^{(k)}, \tau_{k,1}, A_{\tau_{k,1}}, \tau_{k,2}, A_{\tau_{k,2}}, \dots) \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+3d}) \times R^\infty. \quad (3.7)$$

Ponieważ $\int_0^t X_{s-} dA_s^{(k)} = \sum_{j \leq i} X_{\tau_{k,j}-} (A_{\tau_{k,j}} - A_{\tau_{k,j-1}})$, $t \in [\tau_{k,i}, \tau_{k,i+1})$, więc z (3.7) wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$\left(H^n, X^n, A^n, \int_0^\cdot X_{s-} dA_s^{n,(k)} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(H, X, A, \int_0^\cdot X_{s-} dA_s^{(k)} \right) \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+2d+1}). \quad (3.8)$$

Podobnie jak dowodzie twierdzenia 3.1 pokazujemy, że zachodzi (3.6) oraz że

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-} d(A - A^{(k)})_s \right| = 0 \quad P\text{-p.w.}, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Stąd oraz z (3.8) uzyskujemy tezę. \square

3.2 Mocne rozwiązania srr z barierami względem procesów o skończonej p -wariacji

Ustalmy $p \in (1, 2)$ oraz przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$. Niech B będzie $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanym procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ o lokalnie skończonej wariacji oraz A, L, U będą $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanymi procesami o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L \leq U$ oraz $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Rozważmy następujące stochastyczne równanie różniczkowe z barierami:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dB_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.9)$$

gdzie X_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalną, d -wymiarową zmienną losową, $L_0 \leq X_0 \leq U_0$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$, a całka względem procesu A jest zdefiniowana jako uogólniona całka Riemanna-Stieltjesa po trajektoriach.

Definicja 3.3. Powiemy, że para $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanych procesów stochastycznych (X, K) określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ takich, że $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$:

(i) jest *mocnym rozwiązaniem* równania (3.9) jeśli P -p.w. $(X, K) = ESP(Y, L, U)$, gdzie

$$Y_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dB_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

- (ii) jest *jednoznacznym mocnym rozwiązaniem* równania (3.9), jeśli (X, K) jest mocnym rozwiązaniem oraz dla każdego innego mocnego rozwiązania (X', K') równania (3.9) zachodzi: $P(X_t = X'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $P(K_t = K'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$.

Uwaga 3.4. 1. Podobnie jak w przypadku deterministycznym będziemy zakładać dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ taki, że $L \leq H \leq U$ oraz $P(V_p(H)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Zauważmy, że jeżeli dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\inf_{t \leq T} (U_t - L_t) > 0 \quad P\text{-p.w.}, \quad (3.10)$$

to istnieje proces H o żądanych własnościach. Aby tego dowieść, połóżmy $\tau_0 = 0$, $H_0 = (U_0 + L_0)/2$, $\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1}; U_t < H_{\tau_{k-1}} \text{ lub } L_t > H_{\tau_{k-1}}\}$, $H_{\tau_k} = (U_{\tau_k} + L_{\tau_k})/2$, $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ procesy U i L mają P -p.w. càdlàg trajektorie, więc $M_T = \inf\{k; \tau_k \geq T\} < \infty$ P -p.w. dla wszystkich $T \in \mathbb{R}^+$. Istotnie, jeżeli $P(M_T = \infty) > 0$, to na zbiorze $M_T = \infty$ istnieje skończona granica $\tau = \lim_k \tau_k$. Wówczas na tym samym zbiorze

$$H_{\tau_k} \longrightarrow (U_{\tau^-} + L_{\tau^-})/2. \quad (3.11)$$

Z drugiej strony na zbiorze $M_T = \infty$ zachodzi oszacowanie: $|H_{\tau_k} - H_{\tau_{k-1}}| \geq \inf_{t \leq T} (U_t - L_t)/2 > 0$, co przeczy (3.11). W konsekwencji proces dany wzorem $H_t = H_{\tau_{k-1}}$ dla $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \in \mathbb{N}$ jest $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanym procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takim, że $L \leq H \leq U$ oraz $P(V_1(H)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$.

2. Jeżeli procesy Y, L, U o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ są $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowane, to rozwiązanie problemu Skorochoda $(X, K) = ESP(Y, L, U)$ jest również $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowane. Istotnie, niech $(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n)$, gdzie $Y_t^n = Y_{k/n}$, $L_t^n = L_{k/n}$, $U_t^n = U_{k/n}$ dla $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas korzystając z twierdzenia 1.6, mamy: $(Y^n, L^n, U^n) \rightarrow (Y, L, U)$ P -p.w. w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d})$. W konsekwencji, mając na uwadze wniosek 2.5, otrzymujemy

$$(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n) \longrightarrow ESP(Y, L, U) = (X, K) \quad P\text{-p.w. w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Z uwagi 2.3.3 wnioskujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces (X^n, K^n) jest $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany. Zatem proces graniczny (X, K) jest również $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany.

Twierdzenie 3.5. Załóżmy (H1) oraz (H2) oraz dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p -wariacji, spełniający warunek: $L \leq H \leq U$. Wtedy równanie (3.9) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie (X, K) . Ponadto jeżeli zdefiniujemy $\{(X^n, K^n)\}$ jako ciąg iteracji Picarda dla (3.9), postaci: $(X^0, K^0) = ESP(X_0, L, U)$ oraz $(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L, U)$, gdzie $Y^n = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X_s^{n-1}) dB_s + \int_0^\cdot g(s, X_s^{n-1}) dA_s$, $n \in \mathbb{N}$, to

$$\bar{V}_p(X^n - X)_T \longrightarrow 0, \quad \bar{V}_p(K^n - K)_T \longrightarrow 0 \quad P\text{-p.w.}, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Z twierdzenia 2.18 wynika, że dla P -prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $(X(\omega), K(\omega))$ oraz dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(X^n(\omega) - X(\omega))_T \longrightarrow 0, \quad \bar{V}_p(K^n(\omega) - K(\omega))_T \longrightarrow 0.$$

Ponieważ na mocy uwagi 3.4.2 dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces (X^n, K^n) jest $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany, proces graniczny (X, K) jest również $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany, więc dowód twierdzenia został zakończony. \square

Wniosek 3.6. *Niech funkcje f, g spełniają (H1), (H2) oraz f będzie funkcją ciągłą. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p -wariacji, spełniający warunek: $L \leq H \leq U$. Wówczas*

(i) jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (X^n, K^n) dany jest wzorem:

$$(X_t^n, K_t^n) = (X_{t_{n,k}}^n, K_{t_{n,k}}^n), \quad t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

przy czym $X_0^n = X_0$,

$$\begin{cases} Y_{t_{n,k+1}}^n &= Y_{t_{n,k}}^n + f(t_{n,k}, X_{t_{n,k}}^n)(B_{t_{n,k+1}} - B_{t_{n,k}}) + g(t_{n,k}, X_{t_{n,k}}^n)(A_{t_{n,k+1}} - A_{t_{n,k}}), \\ X_{t_{n,k+1}}^n &= \max\{\min\{X_{t_{n,k}}^n + (Y_{t_{n,k+1}}^n - Y_{t_{n,k}}^n), U_{t_{n,k+1}}\}, L_{t_{n,k+1}}\}, \\ K_{t_{n,k+1}}^n &= K_{t_{n,k}}^n + (X_{t_{n,k+1}}^n - X_{t_{n,k}}^n) - (Y_{t_{n,k+1}}^n - Y_{t_{n,k}}^n) \end{cases} \quad (3.12)$$

oraz ciąg podziałów $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ jest taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ i $\text{diam}(\pi_n) \rightarrow 0$, to

$$(X^n, K^n) \longrightarrow (X, K) \quad P\text{-}p.\text{w. w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

gdzie (X, K) jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem (3.9);

(ii) jeżeli we wzorze (3.12) zastąpimy deterministyczny ciąg podziałów $\{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ losowym ciągiem postaci: $\tau_{n,0} = 0$,

$$\tau_{n,k} = \inf\{t > \tau_{n,k-1}; \max\{|\Delta B_t|, |\Delta A_t|, |\Delta L_t|, |\Delta U_t|\} > 1/n\} \wedge (\tau_{n,k-1} + 1/n),$$

$n, k \in \mathbb{N}$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{t \leq T} (|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \longrightarrow 0 \quad P\text{-}p.\text{w.}$$

Dowód. Wynika łatwo z wniosków 2.27 i 2.29. \square

Wniosek 3.7. *Załóżmy (H1), (H2) oraz dodatkowo ciągłość funkcji f . Niech $\{X_0^n\}$ będzie ciągiem \mathcal{F}_0^n -mierzalnych zmiennych losowych, $\{B^n\}$ będzie ciągiem $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\{A^n\}$, $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L_0^n \leq X_0^n \leq U_0^n$, $L^n \leq H^n \leq U^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciągi zmiennych losowych $\{V_1(B^n)_T\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$, $\{\bar{V}_p(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa. Niech $\{(X^n, K^n)\}$ będzie ciągiem rozwiązań równań postaci*

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t f(s, X_{s-}^n) dB_s^n + \int_0^t g(s, X_{s-}^n) dA_s^n + K_t^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.13)$$

tzn. $(X^n, K^n) = ESP(X_0^n + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dB_s^n + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n) dA_s^n, L^n, U^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Jeżeli $(X_0^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \xrightarrow{P} (X_0, B, A, L, U)$ w $\mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1})$, to

$$(X^n, K^n) \xrightarrow{P} (X, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

gdzie (X, K) jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem (3.9).

(ii) Jeżeli $X_0^n \xrightarrow{P} X_0$ oraz

$$\sup_{t \leq T} (|B_t^n - B_t| + |A_t^n - A_t| + |L_t^n - L_t| + |U_t^n - U_t|) \xrightarrow{P} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

to

$$\sup_{t \leq T} (|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \xrightarrow{P} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. (i) Z faktu 1.36 wynika, że $P(V_1(B)_T < \infty) = 1$ oraz $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$. Mając na uwadze twierdzenie Riesz, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że

$$(X_0^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \longrightarrow (X_0, B, A, L, U) \quad P\text{-p.w. w } \mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}).$$

Ponieważ $\sup_n V_1(B^n)_T < \infty$ oraz $\sup_n V_p(A^n)_T < \infty$ P -p.w., więc z twierdzenia 2.23 wynika zbieżność:

$$(X^n, K^n) \longrightarrow (X, K) \quad P\text{-p.w. w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

co kończy dowód (i).

(ii) Podobnie jak w (i) możemy założyć, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{t \leq T} (|B_t^n - B_t| + |A_t^n - A_t| + |L_t^n - L_t| + |U_t^n - U_t|) \longrightarrow 0 \quad P\text{-p.w.}$$

Korzystając z wniosku 2.25, otrzymujemy $\sup_{t \leq T} (|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \rightarrow 0$ P -p.w., tym samym kończąc dowód (ii). \square

3.3 Słabe rozwiązania srr z barierami względem procesów o skończonej p -wariacji

Definicja 3.8. Powiemy, że równanie (3.9):

(i) posiada *słabe rozwiązanie*, jeśli istnieją: przestrzeń $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, \bar{P})$, $\bar{\mathcal{F}}_0$ -mierzalna zmienna losowa \bar{X}_0 i $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$ -adaptowane procesy $\{\bar{B}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{A}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{L}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{U}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{X}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{K}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ zdefiniowane na $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, \bar{P})$ takie, że $\mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{B}, \bar{A}, \bar{L}, \bar{U}) = \mathcal{L}(X_0, B, A, L, U)$, $\bar{P}(V_p(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $(\bar{X}, \bar{K}) = ESP(\bar{Y}, \bar{L}, \bar{U})$, gdzie

$$\bar{Y}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t f(s, \bar{X}_{s-}) d\bar{B}_s + \int_0^t g(s, \bar{X}_{s-}) d\bar{A}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

- (ii) posiada *własność jednoznaczności trajektorii*, jeżeli dla każdej innej $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$ -adaptowanej pary procesów (\bar{X}', \bar{K}') zdefiniowanej na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, \bar{P})$ o własności $\bar{P}(V_p(\bar{X}')_T < \infty) = 1$ i $(\bar{X}', \bar{K}') = ESP(\bar{Y}', \bar{L}, \bar{U})$, gdzie

$$\bar{Y}'_t = \bar{X}'_0 + \int_0^t f(s, \bar{X}'_{s-}) d\bar{B}_s + \int_0^t g(s, \bar{X}'_{s-}) d\bar{A}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

zachodzi: $\bar{P}(\bar{X}_t = \bar{X}'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $\bar{P}(\bar{K}_t = \bar{K}'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$;

- (iii) posiada *jednoznaczne słabe rozwiązanie*, jeżeli dowolnych dwóch słabych rozwiązań $(\bar{X}, \bar{K}), (\bar{X}', \bar{K}')$ (możliwe, że zdefiniowanych na różnych przestrzeniach probabilistycznych) zachodzi $\mathcal{L}(\bar{X}, \bar{K}) = \mathcal{L}(\bar{X}', \bar{K}')$.

Fakt 3.9. *Załóżmy (H1) oraz (H2). Wówczas równanie (3.9) posiada własność jednoznaczności trajektorii.*

Dowód. Wystarczy dla \bar{P} -p.w. $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ zastosować argumenty z dowodu twierdzenia 2.18. \square

Ustalmy $p \in (1, 2)$. Niech $\{X_0^n\}$ będzie ciągiem \mathcal{F}_0^n -mierzalnych zmiennych losowych, $\{B^n\}$ będzie ciągiem $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, a $\{A^n\}, \{L^n\}, \{U^n\}, \{H^n\}$ będą ciągami $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takich, że $L_0^n \leq X_0^n \leq U_0^n, L^n \leq H^n \leq U^n, n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 3.10. *Załóżmy (H1) oraz dodatkowo, że f jest ciągła. Jeżeli $\{(X^n, K^n)\}$ jest ciągiem rozwiązań równań postaci (3.13), ciągi $\{V_1(B^n)_T\}, \{V_p(A^n)_T\}, \{\bar{V}_p(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ oraz*

$$(X_0^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X_0, B, A, L, U) \quad \text{w } \mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}),$$

to ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ i każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (3.9). Jeśli dodatkowo równanie (3.9) posiada własność jednoznaczności trajektorii, to $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$, gdzie (X, K) jest jednoznaczny słaby rozwiązanie (3.9).

Dowód. Niech

$$\tau_n^u = \inf\{t; \max\{V_1(B^n)_t, V_p(A^n)_t, V_p(H^n)_t\} > u\}, \quad n, u \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $\{V_1(B^n)_T\}, \{V_p(A^n)_T\}$ i $\{V_p(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, więc

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\tau_n^u \leq T) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (3.14)$$

Ponadto na zbiorze $T < \tau_n^u$ zachodzi oszacowanie:

$$\max\{V_1(B^n)_T, V_p(A^n)_T, V_p(H^n)_T\} \leq u.$$

Stąd oraz z (2.42) wynika, że dla każdego $M > 0$ mamy

$$P(\bar{V}_p(X^n)_T > M) \leq P(\tau_n^u \leq T) + P(D^n \geq M), \quad (3.15)$$

gdzie $D^n = D(d, p, \alpha, \beta, X_0^n, C_g^T, C_f, u)$, a D jest taka jak w (2.42). Ponieważ $\{D^n\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, (3.15) pociąga, że również $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa.

Dalsza część dowodu przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.23. Najpierw zauważamy, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $q = p/\alpha \vee 1/\beta$ ciąg zmiennych losowych $\{\bar{V}_q(g(\cdot, X^n))_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Następnie rozważamy ciąg $\{f^k\}$ funkcji Lipschitzowskich zbieżny jednostajnie na kompaktach do f . Wówczas dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$ mamy, że ciąg $\{\bar{V}_p(f^k(\cdot, X^n))_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(\sup_{t \leq T} |f^k(t, X_t^n) - f(t, X_t^n)| > \varepsilon \right) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (3.16)$$

Z twierdzenia 3.1 i (3.16) otrzymujemy jednostajną jędrność ciągu $\{(Y^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d+1})$, gdzie

$$Y^n = X_0^n + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dB_s^n + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n) dA_s^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kładąc $(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n)$ oraz korzystając z twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5, uzyskujemy, że ciąg $\{(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$.

Załóżmy, że $(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K, B, A, L, U)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Stosując twierdzenie 3.2, otrzymujemy zbieżność: $(Y^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y, L, U)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d})$, gdzie $Y = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}) dB_s + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}) dA_s$. Korzystając ponownie z twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5, dostajemy

$$(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} ESP(Y, L, U) = (X, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Na mocy faktu 1.36 $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. W konsekwencji (X, K) jest słabym rozwiązaniem równania (3.9).

Korzystając z podobnych metod co w twierdzeniu Yamady-Watanabe (patrz np. [49, Theorem 37.6] lub [86]), możemy pokazać, że dla równania (3.9) własność jednoznaczności trajektorii implikuje słabą jednoznaczność rozwiązań i tym samym zakończyć dowód twierdzenia. \square

Wniosek 3.11. *Niech funkcje f, g spełniają (H1) oraz f będzie funkcją ciągłą. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p -wariacji, spełniający warunek: $L \leq H \leq U$. Wówczas ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ zdefiniowany w (3.12) jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (3.9). W konsekwencji równanie (3.9) posiada słabe rozwiązanie.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.26 można zauważyć, że

$$\begin{cases} (X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n), \\ \text{gdzie } Y_t^n = X_0 + \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) dB_s^n + \int_0^t g(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) dA_s^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.17)$$

oraz $B_t^n = B_{t_{n,k}}$, $A_t^n = A_{t_{n,k}}$, $L_t^n = L_{t_{n,k}}$, $U_t^n = U_{t_{n,k}}$, $\varrho_t^n = t_{n,k}$, $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $H_t^n = H_{t_{n,k}}$ dla $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ

$$V_1(B^n)_T \leq V_1(B)_T, \quad V_p(A^n)_T \leq V_p(A)_T, \quad V_p(H^n)_T \leq V_p(H)_T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

więc stosując argumenty z dowodu twierdzenia 3.10, możemy pokazać, że ciąg $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa.

Zdefiniujmy:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{X}^n, \bar{K}^n) = ESP(\bar{Y}^n, L^n, U^n), \\ \text{gdzie } \bar{Y}_t^n = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}^n) dB_s^n + \int_0^t g(s, X_{s-}^n) dA_s^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right.$$

Biorąc pod uwagę lemat 2.4, (2.50) i (2.51), możemy wywnioskować, że

$$\sup_{t \leq T} |X_t^n - \bar{X}_t^n| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{oraz} \quad \sup_{t \leq T} |K_t^n - \bar{K}_t^n| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (3.18)$$

Na mocy twierdzenia 1.6 $(X_0^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \rightarrow (X_0, B, A, L, U)$ P -p.w. w $\mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1})$, więc z twierdzenia 3.1 uzyskujemy, że ciąg $\{(\bar{Y}^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d+1})$. W konsekwencji stosując twierdzenie 1.40 i wniosek 2.5, otrzymujemy jednostajną jędrność ciągu $\{(\bar{X}^n, \bar{K}^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Stąd oraz z (3.18) wynika, że $\{(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$.

Założmy, że $(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K, B, A, L, U)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.10 stosując twierdzenie 3.2, dostajemy

$$(\bar{Y}^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y, L, U) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d}),$$

gdzie $Y = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}) dB_s + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}) dA_s$. Zatem z twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5 otrzymujemy zbieżność:

$$(\bar{X}^n, \bar{K}^n) = ESP(\bar{Y}^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} ESP(Y, L, U) = (X, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

co razem z (3.18) pociąga, że

$$(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} ESP(Y, L, U) = (X, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Z kolei z faktu 1.36 wynika, że $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, więc (X, K) jest słabym rozwiązaniem równania (3.9). \square

Uwaga 3.12. Podobnie jak w rozdziale 2. wykorzystując wnioski 2.10 i 2.11 zamiast wniosków 2.8, 2.9 uzyskujemy odpowiednie rezultaty dla stochastycznych równań różniczkowych z jedną barierą i równań bez barier.

Rozdział 4

Srr z barierami względem p -semimartyngałów

4.1 Zbieżność całek stochastycznych względem p -semimartyngałów

Definicja 4.1 (Norvaiša [58]). Niech $p \in (1, 2)$. Powiemy, że proces X o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ jest p -semimartyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, jeśli istnieją: \mathcal{F}_0 -mierzalna zmienna losowa X_0 , $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces A o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i semimartyngał Z względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takie, że $Z_0 = A_0 = 0$, $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz

$$X = X_0 + Z + A \quad P\text{-p.w.} \quad (4.1)$$

Niech X będzie p -semimartyngałem o rozkładzie (4.1) oraz H będzie adaptowanym procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ o lokalnie skończonej q -wariacji. Naturalnym jest przyjąć jako całkę względem X sumę:

$$\int_0^t H_{s-} dX_s = \int_0^t H_{s-} dZ_s + \int_0^t H_{s-} dA_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie całka względem Z jest dobrze znaną całką względem semimartyngału, a całka względem A jest całką Riemmana-Stieltjesa po trajektoriach. Poniższe twierdzenie opisuje, przy jakich warunkach powyższa całka jest poprawnie określona.

Twierdzenie 4.2 ([58, Chapter 4, Theorem 12]). *Jeżeli X jest p -semimartyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dla pewnego $p \in (1, 2)$ oraz H jest procesem $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanym o lokalnie skończonej q -wariacji dla $q > 0$ takiego, że $1/p + 1/q > 1$, to całka*

$$\int_0^t H_{s-} dX_s, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

jest dobrze określona. Ponadto proces $\{\int_0^t H_{s-} dX_s\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ jest p -semimartyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Wniosek 4.3. *Jeżeli X, Y są p -semimartynałami względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dla pewnego $p \in (1, 2)$, to istnieje całka $\int_0^\cdot Y_{s-} dX_s$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że na mocy faktu 1.41 istnieje $q > 2$ takie, że $P(V_q(Y)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $1/p + 1/q > 1$, a następnie skorzystać z twierdzenia 4.2. \square

Twierdzenie 4.4. *Niech $\{Z^n\}$ będzie ciągiem semimartynałów spełniającym warunek (UT), a $\{X^n\}$ ciągiem procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych takim, że dla pewnego $p \geq 1$ ciąg $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli $\{H^n\}$ jest ciągiem procesów takim, że ciąg $\{(H^n, Z^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d})$, to*

$$\left\{ \left(H^n, Z^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dZ_s^n \right) \right\} \text{ jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}).$$

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $\{\{Z^{n,(k)}\}\}, \{Z^{(k)}\}$ będą ciągami procesów zdefiniowanymi analogicznie do ciągów $\{\{A^{n,(k)}\}\}, \{A^{(k)}\}$ z dowodu twierdzenia 3.1. Powtarzając argumenty z dowodu twierdzenia 3.1 wnioskujemy, że

$$\left\{ \left(H^n, Z^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dZ_s^{n,(k)} \right) \right\} \text{ jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}) \quad (4.2)$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{t \leq T} |Z_t^{n,(k)} - Z_t^n| \geq \varepsilon) = 0. \quad (4.3)$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(Z^{n,(k)} - Z^n)_s \right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (4.4)$$

W tym celu rozważmy dla każdego $n, k \in \mathbb{N}$ i $a > 0$ rozkłady $Z^n, Z^{n,(k)}$ postaci

$$Z_t^n = Z_0^n + J_t^{n,a} + M_t^{n,a} + D_t^{n,a}, \quad Z_t^{n,(k)} = Z_0^{n,(k)} + J_t^{n,(k),a} + M_t^{n,(k),a} + D_t^{n,(k),a}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

(patrz (1.17)). Pokażemy, że istnieje $a > 0$ dla którego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{t \leq T} |J_t^{n,(k),a} - J_t^{n,a}| + \sup_{t \leq T} |D_t^{n,(k),a} - D_t^{n,a}| + \langle M^{n,(k),a} - M^{n,a} \rangle_T \geq \varepsilon) = 0. \quad (4.5)$$

Ponieważ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ ciąg $\{Z^{n,(k)} - Z^n\}$ spełnia (UT) oraz na mocy wzoru na całkowanie przez części

$$[Z^{n,(k)} - Z^n]_t = (Z_t^{n,(k)} - Z_t^n)^2 - 2 \int_0^t (Z_{s-}^{n,(k)} - Z_{s-}^n) d(Z^{n,(k)} - Z^n)_s, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

więc korzystając z (4.3) i twierdzenia 1.37, otrzymujemy zbieżność:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P([Z^{n,(k)} - Z^n]_T \geq \varepsilon) = 0. \quad (4.6)$$

Wybierzmy takie $a > 0$, aby $P(\Delta Z_t = a, t \in \mathbb{R}^+) = 0$ (wiadomo, że $P(\Delta Z_t = a, t \in \mathbb{R}^+) > 0$ dla co najwyżej przeliczalnie wielu $a > 0$). Wówczas można sprawdzić, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{t \leq T} |J_t^{n,(k),a} - J_t^{n,a}| \geq \varepsilon) = 0,$$

co razem z (4.6) pociąga zbieżność:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P([M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T \geq \varepsilon) = 0.$$

Ponieważ $D^{n,(k),a} - D^{n,a}$ jest prognozowalny, więc $E[M^{n,(k),a} - M^{n,a}]_T \leq E[M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T$ (patrz np. [62, str. 137]). Stąd oraz z nierówności Lenglarta-Rebolledo (patrz np. [63, Lemma 3]) mamy, że dla każdego $\eta > 0$

$$P([M^{n,(k),a} - M^{n,a}]_T \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} E[[M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T \wedge (\eta + 4a^2)] + P([M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T > \eta).$$

Zatem $\lim_k \limsup_n P([M^{n,(k),a} - M^{n,a}]_T \geq \varepsilon) = 0$ i w konsekwencji

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\langle M^{n,(k),a} - M^{n,a} \rangle_T \geq \varepsilon) = 0.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że $\sup_{t \leq T} |D_t^{n,(k),a} - D_t^{n,a}| \leq \sup_{t \leq T} |Z_t^{n,(k)} - Z_t^n| + \sup_{t \leq T} |J_t^{n,(k),a} - J_t^{n,a}| + \sup_{t \leq T} |M_t^{n,(k),a} - M_t^{n,a}|$, wnioskujemy (4.5).

Zauważmy dalej, że

$$\begin{aligned} & \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(Z^{n,(k)} - Z^n)_s \right| \\ & \leq \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(J^{n,(k),a} - J^{n,a})_s \right| + \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(D^{n,(k),a} - D^{n,a})_s \right| \\ & \quad + \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(M^{n,(k),a} - M^{n,a})_s \right| \\ & = I_1^{n,k} + I_2^{n,k} + I_3^{n,k}. \end{aligned}$$

Stosując (4.5) oraz argumenty z (3.5), otrzymujemy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(I_1^{n,k} + I_2^{n,k} \geq \varepsilon) = 0. \quad (4.7)$$

Z drugiej strony korzystając z nierówności Dooba oraz ponownie Lenglarta-Rebolledo, uzyskujemy, że dla każdego $\eta > 0$

$$P\left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X_{s-}^n d(M^{n,(k),a} - M^{n,a})_s \right| \geq \varepsilon\right) \leq 4\varepsilon^{-2} E\left(\int_0^T (X_{s-}^n)^2 d\langle M^{n,(k),a} - M^{n,a} \rangle_s \wedge \eta\right) + P\left(\int_0^T (X_{s-}^n)^2 d\langle M^{n,(k),a} - M^{n,a} \rangle_s > \eta\right),$$

co razem z (4.7) pociąga (4.4) i kończy tym samym dowód twierdzenia. \square

Wniosek 4.5. Niech $\{X^n\}, \{A^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że dla pewnych $p, q \geq 1$ o własności $1/p + 1/q > 1$ ciągi $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}, \{\bar{V}_p(A^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa oraz $\{Z^n\}$ niech będzie ciągiem semimartynałów spełniającym warunek (UT). Jeżeli $\{H^n\}$ jest ciągiem procesów takim, że ciąg (H^n, A^n, Z^n) jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+2d})$, to

$$\left\{ \left(H^n, A^n, Z^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dA_s^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dZ_s^n \right) \right\} \text{ jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+2d+2}).$$

Dowód. Wynika z twierdzeń 3.1 i 4.4. □

Wniosek 4.6. Niech $\{X^n\}, \{A^n\}, \{Z^n\}, \{H^n\}$ spełniają założenia wniosku 4.5. Jeżeli dodatkowo $(H^n, X^n, A^n, Z^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, X, Y, Z)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+3d})$, to

$$\begin{aligned} & \left(H^n, X^n, A^n, Z^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dA_s^n, \int_0^\cdot X_{s-}^n dZ_s^n \right) \\ & \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(H, X, A, Z, \int_0^\cdot X_{s-} dA_s, \int_0^\cdot X_{s-} dZ_s \right) \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+3d+2}). \end{aligned}$$

Dowód. Wynika z twierdzeń 3.2 i 1.39. □

4.2 Stabilność rozwiązań srr z barierami względem p -semimartynałów

Ustalmy $p \in (1, 2)$ oraz przestrzeń z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$. Niech Z będzie semimartynałem względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, a A, L, U będą $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanymi procesami o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L \leq U$ oraz $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Rozważmy równanie z barierami postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.8)$$

gdzie X_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalną, d -wymiarową zmienną losową, $L_0 \leq X_0 \leq U_0$ oraz $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$. Ponieważ w równaniu występuje całka względem semimartynału, mając na uwadze fakt 1.41, powinniśmy oczekiwać od rozwiązań równania (4.8), aby miały lokalnie skończoną q -wariację dla pewnego $q > 2$.

Definicja 4.7. Niech $q > 2$. Powiemy, że para $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanych procesów stochastycznych (X, K) określonych na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ z lokalnie skończoną q -wariacją tzn. takich, że $P(V_q(X)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$:

(i) jest *mocnym rozwiązaniem* równania (4.8) jeśli P -p.w. $(X, K) = ESP(Y, L, U)$, gdzie

$$Y_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

- (ii) jest *jednoznacznym mocnym rozwiązaniem* równania (4.8) wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji, jeśli (X, K) jest mocnym rozwiązaniem oraz dla każdego innego mocnego rozwiązania (X', K') równania (3.9) zachodzi: $P(X_t = X'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $P(K_t = K'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$.

Definicja 4.8. Niech $q > 2$. Powiemy, że równanie (4.8):

- (i) posiada *słabe rozwiązanie* o lokalnie skończonej q -wariacji, jeśli istnieją: przestrzeń $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, \bar{P})$, $\bar{\mathcal{F}}_0$ -mierzalna zmienna losowa \bar{X}_0 , semimartyngał $\{\bar{Z}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ względem $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ oraz $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$ -adaptowane procesy $\{\bar{A}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{L}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{U}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{X}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\{\bar{K}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ zdefiniowane na przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, \bar{P})$ takie, że $\mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{Z}, \bar{A}, \bar{L}, \bar{U}) = \mathcal{L}(X_0, Z, A, L, U)$, $\bar{P}(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $(\bar{X}, \bar{K}) = ESP(\bar{Y}, \bar{L}, \bar{U})$, gdzie

$$\bar{Y}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t f(s, \bar{X}_{s-}) d\bar{Z}_s + \int_0^t g(s, \bar{X}_{s-}) d\bar{A}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

- (ii) posiada *własność jednoznaczności trajektorii* wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji, jeżeli dla każdej innej $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$ -adaptowanej pary procesów (\bar{X}', \bar{K}') zdefiniowanej na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, \bar{P})$ o własności $\bar{P}(V_q(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ i $(\bar{X}', \bar{K}') = ESP(\bar{Y}', \bar{L}, \bar{U})$, gdzie

$$\bar{Y}'_t = \bar{X}'_0 + \int_0^t f(s, \bar{X}'_{s-}) d\bar{Z}_s + \int_0^t g(s, \bar{X}'_{s-}) d\bar{A}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

zachodzi: $\bar{P}(\bar{X}_t = \bar{X}'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $\bar{P}(\bar{K}_t = \bar{K}'_t, t \in \mathbb{R}^+) = 1$;

- (iii) posiada *jednoznaczne słabe rozwiązanie* wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji, jeżeli dla dowolnych dwóch słabych rozwiązań (\bar{X}, \bar{K}) , (\bar{X}', \bar{K}') (możliwe, że zdefiniowanych na różnych przestrzeniach probabilistycznych) o własnościach: $\bar{P}(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $\bar{P}'(V_{q'}(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ zachodzi $\mathcal{L}(\bar{X}, \bar{K}) = \mathcal{L}(\bar{X}', \bar{K}')$.

Uwaga 4.9. Jeżeli dla dwóch słabych rozwiązań (\bar{X}, \bar{K}) , (\bar{X}', \bar{K}') równania (4.8) mamy $\bar{P}(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $\bar{P}'(V_{q'}(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$, gdzie $q \neq q'$, to na mocy uwagi 1.10.2 dla $q'' = q \vee q'$ mamy $\bar{P}(V_{q''}(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $\bar{P}'(V_{q''}(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$.

Uwaga 4.10. Podobnie jak w przypadku równania (3.9) zakładając będziemy dodatkowo, że istnieje $q \in (2, p/(p-1))$ oraz $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ taki, że $L \leq H \leq U$ oraz $P(V_q(H)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$. Stosując argumenty z punktu 1. uwagi 3.4, możemy pokazać, że powyższe założenie jest spełnione, jeśli zachodzi warunek (3.10). Z kolei, jeżeli istnieje p -semimartyngał S taki, że $L \leq S \leq U$, to na mocy faktu 1.41 $P(V_q(S)_T < \infty) = 1$ dla wszystkich $q > 2$, $T \in \mathbb{R}^+$. Zatem w tym przypadku możemy przyjąć $H = S$.

Rozważać będziemy następujące założenia.

- (G1) (a) Istnieje C_f taka, że

$$|f(t, x)| \leq C_f(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}^+.$$

- (b) Istnieją $q \in (2, p/(p-1))$, $\beta \in (1 - 1/p, 1]$, $\alpha \in (q(1 - 1/p), 1]$ oraz $C_g > 0$ takie, że

$$|g(t, x) - g(s, y)| \leq C_g(|t - s|^\beta + |x - y|^\alpha), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, t, s \in \mathbb{R}^+.$$

- (G2) (a) Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje $C_{f,N} > 0$ taka, że

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq C_{f,N}|x - y|, \quad |x|, |y| < N, t \in \mathbb{R}^+.$$

- (b) g jest różniczkowalną funkcją zmiennej x , dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieją $\alpha_N \in (q(1 - 1/p), 1]$ i $C_{g,N} > 0$ takie, że

$$|\nabla_x g(t, x)| \leq C_{g,N}$$

oraz

$$|\nabla_x g(t, x) - \nabla_x g(s, y)| \leq C_{g,N}(|t - s|^\beta + |x - y|^{\alpha_N}), \quad |x|, |y| < N, t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Uwaga 4.11. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Stosując argumenty z uwagi 2.16, możemy pokazać, że przy założeniu (G1) (b) dla $C_g^T = C_g((T \vee 1) + 2) + |g(0, 0)|$ oraz wszystkich $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|g(t, x)| \leq C_g^T(1 + |x|). \quad (4.9)$$

Ponadto dla dowolnych $r \geq q/\alpha \vee 1/\beta$, $w \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ mamy:

$$\bar{V}_r(g(\cdot, w))_t \leq C_g^T(1 + \bar{V}_q(w)_t). \quad (4.10)$$

Niech $\{X_0^n\}$ będzie ciągiem \mathcal{F}_0^n -mierzalnych, d -wymiarowych zmiennych losowych, $\{Z^n\}$ będzie ciągiem semimartyngałów względem $\{\mathcal{F}_t^n\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, a $\{A^n\}$, $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takich, że $L_0^n \leq X_0^n \leq U_0^n$, $L^n \leq H^n \leq U^n$, $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy ciąg równań postaci

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t f(s, X_{s-}^n) dZ_s^n + \int_0^t g(s, X_{s-}^n) dA_s^n + K_t^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Lemat 4.12. Załóżmy, że funkcje f i g spełniają (G1). Jeżeli $\{(X^n, K^n)\}$ jest ciągiem rozwiązań równań postaci (4.11), ciągi $\{|X_0^n|\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$, $\{\bar{V}_q(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, $\{Z^n\}$ jest ciągiem semimartyngałów spełniających warunek (UT), to ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$.

Dowód. Ustalmy $a > 0$ oraz $N \in \mathbb{R}^+$. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $|X_0^n| \leq c$ P -p.w., $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozkład Z^n postaci $Z_t^n = Z_0^n + J_t^{n,a} + M_t^{n,a} + D_t^{n,a}$, $t \in \mathbb{R}^+$ (patrz (1.17)) oraz zdefiniujmy:

$$\tau_N^n = \inf\{t; \max\{V_1(J^{n,a})_t, V_1(D^{n,a})_t, [M^{n,a}]_t, \langle M^{n,a} \rangle_t, V_p(A^n)_t, \bar{V}_q(H^n)_t\} > N\} \wedge N.$$

Niech C_g^N będzie stałą z (4.10) dla $T = N$ tzn. $C_g^N = C_g((N \vee 1) + 2) + |g(0, 0)|$. Pokażemy, że istnieje stała D zależna od $d, c, p, q, \alpha, \beta, C_g^N$ i C_f dla której

$$\sup_n E \bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^n}^2 \leq D. \quad (4.12)$$

W tym celu ustalmy moment zatrzymania $\tau \leq \tau_N^n$ oraz zauważmy, że stosując wniosek 2.9, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{V}_q(X^n)_{\tau-} &\leq (d+1) \left(|X_0^n| + V_q \left(\int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dZ_s^n \right)_{\tau-} \right. \\ &\quad \left. + V_q \left(\int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n) dA_s^n \right)_{\tau-} \right) + d\bar{V}_q(H^n)_{\tau-}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Przyjmując $r = q/\alpha \vee 1/\beta$ oraz korzystając z (1.3) i (4.10), mamy

$$\begin{aligned} V_q \left(\int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n) dA_s^n \right)_{\tau-} &\leq V_p \left(\int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n) dA_s^n \right)_{\tau-} \\ &\leq K_{p,r} \bar{V}_r(g(\cdot, X^n))_{\tau-} V_p(A^n)_{\tau-} \\ &\leq K_{p,r} C_g^N (1 + \bar{V}_q(X^n)_{\tau-}) V_p(A^n)_{\tau-}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} V_q \left(\int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dJ_s^{n,a} \right)_{\tau-} &\leq \sup_{t < \tau} |f(t, X_{t-}^n)| V_1(J^{n,a})_{\tau-} \\ &\leq C_f (1 + \bar{V}_q(X^n)_{\tau-}) V_1(J^{n,a})_{\tau-}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Podobnie pokazujemy, że

$$V_q \left(\int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dD_s^{n,a} \right)_{\tau-} \leq C_f (1 + \bar{V}_q(X^n)_{\tau-}) V_1(D^{n,a})_{\tau-}. \quad (4.16)$$

Z kolei korzystając z faktu 1.41, uzyskujemy

$$\begin{aligned} E \bar{V}_q \left(\int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dM_s^{n,a} \right)_{\tau-}^2 &\leq K(q) E \int_0^{\tau-} |f(s, X_{s-}^n)|^2 d([M^{n,a}]_s + \langle M^{n,a} \rangle_s) \\ &\leq K(q) C_f^2 E \left((1 + \bar{V}_q(X^n)_{\tau-})^2 ([M^{n,a}]_{\tau-} + \langle M^{n,a} \rangle_{\tau-}) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dzięki (4.13) – (4.17) istnieją stałe C_1, C_2 zależne od d, c, p, q, r, C_g^N i C_f takie, że

$$E \bar{V}_q(X^n)_{\tau-}^2 \leq C_1 E (1 + \bar{V}_q(X^n)_{\tau-}^2) B_{\tau-}^{n,a} + C_2 E \bar{V}_q(H^n)_{\tau-}^2, \quad (4.18)$$

gdzie $B_t^{n,a} = \max\{V_1(J^{n,a})_t^2, V_1(D^{n,a})_t^2, [M^{n,a}]_t, \langle M^{n,a} \rangle_t, V_p(A^n)_t^2\}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Niech dla $k, n \in \mathbb{N}$

$$\tau_N^{n,1} = \inf\{t > 0; C_1 \max\{V_1(J^{n,a})_t^2, V_1(D^{n,a})_t^2, [M^{n,a}]_t, \langle M^{n,a} \rangle_t, V_p(A^n)_t^2\} > 1/2\} \wedge \tau_N^n.$$

Wówczas z (4.18) wynika, iż $\sup_n E \bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^{n,1}-}^2 \leq D_1$, gdzie D_1 zależy od d, c, p, q, r, C_g^N i C_f . Powtarzając powyższe rozumowanie dla momentów zatrzymania

$$\begin{aligned} \tau_N^{n,k+1} &= \inf\{t > \tau_N^{n,k}; C_1 \max\{V_1(J^{n,a})_{[\tau_N^{n,k}, t]}^2, V_1(D^{n,a})_{[\tau_N^{n,k}, t]}^2, [M^{n,a}]_t - [M^{n,a}]_{\tau_N^{n,k}}, \\ &\quad \langle M^{n,a} \rangle_t - \langle M^{n,a} \rangle_{\tau_N^{n,k}}, V_p(A^n)_{[\tau_N^{n,k}, t]}^2\} > 1/2\} \wedge \tau_N^n, \quad k, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

uzyskujemy oszacowanie:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} EV_q(X^n)_{[\tau_N^{n,k}, \tau_N^{n,k+1})}^2 \leq D_k = D_k(d, c, p, q, r, C_g^N, C_f), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Stąd oraz z faktu, iż $|\Delta Z_{\tau_N^{n,k}}^n| \mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}} \leq N + a$ i $|\Delta A_{\tau_N^{n,k}}^n| \mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}} \leq N$, wnioskujemy podobnie jak w (2.30), że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & E \left(|\Delta X_{\tau_N^{n,k}}^n|^2 \mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}} \right) \\ & \leq 4(d+1)^2 \left(E \bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^{n,k}-}^2 + E \left(|f(\tau_N^{n,k}, X_{\tau_N^{n,k}-}^n) \Delta Z_{\tau_N^{n,k}}^n|^2 \mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}} \right) \right. \\ & \quad \left. + E \left(|g(\tau_N^{n,k}, X_{\tau_N^{n,k}-}^n) \Delta A_{\tau_N^{n,k}}^n|^2 \mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}} \right) \right) + 4d^2 E \left(\bar{V}_q(H^n)_{\tau_N^{n,k}-}^2 \mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}} \right) \\ & \leq 4(d+1)^2 \left(E \bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^{n,k}-}^2 + (C_f^2(N+a)^2 + (C_g N)^2) E \left(1 + \bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^{n,k}-} \right)^2 \right) + 4(dN)^2 \\ & = D'_k = D'_k(d, c, p, q, f, g, N). \end{aligned} \quad (4.19)$$

W konsekwencji $\sup_n EV_q(X^n)_{[\tau_N^{n,k}, \tau_N^{n,k+1})}^2 \mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}} \leq D_k + D'_k$, $k \in \mathbb{N}$. Zatem dla zakończenia dowodu (4.12) wystarczy pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienna losowa $m^n = \sup\{k; \tau_N^{n,k} < \tau_N^n\}$ jest P -p.w. ograniczona przez pewną stałą C zależną od p, N i C_1 . Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $C_1 \geq 1$. Ponieważ argumentując podobnie jak w (2.31), mamy

$$\begin{aligned} m^n \frac{5}{2C_1} & < \sum_{k=1}^{m^n} V_1(J^{n,a})_{[\tau_N^{n,k-1}, \tau_N^{n,k}]} + V_1(D^{n,a})_{[\tau_N^{n,k-1}, t\tau_N^{n,k}]} + \left([M^{n,a}]_{\tau_N^{n,k}} - [M^{n,a}]_{\tau_N^{n,k-1}} \right) \\ & \quad + \left(\langle M^{n,a} \rangle_{\tau_N^{n,k}} - \langle M^{n,a} \rangle_{\tau_N^{n,k-1}} \right) + v_p(A^n)_{[\tau_N^{n,k-1}, \tau_N^{n,k}]} \leq 4N + N^p, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

więc możemy przyjąć $C = 2C_1(4N + N^p)/5$, kończąc tym samym dowód (4.12).

Z twierdzenia 1.37 i uwagi 1.38 wiemy, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\tau_N^n \leq T) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (4.21)$$

Ponadto dzięki (4.12) dla dowolnej stałej $\eta > 0$

$$P(\bar{V}_q(X^n)_T > \eta) \leq P(\tau_N^n \leq T) + P(\bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^n-} > \eta) \leq P(\tau_N^n \leq T) + D\eta^{-2},$$

co razem z (4.21) kończy dowód twierdzenia. \square

Twierdzenie 4.13. *Załóżmy, że funkcje f i g spełniają (G1) oraz że f jest funkcją ciągłą. Jeżeli $\{(X^n, K^n)\}$ jest ciągiem rozwiązań równań (4.11) o lokalnie skończonej q -wariacji, ciągi $\{V_p(A^n)_T\}$, $\{\bar{V}_q(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$, $\{Z^n\}$ jest ciągiem semimartyngałów spełniających warunki (UT) i*

$$(X_0^n, Z^n, A^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X_0, Z, A, L, U) \quad \text{w } \mathbb{R}^d \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}),$$

to ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (4.8) o lokalnie skończonej q -wariacji. Jeśli dodatkowo równanie (4.8) posiada własność jednoznaczności trajektorii, to $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$, gdzie (X, K) jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem (4.8) wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji.

Dowód. Z lematu 4.12 wiemy, że ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Korzystając z (4.10), otrzymujemy, że dla $r = q/\alpha \vee 1/\beta$ ciąg $\{\bar{V}_r(g(\cdot, X^n))_T\}$ jest również ograniczony według prawdopodobieństwa. Dalsza część dowodu przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 3.10. Jedyną modyfikacją polega na tym, że korzystamy z wniosków 4.5 i 4.6 zamiast twierdzeń 3.1 i 3.2. \square

4.3 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań srr z barierami względem p -semimartynałów

Rozważmy schemat Eulera dla równania (4.8). Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (X^n, K^n) dany będzie wzorem: $(X_0^n, K_0^n) = (X_0, K_0)$,

$$(X_t^n, K_t^n) = (X_{t_{n,k}}^n, K_{t_{n,k}}^n), \quad t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

gdzie

$$\begin{cases} Y_{t_{n,k+1}}^n &= Y_{t_{n,k}}^n + f(t_{n,k}, X_{t_{n,k}}^n)(Z_{t_{n,k+1}} - Z_{t_{n,k}}) \\ &\quad + g(t_{n,k}, X_{t_{n,k}}^n)(A_{t_{n,k+1}} - A_{t_{n,k}}), \\ X_{t_{n,k+1}}^n &= \max\{\min\{X_{t_{n,k}}^n + (Y_{t_{n,k+1}}^n - Y_{t_{n,k}}^n), U_{t_{n,k+1}}\}, L_{t_{n,k+1}}\}, \\ K_{t_{n,k+1}}^n &= K_{t_{n,k}}^n + (X_{t_{n,k+1}}^n - X_{t_{n,k}}^n) - (Y_{t_{n,k+1}}^n - Y_{t_{n,k}}^n) \end{cases} \quad (4.22)$$

oraz ciąg podziałów $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ jest taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ i $\text{diam}(\pi_n) \rightarrow 0$.

Twierdzenie 4.14. *Niech funkcje f i g spełniają (G1) oraz f będzie funkcją ciągłą. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej q -wariacji, spełniający warunek: $L \leq H \leq U$. Wówczas ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ zdefiniowany w (4.22) jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (4.8) o lokalnie skończonej q -wariacji. W konsekwencji równanie (4.8) posiada słabe rozwiązanie o lokalnie skończonej q -wariacji.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{cases} (X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n), \\ \text{gdzie } Y_t^n = X_0 + \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) dZ_s^n + \int_0^t g(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) dA_s^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (4.23)$$

oraz $Z_t^n = Z_{t_{n,k}}$, $A_t^n = A_{t_{n,k}}$, $L_t^n = L_{t_{n,k}}$, $U_t^n = U_{t_{n,k}}$, $\varrho_t^n = t_{n,k}$, $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech dodatkowo $H_t^n = H_{t_{n,k}}$ dla $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $V_p(A^n)_T \leq V_p(A)_T$, $V_q(H^n)_T \leq V_q(H)_T$, $T \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ oraz ciąg $\{Z^n\}$ spełnia warunek

(UT), więc stosując argumenty z dowodu lematu 4.12, możemy pokazać, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Połóżmy:

$$\begin{cases} (\bar{X}^n, \bar{K}^n) = ESP(\bar{Y}^n, L^n, U^n), \\ \text{gdzie } \bar{Y}_t^n = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}^n) dZ_s^n + \int_0^t g(s, X_{s-}^n) dA_s^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Pokażemy, że

$$\sup_{t \leq T} |X_t^n - \bar{X}_t^n| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \text{ oraz } \sup_{t \leq T} |K_t^n - \bar{K}_t^n| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0. \quad (4.24)$$

Korzystając z lematu 2.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T} |X_t^n - \bar{X}_t^n| &\leq 2 \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) - f(s, X_{s-}^n) dZ_s^n \right| \\ &\quad + 2V_q \left(\int_0^t g(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) - g(s, X_{s-}^n) dA_s^n \right)_T \\ &\leq 2I^{n,1} + 2I^{n,2}. \end{aligned}$$

Analogicznie do (2.51) dla $r = q/\alpha \vee 1/\beta$ oraz $\gamma \in (1 - 1/p, 1/r)$ mamy, że

$$\begin{aligned} I^{n,2} &\leq K_{p,1/\gamma} V_{1/\gamma} \left(g(\varrho_{-}^n, X_{-}^n) - g(\cdot, X_{-}^n) \right)_T V_p(A)_T \\ &\leq K_{p,1/\gamma} \text{Osc}(g(\varrho_{-}^n, X_{-}^n) - g(\cdot, X_{-}^n))_{[0,T]}^{1-r\gamma} V_r \left(g(\varrho_{-}^n, X_{-}^n) - g(\cdot, X_{-}^n) \right)_T^{r\gamma} V_p(A)_T \\ &\leq K_{p,1/\gamma} \left(2 \sup_{t \leq T} |g(\varrho_{-}^n, X_{-}^n) - g(\cdot, X_{-}^n)| \right)^{1-r\gamma} \left(2C_g^T (1 + \bar{V}_q(X^n)_T) \right)^{r\gamma} V_p(A)_T \\ &\leq C^n \sup_{t \leq T} |\varrho_{t-}^n - t|^{\beta(1-r\gamma)}, \end{aligned}$$

gdzie $\{C^n\}$ jest ciągiem zmiennych losowych ograniczonym według prawdopodobieństwa. W konsekwencji $I^{n,2} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. Ustalmy $a > 0$ oraz rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozkład Z^n postaci $Z^n = Z_0^n + J^{n,a} + M^{n,a} + D^{n,a}$ (patrz 1.17). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} I^{n,1} &\leq \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) - f(s, X_{s-}^n) dJ_s^{n,a} \right| + \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) - f(s, X_{s-}^n) dD_s^{n,a} \right| \\ &\quad + \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) - f(s, X_{s-}^n) dM_s^{n,a} \right| \\ &\leq \sup_{t \leq T} |f(\varrho_{t-}^n, X_{t-}^n) - f(t, X_{t-}^n)| V_1(J^{n,a})_T + \sup_{t \leq T} |f(\varrho_{t-}^n, X_{t-}^n) - f(t, X_{t-}^n)| V_1(D^{n,a})_T \\ &\quad + \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) - f(s, X_{s-}^n) dM_s^{n,a} \right| = I_j^{n,1} + I_d^{n,1} + I_m^{n,1}. \end{aligned}$$

Z faktu, że f jest funkcją ciągłą oraz że ciągi $\{V_1(J^{n,a})_T\}$, $\{V_1(D^{n,a})_T\}$, $\{\sup_{t \leq T} |X_t^n|\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, wnioskujemy zbieżność $I_j^{n,1} + I_d^{n,1} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. Natomiast

stosując nierówność Dooba i Lenglarta-Rebolledo, dla dowolnych $\varepsilon, \eta > 0$ dostajemy

$$\begin{aligned} & P \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) - f(s, X_{s-}^n) dM_s^{n,a} \right| \geq \varepsilon \right) \\ & \leq 4\varepsilon^{-2} E \left(\sup_{t \leq T} \left| f(\varrho_{t-}^n, X_{t-}^n) - f(t, X_{t-}^n) \right|^2 \langle M^{n,a} \rangle_T \wedge \eta \right) \\ & \quad + P \left(\sup_{t \leq T} \left| f(\varrho_{t-}^n, X_{t-}^n) - f(t, X_{t-}^n) \right|^2 \langle M^{n,a} \rangle_T > \eta \right), \end{aligned}$$

co pociąga zbieżność $I_m^{n,1} \xrightarrow{P} 0$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla ciągu $\{K^n - \bar{K}^n\}$, otrzymujemy (4.24). Dalsza część dowodu przebiega analogicznie do dowodu wniosku 3.11. \square

Fakt 4.15. *Niech funkcje f i g spełniają (G1) oraz (G2). Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej q -wariacji, spełniający warunek: $L \leq H \leq U$. Wówczas równanie (4.8) posiada własność jednoznaczności trajektorii wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania $(\bar{X}^1, \bar{K}^1), (\bar{X}^2, \bar{K}^2)$ równania (4.8) zdefiniowane na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ oraz $\mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{Z}, \bar{A}, \bar{L}, \bar{U}) = \mathcal{L}(X_0, Z, A, L, U)$. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz połączmy $\bar{\tau}_N = \inf\{t; \max\{\bar{V}_q(\bar{X}^1)_t, \bar{V}_q(\bar{X}^2)_t\} > N\} \wedge N$, $N \in \mathbb{R}^+$. Ponieważ $\tau_N \uparrow \infty$ \bar{P} -p.w. dla zakończenia dowodu wystarczy rozważać procesy zastopowane w $\bar{\tau}_N-$. Dla uproszczenia notacji będziemy pomijać znak $\bar{\tau}_N-$ w górnym indeksie. Ustalmy $a > 0$ oraz rozważmy rozkład semimartynału \bar{Z} : $\bar{Z}_t = \bar{Z}_0 + \bar{J}_t^a + \bar{M}_t^a + \bar{D}_t^a$, $t \in \mathbb{R}^+$ (patrz (1.17)).

Korzystając z wniosku 2.8, dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-}^2 \\ & \leq 4(d+1)^2 \left(V_1 \left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{J}_s^a \right)_{\tau-}^2 + V_1 \left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{D}_s^a \right)_{\tau-}^2 \right. \\ & \quad \left. + V_q \left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{M}_s^a \right)_{\tau-}^2 + V_p \left(\int_0^\cdot g(s, \bar{X}_{s-}^1) - g(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{A}_s \right)_{\tau-}^2 \right). \end{aligned}$$

Niech $r = q/\alpha_N \vee 1/\beta$. Stosując (1.3) oraz lemat 2.19, dostajemy

$$\begin{aligned} & V_p \left(\int_0^\cdot g(s, \bar{X}_{s-}^1) - g(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{A}_s \right)_{\tau-} \\ & \leq K_{p,r} V_r(g(\cdot, \bar{X}^1) - g(\cdot, \bar{X}^2))_{\tau-} V_p(\bar{A})_{\tau-} \\ & \leq K_{p,r} (C_{g,N})^{d^2} \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-} \left(1 + \tau^\beta + V_q(\bar{X}^1)_{\tau-}^{\alpha_N} + V_q(\bar{X}^2)_{\tau-}^{\alpha_N} \right) V_p(\bar{A})_{\tau-}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} & V_1 \left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{J}_s^a \right)_{\tau-} \leq \int_0^{\tau-} |f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2)| dV_1(\bar{J}^a)_s \\ & \leq C_{f,N} \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-} V_1(\bar{J}^a)_{\tau-} \end{aligned}$$

oraz analogicznie

$$V_1 \left(\int_0^{\cdot} f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{D}_s^a \right)_{\tau-} \leq C_{f,N} \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-} V_1(\bar{D}^a)_{\tau-}.$$

Oprócz tego na mocy faktu 1.41 mamy, że

$$\begin{aligned} & EV_q \left(\int_0^{\cdot} f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2) d\bar{M}_s^a \right)_{\tau-}^2 \\ & \leq K(q) E \int_0^{\tau-} |f(s, \bar{X}_{s-}^1) - f(s, \bar{X}_{s-}^2)|^2 d([\bar{M}^a]_s + \langle \bar{M}^a \rangle_s) \\ & \leq K(q) C_{f,N}^2 E \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-}^2 ([\bar{M}^a]_{\tau-} + \langle \bar{M}^a \rangle_{\tau-}). \end{aligned}$$

Zatem istnieje stała C zależna tylko od $d, p, q, N, \alpha_N, C_{g,N}$ i $C_{f,N}$ taka, że dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau > 0$ mamy

$$E \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-}^2 \leq CE(\bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-}^2 B_{\tau-}^a),$$

gdzie $B_t^a = \max\{V_1(\bar{J}^a)_t^2, V_1(\bar{D}^a)_t^2, [\bar{M}^a]_t, \langle \bar{M}^a \rangle_t, V_p(\bar{A})_t^2\}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Niech

$$\tau = \inf\{t > 0; C \max\{V_1(\bar{J}^a)_t^2, V_1(\bar{D}^a)_t^2, [\bar{M}^a]_t, \langle \bar{M}^a \rangle_t, V_p(\bar{A})_t^2\} > 1/2\}.$$

Wówczas $E \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-}^2 \leq 2^{-1} E \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-}^2$, więc $\bar{X}^1 = \bar{X}^2$ \bar{P} -p.w. na przedziale $[0, \tau]$. Z uwagi 2.3.3 wiemy, że

$$\bar{X}_\tau^j = \max\{\min\{\bar{X}_{\tau-}^j + f(\tau, \bar{X}_{\tau-}^j) \Delta \bar{Z}_\tau + g(\tau, \bar{X}_{\tau-}^j) \Delta \bar{A}_\tau, \bar{U}_\tau\}, \bar{L}_\tau\}, \quad j = 1, 2,$$

więc $\bar{X}^1 = \bar{X}^2$ \bar{P} -p.w. na domkniętym przedziale $[0, \tau]$. Niech teraz $\tau_1 = \tau$,

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k; C \max\{V_1(\bar{J}^a)_{[\tau_k, t]}^2, V_1(\bar{D}^a)_{[\tau_k, t]}^2, [\bar{M}^a]_t - [\bar{M}^a]_{\tau_k}, \\ \langle \bar{M}^a \rangle_t - \langle \bar{M}^a \rangle_{\tau_{k-1}}, V_p(\bar{A})_{[\tau_k, t]}^2\} > 1/2\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Powtarzając powyższe rozumowanie, wnioskujemy, że $\bar{X}^1 = \bar{X}^2$ \bar{P} -p.w. na przedziałach $[\tau_{k-1}, \tau_k]$. Ponieważ $\tau_k \uparrow \infty$ \bar{P} -p.w., więc dowód faktu został zakończony. \square

Twierdzenie 4.16. *Niech funkcje f i g spełniają (G1) oraz (G2). Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej q -wariacji, spełniający warunek: $L \leq H \leq U$. Wówczas równanie (4.8) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie (X, K) wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji. Ponadto jeżeli zdefiniujemy $\{(X^n, K^n)\}$ jako ciąg iteracji Picarda dla równania (4.8) postaci: $(X^0, K^0) = ESP(X_0, L, U)$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L, U)$, gdzie $Y^n = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X_s^{n-1}) dZ_s + \int_0^\cdot g(s, X_s^{n-1}) dA_s$, to*

$$(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{P}} (X, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Dowód. Zauważmy, że z twierdzenia 4.2, faktu 1.41 oraz wniosku 2.9 wynika, iż użyte w definicji ciągu $\{(X^n, K^n)\}$ całki są poprawnie określone. Powtarzając argumenty z dowodu lematu 4.12, otrzymujemy, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa.

Rozważmy dwa dowolne podciągi $\{m\} \subset \{n\}$, $\{l\} \subset \{n\}$. Analogicznie do dowodu twierdzenia 4.13, wykorzystując wniosek 4.5, dostajemy, że ciąg $\{(X^m, K^m, X^l, K^l, Z, A, L, U)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{8d})$. Zatem możemy wybrać dalsze podciągi $\{m_k\} \subset \{m\}$, $\{l_k\} \subset \{l\}$ takie, że

$$(X^{m_k}, K^{m_k}, X^{l_k}, K^{l_k}, Z, A, L, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\bar{X}, \bar{K}, \bar{X}', \bar{K}', \bar{Z}, \bar{A}, \bar{L}, \bar{U}) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{8d}).$$

Stosując wniosek 4.6, otrzymujemy

$$(Y^{m_k}, Y^{l_k} L, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\bar{Y}, \bar{Y}', L, U) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}),$$

gdzie $\bar{Y} = \bar{X}_0 + \int_0^\cdot f(s, \bar{X}_{s-}) d\bar{Z}_s + \int_0^\cdot g(s, \bar{X}_{s-}) d\bar{A}_s$ oraz $\bar{Y}' = \bar{X}'_0 + \int_0^\cdot f(s, \bar{X}'_{s-}) d\bar{Z}_s + \int_0^\cdot g(s, \bar{X}'_{s-}) d\bar{A}_s$. Na mocy twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5 dostajemy

$$(X^{m_k}, K^{m_k}) = ESP(Y^{m_k}, L, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} ESP(\bar{Y}, \bar{L}, \bar{U}) = (\bar{X}, \bar{K}) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$$

oraz

$$(X^{l_k}, K^{l_k}) = ESP(Y^{l_k}, L, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} ESP(\bar{Y}', \bar{L}, \bar{U}) = (\bar{X}', \bar{K}') \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Natomiast z faktu 1.36 wynika, iż $P(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$ i $P(V_q(\bar{X}')_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. W konsekwencji (\bar{X}, \bar{K}) , (\bar{X}', \bar{K}') są dwoma rozwiązaniami (4.8) o lokalnie skończonej q -wariacji, zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, \bar{P})$. Korzystając z faktu 4.15 oraz twierdzenia 1.31, uzyskujemy zbieżność $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{P}} (X, K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$.

Stosując ponownie fakt 1.36 dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, dostajemy $P(V_q(X)_T < \infty) = 1$. Argumentując podobnie jak w dowodzie faktu 4.15 pokazujemy, że $(X, K) = ESP(Y, L, U)$ P -p.w., gdzie $Y = \bar{X}_0 + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}) dA_s$. Ponieważ z uwagi 3.4.2 wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces (X^n, K^n) jest $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany, proces graniczny (X, K) jest również $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany, więc (X, K) jest jednoznaczным mocnym rozwiązaniem (4.8) wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji. \square

Rozdział 5

Srr względem ułamkowego ruchu Browna

5.1 Aproksymacja całki względem ułamkowego ruchu Browna

Problem aproksymacji ułamkowego ruchu Browna B^H był przedmiotem badań wielu autorów. Sottinen [79] pokazał, że proces B^H można aproksymować za pomocą tzw. zakłóconego błędzenia losowego. Podobne rezultaty zostały uzyskane później przez Nieminena [56] oraz Słomińskiego i Ziemkiewicza [78]. Parczewski [60] badał natomiast aproksymację procesu $Y^H = \int_0^\cdot \sigma_s dB_s^H$ zdefiniowanego w (1.7) w przypadku, gdy σ jest funkcją ciągłą. We wszystkich powyższych pracach autorzy wykorzystywali znaną reprezentację całkową ułamkowego ruchu Browna B^H z pracy [15], w której dla $H > 1/2$ Decreusefond i Üstünel pokazali, że

$$B_t^H = \int_0^t z^H(t, s) dW_s, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (5.1)$$

W powyższym wzorze W jest procesem Wienera,

$$z^H(t, s) = \begin{cases} c_H s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2} (u-s)^{H-3/2} du & \text{dla } t > s \\ 0 & \text{dla } t \leq s, \end{cases}$$

gdzie $c_H = (\frac{H(2H-1)}{\beta(H-1/2, 2-2H)})^{1/2}$, $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ oznacza funkcję beta Eulera. Poniżej przedstawiamy podstawowe własności funkcji z^H , które wynikają bezpośrednio z definicji.

- (i) z^H jest jednostajnie ciągła na $[0, T] \times [\varepsilon, T]$ dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $T \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) $z^H(\cdot, s)$ jest rosnąca dla dowolnego $s \in \mathbb{R}^+$,
- (iii) $z^H(t, \cdot)$ jest malejąca dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^+$,
- (iv) funkcja $z^H(t, \cdot) - z^H(s, \cdot)$ jest malejąca dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}^+$, $s \leq t$,

(v) $EB_t^H B_s^H = \int_0^{t \wedge s} z^H(t, u) z^H(s, u) du < \infty$ dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definicja 5.1. Tablicę całkowlanych zmiennych losowych $\{\{X_{n,k}\}\}$ nazywamy *tablicą różnic martyngałowych* względem tablicy σ -algebr $\{\{\mathcal{F}_{n,k}\}\}$, jeżeli

- (i) $\mathcal{F}_{n,k} \subset \mathcal{F}_{n,k+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- (ii) $X_{n,k}$ jest $\mathcal{F}_{n,k}$ -mierzalna, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- (iii) $E(X_{n,k+1} | \mathcal{F}_{n,k}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Niech $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$ oraz $Y^H = \int_0^\cdot \sigma_s dB_s^H$ będzie procesem zdefiniowanym w (1.7). Zdefiniujemy aproksymację Y^H wzorem:

$$Y_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} \left(n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s ds \right) (B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}), \quad (5.2)$$

gdzie

$$B_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} z^H([nt]/n, k/n) X_{n,k} = \int_0^{[nt]/n} z^{H,n}([nt]/n, s) dW_s^n, \quad (5.3)$$

$\{\{X_{n,k}\}\}$ jest pewną tablicą różnic martyngałowych, $W_t^n = \sum_{k=1}^{[nt]} X_{n,k}$ oraz $z^{H,n}(t, s) = z^H(t, k/n)$ dla $s \in ((k-1)/n, k/n]$, $n, k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Twierdzenie 5.2. Jeżeli $W^n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, gdzie W jest procesem Wienera oraz

$$\max_{k \in \mathbb{N}} EX_{n,k}^2 \leq \frac{C}{n} \quad \text{dla pewnej stałej } C > 0, \quad (5.4)$$

to ciąg procesów $\{Y^{H,n}\}$ zbiega słabo do Y^H w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ oraz istnieje stała $C(H) > 0$ taka, że dla dowolnych $0 \leq t_1 \leq t_2$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$E|Y_{t_2}^{H,n} - Y_{t_1}^{H,n}|^2 \leq C(H) \left(\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} |\sigma_s|^{1/H} ds \right)^{2H}. \quad (5.5)$$

Dowód. Zaczynamy od dowodu nierówności (5.5). Oznaczmy: $\sigma_t^n = n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s ds$, $t \in [(k-1)/n, k/n)$, $k, n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\begin{aligned} Y_t^{H,n} &= \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} \sigma_{(k-1)/n}^n \sum_{i=1}^k \left(z^H(k/n, i/n) - z^H((k-1)/n, i/n) \right) X_{ni} \\ &= \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\sum_{k=i}^{[nt]} \sigma_{(k-1)/n}^n \Delta_n^k z^{H,n}(k/n, i/n) \right) X_{ni}, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta_n^k z^{H,n}(k/n, t) = z^H(k/n, t) - z^H((k-1)/n, t)$, $n, k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Korzystając z powyższej równości, (5.4), a następnie z własności (iv) i (v) funkcji z^H , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& E \left(\int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,n} \right)^2 \\
& \leq C \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\sum_{k=i}^{[nt]} \sigma_{(k-1)/n}^n \Delta_n^k z^{H,n}(k/n, i/n) \right)^2 \frac{1}{n} \\
& = C \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\sum_{k,l=i}^{[nt]} \sigma_{(k-1)/n}^n \sigma_{(l-1)/n}^n \Delta_n^k z^{H,n}(k/n, i/n) \Delta_n^l z^{H,n}(l/n, i/n) \right) \frac{1}{n} \\
& \leq C \sum_{i=1}^{[nt]} \sum_{k,l=i}^{[nt]} |\sigma_{(k-1)/n}^n \sigma_{(l-1)/n}^n| \int_{(i-1)/n}^{i/n} \Delta_n^k z^{H,n}(k/n, s) \Delta_n^l z^{H,n}(l/n, s) ds \\
& = C \sum_{k,l=1}^{[nt]} \sum_{i=1}^{k \wedge l} |\sigma_{(k-1)/n}^n \sigma_{(l-1)/n}^n| \int_{(i-1)/n}^{i/n} \Delta_n^k z^{H,n}(k/n, s) \Delta_n^l z^{H,n}(l/n, s) ds \\
& = C \sum_{k,l=1}^{[nt]} |\sigma_{(k-1)/n}^n \sigma_{(l-1)/n}^n| E(B_{k/n}^H B_{l/n}^H - B_{(k-1)/n}^H B_{l/n}^H - B_{k/n}^H B_{(l-1)/n}^H + B_{(k-1)/n}^H B_{(l-1)/n}^H) \\
& = CE \left(\int_0^{[nt]/n} |\sigma_{s-}^n| dB_s^H \right)^2.
\end{aligned}$$

Dzięki (1.9) oraz nierówności Höldera mamy

$$\begin{aligned}
E \left(\int_0^{[nt]/n} |\sigma_{s-}^n| dB_s^H \right)^2 & \leq C(2, H) \left(\int_0^{[nt]/n} |\sigma_{s-}^n|^{1/H} ds \right)^{2H} \\
& = C(2, H) \left(\sum_{k=1}^{[nt]} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left| n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_u du \right|^{1/H} ds \right)^{2H} \\
& \leq C(2, H) \left(\sum_{k=1}^{[nt]} \int_{(k-1)/n}^{k/n} n \int_{(k-1)/n}^{k/n} |\sigma_u|^{1/H} du ds \right)^{2H} \\
& = C(2, H) \left(\int_0^{[nt]/n} |\sigma_s|^{1/H} ds \right)^{2H}.
\end{aligned}$$

Stosując powyższe oszacowanie dla $t = t_2$ oraz $\sigma_s = \sigma_s \mathbf{1}_{\{s > [nt_1]/n\}}$, uzyskujemy (5.5). Nierówność (5.5) i twierdzenie 1.34 implikują jednostajną jędrność ciągu $\{Y^{H,n}\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Aby pokazać zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych, załóżmy najpierw, że σ jest funkcją klasy \mathcal{C}^1 . W tym przypadku wiadomo, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{t \leq T} |\sigma_t^n - \sigma_t| \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} V^1(\sigma^n)_T < \infty. \quad (5.6)$$

Łatwo zauważyć, że proces $Y^{H,n}$ możemy przedstawić w postaci

$$Y_t^{H,n} = \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,n} = \sigma_t^n B_t^{H,n} - \int_0^t B_{s-}^{H,n} d\sigma_s^n \\ - \sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_{k/n}^n - \sigma_{(k-1)/n}^n) (B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}), \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}.$$

Uwzględniając (5.5) i (5.6), dostajemy dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$:

$$E \sup_{t \leq T} \left| \sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_{k/n}^n - \sigma_{(k-1)/n}^n) (B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}) \right| \\ \leq V_1(\sigma^n)_T \left(E \left[\max_{k=1, \dots, [nT]} |B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}|^2 \right] \right)^{1/2} \\ \leq C(H)^{1/2} V_1(\sigma^n)_T n^{-H} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.7)$$

Ponadto z (5.6) wynika, że $\{\sigma^n\}$ spełnia warunek (UT). Ponieważ na mocy [78, Theorem 3.1] mamy, że $B^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} B^H$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, stosując twierdzenie 1.39, otrzymujemy zbieżność

$$\int_0^\cdot B_{s-}^{H,n} d\sigma_s^n \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_0^\cdot B_s^H d\sigma_s \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}). \quad (5.8)$$

Z ciągłości σ oraz trajektorii B^H wnioskujemy, iż $\sup_{t \leq T} |\sigma_t^n B_t^{H,n} - \sigma_t B_t^H| \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, więc korzystając z (5.7), (5.8) oraz wzoru na całkowanie przez części:

$$\sigma_t B_t^H = \int_0^t \sigma_s dB_s^H + \int_0^t B_s^H d\sigma_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

(patrz np. [51, Section 2.7.2]), uzyskujemy

$$\int_0^\cdot \sigma_{s-}^n dB_s^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_0^\cdot \sigma_s dB_s^H \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).$$

W ogólnym przypadku, dla $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$ wystarczy zauważyć, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ istnieje ciąg $\{\sigma^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ funkcji klasy \mathcal{C}^1 taki, że $\|\sigma - \sigma^\varepsilon\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}} \leq \varepsilon$. Na mocy (5.5) dla dowolnych $t \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$E \left(Y_t^{H,n} - \int_0^t \sigma_{s-}^{\varepsilon,n} dB_s^{H,n} \right)^2 = E \left(\int_0^t (\sigma_{s-}^n - \sigma_{s-}^{\varepsilon,n}) dB_s^{H,n} \right)^2 \leq C(H) \varepsilon^2.$$

Natomiast z (1.9) wynika, że $E(Y_t^H - \int_0^t \sigma_s^\varepsilon dB_s^H)^2 = E(\int_0^t (\sigma_s - \sigma_s^\varepsilon) dB_s^H)^2 \leq C(2, H) \varepsilon^2$ dla $t \in \mathbb{R}^+$. Zatem rozkłady skończenie wymiarowe ciągu $\{Y^{H,n}\}$ zbiegają do rozkładów skończenie wymiarowych Y^H , co kończy dowód twierdzenia. \square

Twierdzenie 5.3. Niech $\{\{X_{n,k}\}\}$ będzie tablicą różnic martyngałowych spełniającą (5.4) oraz

$$\sup_{t \leq T} |W_t^n - W_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie W jest procesem Wienera. Wówczas ciąg $\{Y^{H,n}\}$ spełnia (5.5) oraz

$$\sup_{t \leq T} |Y_t^{H,n} - Y_t^H| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że

$$\sup_{t \leq T} |B_t^{H,n} - B_t^H| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (5.9)$$

W tym celu ustalmy $\varepsilon > 0$ i $t \in \mathbb{R}^+$ oraz zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$B_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[n\varepsilon]} z^H([nt]/n, k/n) X_{n,k} + \sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]} z^H([nt]/n, k/n) X_{n,k} = B_t^{H,n,1}(\varepsilon) + B_t^{H,n,2}(\varepsilon).$$

W dowodzie twierdzenia 3.1 z pracy [78] pokazano, że $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_n E(B_t^{H,n,1}(\varepsilon))^2 = 0$. Ponadto

$$\begin{aligned} \left| B_t^{H,n,2}(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^t z^H(t, s) dW_s \right| &\leq \left| \sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]} z^H([nt]/n, k/n) (X_{n,k} - \Delta_n^k W_{k/n}) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]} z^H([nt]/n, k/n) \Delta_n^k W_{k/n} - \int_{\varepsilon}^t z^H(t, s) dW_s \right| \\ &= I_t^{n,1} + I_t^{n,2}, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta_n^k W_{k/n} = W_{k/n} - W_{(k-1)/n}$, $k, n \in \mathbb{N}$. W dowodzie twierdzenia 2.2 z pracy [87] pokazano zbieżność $I_t^{n,2} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, natomiast na mocy własności (iii) funkcji z^H otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} I_t^{n,1} &\leq 2 \sup_{s \leq t} |W_s^n - W_s| \left| \sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]} \int_{(k-1)/n}^{k/n} z^H([nt]/n, s) ds \right| \\ &= 2 \sup_{s \leq t} |W_s^n - W_s| \left| \int_{[n\varepsilon]/n}^{[nt]/n} z^H([nt]/n, s) ds \right| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0. \end{aligned}$$

Zatem $B_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} B_t^H$ dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$. Ponieważ (5.5) implikuje, że ciąg $\{B^{H,n}\}$ jest jednostajnie \mathcal{C} -jędry, dowód (5.9) został zakończony.

W dowodzie twierdzenia 5.2 pokazaliśmy, że ciąg $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie jędry w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, więc na mocy twierdzenia 1.30 wystarczy pokazać, że $Y_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} Y_t^H$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2 zakładamy dodatkowo, że σ jest funkcją klasy \mathcal{C}^1 .

Zauważmy, że dla dowolnych $t \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |Y_t^{H,n} - Y_t^H| &\leq \left| \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,n} - \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^H \right| + \left| \int_0^t (\sigma_{s-}^n - \sigma_s) dB_s^H \right| \\ &= I_t^{1,n} + I_t^{2,n}. \end{aligned}$$

Ponadto ze wzoru na całkowanie przez części

$$\begin{aligned} I_t^{n,1} &\leq \left| \sigma_t^n (B_t^{H,n} - B_t^H) \right| + \left| \int_0^t (B_{s-}^{H,n} - B_s^H) d\sigma_s^n \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_{k/n}^n - \sigma_{(k-1)/n}^n) (B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}) \right|. \end{aligned}$$

Stosując (5.6), (5.7) i (5.9), dostajemy zbieżność: $I^{1,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. Ponieważ korzystając z (1.9) i (5.6), otrzymujemy $E(I^{2,n})^2 \rightarrow 0$, dowód twierdzenia w przypadku $\sigma \in \mathcal{C}^1$ został zakończony. Aby uzasadnić tezę dla $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$, postępujemy podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2. \square

Przykład 5.4. Teza twierdzenia 5.3 zachodzi, jeżeli W jest standardowym procesem Wienera oraz

$$X_{nk} = W_{k/n} - W_{(k-1)/n}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

W tym przypadku potrafimy oszacować tempo zbieżności ciągu $Y^{H,n}$ do Y^H w normie \mathbb{L}^2 . Połóżmy

$$\varepsilon_n(\sigma, T) = \|\sigma^n - \sigma\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2 + \sup_{t \leq T} \left(\int_{([nt]/n)}^t |\sigma_s|^{1/H} ds \right)^{2H}, \quad n \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R}^+, \quad (5.10)$$

gdzie σ^n jest funkcją zdefiniowaną w dowodzie twierdzenia 5.2. Ponieważ $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$, jest jasne, że $\varepsilon_n(\sigma, T) \rightarrow 0$, $T \in \mathbb{R}^+$. Niech $\{B^{H,(n)}\}$ oznacza standardową dyskretyzację procesu B^H , tzn.

$$B_t^{H,(n)} = B_{(k-1)/n}^H, \quad t \in [(k-1)/n, k/n), \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Fakt 5.5. Jeżeli W jest standardowym procesem Wienera oraz

$$X_{nk} = W_{k/n} - W_{(k-1)/n}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ istnieje stała D taka, że

$$\sup_{t \leq T} E(Y_t^{H,n} - Y_t^H)^2 \leq D \left(\varepsilon_n(\sigma, T) + \|\sigma - h\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2 + \bar{V}_1(h)_T^2 \sup_{t \leq T} E|B_t^{H,n} - B_t^{H,(n)}|^2 \right)$$

dla każdej funkcji $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ o skończonej wariacji na $[0, T]$.

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$, $t \in [0, T]$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ σ^n ma dyskretną postać, więc

$$\int_0^{[nt]/n} \sigma_{s-}^n dB_s^H = \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,(n)}, \quad (5.12)$$

co pociąga, że

$$\begin{aligned} Y_t^{H,n} - Y_t^H &= \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,n} - \int_0^t \sigma_s dB_s^H \\ &= \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,n} - \int_{[nt]/n}^t \sigma_s dB_s^H - \int_0^{[nt]/n} (\sigma_s - \sigma_{s-}^n) dB_s^H - \int_0^t \sigma_{s-}^n dB_s^{H,(n)} \\ &= I_t^{n,1} - I_t^{n,2} - I_t^{n,3} - I_t^{n,4}. \end{aligned}$$

Dzięki (1.9) wiemy, że

$$E(I_t^{n,2})^2 + E(I_t^{n,3})^2 \leq C(2, H)\varepsilon_n(\sigma, T). \quad (5.13)$$

Zatem pozostaje oszacować różnicę $I_t^{1,n} - I_t^{4,n}$. Korzystając z (5.5), dla każdego $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ o skończonej wariacji otrzymujemy

$$E\left(\int_0^t (\sigma_{s-}^n - h_{s-}^n) dB_s^{H,n}\right)^2 \leq C(H)\|\sigma - h\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2, \quad (5.14)$$

gdzie h^n jest zdefiniowane analogicznie do σ^n . Ponadto, mając na uwadze fakt, że $B^{H,(n)}$ jest dyskretyzacją B^H

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t (\sigma_{s-}^n - h_{s-}^n) dB_s^{H,(n)}\right)^2 &= E\left(\int_0^{[nt]/n} \sigma_{s-}^n - h_{s-}^n dB_s^H\right)^2 \\ &\leq C(2, H)\|\sigma^n - h^n\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2 \leq C(2, H)\|\sigma - h\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Z (5.13)-(5.15) wnioskujemy, że dla dowodu wystarczy oszacować całkę $I_t^{n,5} = \int_0^t h_{s-}^n d(B^{H,n} - B^{H,(n)})_s$. W tym celu zauważmy, że

$$I_t^{n,5} = h_t^n (B_t^{H,n} - B_t^{H,(n)}) - \sum_{k=1}^{[nt]} (B_{k/n}^{H,n} - B_{k/n}^{H,(n)})(h_{k/n}^n - h_{(k-1)/n}^n).$$

W konsekwencji, stosując nierówność Schwarz'a, uzyskujemy

$$E(I_t^{n,5})^2 \leq 2\bar{V}_1(h^n)_T^2 E|B_t^{H,n} - B_t^{H,(n)}|^2 + 2V_1(h^n)_T^2 \max_{k=1,\dots,[nt]} E|B_{k/n}^{H,n} - B_{k/n}^{H,(n)}|^2.$$

Stąd oraz z nierówności $V_1(h^n)_T \leq V_1(h)_T$ otrzymujemy tezę. \square

Uwaga 5.6. Rozważmy aproksymacje procesu Y^H postaci

$$\bar{Y}_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} \left(n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s ds \right) (B_{k/n}^H - B_{(k-1)/n}^H), \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}. \quad (5.16)$$

Wówczas stosując oszacowania z dowodu faktu 5.5, możemy pokazać, że

$$\sup_{t \leq T} E\left(\bar{Y}_t^{H,n} - Y_t^H\right)^2 \leq D\varepsilon_n(\sigma, T), \quad T \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy również, że ciąg $\{\bar{Y}^{H,n}\}$ spełnia (5.5). Istotnie, dzięki (5.12) oraz (1.9) dla dowolnych $0 \leq t_1 \leq t_2$ i $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\begin{aligned} E|\bar{Y}_{t_2}^{H,n} - \bar{Y}_{t_1}^{H,n}|^2 &= E\left|\int_{t_1}^{t_2} \sigma_{s-}^n dB_s^{H,(n)}\right|^2 = E\left|\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} \sigma_{s-}^n dB_s^H\right|^2 \\ &\leq C(2, H)\left(\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} |\sigma_s^n|^{1/H} ds\right)^{2H} \leq C(2, H)\left(\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} |\sigma_s|^{1/H} ds\right)^{2H}, \end{aligned}$$

gdzie $B^{H,(n)}$ jest dany wzorem (5.11).

5.2 Aproksymacja rozwiązań srr względem ułamkowego ruchu Browna

Niech $B^H = (B^{H,1}, \dots, B^{H,d})$, gdzie $B^{H,1}, \dots, B^{H,d}$ są niezależnymi ułamkowymi ruchami Browna zdefiniowanymi na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$. W niniejszym podrozdziale badać będziemy aproksymacje rozwiązań równań postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) db_s + \int_0^t g(s, X_s) dY_s^H, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.17)$$

gdzie X_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalną zmienną losową o wartościach w \mathbb{R}^d , $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą o lokalnie skończonej wariacji, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$ oraz $Y^H = (Y^{H,1}, \dots, Y^{H,d})$, gdzie dla każdego $i = 1, \dots, d$ proces $Y^{H,i}$ jest całką Wienera: $Y^{H,i} = \int_0^\cdot \sigma_s^i dB_s^{H,i}$ dla $\sigma^i \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$. Ponieważ na mocy faktu 1.18 Y^H jest procesem o lokalnie skończonej p -wariacji dla $p > 1/H$, całkę względem Y^H definiujemy jako całkę Riemanna-Stieltjesa po trajektoriach. Mocne i słabe rozwiązania równania (5.17) definiujemy analogicznie jak w przypadku równań z barierami (patrz definicje 3.3 oraz 3.8).

Twierdzenie 5.7. *Załóżmy (H1) dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz (H2). Wówczas równanie (5.17) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie X w klasie procesów o lokalnie skończonej p -wariacji. Ponadto jeśli zdefiniujemy $\{X^n\}$ jako ciąg iteracji Picarda dla (5.17), tzn. $X^0 \equiv X_0$, $X^n = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}^{n-1}) db_s + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}^{n-1}) dY_s^H$, $n \in \mathbb{N}$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$*

$$\bar{V}_p(X^n - X)_T \longrightarrow 0 \quad P\text{-}p.w.$$

Dowód. Z uwagi 2.20.2 wynika, że dla P -prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $X(\omega)$ oraz dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(X^n(\omega) - X(\omega))_T \longrightarrow 0.$$

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces X^n jest $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany, proces graniczny X jest również $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany, co kończy dowód twierdzenia. \square

Będziemy aproksymować rozwiązania równania (5.17) za pomocą scentrowanych dyskretnych procesów gaussowskich postaci $Y_t^{H,n} = Y_{k/n}^{H,n}$, dla $t \in [k/n, (k+1)/n)$ spełniających warunek

$$E|Y_t^{H,n} - Y_s^{H,n}|^2 \leq \left(\int_{[ns]/n}^{[nt]/n} |\sigma_s|^{1/H} ds\right)^{2H}, \quad 0 \leq s < t \quad (5.18)$$

dla $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga 5.8. Z twierdzenia 5.2 wynika, że jeżeli $\{Y^{H,n}\} = \{(Y^{H,n,1}, \dots, Y^{H,n,d})\}$, gdzie dla każdego $i = 1, \dots, d$ ciąg $\{Y^{H,n,i}\}$ jest taki jak w (5.2) to $\{Y^{H,n}\}$ spełnia (5.18). Ponadto jest on ciągiem procesów gaussowskich, o ile $\{W^n = (W^{n,1}, \dots, W^{n,d})\}$ jest ciągiem procesów gaussowskich. Można łatwo sprawdzić, że również ciąg procesów zdefiniowany w (5.16) oraz ciąg dyskretyzacji procesu Y^H postaci $Y_t^{H,(n)} = Y_{k/n}^H$, dla $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ są ciągami procesów gaussowskich spełniających (5.18).

Zdefiniujmy ciąg $\{X^n\}$ następująco: $X_0^n = X_0$,

$$\begin{aligned} X_{(k+1)/n}^n &= X_{k/n}^n + f(k/n, X_{k/n}^n)(b_{(k+1)/n} - b_{k/n}) \\ &\quad + g(k/n, X_{k/n}^n)(Y_{(k+1)/n}^{H,n} - Y_{k/n}^{H,n}), \end{aligned} \quad (5.19)$$

gdzie $Y^{H,n}$ jest scentrowanym dyskretnym procesem gaussowskim spełniającym warunek (5.18) oraz $X_t^n = X_{k/n}^n$, $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 5.9. Załóżmy (H1) dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz ciągłość funkcji f . Wtedy ciąg $\{(X^n, Y^{H,n})\}$ jest jednostajnie \mathcal{C} -jędry. Jeżeli dodatkowo $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}^f} Y^H$, to każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (5.17) o lokalnie skończonej p -wariacji.

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Pokażemy najpierw, że dla każdego $p > 1/H$ ciąg $\{\bar{V}_p(Y^{H,n})_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Załóżmy najpierw dodatkowo, że funkcja σ jest ograniczona. Dzięki (5.18) dla każdego $r > 0$ istnieje $c(r) > 0$ takie, że $E|Y_t^{H,n} - Y_s^{H,n}|^r \leq c(r)|[nt]/n - [ns]/n|^{rH}$, $s, t \leq T$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $r > 1/H$, $p^* \in (0, H - 1/r)$ oraz

$$M_{p^*}^n = \sup_{s, t \leq T, [nt] \neq [ns]} \frac{|Y_t^{H,n} - Y_s^{H,n}|}{|[nt]/n - [ns]/n|^{p^*}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Powtarzając argumenty z dowodu kryterium ciągłości Kołmogorowa (patrz np. [64, Chapter 1 Theorem 2.1]), można pokazać, że $\sup_n \|M_{p^*}^n\|_r < \infty$. Ponieważ

$$|Y_t^{H,n} - Y_s^{H,n}| \leq M_{p^*}^n |[nt]/n - [ns]/n|^{p^*}, \quad s, t \leq T, n \in \mathbb{N}, \quad (5.20)$$

więc ciąg $\{V_p(Y^{H,n})_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa dla dowolnego $p > r/(Hr - 1)$. Przechodząc do granicy z $r \rightarrow \infty$, uzyskujemy ograniczoność według prawdopodobieństwa ciągu $\{V_p(Y^{H,n})_T\}$ dla $p > 1/H$. W ogólnym przypadku zamiast (5.20) możemy wykorzystać [33, Theorem 3.1].

Na mocy twierdzenia 1.34 $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie jędry w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, co pociąga, że $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y^H$. Ponieważ proces Y^H ma ciągłe trajektorie, więc ciąg $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie \mathcal{C} -jędry. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ X^n jest rozwiązaniem równania

$$X_t^n = X_0 + \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) db_s^n + \int_0^t g(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) dY_s^{H,n}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie $b_t^n = b_{k/n}$, $\varrho_t^n = k/n$, $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$\tau_n^u = \inf\{t; \max\{V_1(b^n)_t, V_p(Y^{H,n})_t\} > u\}, \quad n, u \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $V_1(b^n)_T \leq V_1(b)_T < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, więc $\lim_u \limsup_n P(\tau_n^u \leq T) = 0$. Ponadto na zbiorze $T < \tau_n^u$ zachodzi oszacowanie $\max\{V_1(b^n)_T, V_p(Y^{H,n})_T\} \leq u$, więc powtarzając argumenty z dowodu (2.42), uzyskujemy, że dla każdego $M > 0$

$$P(\bar{V}_p(X^n)_T > M) \leq P(\tau_n^u \leq T) + P(D = D(d, p, \alpha, \beta, X_0, C_g^T, C_f, u) \geq M).$$

Zatem ciąg $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest również ograniczony według prawdopodobieństwa. Dalsza część dowodu przebiega podobnie jak dowód wniosku 3.11. Najpierw definiujemy:

$$\bar{X}_t^n = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}^n) db_s^n + \int_0^t g(s, X_{s-}^n) dY_s^{H,n}, \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N} \quad (5.21)$$

oraz korzystając z (2.50) i (2.51), otrzymujemy

$$\sup_{t \leq T} |X_t^n - \bar{X}_t^n| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (5.22)$$

Następnie wykorzystując łączną zbieżność: $(b^n, Y^{H,n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (b, Y^H)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+1})$, twierdzenie 3.1 oraz (5.22), otrzymujemy jednostajną jędrność ciągu $\{(X^n, b^n, Y^{H,n})\}$. Zakładając, że $(Y^{H,n}, X^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y^H, X)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ i korzystając z twierdzenia 3.2 w sposób podobny jak w dowodzie twierdzenia 2.23, dostajemy

$$\begin{aligned} & \left(X^n, \int_0^\cdot f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) db_s^n + \int_0^\cdot g(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n) dY_s^{H,n} \right) \\ & \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(X, \int_0^\cdot f(s, X_s) db_s + \int_0^\cdot g(s, X_s) dY^H \right) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}), \end{aligned}$$

co pociąga, że X jest słabym rozwiązaniem (5.17). Ponieważ proces graniczny posiada ciągle trajektorie, ciąg $\{(X^n, Y^{H,n})\}$ jest jednostajnie \mathcal{C} -jędrny, co kończy dowód twierdzenia. \square

Wniosek 5.10. *Jeżeli f i g spełniają (H1) dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz dodatkowo f jest funkcją ciągłą, to równanie (5.17) posiada słabe rozwiązanie o lokalnie skończonej p -wariacji.*

Dowód. Niech W^1, \dots, W^d będą niezależnymi procesami Wienera oraz dla każdego $i = 1, \dots, d$ $\{Y^{H,n,i}\}$ będzie ciągiem procesów rozważanym w przykładzie 5.4. Wówczas $\{Y^{H,n} = (Y^{H,n,1}, \dots, Y^{H,n,d})\}$ spełnia założenia twierdzenia 5.9. \square

Twierdzenie 5.11. *Załóżmy (H1) dla pewnego $p \in (1/H, 2)$, (H2) oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $\{Y^{H,n}\}$ będzie ciągiem procesów gaussowskich takim jak w twierdzeniu 5.9 oraz $\{X^n\}$ będzie ciągiem zdefiniowanym w (5.19).*

(i) *Jeżeli $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}_f} Y^H$, to $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.*

(ii) *Jeżeli $Y_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} Y_t^H$ dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$, to*

$$\sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Powyżej X oznacza jednoznaczne mocne rozwiązanie równania (5.17) o lokalnie skończonej p -wariacji.

Dowód. (i) wynika z twierdzenia 5.9 oraz jednoznaczności rozwiązań równania (5.17).

Niech $\{\bar{X}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będzie procesem zdefiniowanym w (5.21). Dzięki zbieżności (5.22) dla dowodu wystarczy pokazać, że $\sup_{t \leq T} |\bar{X}_t^n - X_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, $T \in \mathbb{R}^+$. Na mocy twierdzenia 5.9 ciąg $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie jędrny, co razem z twierdzeniem 1.30 pociąga zbieżność: $\sup_{t \leq T} |Y_t^{H,n} - Y_t^H| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, $T \in \mathbb{R}^+$. Mając na uwadze twierdzenie Riesz, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $\sup_{t \leq T} |Y_t^{H,n} - Y_t^H| \rightarrow 0$ P -p.w. dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Analogicznie do dowodu twierdzenia 2.23 stosując fakt 2.22, dostajemy

$$\bar{X}^n \longrightarrow X_0 + \int_0^\cdot f(s, X_s) db_s + \int_0^\cdot g(s, X_s) dY_s^H \quad P\text{-p.w. w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).$$

Ponieważ proces graniczny posiada ciągle trajektorie, więc $\sup_{t \leq T} |\bar{X}_t^n - X_t| \rightarrow 0$ P -p.w. dla dowolnego $T \in \mathbb{R}^+$, co kończy dowód (ii) i całego twierdzenia. \square

5.3 Aproksymacja rozwiązań srr z barierami względem ułamkowego ruchu Browna

Niech $B^H = (B^{H,1}, \dots, B^{H,d})$, gdzie $B^{H,1}, \dots, B^{H,d}$ są niezależnymi ułamkowymi ruchami Browna zdefiniowanymi na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ oraz $Y^H = (Y^{H,1}, \dots, Y^{H,d})$, gdzie dla każdego $i = 1, \dots, d$ proces $Y^{H,i}$ jest całką Wienera: $Y^{H,i} = \int_0^\cdot \sigma_s^i dB_s^{H,i}$ dla $\sigma^i \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$. Ponadto niech L, U będą d -wymiarowymi procesami o ciągłych trajektoriach takimi, że $L \leq U$. Rozważmy następujące równanie z barierami:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) db_s + \int_0^t g(s, X_s) dY_s^H + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.23)$$

gdzie X_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalną, d -wymiarową zmienną losową, $L_0 \leq X_0 \leq U_0$, $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$. Na mocy faktu 1.18 równanie (5.23) jest szczególnym przypadkiem równania (3.9).

Twierdzenie 5.12. *Załóżmy (H1) dla pewnego $p \in (1/H, 2)$, (H2) oraz dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p -wariacji, spełniający warunek: $L \leq H \leq U$. Wówczas równanie (5.23) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie (X, K) wśród procesów o lokalnie skończonej p -wariacji. Ponadto, jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $X_0^n = X_0$ oraz (X^n, K^n) dany jest wzorem:*

$$(X_t^n, K_t^n) = (X_{k/n}^n, K_{k/n}^n), \quad t \in [k/n, (k+1)/n), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

gdzie

$$\begin{cases} Y_{(k+1)/n}^n &= Y_{k/n}^n + f(k/n, X_{k/n}^n)(b_{(k+1)/n} - b_{k/n}) + g(k/n, X_{k/n}^n)(Y_{(k+1)/n}^H - Y_{k/n}^H), \\ X_{(k+1)/n}^n &= \max\{\min\{X_{k/n}^n + (Y_{(k+1)/n}^n - Y_{k/n}^n), U_{(k+1)/n}\}, L_{(k+1)/n}\}, \\ K_{(k+1)/n}^n &= K_{k/n}^n + (X_{(k+1)/n}^n - X_{k/n}^n) - (Y_{(k+1)/n}^n - Y_{k/n}^n), \end{cases}$$

to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ zachodzi zbieżność:

$$\sup_{t \leq T} (|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \longrightarrow 0 \quad P\text{-}p.w.$$

Dowód. Wynika z wniosku 3.6 (ii), ciągłości funkcji b oraz ciągłości trajektorii procesów Y^H , L i U . \square

Twierdzenie 5.13. *Załóżmy (H1) dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz (H2). Niech $\{B^n\}$ będzie ciągiem procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ takim, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{V_1(B^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz $\{Y^{H,n}\}$ będzie ciągiem d -wymiarowych, dyskretnych, $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych procesów gaussowskich spełniającym warunek (5.18). Ponadto niech $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L^n \leq H^n \leq U^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{V_p(H^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $L_0^n \leq X_0^n \leq U_0^n$,*

$$(X^n, K^n) = ESP \left(X_0^n + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dB_s^n + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n) dY_s^{H,n}, L^n, U^n \right), \quad (5.24)$$

$X_0^n \xrightarrow{\mathcal{P}} X_0$, $Y_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} Y_t^H$ dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ oraz

$$\sup_{t \leq T} (|B_t^n - b_t| + |L_t^n - L_t| + |U_t^n - U_t|) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

to

$$\sup_{t \leq T} (|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (X, K) jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem (5.23) wśród procesów o lokalnie skończonej p -wariacji.

Dowód. Wiemy, że $\sup_{t \leq T} |Y_t^{H,n} - Y_t^H| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, $T \in \mathbb{R}^+$ (patrz dowód twierdzenia 5.11) oraz że dla $p > 1/H$ ciąg $\{\bar{V}_p(Y^{H,n})_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa (patrz dowód twierdzenia 5.9). Teza twierdzenia jest więc konsekwencją wniosku 3.7 (ii). \square

Wniosek 5.14. *Załóżmy (H1) dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz dodatkowo, że f jest ciągła. Niech $\{B^n\}$ będzie ciągiem $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ takim, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{V_1(B^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz $\{Y^{H,n}\}$ będzie ciągiem d -wymiarowych, dyskretnych, $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych procesów gaussowskich spełniającym warunek (5.18). Ponadto niech $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$ -adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L^n \leq H^n \leq U^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{V_p(H^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli $L_0^n \leq X_0^n \leq U_0^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz*

$$(X_0^n, B^n, Y^{H,n}, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X_0, b, Y^H, L, U) \text{ w } \mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}),$$

to ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ zadany wzorem (5.24) jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (5.23) o lokalnie skończonej p -wariacji. Jeśli

dotatkowo równanie (5.23) posiada własność jednoznaczności trajektorii, to $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$, gdzie (X, K) jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem (5.23) wśród procesów o lokalnie skończonej p -wariacji.

Dowód. Wystarczy skorzystać z twierdzenia 3.10. □

Niech $W = (W^1, \dots, W^d)$ będzie d -wymiarowym procesem Wienera względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ oraz Y^H będzie $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptowanym procesem takim jak w równaniu (5.23). Rozważmy równanie:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dW_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dY_s^H + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.25)$$

gdzie X_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalną, d -wymiarową zmienną losową, $L_0 \leq X_0 \leq U_0$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}^d$. Oczywiście równanie (5.25) jest szczególnym przypadkiem równania (4.8).

Wniosek 5.15. Załóżmy (G1) dla pewnego $q \in (2, 1/(1-H))$. Niech $\{Y^{H,n}\}$ będzie ciągiem dyskretnych procesów gaussowskich spełniających warunek (5.18), a $\{W^n\}$ będzie ciągiem lokalnych martyngałów spełniającym warunek (UT). Ponadto niech $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L^n \leq H^n \leq U^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{\bar{V}_q(H^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli $(X^n, K^n) = ESP(X_0^n + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n) dW_s^n + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n) dY_s^{H,n}, L^n, U^n)$, $L_0^n \leq X_0^n \leq U_0^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$(X_0^n, W^n, Y^{H,n}, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X_0, W, Y^H, L, U) \text{ w } \mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}),$$

to ciąg (X^n, K^n) jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (5.25) o lokalnie skończonej q -wariacji. Jeśli dodatkowo równanie (5.25) posiada własność jednoznaczności trajektorii, to $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$, gdzie (X, K) jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem (5.25) wśród procesów o lokalnie skończonej q -wariacji.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 4.13. □

5.4 Zastosowania w matematyce finansowej

W ostatnich latach ułamkowy ruch Browna był dość często wykorzystywany w modelach rynków finansowych. Ponieważ proces ten nie jest semimartyngałem, na rynkach z ułamkowym ruchem Browna występuje arbitraż (patrz [65]) i klasyczne podejście Blacka-Scholesa do wyceny opcji nie znajduje zastosowania.

Istnieje wiele różnych podejść do tego problemu. Cheridido [12] pokazał, że ograniczając dopuszczalną klasę strategii do procesów dyskretnych o dowolnie małym, ale ustalonym minimalnym odstępem czasu między skokami, możemy pozbyć się arbitrażu. Niestety przy tym ograniczeniu najtańszą strategią zabezpieczającą europejską opcję kupna jest strategia polegająca na kupieniu akcji w chwili zero i trzymaniu jej aż do chwili realizacji opcji.

Innym sposobem uniknięcia arbitrażu jest dodanie do modelu kosztów transakcji. Tym zagadnieniem zajmował się Guasoni [28, 29]. Zastosowanie tzw. *produktu Wicka* do wyceny opcji badali m.in. Bender i Parczewski [4], Elliott i van der Hoek [22] oraz Mishura [50]. W pracy [85] Valkeila zaproponował zdefiniowanie ceny sprawiedliwej jako wartości oczekiwanej względem pewnej nowej miary probabilistycznej, którą autor nazwał *average risk neutral measure* (patrz również [80, 81]).

Zajmiemy się zastosowaniem tzw. *aktuarialnej wyceny opcji* wprowadzonej w [8]. Niech $\mu, \sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ będą zadanymi funkcjami deterministycznymi, $\mu \in \mathbb{L}_{loc}^1$, $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$. W rozważanym przez nas modelu dostępne są dwa aktywa, akcje $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ oraz obligacje $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ modelowane za pomocą procesów danych wzorami:

$$B_t = \exp(rt), \quad S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s^H\right), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.26)$$

gdzie $S_0, r \geq 0$, $Y^H = \int_0^t \sigma_s dB_s^H$, $t \in \mathbb{R}^+$. Korzystając z twierdzenia 5.7 oraz wzoru Itô dla procesu Y^H (patrz np. [51, Section 2.7.2]) można pokazać, że proces $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem równania (5.17) dla $b_t = \int_0^t \mu_s ds$ oraz $f(t, x) = g(t, x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Definicja 5.16 (Bladt, Rydberg [8]). Rozważmy opcje postaci $F_T = F_T(S, K)$, gdzie $F_T : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest taka, że $F_T(x, y) = F_T(x^T, y)$, $x_t^T = x_{t \wedge T}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$. *Aktuarialna cena* $\Psi(F_T)$ opcji dana jest wzorem

$$\Psi(F_T) = E(F_T(\tilde{S}, \tilde{K})), \quad (5.27)$$

gdzie $\tilde{S}_t = S_t \exp(-\int_0^t \nu_s ds)$, $t \in [0, T]$, $\tilde{K} = Ke^{-rT}$ oraz $\nu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ jest tzw. *oczekiwaną stopą zwrotu* procesu S zdefiniowaną następująco: $\exp\left(\int_0^t \nu_s ds\right) = S_0^{-1}ES_t$, $t \in [0, T]$.

Twierdzenie 5.17. *Jeżeli $F_T(S, K) = f(S_T, K)$ dla pewnej $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $f(cx, cy) = cf(x, y)$, $c \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$, to*

$$\Psi(F_T) = \exp(-rT)Ef\left(S_0 \exp\left(rT - \frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H}{2} + \int_0^T \sigma_s dB_s^H\right), K\right),$$

gdzie nawias $\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H$ jest zdefiniowany w (1.5).

Dowód. Korzystając z twierdzenia Fubiniego dla dowolnego $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$, mamy

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^t |\sigma_s| \left(\int_0^s |\sigma_r| (s-r)^{2H-2} dr \right) ds \\ &= \int_0^t |\sigma_s| \left(\int_0^s |\sigma_r| (s-r)^{2H-2} dr \right) ds + \int_0^t |\sigma_r| \left(\int_0^r |\sigma_s| (r-s)^{2H-2} ds \right) dr \\ &= \int_0^t |\sigma_s| \left(\int_0^s |\sigma_r| (s-r)^{2H-2} dr \right) ds + \int_0^t |\sigma_s| \left(\int_s^t |\sigma_r| (r-s)^{2H-2} dr \right) ds \\ &= \int_0^t \int_0^t |\sigma_s| |\sigma_r| |s-r|^{2H-2} dr ds = \frac{1}{H(2H-1)} \langle |\sigma|, |\sigma| \rangle_T^H. \end{aligned}$$

Zatem na mocy (1.6) funkcja $g_s = H(2H - 1)\sigma_s \left(\int_0^s \sigma_r (s - r)^{2H-2} dr \right)$, $s \in [0, T]$, jest całko-
walna na $[0, T]$. Stosując ponownie twierdzenie Fubiniego, otrzymujemy

$$\int_0^t g_s ds = \frac{H(2H - 1)}{2} \int_0^t \int_0^t \sigma_s \sigma_r |s - r|^{2H-2} dr ds = \frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2}, \quad t \in [0, T].$$

Ponieważ

$$S_0^{-1} E S_t = \exp \left(\int_0^t \mu_s ds \right) E \left(\exp \int_0^t \sigma_s dB_s^H \right), \quad t \in [0, T]$$

oraz na mocy (1.4) $E \exp(\int_0^t \sigma_s dB_s^H) = \exp(\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2})$, więc jest jasne, że

$$\nu_t = \mu_t + g_t, \quad t \in [0, T]. \quad (5.28)$$

W konsekwencji $\tilde{S}_t = S_0 \exp(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2} + \int_0^t \sigma_s dB_s^H)$, $t \in [0, T]$. Wreszcie z własności funkcji f :

$$\begin{aligned} Ef(\tilde{S}_T, \tilde{K}) &= Ef \left(S_0 \exp \left(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H}{2} + \int_0^T \sigma_s dB_s^H \right), \exp(-rT)K \right) \\ &= \exp(-rT) Ef \left(S_0 \exp \left(rT - \frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H}{2} + \int_0^T \sigma_s dB_s^H \right), K \right), \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 5.18. *Cena aktuarialna europejskiej opcji kupna o terminie realizacji T i cenie wykupu K dana jest wzorem:*

$$\Psi((S_T - K)^+) = S_0 \mathcal{N}(y_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(y_2), \quad (5.29)$$

gdzie

$$y_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + rT + \frac{1}{2} \langle \sigma, \sigma \rangle_T^H}{\sqrt{\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H}}, \quad y_2 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + rT - \frac{1}{2} \langle \sigma, \sigma \rangle_T^H}{\sqrt{\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H}},$$

a \mathcal{N} oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie 5.17 dla $f(x, y) = (x - y)^+$ oraz wykonać elementarne operacje z dowodu klasycznej formuły Blacka-Scholesa. □

Powyższe wyniki dotyczą opcji zależnych od wartości procesu cen w momencie wykonania. Do wyceny opcji zależnych od całej trajektorii procesu cen wykorzystamy rezultaty dotyczące aproksymacji rozwiązań równań względem ułamkowego ruchu Browna. Rozważmy następujący ciąg aproksymacji procesu S : $S_0^n = S_0$,

$$S_{k+1/n}^n = S_{k/n}^n + S_{k/n}^n \int_{k/n}^{(k+1)/n} \mu_s ds + S_{k/n}^n (Y_{(k+1)/n}^{H,n} - Y_{k/n}^{H,n}) \quad (5.30)$$

oraz $S_t^n = S_{k/n}^n$, $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gdzie $\{Y^{H,n}\}$ jest ciągiem dyskretnych procesów gaussowskich spełniających warunek (5.18).

Twierdzenie 5.19. Niech $\tilde{S}_t^n = S_t^n \exp(-\int_0^t \nu_s ds)$, $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}_f} Y^H$, $F_T : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz ciąg $\{F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})\}$ jest jednostajnie całkowny, to

$$\Psi(F_T) = E(F_T(\tilde{S}, \tilde{K})) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})).$$

Dowód. Stosując twierdzenie 5.11 dla $b_t = \int_0^t \mu_s ds$ oraz $f(t, x) = g(t, x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, otrzymujemy, że $S^n \xrightarrow{\mathcal{D}} S$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Stąd $\tilde{S}^n \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{S}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Ponieważ F_T jest ciągła, również $F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K}) \xrightarrow{\mathcal{D}} F_T(\tilde{S}, \tilde{K})$. Teza wynika więc z faktu, że ciąg $\{F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})\}$ jest jednostajnie całkowny. \square

Przykład 5.20 (Azjatycka opcja kupna). Jako przykład zastosowania powyższego twierdzenia pokażemy, że jeżeli

$$F_T(x, y) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T x_t dt - y \right)^+, \quad x \in \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}), y \in \mathbb{R}, \quad (5.31)$$

to

$$\Psi(F_T) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})),$$

gdzie $\{\tilde{S}^n\}$ jest ciągiem procesów zdefiniowanym w (5.30). Istotnie, ponieważ $x \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T x_s ds$ jest ciągła, również F_T jest ciągła. Dokładniej, jeżeli $x^n \rightarrow x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, to $x_t^n \rightarrow x_t$ dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$ względem miary Lebesgue'a oraz ciąg $\{\sup_{t \leq T} |x_t^n|\}$ jest ograniczony. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, mamy

$$F_T(x^n, y) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T x_t^n dt - y \right)^+ \longrightarrow \left(\frac{1}{T} \int_0^T x_t dt - y \right)^+ = F_T(x, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ponadto

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{S}_t^n dt - \tilde{K} \right)^+ \leq \frac{C_T}{T} \int_0^T S_t^n dt,$$

gdzie $C_T = \sup_{t \leq T} \exp(-\int_0^t \nu_s ds)$. W konsekwencji dla $p \in (1/H, 2)$, $n \in \mathbb{N}$

$$E|F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})|^p \leq \frac{C_T^{1/H}}{T} \int_0^T E(S_t^n)^p dt.$$

Zauważmy, że

$$\sup_{t \leq T} \|S_t^n\|_p \leq \sup_{t \leq T} \|S_t^n - S_0\|_p + \|S_0\|_p \leq \tilde{V}_p(S^n)_T + \|S_0\|_p,$$

gdzie $\tilde{V}_p(X)_T = \sup\{(\sum_{i=1}^n E|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p)^{1/p}; 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ oznacza tzw. q -wariację całkową procesu $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ na $[0, T]$. Pokażemy, że

$$\sup_n \tilde{V}_p(S^n)_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+. \quad (5.32)$$

W tym celu korzystając ze stochastycznej nierówności Younga (patrz [77, Lemma 2.3]) dla $q < 1/(1-H)$, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\tilde{V}_p(S^n)_t &\leq \sup_{s \leq t} \|S_s^n\|_p \int_0^{[nt]/n} \mu_s ds + C(p, q, H) \|\sigma\|_{\mathbb{L}_{[0,t]}^{1/H}} \left(\tilde{V}_q(S^n)_t + \|S_0\|_q \right) \\ &\leq \left(\int_0^t \mu_s ds + C(p, q, H) \|\sigma\|_{\mathbb{L}_{[0,t]}^{1/H}} \right) \left(\tilde{V}_p(S^n)_t + \|S_0\|_p \right), \quad t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Określając $t_1 = \inf\{t > 0; \int_0^t \mu_s ds > 1/4 \text{ lub } C(p, q, H) \|\sigma\|_{\mathbb{L}_{[0,t]}^{1/H}} > 1/4\} \wedge T$, otrzymujemy

$$\tilde{V}_p(X^n)_{t_1} \leq \frac{1}{2} \left(\tilde{V}_p(X^n)_{t_1} + \|X_0\|_p \right).$$

Zatem $\sup_n \tilde{V}_p(X^n)_{t_1} < \infty$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla przedziałów $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, \dots , w skończenie wielu krokach pokażemy (5.32). Korzystając z (5.32), dostajemy oszacowanie $\sup_n E|F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})|^p < \infty$. Zatem $\{F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})\}$ jest jednostajnie całkowny, co kończy dowód (5.31).

Uwaga 5.21. Korzystając z faktu 5.5 oraz uwagi 5.6, możemy obliczyć cenę azjatyckiej opcji kupna z określonym błędem. W tym celu rozważmy aproksymacje postaci:

$$X_t^n = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds + Y_t^{H,n}\right) \text{ oraz } \bar{X}_t^n = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds + \bar{Y}_t^{H,n}\right), \quad t \in [0, T], n \in \mathbb{N}.$$

Niech F_T będzie dana wzorem (5.31), $\tilde{X}_t^n = X_t^n \exp(-\int_0^t \nu_s ds)$ i $\hat{X}_t^n = \bar{X}_t^n \exp(-\int_0^t \nu_s ds)$ $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że istnieje stała $C > 0$ dla której

$$\begin{aligned}\left|EF_T(\tilde{X}^n, \tilde{K}) - \Psi(F_T)\right| &\leq C\left((\varepsilon_n(\sigma, T))^{1/2} + \|\sigma - h\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}\right. \\ &\quad \left.+ (V_1(h)_T + |h_0|) \sup_{t \leq T} (E|B_t^{H,n} - B_t^{H,(n)}|^2)^{1/2}\right),\end{aligned}\tag{5.33}$$

gdzie $\varepsilon_n(\sigma, T)$ jest zdefiniowane w (5.10), $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ jest dowolną funkcją o skończonej wariacji na $[0, T]$ oraz że

$$E|F_T(\hat{X}^n, \tilde{K}) - \Psi(F_T)| \leq C(\varepsilon_n(\sigma, T))^{1/2}.\tag{5.34}$$

Aby udowodnić (5.33), zauważmy najpierw, że na mocy lipschitzowskości F_T oraz twierdzenia Fubiniego mamy

$$\begin{aligned}\left|EF_T(\tilde{X}^n, \tilde{K}) - \Psi(F_T)\right| &= \left|EF_T(\tilde{X}^n, \tilde{K}) - EF_T(\tilde{S}, \tilde{K})\right| \\ &\leq E|F_T(\tilde{X}^n, \tilde{K}) - F_T(\tilde{S}, \tilde{K})| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T E|\tilde{X}_t^n - \tilde{S}_t| dt.\end{aligned}\tag{5.35}$$

Ponieważ $\tilde{X}_t^n = S_0 \exp\left(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2} + Y_t^{H,n}\right)$ oraz $\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2} + Y_t^H\right)$, jest jasne, że

$$\tilde{X}_t^n - \tilde{S}_t = S_0 \exp\left(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2}\right) \left(\exp(Y_t^{H,n} - Y_t^H) - 1\right) \exp(Y_t^H).$$

Stąd oraz z nierówności $|e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$ uzyskujemy, że

$$\begin{aligned} I_t^n &= E |\tilde{X}_t^n - \tilde{S}_t| \leq S_0 \exp\left(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2}\right) E(|Y_t^{H,n} - Y_t^H| \exp(|Y_t^{H,n} - Y_t^H| + Y_t^H)) \\ &\leq S_0 \exp\left(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2}\right) E(|Y_t^{H,n} - Y_t^H| \exp(|Y_t^{H,n}|) \exp(2|Y_t^H|)). \end{aligned}$$

W konsekwencji, korzystając z nierówności Schwarz'a, otrzymujemy

$$I_t^n \leq S_0 \exp\left(-\frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2}\right) (E|Y_t^{H,n} - Y_t^H|^2)^{1/2} (E \exp(4|Y_t^{H,n}|))^{1/4} (E \exp(8|Y_t^H|))^{1/4}.$$

Ponieważ Y^H i $Y^{H,n}$ są procesami gaussowskimi oraz $\sup_{t \leq T} \sup_n E|Y_t^{H,n}|^2 < \infty$, istnieje stała $c_T > 0$ taka, że $I_t^n \leq c_T (E|Y_t^{H,n} - Y_t^H|^2)^{1/2}$, co razem z (5.35) pociąga, że

$$|EF_T(\tilde{X}^n, \tilde{K}) - \Psi(F_T)| \leq c_T \sup_{t \leq T} (E|Y_t^{H,n} - Y_t^H|^2)^{1/2}.$$

Z powyższej nierówności oraz z faktu 5.5 wnioskujemy (5.33). Podobnie korzystając z uwagi 5.6, uzyskujemy (5.34).

Bibliografia

- [1] V. Acary, O. Bonnefon, B. Brogliato. *Nonsmooth modeling and simulation for switched circuits*. Springer, Dordrecht, 2011.
- [2] S. Asmussen. Queueing simulation in heavy traffic. *Math. Oper. Res.*, 17(1):84–111, 1992.
- [3] H. Benabdellah. Existence of solutions to the nonconvex sweeping process. *J. Differential Equations*, 164(2):286–295, 2000.
- [4] C. Bender, P. Parczewski. On the connection between discrete and continuous Wick calculus with an application to the fractional Black-Scholes model. *Stochastic Processes, Filtering, Control and Their Applications*, World Scientific, 2012.
- [5] F. Bernicot, J. Venel. Stochastic perturbation of sweeping process and a convergence result for an associated numerical scheme. *J. Differential Equations*, 251(4-5):1195–1224, 2011.
- [6] M. Besalú, C. Rovira. Stochastic delay equations with non-negativity constraints driven by fractional Brownian motion. *Bernoulli*, 18(1):24–45, 2012.
- [7] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, Inc., New York, wydanie drugie, 1999.
- [8] M. Bladt, T. H. Rydberg. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions. *Insurance Math. Econom.*, 22(1):65–73, 1998.
- [9] K. Burdzy, W. Kang, K. Ramanan. The Skorokhod problem in a time-dependent interval. *Stochastic Process. Appl.*, 119(2):428–452, 2009.
- [10] C. Castaing, T. X. Dúc Hã, M. Valadier. Evolution equations governed by the sweeping process. *Set-Valued Anal.*, 1(2):109–139, 1993.
- [11] C. Castaing, M. D. P. Monteiro Marques. BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets. *Set-Valued Anal.*, 3(4):381–399, 1995.
- [12] P. Cheridito. Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance Stoch.*, 7(4):533–553, 2003.

-
- [13] G. Colombo, V. V. Goncharov. The sweeping processes without convexity. *Set-Valued Anal.*, 7(4):357–374, 1999.
- [14] G. Colombo, M. D. P. Monteiro Marques. Sweeping by a continuous prox-regular set. *J. Differential Equations*, 187(1):46–62, 2003.
- [15] L. Decreusefond, A. S. Üstünel. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Anal.*, 10(2):177–214, 1999.
- [16] P. Drábek, P. Krejčí, P. Takáč. *Nonlinear differential equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [17] R. Dudley, R. M. Norvaiša. *An Introduction to P-variation and Young Integrals*. Lecture Notes No. 1. MaPhySto, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, 1999.
- [18] R. M. Dudley. Picard iteration and p-variation: The work of Lyons (1994). *Mini-proceedings: Workshop on Product Integrals and Pathwise Integration, MaPhySto*, 1999.
- [19] R. M. Dudley, R. Norvaiša. *Concrete functional calculus*. Springer, New York, 2011.
- [20] P. Dupuis, H. Ishii. On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorokhod problem, with applications. *Stochastics Stochastics Rep.*, 35(1):31–62, 1991.
- [21] P. Dupuis, K. Ramanan. A multiclass feedback queueing network with a regular Skorokhod problem. *Queueing Syst.*, 36(4):327–349, 2000.
- [22] R. J. Elliott, J. van der Hoek. A general fractional white noise theory and applications to finance. *Math. Finance*, 13(2):301–330, 2003.
- [23] A. Falkowski. Actuarial approach to option pricing in a fractional Black-Scholes model with time-dependent volatility. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 61(2):181–193, 2013.
- [24] A. Falkowski, L. Słomiński. SDEs with constraints driven by processes with bounded p -variation. przyjęte do druku w *Probab. Math. Statist.* [arXiv:1405.3853](https://arxiv.org/abs/1405.3853) [math.PR], 2015.
- [25] A. Falkowski, L. Słomiński. Sweeping processes with stochastic perturbations generated by a fractional Brownian motion. [arXiv:1505.01315](https://arxiv.org/abs/1505.01315) [math.CA], 2015.
- [26] A. Falkowski, L. Słomiński, B. Ziemkiewicz. Weak and strong discrete-time approximation of fractional sdes. *Lithuanian Math. J.*, 54(4):409–428, 2014.
- [27] M. Ferrante, C. Rovira. Stochastic differential equations with non-negativity constraints driven by fractional Brownian motion. *J. Evol. Equ.*, 13(3):617–632, 2013.
- [28] P. Guasoni. No arbitrage under transaction costs, with fractional Brownian motion and beyond. *Math. Finance*, 16(3):569–582, 2006.

-
- [29] P. Guasoni, M. Rásonyi, W. Schachermayer. Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs. *Ann. Appl. Probab.*, 18(2):491–520, 2008.
- [30] J. Guerra, D. Nualart. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion. *Stoch. Anal. Appl.*, 26(5):1053–1075, 2008.
- [31] I. Gyöngy, N. Krylov. Existence of strong solutions for Itô's stochastic equations via approximations. *Probab. Theory Related Fields*, 105(2):143–158, 1996.
- [32] J. Jacod, A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer-Verlag, Berlin, wydanie drugie, 2003.
- [33] N. C. Jain, D. Monrad. Gaussian measures in B_p . *Ann. Probab.*, 11(1):46–57, 1983.
- [34] A. Jakubowski. A non-Skorohod topology on the Skorohod space. *Electron. J. Probab.*, 2(4):1–21, 1997.
- [35] A. Jakubowski, J. Mémin, G. Pagès. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace \mathbf{D}^1 de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields*, 81(1):111–137, 1989.
- [36] P. Krée, C. Soize. *Mathematics of random phenomena*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.
- [37] K. Kubilius. The existence and uniqueness of the solution of the integral equation driven by fractional Brownian motion. *Lithuanian Math. J.*, 40(Special Issue):104–110, 2000.
- [38] K. Kubilius. The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p -semimartingale of special type. *Stochastic Process. Appl.*, 98(2):289–315, 2002.
- [39] K. Kubilius. On weak and strong solutions of an integral equation driven by a continuous p -semimartingale. *Lithuanian Math. J.*, 43(1):38–58, 2003.
- [40] K. Kubilius. On weak solutions of an integral equation driven by a p -semimartingale of special type. *Proceedings of the Eighth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Part I*, 78:233–242, 2003.
- [41] K. Kubilius. On the convergence of stochastic integrals with respect to p -semimartingales. *Statist. Probab. Lett.*, 78(15):2528–2535, 2008.
- [42] K. Kubilius. On tightness of solutions of stochastic integral equations driven by p -semimartingales. *Lith. Math. J.*, 49(3):271–286, 2009.
- [43] S. J. Lin. Stochastic analysis of fractional Brownian motions. *Stochastics Stochastics Rep.*, 55(1-2):121–140, 1995.
- [44] T. Lindvall. Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D(0, \infty)$. *J. Appl. Probability*, 10:109–121, 1973.

-
- [45] P.-L. Lions, A.-S. Sznitman. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37(4):511–537, 1984.
- [46] T. Lyons. Differential equations driven by rough signals. I. An extension of an inequality of L. C. Young. *Math. Res. Lett.*, 1(4):451–464, 1994.
- [47] J. Mémin, Y. Mishura, E. Valkeila. Inequalities for the moments of wiener integrals with respect to a fractional brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, 51(2):197–206, 2001.
- [48] J. Mémin, L. Słomiński. Condition UT et stabilité en loi des solutions d'équations différentielles stochastiques. *Séminaire de Probabilités, XXV, Lecture Notes in Math.*, 1485:162–177, 1991.
- [49] M. Métivier. *Semimartingales - a Course on Stochastic Processes*. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1982.
- [50] Y. Mishura. Fractional stochastic integration and Black-Scholes equation for fractional Brownian model with stochastic volatility. *Stoch. Stoch. Rep.*, 76(4):363–381, 2004.
- [51] Y. S. Mishura. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [52] M. D. P. Monteiro Marques. *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [53] J. J. Moreau. Raffle par un convexe variable. I. *Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. I, Exp. No. 15*, 1971.
- [54] J. J. Moreau. Raffle par un convexe variable. II. *Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. II, Exp. No. 3*, 1972.
- [55] J.-J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Differential Equations*, 26(3):347–374, 1977.
- [56] A. Nieminen. Fractional Brownian motion and martingale-differences. *Statist. Probab. Lett.*, 70(1):1–10, 2004.
- [57] R. Norvaiša. Nonlinear integral equations with respect to functions having bounded p -variation. *Lith. Math. J.*, 53(3):324–335, 2013.
- [58] R. Norvaiša. Quadratic variation, p -variation and integration with applications to stock price modelling. [arXiv:math/0108090](https://arxiv.org/abs/math/0108090) [math.CA] , 2001.
- [59] D. Nualart, A. Răşcanu. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collect. Math.*, 53(1):55–81, 2002.
- [60] P. Parczewski. A fractional Donsker theorem. *Stoch. Anal. Appl.*, 32(2):328–347, 2014.

-
- [61] V. Pipiras, M. S. Taqqu. Are classes of deterministic integrands for fractional Brownian motion on an interval complete? *Bernoulli*, 7(6):873–897, 2001.
- [62] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations: A New Approach*. Springer-Verlag, Berlin, wydanie drugie, 1992.
- [63] R. Rebolledo. Central limit theorems for local martingales. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 51(3):269–286, 1980.
- [64] D. Revuz, M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer-Verlag, Berlin, wydanie trzecie, 1999.
- [65] L. C. G. Rogers. Arbitrage with fractional Brownian motion. *Math. Finance*, 7(1):95–105, 1997.
- [66] A. Rozkosz. On a decomposition of symmetric diffusions with reflecting boundary conditions. *Stochastic Process. Appl.*, 103(1):101–122, 2003.
- [67] M. Rutkowski. Stochastic integral equations with a reflecting barrier. *Demonstratio Math.*, 13(2):483–507, 1980.
- [68] A. A. Ruzmaikina. Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractional Brownian motion. *J. Statist. Phys.*, 100(5-6):1049–1069, 2000.
- [69] Y. Saisho. Stochastic differential equations for multidimensional domain with reflecting boundary. *Probab. Theory Related Fields*, 74(3):455–477, 1987.
- [70] M. A. Shashiashvili. On the variation of the difference of singular components in the Skorokhod problem and on stochastic differential systems in a half-space. *Stochastics*, 24(3):151–169, 1988.
- [71] L. A. Shepp, A. N. Shiryaev. A new look at the “Russian option”. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 39(1):130–149, 1994.
- [72] A. V. Skorochod. Limit theorems for stochastic processes. *Theory Probab. Appl.*, 1:261–290, 1956.
- [73] A. V. Skorochod. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region. *Theory Probab. Appl.*, 6,7:264–274, 1961.
- [74] L. Słomiński. Stability of strong solutions of stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 31(2):173–202, 1989.
- [75] L. Słomiński. On existence, uniqueness and stability of solutions of multidimensional SDEs with reflecting boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 29(2):163–198, 1993.
- [76] L. Słomiński, T. Wojciechowski. Stochastic differential equations with time-dependent reflecting barriers. *Stochastics*, 85(1):27–47, 2013.

-
- [77] L. Słomiński, B. Ziemkiewicz. Inequalities for the \mathbb{L}^p norms of integrals with respect to a fractional Brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, 73(1):79–90, 2005.
- [78] L. Słomiński, B. Ziemkiewicz. On weak approximations of integrals with respect to fractional Brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, 79(4):543–552, 2009.
- [79] T. Sottinen. Fractional Brownian motion, random walks and binary market models. *Finance Stoch.*, 5(3):343–355, 2001.
- [80] T. Sottinen, E. Valkeila. Fractional brownian motion as a model in finance. Raport instytutowy Preprint 302 16str, University of Helsinki, Department of Mathematics, 1999.
- [81] T. Sottinen, E. Valkeila. On arbitrage and replication in the fractional Black-Scholes pricing model. *Statist. Decisions*, 21(2):93–107, 2003.
- [82] C. Stone. Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14:694–696, 1963.
- [83] H. Tanaka. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math. J.*, 9(1):163–177, 1979.
- [84] L. Thibault. Sweeping process with regular and nonregular sets. *J. Differential Equations*, 193(1):1–26, 2003.
- [85] E. Valkeila. On some properties of geometric fractional brownian motions. Raport instytutowy Preprint 224 12 str, University of Helsinki, Department of Mathematics, 1999.
- [86] T. Yamada, S. Watanabe. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:155–167, 1971.
- [87] B. Ziemkiewicz. *Aproksymacja całki i rozwiązań równań różniczkowych względem ułamkowego procesu Wienera*. Praca doktorska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, 2006.

Skorowidz oznaczeń

\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych
\mathbb{R}^+	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
\mathbb{R}^d	zbiór d -wymiarowych wektorów rzeczywistych, $d \in \mathbb{N}$
\mathbb{M}^d	zbiór $d \times d$ -wymiarowych macierzy rzeczywistych, $d \in \mathbb{N}$
$ x $	norma Euklidesowa dla $x \in \mathbb{R}^d$ (norma macierzowa dla $x \in \mathbb{M}^d$)
$[x]$	część całkowita $x \in \mathbb{R}$
$(x)^+$	$\max\{0, x\}$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(x)^-$	$\max\{0, -x\}$ dla $x \in \mathbb{R}$
$t \wedge s$	$\min\{t, s\}$ dla $t, s \in \mathbb{R}$
$t \vee s$	$\max\{t, s\}$ dla $t, s \in \mathbb{R}$
$\beta(a, b)$	$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ funkcja beta Eulera
$\zeta(x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ funkcja zeta Riemanna
$\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$	przestrzeń funkcji càdlàg, $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$
Δx_t	$x_t - x_{t-}$ skok funkcji $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ w $t \in \mathbb{R}^+$
x_-	funkcja $t \mapsto x_{t-}$
$\text{Osc}(x)_{[a,b]}$	$\sup\{ x_t - x_s ; a \leq t, s \leq b\}$
$V_p(x)_{[a,b]}$	p -wariacja funkcji x na $[a, b]$
$\bar{V}_p(x)_{[a,b]}$	$V_p(x)_{[a,b]} + x_a $ norma p -wariacyjna
$\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d)$	zbiór funkcji $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ o skończonej p -wariacji
$\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$	przestrzeń funkcji $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunek $\int_0^T x_s ^{1/H} ds < \infty$
$\mathbb{L}_{loc}^{1/H}$	przestrzeń funkcji $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunek $\int_0^T x_s ^{1/H} ds < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$
$\ x\ _{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}$	$(\int_0^T x_s ^{1/H} ds)^H$ norma w przestrzeni $\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$
$\langle x, y \rangle_T^H$	$H(2H-1) \int_0^T \int_0^T x_t y_s t-s ^{2H-2} ds dt$ iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}$
$\varepsilon_n(\sigma, T)$	$\ \sigma^n - \sigma\ _{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2 + \sup_{t \leq T} (\int_{[nt/n]}^t \sigma_s ^{1/H} ds)^{2H}$, gdzie $\sigma_t^n = n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s ds$, $t \in [(k-1)/n, k/n)$

$\nabla_x g(t, x)$	$(\nabla_x g^{i,j}(t, x))_{i,j=1,\dots,d}$, gdzie $\nabla_x g^{i,j}(t, x) = (\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_1}(t, x), \dots, \frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_d}(t, x))$
$\{\pi^n\}$	$\pi^n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ ciąg podziałów $[0, \infty)$
$\text{diam}(\pi_n)$	$\max_{k \in \mathbb{N}}(t_{n,k} - t_{n,k-1})$ średnica podziału π^n
ϱ_t^n	$\varrho_t^n = t_{n,k}$, $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$
$\varrho_n^*(t)$	$\min\{t_{n,k}; t_{n,k} \geq t\}$
$\{\{\delta_{k,i}\}\}$	tablica stałych $\{\delta_{k,i}; k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
$SP_l(y)$	rozwiązanie problemu Skorochoda stowarzyszonego z $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz dolną barierą $l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$
$SP^u(y)$	rozwiązanie problemu Skorochoda stowarzyszonego z $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz górną barierą $u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$
$ESP(y, l, u)$	rozwiązanie problemu Skorochoda stowarzyszonego z $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz dwiema barierami $l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $l \leq u$
(Ω, \mathcal{F}, P)	przestrzeń probabilistyczna
\mathcal{N}	dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego
EX	wartość oczekiwana zmiennej losowej X
$\ X\ _2$	$(E X ^2)^{1/2}$
\mathbb{L}^2	przestrzeń zmiennych losowych spełniających warunek $E X ^2 < \infty$ z normą $\ \cdot\ _2$
$\{\{X_{n,k}\}\}$	tablica zmiennych losowych $\{X_{n,k}; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
$\{\{\mathcal{F}_{n,k}\}\}$	tablica σ -algebr $\{\mathcal{F}_{n,k}; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
$X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$	proces stochastyczny na przestrzeni (Ω, \mathcal{F}, P)
$\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$	filtracja
$\{X^n\}$	ciąg procesów stochastycznych, $X^n = \{X_t^n\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dla $n \in \mathbb{N}$
$[X]$	$[X]_t = \sum_{i=1}^d [X^i]_t$, gdzie $X = (X^1, \dots, X^d)$ oraz $\{[X^i]_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ oznacza wariację kwadratową procesu X^i
$\langle X \rangle$	$\langle X \rangle = \sum_{i=1}^d \langle X^i \rangle_t$, gdzie $X = (X^1, \dots, X^d)$ oraz $\{\langle X^i \rangle_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ oznacza kompensator prognozowalny wariacji kwadratowej procesu X^i
$\mathcal{L}(X)$	rozkład procesu X
$\tilde{V}_p(X)_T$	$\sup\{\sum_{i=1}^n E X_{t_i} - X_{t_{i-1}} ^p; 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ p -wariacja całkowa procesu $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ na $[0, T]$
W	proces Wienera
B^H	ułankowy ruch Browna
Y^H	$Y_t^H = \int_0^t \sigma_s dB^H$ dla $t \in \mathbb{R}^+$, gdzie $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	zbieżność według prawdopodobieństwa
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	zbieżność według rozkładu
$\xrightarrow{\mathcal{D}_f}$	zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych
$F_T = F_T(S, K)$	opcja $F_T : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$\Psi(F_T)$	aktuarialna cena opcji

Indeks

- aktuarialna cena opcji, 84
- funkcja càdlàg, 7
- jednostajna
 - \mathcal{C} -jądrność, 17
 - jądrność, 16
- norma
 - macierzowa, 11
 - p -wariacyjna, 10
- problem Skorochoda
 - z barierą dolną, 21
 - z barierą górną, 22
 - z dwiema barierami, 22
- proces
 - B^H , 12
 - Y^H , 12
 - W , 3
 - o lokalnie skończonej p -wariacji, 11
- p -semimartyngał, 57
- p -wariacja, 10
- relatywna zwartość, 37
- rozwiązanie równania
 - mocne, 50, 61
 - słabe, 52, 61
- semimartyngał, 18
- stała
 - $c(2, H)$, 12
 - C_g^T , 32
 - C_g^N , 62
 - C_f , 31, 61
 - $C_{f,N}$, 31, 62
 - C_g , 31, 62
 - $C_{g,N}$, 31, 62
- c_H , 71
- $C(p, q, H)$, 87
- $C(r, H)$, 13
- $C(H)$, 72
- $K_{p,q}$, 11
- $K(p)$, 19
- topologia Skorochoda J_1 , 7
- warunek (UT), 18
- własność jednoznaczności trajektorii, 53, 61
- założenia
 - (G1), 61
 - (G2), 62
 - (H1), 31
 - (H2), 31
- zbiór \mathcal{W}_p , 10
- zbieżność
 - rozkładów skończenie wymiarowych, 16
 - według rozkładu, 16