

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Arkadiusz Męcel

**Półgrupa klas sprzężoności
ideałów lewostronnych algebry łącznej**

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy
prof. dr hab. Jan Okniński

Instytut Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego

Kwiecień 2014

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

.....

data

.....

Arkadiusz Męcel

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

.....

data

.....

prof. dr hab. Jan Okniński

Streszczenie

Rozprawa ta poświęcona jest badaniu półgrupy $C(A)$ klas sprzężoności ideałów lewostronnych skończenie wymiarowej algebry A z 1 nad ciałem K . Mnożenie w tej półgrupie pochodzi w sposób naturalny od struktury mnożeniowej samej algebry. Wykazano szereg rezultatów dotyczących struktury $C(A)$. Udowodniono, że skończoność $C(A)$ równoważna jest temu, że liczba klas sprzężoności lewostronnych ideałów nilpotentnych algebry A jest skończona. Wskazano pewne niezmienniki algebry A , które można odczytać ze struktury półgrupy $C(A)$. Przy założeniu, że K jest algebraicznie domknięte oraz, że radykał Jacobsona algebry A jest 2-nilpotentny wykazano, że struktura półgrupy $C(A)$ determinuje strukturę algebry A , przy dodatkowym założeniu, że $C(A)$ jest skończona. W kontekście rozważanej w tym rezultacie klasy algebr, uzyskano także pewne częściowe wyniki związane z opisem algebr, w których półgrupa klas sprzężoności jest skończona. Pokazano, między innymi, że jeśli A jest algebrą z 2-nilpotentnym radykałem Jacobsona, wówczas skończoność półgrupy $C(M_6(A))$ równoważna jest temu, że A ma skończony typ reprezentacyjny.

Słowa kluczowe

algebra skończenie wymiarowa, klasa sprzężoności, ideał lewostronny, radykał Jacobsona, półgrupa, klasy Greena, moduł nierozkładalny, algebra bazowa, skończony typ reprezentacyjny, algebra rozdzielna, kołczan, twierdzenie Gabriela, szkielet, kontur, orbita, problem macierzowy

Klasyfikacja AMS

15A21, 16D25, 16D99, 16G60, 16N40, 16P10, 20M99

Abstract

The aim of this thesis is to investigate the semigroup $C(A)$ of conjugacy classes of left ideals of a finite dimensional algebra A with 1 over a field K . The operation in this semigroup is naturally induced from the multiplicative structure of the algebra itself. We determine certain invariants of an algebra A that can be expressed in terms of the structure of $C(A)$. Assuming that the field K is algebraically closed and that the Jacobson radical of the algebra A is 2-nilpotent, we prove that the structure of the semigroup $C(A)$ completely determines the structure of A , assuming that $C(A)$ is finite. In the context of the class of algebras that are considered for this result, some partial results concerning the classification of algebras for which the semigroups of conjugacy classes are finite are obtained. It is shown, among other results, that if the algebra A has 2-nilpotent Jacobson radical then the finiteness of $C(M_6(A))$ is equivalent to the fact, that A is of finite representation type.

Keywords

finite dimensional algebra, conjugacy class, left ideal, Jacobson radical, semigroup, Green classes, indecomposable module, basic algebra, finite representation type, distributive algebra, quiver, Gabriel's theorem, skeleton, contour, orbit, matrix problem

AMS Classification

15A21, 16D25, 16D99, 16G60, 16N40, 16P10, 20M99

Podziękowania

Przede wszystkim dziękuję Bogu, za dar życia, za dar zbawienia i za cel, do którego mnie prowadzi. W chwilach radosnych i trudnych Ten, który zna mnie lepiej niż ja samego siebie, pomagał mi przekraczać granice, których nawet nie spodziewałem się osiągnąć.

Dziękuję promotorowi tej rozprawy, Panu profesorowi Janowi Oknińskiemu za niezliczone rozmowy i zachęty, bez których nie tylko nie powstałaby ta praca, ale nie zaczęłaby się zapewne nawet moja przygoda z algebrą. Wszystko niemal, czego nauczyłem się o pracy matematyka, zawdzięczam jemu. Dziękuję za cierpliwość, wyrozumiałość i życzliwość, do których niejednokrotnie nie dorastałem.

Dziękuję profesorom z Zakładu Algebry Uniwersytetu Warszawskiego, za inspirujące wykłady, liczne rozmowy i oznaki wsparcia. Szczególne podziękowania kieruję w stronę Pana profesora Jana Kremy i Pana profesora Edmunda Puczyłowskiego. Dziękuję także Panu doktorowi habilitowanemu Grzegorzowi Bobińskiemu za opiekę, której podjął się wobec mojej osoby podczas półrocznego pobytu na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu. Dziękuję wreszcie Panu profesorowi Ericowi Jespersowi z Vrije Universiteit Brussel za gościnność, której doświadczyłem podczas moich wizyt w Belgii.

Dziękuję wszystkim, który wspierali mnie w tej kilkuletniej wędrówce. Przede wszystkim moim najbliższym: rodzicom, siostrze i obydwu babciom, za miłość i wolność jaką mi dali. Dziękuję nauczycielom z I Liceum Ogólnokształcącego w Koszalinie, a szczególnie Panu magistrowi Pawłowi Rudeckiemu, za wspieranie mojej pasji do matematyki. Dziękuję przyjaciołom z Akademickiej Wspólnoty Ewangelizacyjnej Woda Życia, na czele z księdzem prałatem Romanem Trzcńskim, za modlitwę, wspólne zaangażowanie i odkrywanie piękna życia w Chrystusie. Dziękuję wreszcie koleżankom i kolegom doktorantom z Wydziału Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, a także moim studentom, za wiele godzin spędzonych razem w mozołach pracy.

Spis treści

Wprowadzenie	10
1 Niezbędne oznaczenia i fakty pomocnicze	19
1.1 Pierścienie i algebry skończone wymiarowe	20
1.2 Elementy teorii półgrup	30
2 Półgrupa klas sprzężoności ideałów lewostronnych	38
2.1 Definicja i podstawowe przykłady	38
2.2 Struktura półgrupowa $C(A)$	40
2.3 Skończoność $C(A)$, a skończony typ A	46
2.4 Dowód Twierdzenia 2.3.11	52
2.5 Własności rozpoznawalne	58
2.6 Dowody Twierdzeń 2.5.1 oraz 2.3.10	62
3 Skończoność $C(A)$, gdy $J(A)^2 = 0$	70
3.1 Sformułowanie problemów	70
3.2 Szkielet i kontur algebry	72
3.3 Graf rozdzielony szkieletu	77
3.4 Twierdzenia związane z Problemem 3.1.1	81
3.5 Modyfikacje szkieletów	83
3.6 Geometryczne własności przestrzeni konturów. Dowód Twierdzenia 3.4.3.	90
4 Algebry o blokach rozmiarów nie większych niż 2	101
4.1 Specjalny przypadek Twierdzenia 3.4.2 dla bloków szerokości 2.	101
4.2 Dowód Twierdzenia 3.4.2.	133
Bibliografia	142

Wprowadzenie

Od samego początku kształtowania się podstaw nowoczesnej algebry, a więc od drugiej połowy XIX. wieku, poszukiwano niezmienników służących do rozwiązania kluczowych problemów matematycznych. Szczególnie owocne okazało się wykorzystywanie niezmienników grupowych. Począwszy od problemu rozwiązalności równań wielomianowych przez pierwiastniki, gdzie kluczową rolę odegrała grupa Galois, czy pierwszych systematycznych prób udowodnienia Wielkiego Twierdzenia Fermata, kiedy to odkrycie niejednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze w pierścieniach liczbowych doprowadziło ostatecznie do odkrycia grupy klas ideałów ciała liczbowego; po grupy homotopii w topologii, grupy symetrii w geometrii, grupy algebraiczne i arytmetyczne w teorii mnogości i grup Liego. Także w teorii pierścieni i algebr skończone wymiarowych niezmienniki grupowe odgrywały istotną rolę, wystarczy obok wymienionych wcześniej przykładów wspomnieć chociażby grupy Picarda w teorii pierścieni przemiennych, czy grupy Brauera w teorii skończone wymiarowych algebr z dzieleniem.

Tematyka niniejszej rozprawy związana jest z szerokim programem wprowadzania i stosowania metod teorii półgrup w badaniu własności strukturalnych i reprezentacji algebr łącznych. W szczególności, jednym z ogólnych zadań tego programu jest próba znajdowania konstrukcji półgrup związanych z pewnymi ważnymi klasami algebr, badanie struktur związanych z tymi półgrupami (dla przykładu, ich algebr półgrupowych), oraz ustalenie niezmienników algebr, które mogą być odczytane z tak zbudowanych struktur. W pierwszej kolejności wyzwaniem jest znalezienie pewnych zbiorów, najlepiej skończonych, w naturalny sposób związanych z daną klasą algebr. W drugiej kolejności, gdy zbiory te zostaną już wskazane, próbować można wprowadzać interesujące struktury półgrupowe na tych zbiorach lub pewnych ich uogólnieniach.

Ważnymi i klasycznymi już obiektami tego typu, występującymi w algebrze są na przykład:

- (a) Zbiór warstw podwójnych HxH względem podgrupy H danej grupy G . W klasycznym przypadku bierzemy grupę $G = \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ macierzy odwracalnych rozmiaru $n \times n$ nad ciałem \mathbb{K} i rozważamy jej podgrupę $B = \text{B}_n(\mathbb{K})$, złożoną ze wszystkich macierzy górnotrójkątnych, a ogólniej: bierzemy grupę reduktywną G i jej podgrupę Borela H , i rozważamy klasyczny rozkład Bruhat grupy G . Zbiór warstw tego rozkładu indeksować można elementami pewnej grupy skończonej W , zwanej grupą Weyla. Przy pewnych założeniach możliwe jest rozważanie algebry o bazie złożonej ze zbioru B -orbit w G , tak zwanej algebry Hecke (patrz

[9] §67A, [22]). Konstrukcja ta prowadzi do klasycznych wyników o zespolonych reprezentacjach skończonych grup z BN-parą. Przykładem takiego wyniku jest izomorfizm algebr grupowych $e\mathbb{C}[Gl_n(\mathbb{F}_q)]e \simeq \mathbb{C}[\Sigma_n]$, gdzie \mathbb{F}_q jest dowolnym ciałem skończonym, zaś

$$e = |B_n(\mathbb{F}_q)|^{-1} \cdot \sum_{b \in B_n(\mathbb{F}_q)} b$$

(patrz [9], 68.21). Podobne wyniki uzyskiwano w teorii grup algebraicznych oraz monoidów algebraicznych, patrz [38], [40], [45]. Rozważa się także struktury półgrupowe określone na zbiorze warstw podwójnych. Szereg wyników związanych z teorią reprezentacji nieskończenie wymiarowych grup Liego uzyskiwali w ten sposób w ostatnim czasie Olshanski i Neretin, patrz na przykład [29], [30], [36].

- (b) Kołczan $\Gamma(A)$ algebry skończenie wymiarowej A i związana z nim struktura algebry półgrupowej $K\Gamma(A)$, zwanej algebrą dróg kołczanu, patrz na przykład [4], II.1. Algebra dróg ma fundamentalne znaczenie w teorii reprezentacji algebr skończenie wymiarowych, a w szczególności w opisie kategorii $\text{mod}(A)$ wszystkich modułów skończenie wymiarowych skończenie wymiarowej K -algebry A . Można pokazać, że jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, to istnieje taka podalgebra A^b algebry A , że $\text{mod}(A) \simeq \text{mod}(A^b)$ oraz $A^b \simeq K\Gamma(A^b)/I$, dla pewnego ideału I w algebrze dróg algebry $K\Gamma(A^b)$, patrz [4], II.3.7.
- (c) Baza mnożeniowa algebry, a więc taka baza B algebry A , że zbiór $B \cup \{0\}$ jest zamknięty na mnożenie. Głęboki wynik Bautisty, Gabriela, Roitera i Salmerona mówi, że każda skończenie wymiarowa algebra A skończonego typu reprezentacyjnego nad ciałem algebraicznie domkniętym K posiada bazę mnożeniową B . A zatem A jest izomorficzna ze ściągniętą algebrą półgrupową półgrupy $B \cup \{0\}$ nad ciałem K , patrz [6].
- (d) Konstrukcje półgrupowe mające na celu zbadanie struktury pewnych klas pierścieni i pewnych własności kategorii ich modułów. Na przykład: monoid klas izomorfizmu skończenie generowanych modułów projektywnych nad pierścieniami regularnymi w sensie von-Neumanna i ich uogólnieniami [3]; czy tak zwany monoid Krulla wprowadzony w kontekście problemów dotyczących rozkładu na sumy proste w kategorii modułów nad pewnymi klasami pierścieni łącznych [11].

W [35], nawiązując do przedstawionych powyżej motywacji, zaproponowano badanie tak zwanych $U(A)$ -orbit, czyli warstw podwójnych $U(A)xU(A)$, $x \in A$, gdzie $U(A)$ oznacza grupę elementów odwracalnych danej algebry skończenie wymiarowej A . W pewnych sytuacjach na zbiorze orbit można wprowadzić działanie mnożenia za pomocą argumentów geometrycznych. Okazało się przy tym, że rozważania tego typu prowadzą w naturalny sposób do:

- (i) związków z teorią algebr skończonego typu reprezentacyjnego,
- (ii) związków ze zbiorem klas sprzężoności ideałów lewostronnych danej algebry.

Ponadto, ten ostatni zbiór dopuszcza bardzo naturalną strukturę półgrupy. Istotnie, jeśli przez $L(A)$ oznaczymy zbiór ideałów lewostronnych algebry A , skończenie wymiarowej z jedyneką, to biorąc $L, M \in L(A)$ oraz $u, v \in U(A)$ widzimy, że $LuMv = LMv$. Zatem określając relację równoważności \sim w $L(A)$ tak, że $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Yu$, dla pewnego $u \in U(A)$ i klasę ideału $L \in L(A)$ oznaczając przez $[L]$ widzimy, że zbiór $C(A) := \{[L] \mid L \in L(A)\}$ jest równy zbiorowi klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry A i można na nim określić mnożenie warstw $[L_1][L_2] := [L_1L_2]$, prowadzące do określenia struktury półgrupy na $C(A)$. Półgrupa ta, będąca głównym obiektem naszych badań, posiada związki z rozważaną wcześniej półgrupą podprzestrzeni $S(A)$ danej algebry A , patrz [34], a także [32], [33], będącą też odpowiednikiem półgrupy zbiorów domkniętych w monoidach algebraicznych. Przy tym, półgrupa podprzestrzeni danej algebry, czy półgrupa $L(A)$ ideałów lewostronnych A są na ogół bardzo duże i trudne do zbadania. Z tej perspektywy $C(A)$ wydaje się być znacznie mniejsza, a być może nadal zawiera istotne informacje o samej algebrze.

W literaturze rozważano rozmaite zagadnienia pokrewne do opisanych wyżej. Szereg prac dotyczył różnego typu działań grupy elementów odwracalnych $U(R)$ pierścienia R na elementy, czy też podzbiory tego pierścienia. I tak Han rozważał między innymi działanie zadane przez lewostronne mnożenie $r \mapsto ru$, dla $r \in R$, $u \in U(R)$, otrzymując pewne wyniki strukturalne, patrz [12], [13]. Hirano pokazał, że jeśli działanie to ma skończenie wiele orbit, to R ma skończenie wiele ideałów lewostronnych, a więc jest pierścieniem lewostronnie artinowskim, patrz [14]. Hryniewicka i Krempa rozważali w [21] cały szereg zagadnień tego rodzaju pokazując, że warunek istnienia skończenie wielu orbit przy różnych działaniach $U(R)$ implikuje często artinowskość rozważanego pierścienia ([21], Theorem 2.3, Theorem 2.4). Pytanie czy skończoność zbioru $U(R)$ -orbit pierścienia z jedyneką R implikuje jego artinowskość wydaje się być nadal otwarte.

Badania półgrup związanych z ideałami jednostronnymi pierścienia nie były do tej pory intensywnie podejmowane. Heatherly i Tucci rozważali naturalne działanie półgrupowe na zbiorze ideałów prawostronnych pierścienia R . Przyjmując bardzo specyficzne założenia o strukturze tej półgrupy (na przykład trywialność \mathcal{J} -klas) uzyskali pewne wyniki strukturalne, patrz [17], [18], [19].

Niniejsza praca dotyczy problemów związanych z $C(A)$ w przypadku, gdy A jest algebrą skończenie wymiarową nad ciałem K (o którym często zakłada się dodatkowo, że jest algebraicznie domknięte). Naturalne najważniejsze problemy pojawiające się w tym kontekście można sformułować w następujący sposób.

- **Problem 1.** Zbadać strukturę półgrupy $C(A)$.
- **Problem 2.** Zbadać warunki, przy których $C(A)$ jest półgrupą skończoną.
- **Problem 3.** Zbadać związki pomiędzy własnościami A i $C(A)$. W szczególności: które własności A można odczytać z $C(A)$?

Choć definicja półgrupy klas sprzężoności ideałów lewostronnych ogranicza się do algebr skończenie wymiarowych, to można oczywiście rozważać ją dla dowolnego pierścienia z jedynką. W kontekście sformułowanych wyżej problemów odnotować można następujące zasadnicze powody dla ograniczeń, które przyjmujemy w tej rozprawie.

- Po pierwsze, w Twierdzeniu 2.2.1 wykazemy, że z punktu widzenia teorii półgrup, struktura półgrupy klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry skończenie wymiarowej A podobna jest do struktury monoidu mnożeniowego tej algebry. Ta ostatnia ma natomiast podobieństwo do struktury dowolnej półgrupy skończonej. W konsekwencji, przyjęte ograniczenia przybliżają rozważania o półgrupie klas sprzężoności do rozważań charakterystycznych dla półgrup skończonych.
- Po drugie, istnieje związek klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry skończenie wymiarowej A z klasami izomorfizmu A -modułów. W przypadku, gdy wymiar A nad K jest skończony można pokazać, że ideały lewostronne L, L' algebry A są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im moduły lewostronne A/L oraz A/L' są izomorficzne. Okazuje się, [35], że odpowiedniość ta pozwala na wskazanie istotnego związku pomiędzy skończonością $C(A)$, a własnością skończonego typu reprezentacyjnego algebry, rozważanego w paragrafie 2.3. Mianowicie jeśli A jest skończonego typu, to $C(A)$ jest skończona, patrz Twierdzenie 2.3.1. Z drugiej strony, jeśli założymy, że ciało K jest algebraicznie domknięte oraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ półgrupa $C(M_n(A))$ jest skończona, to algebra A jest skończonego typu, patrz Twierdzenie 2.3.3.
- Po trzecie, badanie algebr skończenie wymiarowych, zwłaszcza nad ciałem algebraicznie domkniętym, dopuszcza stosowanie metod geometrii algebraicznej, w szczególności teorii grup i monoidów liniowych. Metody te wykorzystujemy między innymi w paragrafach 2.2 i 3.6.
- Po czwarte, badania nad $C(A)$ wpisują się w program szukania skończonych niezmienników algebr skończenie wymiarowych. W paragrafach 2.5 i 2.6 pokazujemy, że przy naturalnych założeniach o algebrze A możemy odczytać jej strukturę ze struktury $C(A)$. Mówi o tym Twierdzenie 2.3.10. Klasa algebr, której dotyczy ten rezultat związana jest z algebraami spełniającymi założenia Twierdzenia Gabriela o skończonym typie reprezentacyjnym. Są one głównym obiektem badań w Rozdziałach 3. i 4.

W rozprawie przyjmujemy często założenie o algebraicznej domkniętości ciała K . Obok powodów wymienionych wyżej, warto dodać także następującą motywację. Rozważmy półgrupę $C(A)$, dla algebry macierzy $A = M_n(D)$, przy czym D jest algebrą z dzieleniem nad K . Wówczas $C(A)$ ma $n + 1$ elementów i jej struktura nie zależy od wyboru algebry D , patrz Przykład 1 w paragrafie 2.1. Zatem w kontekście Problemu 3. oraz faktu, że algebry postaci $M_n(D)$ są blokami prostymi części półprostej dowolnej algebry skończenie wymiarowej, jest to dodatkowy powód by ograniczyć się do przypadku, gdy ciało K jest algebraicznie domknięte.

Przejdźmy teraz do prezentacji głównych rezultatów rozprawy.

- **Twierdzenie 2.2.1.** Rezultat ten opisuje strukturę półgrupową $C(A)$, dla algebry skończenie wymiarowej A . Mówi on, że istnieje skończony łańcuch ideałów półgrupowych w $C(A)$ taki, że każdy jego faktor jest półgrupą nilpotentną lub całkowicie 0-prostą. Warunek tego typu spełniają na przykład wszystkie półgrupy skończone.
- **Twierdzenie 2.3.10.** Niech A, B będą skończenie wymiarowymi algebrami nad ciałem algebraicznie domkniętym K . Załóżmy, że radykał Jacobsona $J(A)$ algebry A jest nilpotentny stopnia 2 oraz, że $C(A)$ jest skończona. Jeśli półgrupy $C(A)$ oraz $C(B)$ są izomorficzne, wtedy algebry A oraz B są również izomorficzne.

Twierdzenie to jest cząstkową realizacją idei rozważania półgrupy klas sprzężoności jako niezmiennika algebry skończenie wymiarowej. W tym przypadku charakteryzowana klasa algebr jest obarczona jest dość szczególnymi warunkami: algebraiczna domkniętość ciała K , skończoność $C(A)$ oraz 2-nilpotentność radykału Jacobsona. Można pokazać, że algebry te spełniają założenia twierdzenia Gabriela, 1.1.23. Zauważmy, że badanie algebr z radykałem nilpotentnym stopnia 2 jest naturalnym pierwszym krokiem w wielu zagadnieniach dotyczących algebr skończenie wymiarowych. Ponadto, właśnie tej klasy algebr dotyczą rezultaty prezentowane w Rozdziałach 3 i 4. Dowód polega na wskazaniu pewnych niezmienników numerycznych algebry A , które wyznaczają ją w rozważanej klasie z dokładnością do izomorfizmu. Pokazujemy, że niezmienniki te mogą być odczytane z własności półgrupy $C(A)$. Tego typu własności algebry A można by umownie nazwać „własnościami rozpoznawalnymi”. Ważny przykład takiej własności daje Twierdzenie 2.5.1 mówiące, że jeśli A jest algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym oraz półgrupa $C(A)$ jest skończona, to ze struktury półgrupy klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry A odczytać można strukturę algebry półprostej $A/J(A)$.

- **Twierdzenie 2.3.11.** Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad dowolnym ciałem K . Następujące warunki są równoważne:
 - 1) $C(A)$ jest skończona,
 - 2) liczba klas sprzężoności nilpotentnych ideałów lewostronnych w A jest skończona.

Jest to rezultat wyjściowy dla rozważań prowadzonych w dalszych częściach rozprawy. Idea dowodu jest następująca. Nietrudno pokazać, że każdy ideał lewostronny L w A rozłożyć można na sumę prostą ideałów lewostronnych: idempotentnego oraz nilpotentnego. Dalej wystarczy wykazać, że jeśli liczba klas sprzężoności ideałów nilpotentnych jest skończona, oraz skoro liczba klas sprzężoności ideałów idempotentnych jest skończona, to z uzyskanego rozkładu wnioskujemy, że cała $C(A)$ jest skończona. Ten krok korzysta też z metod teorii półgrup. Analogiczny rezultat dla $U(A)$ -orbit, a więc zgodnie z Wnioskiem 2.3.2, dla zbioru klas sprzężoności ideałów lewostronnych głównych, wykazano w [35] (Proposition 9)

przy użyciu teorii monoidów liniowych, ograniczając się do przypadku gdy ciało K jest algebraicznie domknięte.

- **Twierdzenia 3.4.2 oraz 3.4.3.** Rezultaty te dają częściowe odpowiedzi na Problem 3.1.1, a więc na pytanie o charakteryzację skończenie wymiarowych algebr A nad ciałem algebraicznie domkniętym takich, że $J(A)^2 = 0$ oraz takich, że półgrupa $C(A)$ jest skończona. Pokazujemy wcześniej, że algebry takie muszą mieć rozdzielną kratę ideałów dwustronnych, patrz Definicja 1.1.13. Opisywane wyniki rozwiązują postawione zagadnienie następujących w przypadkach:

– **Twierdzenie 3.4.2** – w przypadku algebr A takich, że

$$A/J(A) \simeq \underbrace{K \oplus K \oplus \dots \oplus K}_{k_1} \oplus \underbrace{M_2(K) \oplus M_2(K) \oplus \dots \oplus M_2(K)}_{k_2}, \text{ dla } k_1, k_2 \geq 0,$$

– **Twierdzenie 3.4.3** – w przypadku algebr A takich, że

$$A/J(A) \simeq M_{r_1}(K) \oplus M_{r_2}(K) \oplus \dots \oplus M_{r_k}(K), \text{ dla } r_i \geq 6.$$

Warunki występujące w sformułowaniach powyższych twierdzeń wyrażone są w języku tak zwanych szkieletów, a więc pewnych obiektów kombinatorycznych, które przypisać można algebrze A . W przeciwieństwie do Theorem 12 w [35], które rozwiązuje Problem 3.1.1 w przypadku algebr bazowych i korzysta jedynie z postaci grafu rozdzielonego algebry, w przypadku algebr niebazowych nie tylko postać grafu rozdzielonego, ale także rozmiary bloków algebry $A/J(A)$ mają znaczenie dla rozwiązania zagadnienia. Zwróćmy uwagę na istotny wniosek, wpływający z Twierdzenia 3.4.3.

Wniosek 3.6.7. Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K taką, że $J(A)^2 = 0$. Wówczas A jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy półgrupa $C(M_6(A))$ jest skończona.

Dowody dwóch ostatnich rezultatów zajmują dwa obszerne rozdziały pracy, dlatego poświęcimy trochę miejsca przedstawieniu zasadniczej idei dowodu. Polega ona na przeformułowaniu Problemu 3.1.1 na język problemów macierzowych pewnego typu. Jest to sytuacja w pewnym sensie podobna do problemu występującego w teorii reprezentacji par zbiorów częściowo uporządkowanych przez reprezentacje macierzowe, [44], §16. Aby opisać główną ideę tego zagadnienia, przypomnijmy pewne oznaczenia.

Założmy, że skończenie wymiarowa K -algebra A spełnia założenia Problemu 3.1.1. Niech $A/J(A)$ będzie postaci $M_{r_1}(K) \oplus \dots \oplus M_{r_k}(K)$. Algebra A może być traktowana jako podalgebra w $M_n(K[x])$, gdzie $n = r_1 + \dots + r_k$ oraz $x^2 = 0$. Co więcej, radykał $J(A)$ tej algebry przedstawić można jako sumę prostą bloków $J_{ij} = A_i J(A) A_j$, gdzie $A_i \simeq M_{r_i}(K)$, zgodnie ze wzorem (3.2.1). Niech

$a_i = \sum_{j: J_{ij} \neq 0} r_j$. Rozważmy zbiór \mathcal{M}_A macierzy blokowych postaci

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (\star)$$

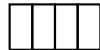
gdzie $a_{ij} \in M_{a_i \times r_j}(\mathbb{K})$ oraz $a_{ij} = 0$, o ile $J_{ij} = 0$. Jeśli przez \mathfrak{H} oznaczymy grupę $\text{Gl}_{a_1}(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_{a_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{a_k}(\mathbb{K})$, zaś przez \mathfrak{G} oznaczymy grupę $\text{Gl}_{r_1}(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_{r_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{r_k}(\mathbb{K})$, to rozważać możemy działanie grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}^o$ na \mathcal{M}_A (gdzie \mathfrak{G}^o to grupa antyizomorficzna do \mathfrak{G}) zadane wzorem:

$$\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}, \quad (\star\star)$$

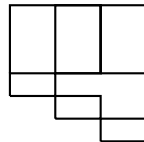
gdzie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}, \mathcal{A} \in \mathcal{M}_A$. Zobaczymy (Stwierdzenie 3.2.8), że orbitom powyższego działania odpowiadać będą, w sposób wzajemnie jednoznaczny, klasy sprzężoności ideałów lewostronnych algebry A zawartych w $J(A)$. Natomiast zgodnie z Twierdzeniem 2.3.11, skończoność tego ostatniego zbioru równoważna jest skończoności całego $C(A)$. Okaże się, że rozwiązanie naszkicowanego wyżej problemu macierzowego bardzo silnie zależy od rozmieszczenia bloków zerowych w macierzach postaci (\star) oraz od rozmiarów (a_i, r_j) tych bloków.

Zagadnienie macierzowe naszkicowane wyżej opisujemy przy pomocy tak zwanych szkieletów i konturów. Szkielet to obiekt kombinatoryczny zawierający informację o rozmiarach niezerowych bloków i wzajemnym ich położeniu. Na przykład:

- 4 bloki rozmiarów 2×1 znajdujące się w jednym wierszu:



- trzy bloki rozmiarów 3×2 w wierszu, a poniżej w trzech wierszach: bloki rozmiarów 1×2 , po jednym w każdej kolumnie zawierającej bloki znajdujące się w jednym wierszu:



Kontur danego szkieletu \mathcal{S} jest to natomiast macierz blokowa, której niezerowe bloki mają rozmiary i wzajemne położenie opisane przez dany szkielet. Na zbiorze wszystkich konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ danego szkieletu działają, podobnie jak w $(\star\star)$, grupy $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}$, będące produktami grup liniowych i w ten sposób w Rozdziałach 3. i 4. rozwiązujemy w istocie zagadnienia związane z $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbitami na przestrzeniach konturów rozmaitych szkieletów. Innymi słowy, przy założeniach Problemu 3.1.1, skończoność półgrupy klas sprzężoności ideałów lewostronnych równoważna jest skończoności zbioru $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na pewnej przypisanej algebrze przestrzeni konturów.

Dowód Twierdzenia 3.4.2 uzyskujemy w dwóch etapach. W pierwszym, dowodzimy ten rezultat w przypadku algebr A takich, że $A/J(A)$ jest izomorficzne z sumą prostą pewnej liczby kopii algebry $M_2(K)$. Fragment ten ma charakter mocno rachunkowy. Zagadnienie sprowadzone zostaje do dwóch dość skomplikowanych problemów macierzowych, opisanych w Lematach 4.1.2 i 4.1.3. W dowodach tych, jak i w wielu innych rozumowaniach wykorzystujemy pewne podstawowe fakty dotyczące znanych problemów macierzowych, dla pełności obrazu podając jednak kompletne dowody. Etap drugi skupia się na sprowadzeniu tezy Twierdzenia 3.4.2 do problemu rozwiązanego w etapie pierwszym. Na potrzeby dowodu wprowadza się tu pojęcia szkieletu dopuszczalnego, quasi-grubej składowej, czy konturów jednowartościowych. Rozważania przedstawione w tym etapie dowodu są w dużej mierze natury kombinatorycznej.

Dowód Twierdzenia 3.4.3 oparty jest natomiast o obserwacje geometryczne Titsa, użyte także w dowodzie Twierdzenia Gabriela. Sprowadzają się one do stwierdzenia, że jeśli na zbiór macierzy (konturów) popatrzymy jak na rozmaitość afiniczną, zaś na grupy \mathfrak{H} , \mathfrak{G} – jak na grupy algebraiczne działające na rozmaitości, to jeśli wymiar (w sensie rozmaitości afinicznych) rozmaitości jest większy od wymiaru działającej na niej grupy, wówczas działanie to nie może mieć skończenie wielu orbit.

Przejdźmy na koniec do krótkiej prezentacji zawartości rozprawy. Składa się ona z czterech rozdziałów, podzielonych na paragrafy. W Rozdziale 1. prezentujemy podstawowe definicje i rezultaty używane w rozprawie. Dwa główne paragrafy prezentują: pierwszy – materiał związany z teorią algebr skończenie wymiarowych oraz teorią reprezentacji algebr, zaś drugi – podstawowe fakty i wyniki z teorii półgrup, ze szczególnym uwzględnieniem monoidów liniowych.

Rozdział 2. zawiera prezentację rozmaitych aspektów półgrupy $C(A)$ klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry skończenie wymiarowej A . W paragrafie 2.1 wprowadzamy definicję półgrupy $C(A)$, oraz prezentujemy zasadnicze przykłady. W kolejnym paragrafie prezentujemy znane konstrukcje pokrewne półgrupie klas sprzężoności i wychodząc od nich formułujemy i dowodzimy Twierdzenie 2.2.1. Paragraf 2.3 omawia związki pomiędzy problemem skończoności półgrupy $C(A)$, a zagadnieniem skończonego typu reprezentacyjnego algebry. Formułujemy w nim Twierdzenia 2.3.11 oraz 2.3.10. Paragraf 2.4 zawiera dowód Twierdzenia 2.3.11. W kolejnej części rozdziału prezentujemy pewne własności związane ze strukturą algebry A , które odczytać można ze struktury $C(A)$. Paragraf 2.6 poświęcony jest natomiast kolejno dowodom Twierdzeń 2.5.1 oraz 2.3.10.

Rozdziały 3. i 4. poświęcone są problemowi charakteryzacji algebr spełniających założenia Twierdzenia Gabriela, w których półgrupa klas sprzężoności ideałów lewostronnych jest skończona. Zagadnienie to, Problem 3.1.1, formułujemy w paragrafie 3.1. W paragrafie 3.2 przedstawiamy przeformułowanie tego zagadnienia na problem skoń-

czoności zbioru \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na przestrzeni konturów algebry A , zgodnie ze szkicem zaprezentowanym wyżej. W paragrafie tym pojawiają się w szczególności pojęcia szkieletu i konturu, w których języku prowadzone są dalsze rozważania. W paragrafie 3.3 wprowadzamy pojęcie grafu rozdzielonego szkieletu. Pozwala ono porównywać różne szkielety, a także liczbę orbit na przestrzeniach ich konturów. Kolejna część Rozdziału 3. zawiera sformułowania Twierdzeń 3.4.2 oraz 3.4.3. W paragrafie 3.5 dowodzimy pewne obserwacje, związane z zachowaniem się liczby orbit przy zmianie szkieletu. Na uwagę zasługuje Lemat 3.5.3, w którym korzystamy istotnie z opisu klas Greena w monoidzie mnożymym algebry macierzy $M_n(K)$. Ostatni paragraf Rozdziału 3. poświęcony jest dowodowi Twierdzenia 3.4.3 oraz dowodowi jednej z implikacji Twierdzenia 3.4.2.

Rozdział 4. zawiera dowód Twierdzenia 3.4.2 zgodnie z opisem przedstawionym wyżej. Paragraf pierwszy ma charakter silnie rachunkowy i dowodzi ten rezultat w ważnym przypadku szczególnym. Część druga tego rozdziału skupia się natomiast na sprowadzeniu tezy do problemu rozwiązanego w paragrafie 4.1. Rozważania, w dużej mierze natury kombinatorycznej, wykorzystują także rezultaty przygotowawcze z paragrafu 3.5.

Część materiału przedstawionego w Rozdziale 3. tej rozprawy, w tym Twierdzenia 2.3.10 i 2.3.11, pochodzą z pracy [26].

Rozdział 1

Niezbędne oznaczenia i fakty pomocnicze

W rozdziale tym podajemy podstawowe definicje i fakty potrzebne w dalszej części pracy. Standardowe pojęcia z:

- teorii mnogości (operacje na zbiorach, relacje, porządki itd.),
- algebry liniowej (ciała, przestrzenie i przekształcenia liniowe, wymiar przestrzeni, iloczyny tensorowe itd.),
- teorii pierścieni (pierścienie, K -algebry, podpierścienie, ideały, homomorfizmy, pierścienie ilorazowe, moduły itd.),
- algebry uniwersalnej (kraty, kongruencje, twierdzenia o izomorfizmie itd.),
- teorii kategorii (kategorie, funktory, naturalne równoważności itd.),

przyjmujemy dalej bez szerszego komentarza za [25]. Kolejne paragrafy tego rozdziału poświęcimy natomiast podstawowym zagadnieniom związanym z teorią pierścieni nieprzemiennych i algebr skończenie wymiarowych, teorią reprezentacji algebr, oraz teorią półgrup uzupełnioną o istotne dla nas elementy teorii monoidów liniowych. W ciągu całej rozprawy przyjmujemy następujące oznaczenia:

- \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych (bez zera),
- \mathbb{Z} – zbiór liczb całkowitych,
- K – dowolne ciało,
- K^* – grupa mnożenia ciała K ,
- $\dim_K V$ – wymiar przestrzeni liniowej V nad ciałem K ,
- $M_n(A)$ – pierścień macierzy kwadratowych rozmiaru $n \times n$ nad pierścieniem A ,
- $M_{n \times k}(A)$ – zbiór macierzy prostokątnych o m wierszach i k kolumnach nad pierścieniem A ,

- $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$ – grupa macierzy $\text{M}_n(\mathbb{K})$ złożony z macierzy odwracalnych rozmiaru $n \times n$,
- $\text{B}_n(\mathbb{K})$ – podgrupa $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$ złożona z macierzy górnotrójkątnych,
- $\text{D}_n(\mathbb{K})$ – podgrupa $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$ złożona z macierzy diagonalnych,
- Σ_n – podgrupa $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$ złożona z macierzy permutacyjnych.

1.1 Pierścienie i algebry skończenie wymiarowe

Do standardowych źródeł z tej tematyki należą monografie Lama [24] oraz Pierce’a [37]. W ciągu całej rozprawy zakładamy, że rozważane pierścienie są łączne i mają obustronną jedynkę, a więc jeśli dany jest pierścień R , to istnieje taki element $1 \in R$, że $1r = r1 = r$, dla każdego $r \in R$. Nie zakładamy natomiast, że mnożenie jest w rozważanych pierścieniach przemienne.

Zgodnie z zapowiedzią poczynioną na początku rozdziału pomijamy w tym miejscu standardowe definicje związane z pierścieniami i modułami nad pierścieniami, odsyłając Czytelnika do [25]. Odnotujmy natomiast, że przez A oznaczać będziemy algebrę skończenie wymiarową z jedynką nad ciałem \mathbb{K} , stosując często także określenie \mathbb{K} -algebra A . Bez szerszego komentarza stosować będziemy także pojęcie modułu nad algebrą, będące drobną modyfikacją pojęcia modułu nad pierścieniem, wynikającą z istnienia struktury liniowej algebry. W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że określenie „ A -moduł” oznacza, o ile nie jest powiedziane inaczej, moduł lewostronny. Przyjmujemy też następujące oznaczenia:

- $U(A)$ – grupa elementów odwracalnych algebry z jedynką A ,
- $I(A)$ – zbiór ideałów dwustronnych algebry A ,
- $I <_l A$ – I jest ideałem lewostronnym w A ,
- $I <_r A$ – I jest ideałem prawostronnym w A ,
- $I \triangleleft A$ – I jest ideałem dwustronnym w A ,
- ${}_A M$ – M jest A -modułem lewostronnym,
- $\text{Mod}(A)$ – kategoria A -modułów lewostronnych,
- $\text{mod}(A)$ – kategoria skończenie wymiarowych A -modułów lewostronnych.

1.1.1 Wybrane twierdzenia strukturalne

Definicja 1.1.1. Niech R będzie pierścieniem, zaś M niech będzie R -modułem.

- Moduł M nazywamy **prostym R -modułem** jeśli $M \neq 0$ oraz M nie ma R -podmodułów innych niż podmoduł zerowy oraz M .

- Moduł M nazywamy **półprostym R -modułem** jeśli każdy R -podmoduł M jest składnikiem prostym (jako R -moduł) modułu M .

Definicja 1.1.2. Niech R będzie pierścieniem z 1. **Radykałem Jacobsona** pierścienia R , oznaczanym przez $J(R)$, nazywamy przecięcie wszystkich maksymalnych ideałów lewostronnych w R .

Można wskazać szereg alternatywnych definicji radykału Jacobsona, patrz [24], §4. Dla naszych celów użyteczna będzie jedynie następująca obserwacja.

Twierdzenie 1.1.3. Niech R będzie pierścieniem z 1. Wówczas $J(R)$ jest ideałem dwustronnym w R oraz $J(R/J(R)) = 0$. Co więcej, następujące warunki są równoważne:

- $r \in J(R)$,
- $1 - arb \in U(R)$, dla dowolnych $a, b \in R$.

W przypadku, gdy $R = A$ jest algebrą skończenie wymiarową, radykał Jacobsona równy jest największemu ideałowi nilpotentnemu algebry A . Zachodzi wówczas następujące, fundamentalne twierdzenie strukturalne.

Twierdzenie 1.1.4 (Wedderburn). Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem K . Następujące warunki są równoważne:

- A jest algebrą półprostą, tzn. ${}_A A$ jest modułem półprostym,
- $J(A) = 0$,
- istnieją liczby naturalne k, r_1, r_2, \dots, r_k , oraz algebry z dzieleniem (to jest takie, w których wszystkie niezerowe elementy są odwracalne) D_1, D_2, \dots, D_k takie, że:

$$A \simeq M_{r_1}(D_1) \oplus M_{r_2}(D_2) \oplus \dots \oplus M_{r_k}(D_k).$$

W szczególności

$$A/J(A) \simeq M_{r_1}(D_1) \oplus M_{r_2}(D_2) \oplus \dots \oplus M_{r_k}(D_k), \quad (1.1.1)$$

dla pewnych algebr z dzieleniem D_i oraz liczb całkowitych dodatnich r_i . Ponadto, jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to $D_i = K$, dla każdego $1 \leq i \leq k$.

W przypadku, gdy A jest algebrą nad ciałem doskonałym K , a więc takim, którego każde skończone rozszerzenie jest rozdzielcze (patrz [25], V.§6), wykazać można następujący niełatwy rezultat (patrz [4], I.1.6 oraz [37], §11.6).

Twierdzenie 1.1.5 (Wedderburn, Malcev). Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem doskonałym K . Wówczas istnieje podalgebra A' algebry A taka, że zachodzi rozkład A na sumę prostą podprzestrzeni liniowych postaci $A = A' \oplus J(A)$ oraz taka, że obcięcie homomorfizmu naturalnego $A \rightarrow A/J(A)$ do A' jest izomorfizmem algebr.

Jeśli ciało K jest dodatkowo algebraicznie domknięte to algebra A' jest sumą prostą algebr prostych A_i , dla $1 \leq i \leq k$, gdzie $A_i \simeq M_{r_i}(K)$. Zatem otrzymujemy wówczas następujący rozkład przestrzeni liniowej A nad ciałem K

$$A = A' \oplus J(A) = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \dots \oplus A_k \oplus J(A). \quad (1.1.2)$$

Definicja 1.1.6. Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową, zaś M niech będzie niezerowym A -modułem. Moduł M nazwiemy **rozkładalnym**, jeśli istnieją takie niezerowe podmoduły $P, Q \subseteq M$, że $M = P \oplus Q$. Moduł ${}_A M$, który nie jest rozkładalny nazywamy **modułem nierozkładalnym**.

W świetle powyższej definicji moduł zerowy nie jest ani rozkładalny, ani nierozkładalny. Odnotujmy, że każdy moduł prosty jest nierozkładalny. Nietrudno pokazać, że każdy niezerowy skończenie generowany A -moduł można przedstawić jako skończoną sumę prostą A -modułów nierozkładalnych. Następujący istotny rezultat mówi o tym, że przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu, patrz [37], §5.4.

Twierdzenie 1.1.7 (Krull, Schmidt). Jeśli A jest algebrą skończenie wymiarową, to każdy niezerowy skończenie generowany A -moduł M przedstawić można jako skończoną sumę prostą A -modułów nierozkładalnych N_1, \dots, N_s , dla pewnego s . Co więcej jeśli $M = N'_1 \oplus \dots \oplus N'_r$, dla pewnych A -modułów nierozkładalnych N'_1, \dots, N'_r , to $s = r$ oraz istnieje taka permutacja $\sigma \in \Sigma_s$, że $N_i \simeq N'_{\sigma(i)}$, dla $1 \leq i \leq s$.

W badaniu struktury algebr skończenie wymiarowych, szczególne miejsce odgrywają **elementy idempotentne**. Przypomnijmy, że jeśli A jest K -algebrą, to element $e \in A$ nazywamy idempotentnym o ile $e = e^2$. Warto odnotować także, że idempotent $e \in R$ nazywamy **centralnym**, jeśli jest on przemienny z każdym elementem pierścienia R .

Stwierdzenie 1.1.8 (Peirce). Niech R będzie algebrą z 1, zaś $e = e^2 \in A$. Wówczas jeśli $f = 1 - e$, to:

- $A = Ae \oplus Af$ jest rozkładem A na sumę prostą idealów lewostronnych,
- $A = eA \oplus fA$ jest rozkładem A na sumę prostą idealów prawostronnych,
- $A = eAe \oplus eAf \oplus fAe \oplus fAf$ jest rozkładem A na sumę prostą podprzestrzeni.

Algebrę z jedyneką, której jedynymi idempotentami centralnymi są 0 i 1 nazywamy **algebrą nierozkładalną** lub spójną. Idempotent e skończenie wymiarowej algebry A nazywamy **prymitywnym**, jeśli Ae jest modułem nierozkładalnym. Można wprowadzić relację częściowego porządku \leq w zbiorze niezerowych idempotentów algebry A , postaci:

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e \quad (1.1.3)$$

i wówczas nietrudno pokazać, że idempotenty prymitywne są minimalnymi elementami w porządku określonym na tym zbiorze. Co więcej, jeśli traktujemy algebrę A jako lewostronny A -moduł to możemy wskazać zbiór niezerowych idempotentów prymitywnych e_1, \dots, e_n algebry A takich, że $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ oraz takich, że moduły Ae_i są nierozkładalne. Zbiór taki nazywamy **pełnym zbiorem prymitywnych idempotentów ortogonalnych** w A .

1.1.2 Ważne klasy algebr skończenie wymiarowych

W paragrafie tym przypominamy trzy ważne klasy algebr, które występować będą w dalszych rozdziałach. Mają one szczególne znaczenie w teorii reprezentacji, której podstawowym wynikiom poświęcimy kolejny paragraf tego rozdziału.

Algebry bazowe

Definicja 1.1.9 ([4], I.6.1). *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym oraz niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie pełnym zbiorem prymitywnych idempotentów ortogonalnych w A . Mówimy, że algebra A jest **bazowa** wtedy i tylko wtedy, gdy $Ae_i \not\cong Ae_j$ jako A -moduły, dla $i \neq j$.*

Na klasę algebr bazowych można patrzeć zarówno z perspektywy twierdzenia Wedderburna, jak i twierdzenia Krulla-Schmidta. Z pierwszej perspektywy, algebra bazowa A ma rozkład (1.1.1), przy czym $r_i = 1$, dla $1 \leq i \leq k$. Innymi słowy $A/J(A)$ jest sumą prostą skończenie wielu kopii ciała K . Z punktu widzenia twierdzenia Krulla-Schmidta wiadomo, że dowolna algebra A ma, jako moduł ${}_A A$, rozkład na pewną skończoną liczbę składników nierozkładalnych, wyznaczonych jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Algebra jest bazowa, jeśli każde dwa takie składniki nierozkładalne nie są izomorficzne.

W teorii reprezentacji, której więcej miejsca poświęcimy w następnym paragrafie, badanie kategorii modułów skończenie wymiarowych nad algebrami skończenie wymiarowymi sprowadza się, gdy ciało K jest algebraicznie domknięte, do badania modułów skończenie wymiarowych nad algebrami bazowymi. Poniższe definicje i stwierdzenia rozwijają tę myśl.

Definicja 1.1.10 ([4], I.6.3). *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K oraz niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie pełnym zbiorem prymitywnych idempotentów ortogonalnych w A . Wówczas **algebrą bazową stowarzyszoną** z A nazywamy algebrę $A^b = e_A A e_A$, gdzie $e_A = e_{j_1} + \dots + e_{j_a}$, gdzie e_{j_1}, \dots, e_{j_a} są wybrane ze zbioru $\{e_1, \dots, e_n\}$ tak, że $Ae_{j_i} \not\cong Ae_{j_t}$, dla $i \neq t$ oraz każdy moduł Ae_s jest izomorficzny z jednym z modułów $Ae_{j_1}, \dots, Ae_{j_a}$.*

Stwierdzenie 1.1.11 ([4], I.6.5, I.6.10). *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym K . Niech A^b będzie algebrą bazową stowarzyszoną z A . Wówczas A^b nie zależy, z dokładnością do izomorfizmu, od wyboru zbiorów $\{e_1, \dots, e_n\}$ oraz $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_a}\}$. Co więcej kategorie $\text{mod}(A^b)$ oraz $\text{mod}(A)$ są równoważne.*

Algebry skończonego typu reprezentacyjnego

Definicja 1.1.12. *Niech A będzie K -algebrą skończenie wymiarową z 1. Powiemy, że A jest **skończonego typu (reprezentacyjnego)** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończenie wiele klas izomorfizmu skończenie wymiarowych (nad K) A -modułów nierozkładalnych.*

Krótką uwagą odnośnie powyższej definicji. W starszych źródłach źródłach zamienia się warunek mówiący o skończonym wymiarze modułów nierozkładalnych z powyższej definicji (występujący zarówno w [4], jak i [16]), na warunek mówiący o modułach skończenie generowanych, patrz [37], §6.7. Są to w sposób oczywisty definicje równoważne. W literaturze występują często zamiennie.

Rozważmy kilka przykładów, za [16], 3.4.1.

- Naturalnymi przykładami algebr skończonego typu są algebry półproste. Wówczas pojęcia modułu nierozkładalnego i prostego pokrywają się. Gdy radykał Jacobsona algebry A jest niezerowy, wówczas problem klasyfikacji jest nietrywialny nawet w przypadku, gdy $J(A)^2 = 0$.
- Algebra $K[x]/(x^n)$, gdzie $K[x]$ to pierścień wielomianów zmiennej x nad ciałem K .
- Algebra grupowa $K[G]$ skończonej grupy G nad ciałem charakterystyki $p > 0$ jest skończonego typu wtedy i tylko wtedy, gdy p -podgrupy Sylowa grupy G są cykliczne. Jest to wynik Higmana.

Algebry rozdzielne

Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem K . Dla każdego A -modułu M , zbiór $S(M)$ wszystkich podmodułów M jest kratą zupełną, to znaczy zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy podzbiór ma kres dolny i kres górny. Operacjami kratowymi są suma modułów oraz przecięcie modułów. Także zbiór wszystkich ideałów dwustronnych $I(A)$ algebry A ma strukturę kraty zupełnej, z działaniami sumy i przecięcia. Każda K -algebra może być traktowana jako prawostronny $A^o \otimes_K A$ -moduł, gdzie A^o jest algebrą przeciwną do A . Można pokazać, że kraty $I(A)$ oraz $S(A_{A^o \otimes_K A})$ są izomorficzne, patrz [37], §2.2 oraz §10.1.

Definicja 1.1.13. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową z 1. Powiemy, że A jest **rozdzielna** jeśli krata $I(A)$ jest **kratą rozdzielną**, to znaczy dla dowolnych ideałów dwustronnych $I, J, K \triangleleft A$ mamy $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.*

Każda algebra skończonego typu jest rozdzielna, zgodnie [37], Theorem 6.7. Następujące stwierdzenie wynika natychmiast z tego, co powiedzieliśmy wyżej, oraz z [37]: §2.2, Exercise 4; §2.6, Exercise 3 oraz §4.8.

Stwierdzenie 1.1.14. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem nieskończonym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- *krata $I(A)$ jest skończona,*
- *krata $I(A)$ jest rozdzielna,*
- *krata $S(J(A))$ wszystkich $A - A$ -podbimodułów $J(A)$ jest rozdzielna.*

Co więcej, każdy ideał dwustronny algebry A jest ideałem głównym.

Założmy dalej, że ciało K jest algebraicznie domknięte. Zgodnie z (1.1.1) możemy przyjąć, że

$$A/J(A) \simeq M_{r_1}(K) \oplus M_{r_2}(K) \oplus \dots \oplus M_{r_k}(K), \quad (1.1.4)$$

dla pewnych liczb całkowitych dodatnich r_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Zgodnie z Twierdzeniem Wedderburna-Malceva (1.1.5) istnieje podalgebra A' algebry A taka, że mamy rozkład na sumę prostą przestrzeni liniowych $A = A' \oplus J(A)$ oraz obcięcie naturalnego homomorfizmu $A \rightarrow A/J(A)$ do A' jest izomorfizmem algebr. Algebra A' jest produktem prostym algebr A_i , dla $1 \leq i \leq k$, i zgodnie z (1.1.4) możemy zakładać, że $A_i \simeq M_{r_i}(K)$. Zatem zgodnie z (1.1.2) dostajemy:

$$A = A' \oplus J(A) = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \dots \oplus A_k \oplus J(A). \quad (1.1.5)$$

Niech $A^e = (A')^{op} \otimes_K A'$ będzie algebrą obwiednią algebry półprostej A' . Jest ona izomorficzna z produktem prostym algebr $A_i^{op} \otimes_K A_j$, po wszystkich parach (i, j) , gdzie $1 \leq i, j \leq k$. Zgodnie z [37], §11.8, algebra A^e jest półprosta, co więcej każdy A' -bimoduł traktować można jako prawostronny A^e -moduł izomorficzny z sumą prostą prostych modułów N_{ij} , gdzie N_{ij} jest minimalnym prawostronnym ideałem w $A_i^{op} \otimes_K A_j \simeq M_{r_i r_j}(K)$. Szczególnie istotne będą dla naszych rozważań bimoduły postaci $e_i A e_j$, gdzie e_l jest, dla $1 \leq l \leq k$, jedyneką algebry A_l .

Stwierdzenie 1.1.15 ([46], §4). *Niech A będzie algebrą rozdzielną i niech A_i będą algebrami takimi jak w (1.1.5), z jednościami e_i . Wówczas $e_i A e_j$ są łańcuchowymi $A_i - A_j$ -bimodułami, dla $1 \leq i, j \leq k$, to znaczy, zbiory podbimodułów $e_i A e_j$ tworzą łańcuchy ze względu na relację inkluzji. W szczególności minimalne niezerowe elementy tych łańcuchów utożsamić można z przestrzeniami liniowymi macierzy prostokątnych rozmiarów $r_i \times r_j$ z naturalnymi działaniami A_i z prawej, oraz A_j z lewej strony.*

1.1.3 Elementy teorii reprezentacji algebr

Przedstawimy teraz wybrane definicje i fakty związane z teorią reprezentacji algebr skończenie wymiarowych. Głównym zadaniem tej teorii jest opis kategorii $\text{Mod}(A)$ modułów algebry skończenie wymiarowej A oraz jej podkategorii – kategorii $\text{mod}(A)$ modułów skończenie wymiarowych nad A . Jednym z pierwszych naturalnych zagadnień tej teorii był problem klasyfikacji algebr skończonego typu, któremu poświęcimy tu więcej miejsca. W paragrafie tym opieramy się przede wszystkim na monografiach: Assema, Simsona i Skowrońskiego [4] oraz Hazewinkela, Gubareni i Kirichenki [16]. Poniżej podajemy przegląd podstawowych konstrukcji i wyników, z których korzystamy w kolejnych rozdziałach.

Definicja 1.1.16. *Kołczanem $\Gamma = (V, E, s, t)$ nazywamy czwórkę składającą się z dwóch zbiorów: V , którego elementy nazywamy dalej **wierzchołkami**; E , którego elementy nazywamy dalej **krawędziami**; oraz dwóch przekształceń $s, t : E \rightarrow V$, które każdej krawędzi $e \in E$ przyporządkowują odpowiednio: **początek** $s(e) \in V$ oraz **koniec** $t(e) \in V$.*

Kończan jest, jak widać, grafem zorientowanym. Nie ma ograniczenia liczby krawędzi pomiędzy danymi dwoma wierzchołkami. Możliwe są również pętle i cykle. Kończan nazywamy **skończonym** jeśli zbiory V, E są skończone. Każdemu kończanowi Γ odpowiada graf niezorientowany $\bar{\Gamma}$. Kończan Γ jest nazwiemy spójnym, jeśli $\bar{\Gamma}$ jest grafem spójnym.

O ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień będziemy pisać, dla skrócenia oznaczeń, że kończan Γ ma postać (V, E) , pamiętając o istnieniu stosownych funkcji ustalających orientację krawędzi. W przypadku, gdy rozważać będziemy kończany między którymi przechodzi co najwyżej jedna krawędź, zakładać będziemy często dla uproszczenia, że $E \subseteq V \times V$.

Definicja 1.1.17. Niech $\Gamma = (V, E)$ będzie kończanem skończonym oraz K – ciałem. Parę $M = (M_v, \phi_e)_{v \in V, e \in E}$ nazwiemy K -reprezentacją kończanu Γ , lub krócej – **reprezentacją kończanu** Γ , jeśli M_v jest przestrzenią liniową nad ciałem K , dla $v \in V$ oraz ϕ_e jest odwzorowaniem liniowym $\phi_e : M_{v_1} \rightarrow M_{v_2}$, dla $e = (v_1, v_2) \in E$. Reprezentację M oznaczamy zwykle w skrócie jako $M = (M_v, \phi_e)$. Jeśli przestrzenie M_v są skończenie wymiarowe, dla wszystkich $v \in V$, to reprezentację $M = (M_v, \phi_e)$ nazywamy **skończenie wymiarową**. W takim przypadku ciąg $\underline{\dim} M = (\dim_K(M_v))_{v \in V}$ nazywamy **wektorem wymiaru reprezentacji** M .

Niech $M = (M_v, \phi_e)$ oraz $M' = (M'_v, \phi'_e)$ będą dwiema reprezentacjami Γ . Wówczas morfizmem (reprezentacji) $f : M \rightarrow M'$ nazywamy rodzinę $f = (f_v)_{v \in V}$ przekształceń liniowych $(f_v : M_v \rightarrow M'_v)_{v \in V}$, które są zgodne ze strukturę przekształceń ϕ_e , to znaczy, dla każdej krawędzi $e : v_1 \rightarrow v_2$ mamy: $\phi'_e f_{v_1} = f_{v_2} \phi_e$. Jeśli $f : M \rightarrow M'$ oraz $g : M' \rightarrow M''$ są dwoma morfizmami reprezentacji kończanu Γ , gdzie $f = (f_v)_{v \in V}$ oraz $g = (g_v)_{v \in V}$, to określamy ich złożenie jako rodzinę $gf := (g_v f_v)_{v \in V}$. Wówczas gf jest w sposób oczywisty morfizmem z M do M'' .

Określiliśmy zatem **kategorię K -reprezentacji liniowych kończanu Γ** , oznaczaną przez $\text{Rep}(\Gamma)$. Przez $\text{rep}_K(\Gamma)$ oznaczamy podkategorię $\text{Rep}(\Gamma)$ złożoną ze skończenie wymiarowych reprezentacji. Nietrudno pokazać, że obydwie te kategorie są abelowe (patrz [4], III.1.3). Można zatem mówić o **reprezentacjach nierozkładalnych kończanu**, definiując je analogicznie jak moduły nierozkładalne. Co więcej, można pokazać, naśladując dowód twierdzenia Krulla-Schmidta, że jeśli dana jest skończenie wymiarowa reprezentacja kończanu Γ , wówczas jej rozkład na nierozkładalne reprezentacje jest jednoznaczny z dokładnością do izomorfizmu (patrz Corollary 2.4.2 w [16]). W szczególności mówimy, że **kończan Γ jest skończonego typu reprezentacyjnego**, jeśli istnieje skończenie wiele klas izomorfizmu nierozkładalnych obiektów w $\text{rep}_K(\Gamma)$. Wskazuje to na głęboki związek pomiędzy kategoriami reprezentacji kończanów, a kategoriami modułów algebr skończenie wymiarowych nad ciałem algebraicznie domkniętym.

Definicja 1.1.18. Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą i niech $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ będzie pełnym zbiorem prymitywnych idempotentów ortogonalnych algebry A . Wówczas

graf skierowany $\Gamma = (V, E)$ nazywamy **kołczanem algebry** A i oznaczamy przez $\Gamma(A)$, jeśli zbiór wierzchołków Γ ma postać $V = \{1, 2, \dots, n\}$, a zbiór krawędzi E jest równy $\{(i, j) \mid e_i J(A) e_j \neq 0\}$.

Z każdym kołczanem $\Gamma = (V, E)$ związany jest graf rozdzielony $\Gamma^s = (V^s, E^s)$, gdzie $V^s = V \times \{0, 1\}$ oraz $E^s = \{(i, 0), (j, 1) \mid (i, j) \in E\}$. Jeśli A skończenie wymiarową algebrą z kołczanem $\Gamma = \Gamma(A)$, to graf rozdzielony Γ^s , odpowiadający Γ , nazywany jest **grafem rozdzielonym algebry** A . Graf ten oznaczamy przez $\Gamma^s(A)$.

Kołczan algebry jest oczywiście kołczanem zgodnie z Definicją 1.1.16. Jest jasne jak wyglądają funkcje $s, t : E \rightarrow V$. Pozwólmy sobie na dłuższy komentarz dotyczący powyższej definicji. Pojęcie „kołczanu algebry” występuje w literaturze w różnych postaciach, w zależności od klasy algebr (także nieskończenie wymiarowych), w której się je rozważa. Definicja przytoczona wyżej pochodzi z [37], §6.4 i jest uproszczeniem pojęcia o tej samej nazwie, występującego w [4] oraz [16].

Definicja 1.1.19 (Kołczan algebry A). Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym K , zaś $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ będzie pełnym zbiorem idempotentów prymitywnych w A . Określamy kołczan $\Gamma_G(A) = (V, E, s, t)$ postaci:

$$V = \{1, 2, \dots, n\}, E = \bigcup_{i,j=1}^n E_{ij}, \text{ gdzie}$$

$$\alpha \in E_{ij} \Leftrightarrow s(\alpha) = i, t(\alpha) = j$$

oraz $|E_{ij}| = \dim_K(e_i J(A) e_j / e_i J(A)^2 e_j)$.

W monografii [15], 11.5, kołczan według Definicji 1.1.18 nazywa się kołczanem Pierce’a, a kołczan według Definicji 1.1.19 nazywa się kołczanem Gabriela. Okazuje się, że Definicje 1.1.18 oraz 1.1.19 zgadzają się w przypadku algebr A , w których radykał Jacobsona jest 2-nilpotentny, a krata ideałów dwustronnych – rozdzielna. Ponieważ jedynie w takim kontekście będziemy używać pojęcia kołczanu algebry, to w dalszym ciągu stosować będziemy jedynie Definicję 1.1.18.

Zachodzi następujący, zasadniczy fakt (dla dowolnej algebry skończenie wymiarowej jest to Theorem III.1.6 w [4]).

Twierdzenie 1.1.20. Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową algebrą rozdzielną nad ciałem algebraicznie domkniętym, przy czym $J(A)^2 = 0$, oraz niech $\Gamma(A) = (V, E)$ niech będzie kołczanem A . Wówczas

$$\text{Rep}(\Gamma) \simeq \text{Mod}(A)$$

jest naturalną równoważnością kategorii reprezentacji kołczanu Γ oraz kategorii A -modułów. Równoważność ta ograniczona do $\text{rep}_K(\Gamma)$ jest naturalną równoważnością kategorii skończenie wymiarowych reprezentacji kołczanu Γ i kategorii $\text{mod}(A)$ skończenie wymiarowych A -modułów. W szczególności, algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan $\Gamma(A)$ jest skończonego typu reprezentacyjnego.

Klasyfikacja kołczanów skończonego typu ma związek z teorią form kwadratowych. Przypomnijmy zatem, że **całkowiłą formą kwadratową** zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy wielomian $q = q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ postaci:

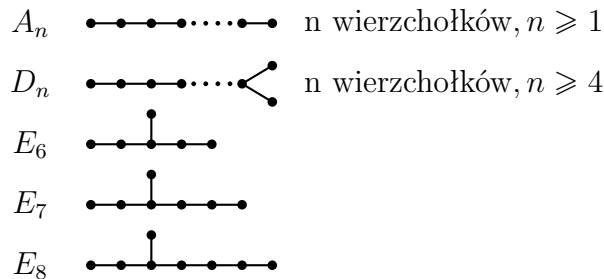
$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Forma kwadratowa q jest **dodatnio określona**, jeśli $q(x) > 0$, dla każdego $x > 0$ (przy czym mówimy, że $x \in \mathbb{Z}^n$ spełnia warunek: $x > 0$, o ile wszystkie współrzędne x są dodatnie). Forma q jest **półdodatnio określona**, jeśli $q(x) \geq 0$, dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}^n$. Forma q jest wreszcie **nieokreślona**, jeśli istnieje $x \neq 0$ taki, że $q(x) < 0$. Jeśli dany jest skończony kołczan $\Gamma = (V, E)$, przy czym $V = \{1, 2, \dots, n\}$, wówczas **formą kwadratową kołczanu** Γ nazywamy całkowiłą formę kwadratową q_Γ postaci:

$$q_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in V} x_i^2 - \sum_{(i,j) \in E} x_i x_j. \quad (1.1.6)$$

Jeśli kołczan Γ jest skończony, spójny i acykliczny wówczas, zgodnie z Lemma VII.4.1 w [4], definicja q_Γ zależy jedynie od grafu $\bar{\Gamma}$ powstającego z kołczanu Γ po zaniechaniu orientacji.

Okazuje się, że jedynymi kołczanami spójnymi mającymi dodatnio określoną formę q_Γ są kołczany, które po zaniechaniu orientacji strzałek mają postać jednego z tak zwanych grafów Dynkina. Są to jednocześnie grafy kluczowe dla klasyfikacji kołczanów skończonego typu. Wymieniamy je poniżej.



Twierdzenie 1.1.21 (Gabriel, [16], 2.6.1). *Niech K będzie dowolnym ciałem. Kołczan spójny Γ jest skończonego typu wtedy i tylko wtedy, gdy graf niezorientowany $\bar{\Gamma}$ tego kołczanu (otrzymany z Γ przez zaniechanie orientacji krawędzi) jest grafem Dynkina postaci A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 . Liczba klas izomorfizmu reprezentacji Γ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy forma kwadratowa q_Γ tego grafu jest dodatnio określona.*

Na problem skończonego typu reprezentacyjnego kołczanu możemy patrzeć także przez pryzmat intuicji geometrycznych, przydatnych w dalszej części naszej pracy. Przyjmijmy, dla uproszczenia, że ciało K jest algebraicznie domknięte. Niech $d = (d_1, \dots, d_k)$ będzie k -tką liczb całkowitych dodatnich. Rozważmy zbiór $\text{rep}_K(\Gamma, d)$ wszystkich skończenie wymiarowych reprezentacji $M = (M_v, \phi_e)$ kołczanu $\Gamma = (V, E, s, t)$ o wektorze wymiaru $\dim M = d$, gdzie $V = \{1, \dots, k\}$. Wówczas $\text{rep}_K(\Gamma, d)$ jest w bijekcji ze zbiorem elementów przestrzeni liniowej:

$$N = \bigoplus_{(i,j) \in E} \text{Hom}_K(M_i, M_j).$$

Mamy zatem izomorfizm:

$$\text{rep}_K(\Gamma, d) \simeq \bigoplus_{(i,j) \in E} M_{d_j \times d_i}(K). \quad (1.1.7)$$

Zatem $\text{rep}_K(\Gamma, d)$ utożsamiać można z nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną \mathbb{A}^r wymiaru (w sensie geometrii algebraicznej, patrz [47], 14.1)

$$r = \sum_{e \in E} d_{s(e)} d_{t(e)}.$$

Na przestrzeń N działa grupa $\text{Gl}(d) := \text{Gl}_{d_1}(K) \times \dots \times \text{Gl}_{d_k}(K)$ wymiaru

$$\dim(\text{Gl}(d)) = \sum_{v \in V} d_v^2$$

tak, że jeśli $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \text{Gl}(d)$, to:

$$(\dots, \phi_{ij}, \dots) \mapsto (\dots, \theta_j \phi_{ij} \theta_i^{-1}, \dots), \quad (1.1.8)$$

gdzie $\phi_{ij} \in \text{Hom}(M_i, M_j) \simeq M_{d_j \times d_i}(K)$. Zachodzi następujący fakt.

Stwierdzenie 1.1.22 ([16], 2.6.2(1)). *Istnieje bijekcja $M \mapsto \mathcal{O}_M$ pomiędzy zbiorem klas izomorfizmu nierozkładalnych reprezentacji $M \in \text{rep}_K(\Gamma)$ o wektorze wymiaru $\dim M = d$ oraz zbiorem orbit względem działania $\text{Gl}(d)$ na $\text{rep}_K(\Gamma, d)$ według (1.1.8).*

Wyniki Gabriela dotyczące klasyfikacji kołczanów skończonego typu można, zgodnie z Twierdzeniem 1.1.20, przetłumaczyć na wyniki klasyfikujące algebry skończonego typu A , których radykał Jacobsona jest 2-nilpotentny.

Twierdzenie 1.1.23 (Gabriel, [37], §11.8). *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą rozdzielną nad ciałem algebraicznie domkniętym taką, że $J(A)^2 = 0$. Wówczas A jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A jest skończoną sumą rozłączną grafów Dynkina postaci A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .*

Na koniec przypomnimy ważne z punktu widzenia historii rozwoju teorii reprezentacji, a także przydatne dla naszych rozważań, hipotezy Brauera-Thralla.

Hipoteza 1.1.24 (Pierwsza hipoteza Brauera-Thralla). *Skończenie wymiarowa K -algebra A jest albo skończonego typu reprezentacyjnego albo istnieją nierozkładalne A -moduły dowolnie dużego wymiaru.*

Wynik ten udowodnił A.V.Roiter w 1968 roku, dla algebry skończenie wymiarowej nad dowolnym ciałem, patrz [43].

Hipoteza 1.1.25 (Druga hipoteza Brauera-Thralla). *Skończenie wymiarowa algebra nad ciałem nieskończonym K jest albo skończonego typu reprezentacyjnego, albo istnieje nieskończony ciąg liczb $n_i \in \mathbb{N}$ takich, że dla każdego i istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych nierozkładalnych A -modułów wymiaru d_i nad K .*

Wynik ten udowodniono z wielkim trudem (i po wielu uzupełnieniach) jedynie dla algebr nad ciałem algebraicznie domkniętym, patrz [28], [41], a także [5], [6]. Tradycyjnie wynik przypisuje się Nazaroviej i Roiterowi.

1.2 Elementy teorii półgrup

Celem tego paragrafu jest wprowadzenie podstawowych pojęć i wyników związanych z teorią półgrup. Standardowymi źródłami są monografie Clifforda i Prestona [8] oraz monografia Howiego [20]. Przedstawimy także kilka znanych pojęć i rezultatów związanych z teorią monoidów liniowych, a w szczególności z własnościami monoidu multiplikatywnego algebry skończenie wymiarowej.

1.2.1 Podstawowe definicje

Definicja 1.2.1 (Półgrupa, monoid). Zbiór S z działaniem $\circ : S \times S \rightarrow S$ nazwiemy **półgrupą** jeśli \circ jest łączne. Jeśli istnieje $e \in S$, że dla każdego $s \in S$ zachodzą równości:

$$e \circ s = s \circ e = s,$$

to półgrupę taką nazywamy **monoidem**, e zaś **jedynką** w tym monoidzie. Wówczas przez $U(S)$ oznaczamy grupę elementów odwracalnych w S .

Definicja 1.2.2 (Półgrupa z dołączonym zerem lub jedynką). Niech S będzie półgrupą. Bierzemy pewne dwa elementy $\theta, 1 \notin S$ i określamy zbiory:

$$S^1 := S \cup \{1\}, \quad S^0 := S \cup \{\theta\},$$

i rozszerzamy działanie \circ tak, że 1 jest w S^1 jedynką, zaś θ jest w S^0 obustronnym zerem.

Definicja 1.2.3. Element s półgrupy S z zerem nazywamy:

- **idempotentnym** wtedy i tylko wtedy, gdy $s^2 = s$,
- **nilpotentnym** wtedy i tylko wtedy, gdy $s^n = 0$, dla pewnego $n > 0$,
- **regularnym** wtedy i tylko wtedy, gdy $a = axa$, dla pewnego $x \in S$.

Półgrupę S nazywamy:

- **nil półgrupą** jeśli każdy element S jest nilpotentny,
- **półgrupą regularną** jeśli każdy element S jest regularny,
- **półgrupą nilpotentną** jeśli $S^n = \{0\}$, dla pewnej liczby całkowitej $n > 0$.

Analogicznie do sytuacji występującej w teorii pierścieni, na zbiorze niezerowych idempotentów $E(S)$ półgrupy S wprowadzamy częściowy porządek zadany wzorem (1.1.3). Minimalne elementy $E(S)$ względem tego porządku nazywamy **idempotentami prymitywnymi**.

Podobnie jak w teorii pierścieni, także w teorii półgrup wprowadzane jest pojęcie ideału.

Definicja 1.2.4 (Ideal). Niech $\emptyset \neq I \subseteq S$. Zbiór I nazwiemy:

- **ideałem prawostronnym**, piszemy $I <_r S$, jeśli $IS \subseteq I$,
- **ideałem lewostronnym**, piszemy $I <_l S$, jeśli $SI \subseteq I$,
- **ideałem dwustronnym**, piszemy $I \triangleleft S$, jeśli $SI \subseteq S \wedge IS \subseteq S$.

Definicja 1.2.5 (Ideal główny). Niech $a \in S$. Wówczas zbiór

$$aS^1 := a(S \cup \{1\}) = aS \cup \{a\}$$

nazywamy **ideałem głównym** prawostronnym w S . Analogicznie określamy S^1a – ideal główny lewostronny w S oraz S^1aS^1 – ideal główny dwustronny w S .

Definicja 1.2.6 (Iloraz Reesa). Niech $I \triangleleft S$. W zbiorze $(S \setminus I) \cup \{\theta\}$ określamy następujące działanie:

$$a \circ b = \begin{cases} ab & , \text{ o ile } ab \notin I, \\ \theta & , \text{ o ile } ab \in I \end{cases} \quad \text{dla } a, b \in S.$$

Co więcej, dla każdego $a \in (S \setminus I) \cup \{\theta\}$ mamy $a \circ \theta = \theta \circ a = \theta$.

Wówczas działanie \circ jest łączne na zbiorze $(S \setminus I) \cup \{\theta\}$. Uzyskaną w ten sposób półgrupę oznaczamy przez S/I i nazywamy **ilorazem Reesa** półgrupy S przez ideal $I \triangleleft S$. Zauważmy, że θ jest elementem zerowym tego ilorazu.

Przypomnijmy także pojęcie **kongruencji** na półgrupie S . Jest to relacja równoważności ρ na S spełniająca warunek:

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow \forall_{c \in S} \quad [((ac, bc) \in \rho) \wedge ((ca, cb) \in \rho)]. \quad (1.2.1)$$

Na zbiorze ilorazowym S/ρ określić można działanie \circ postaci: $[a] \circ [b] = [ab]$. Wynik działania jest niezależny od wyboru reprezentantów. Uzyskujemy zatem półgrupę ilorazową, oznaczaną przez S/ρ . Jest jasne, że izomorficzna kopia kraty ideałów półgrupy S zawarta jest w kracie kongruencji S . Istotnie, jeśli $I \triangleleft S$, to odpowiada mu kongruencja ρ_I na S postaci: $(a, b) \in \rho_I \Leftrightarrow [(a, b \in I) \vee (a = b, a \in S \setminus I)]$.

1.2.2 Relacje Greena

Pojęcie ideału w sposób naturalny prowadzi do definicji szczególnie ważnych w teorii półgrup relacji równoważności.

Definicja 1.2.7 (Relacje Greena). Niech S będzie półgrupą, oraz $a, b \in S$. Określamy następujące relacje na S :

$$\begin{aligned} a\mathcal{L}b &\Leftrightarrow S^1a = S^1b, \\ a\mathcal{R}b &\Leftrightarrow aS^1 = bS^1, \\ a\mathcal{J}b &\Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1. \end{aligned}$$

Są to relacje równoważności. Przecięcie $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ oznaczamy jako \mathcal{H} . Sumę, a więc najmniejszą relację równoważności zawierającą \mathcal{R} oraz \mathcal{L} , oznaczamy przez \mathcal{D} . Jeśli $a \in S$ to symbolami $\mathcal{J}_a, \mathcal{L}_a, \mathcal{R}_a, \mathcal{H}_a, \mathcal{D}_a$ oznaczać będziemy klasy abstrakcji elementu a odpowiednio względem relacji $\mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ oraz \mathcal{D} .

Z definicji widać od razu, że skoro $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$ oraz $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$, to $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Zawieranie to może być właściwe, przykładem jest następująca półgrupa ([1]):

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0 \right\} \subseteq Gl_2(\mathbb{R}).$$

Ze względu na szczególnie elegancką strukturę \mathcal{D} -klas, o której powiemy dalej, problem określenia kiedy dla danej półgrupy S relacje \mathcal{D} oraz \mathcal{J} są równe jest szczególnie istotny. Wspomniemy tu o dwóch takich klasach półgrup, które wykorzystywać będziemy dalej.

Definicja 1.2.8. Powiemy, że H jest **podgrupą półgrupy** S jeśli H jest podgrupą grupy elementów odwracalnych $U(eSe)$, monoidu eSe , dla pewnego idempotenta $e \in S$. Powiemy dalej, że półgrupa S jest:

- **periodyczna**, jeśli półgrupa generowana przez każdy element S jest skończona (równoważnie: dla każdego $s \in S$ istnieje takie n , że s^n jest idempotentem),
- **silnie π -regularna** jeśli dla każdego $s \in S$ istnieje $n \geq 1$ takie, że s^n zawarte jest w pewnej podgrupie S .

Na mocy [20], 2.1.4 oraz [39], 1.4, zachodzi następujący fakt.

Stwierdzenie 1.2.9. W klasie półgrup silnie π -regularnych (a więc także dla półgrup periodycznych) zachodzi równość relacji \mathcal{D} oraz \mathcal{J} .

Przejdźmy teraz do struktury \mathcal{D} -klas. Jest ona wyjątkowo regularna, ponieważ definiując ją relacje \mathcal{L} oraz \mathcal{R} są przemienne. Zachodzi następujący fakt.

Stwierdzenie 1.2.10. Niech \mathcal{A}, \mathcal{B} – relacje równoważności na zbiorze X . Wówczas:

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}.$$

Przecięcie \mathcal{R} -klasy oraz \mathcal{L} -klasy jest zawsze albo puste (wtedy klasy te leżą w różnych \mathcal{D} -klasach), albo jest \mathcal{H} -klasą. Clifford i Preston zaproponowali w [8] następujący model obrazujący opisaną przez nas sytuację.

Definicja 1.2.11 (Egg-box pattern). Każda \mathcal{D} -klasa w półgrupie S może być przedstawiona w postaci tablicy prostokątnej nazywanej „egg-box pattern”, w której rzędy reprezentowane są przez \mathcal{R} -klasy, zaś kolumny przez \mathcal{L} -klasy. Każda powstała w ten sposób pozycja w tablicy przyporządkowana jest pojedynczej \mathcal{H} -klasie. Jeśli półgrupa S posiada element zerowy, wówczas tworzy on osobną \mathcal{D} -klasę.

\mathcal{H}_x	\mathcal{H}_y						

Twierdzenie 1.2.12 (Green). *Jeśli H jest \mathcal{H} klasą w półgrupie S , to albo $H^2 \cap H = \emptyset$, albo $H^2 = H$ i H jest podgrupą w S . Ponadto każda maksymalna podgrupa S jest \mathcal{H} -klasą.*

Jeśli \mathcal{H} -klasa H półgrupy S jest grupą, wówczas jedynka H jest idempotentem w S . Wynika stąd, że w każdej \mathcal{H} -klasie S może leżeć co najwyżej jeden idempotent e . Zgodnie z twierdzeniem Greena, jeśli w \mathcal{H} -klasie H znajdziemy idempotent, wówczas H musi być grupą.

1.2.3 Półgrupy całkowicie 0-proste. Faktory i ciągi główne.

Przejdziemy teraz do podstawowych wyników związanych ze strukturą półgrup. Zaczniemy od opisu półgrup składających się z dokładnie jednej nietrywialnej \mathcal{J} -klasy. Termin „nietrywialna” rozumiemy tutaj dwójako. W klasie półgrup nie posiadających elementu zerowego są to takie półgrupy S , które posiadają dokładnie jedną \mathcal{J} -klasę (równą całemu S). W klasie półgrup zawierających element zerowy będą to takie, które posiadają dokładnie dwie \mathcal{J} -klasy: $\{0\}$ oraz $S \setminus \{0\}$.

Definicja 1.2.13. *Niech S będzie półgrupą. Powiemy, że S jest:*

- **prosta** wtedy i tylko wtedy, gdy S nie jest jednoelementowa i S jest jedynym ideałem w S ,
- **0-prosta** wtedy i tylko wtedy, gdy S posiada element zerowy, S jest prosta oraz $S^2 \neq 0$,
- **całkowicie 0-prosta** wtedy i tylko wtedy, gdy S jest 0-prosta i posiada idempotent prymitywny.

W 1928 roku Suschkewitsch podał klasyfikację wszystkich skończonych półgrup 0-prostych. Wynik ten rozwinął Rees w 1940r. Okazuje się, że każda półgrupa całkowicie 0-prosta jest izomorficzna z tzw. **półgrupą typu macierzowego**.

Definicja 1.2.14 (Półgrupa typu macierzowego). *Niech G będzie grupą z jedynką e oraz X, Y – niepustymi zbiorami. Niech P będzie macierzą rozmiaru $|Y| \times |X|$ o wyrazach z $G \cup \{0\} = G^0$, przy czym zakładamy, że macierz P nie ma wierszy ani*

kolumn zerowych (przez macierz rozumiemy tu funkcję $Y \times X \rightarrow G^0$). Na zbiorze $S = (G \times X \times Y) \cup \{\theta\}$ określamy następujące działanie:

$$(g_1, x_1, y_1)(g_2, x_2, y_2) = \begin{cases} (g_1 p_{y_1 x_2} g_2, x_1, y_2), & p_{y_1 x_2} \neq 0, \\ \theta & , \quad p_{y_1 x_2} = 0, \end{cases}$$

$$(g_1, x_1, y_1)\theta = \theta(g_1, x_1, x_2) = \theta\theta = \theta.$$

Czym jest w istocie zdefiniowany obiekt? Element $a = (g, x_1, y_1) \in S$ utożsamiać można z macierzą rozmiarów $|X| \times |Y|$ o współczynnikach w G^0 . Jedyny niezerowy element tej macierzy znajduje się w wierszu x_1 i kolumnie y_1 i wynosi g . Nietrudno zobaczyć, że iloczyn $c = ab$ dwóch elementów $a, b \in S$ odpowiada, po przejściu do reprezentujących elementy S macierzy $A = (a_{xy}), B = (b_{xy}), C = (c_{xy})$, zwykłemu iloczynowi macierzy postaci $C = A \cdot P \cdot B$. Innymi słowy $(c_{xy}) = (a_{xy}) \cdot P \cdot (b_{xy})$.

W ten sposób zdefiniowana struktura jest rzeczywiście półgrupą. Obok terminu „półgrupa typu macierzowego” w literaturze używa się także określenia „**półgrupa Reesa**”. W dalszej części pracy półgrupę tę oznaczają będziemy przez $\mathcal{M}[G^0; X, Y; P]$. Półgrupy typu macierzowego są, jak się okazuje, całkowicie 0-proste ([20], Lemma 2.3). Zachodzi też twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 1.2.15 (Rees, Suschkewitsch [20], 2.11). *Niech S będzie półgrupą całkowicie 0-prostą. Wówczas istnieją: grupa G , zbiory X, Y i macierz $P \in M_{|Y| \times |X|}(G^0)$, że $S \simeq \mathcal{M}[G^0; X, Y; P]$.*

Niech a będzie niezerowym elementem półgrupy S z zerem. Przez $J(a)$ oznaczmy ideał główny $S^1 a S^1$ półgrupy S generowany przez a , oraz przez \mathcal{J}_a oznaczmy \mathcal{J} -klasę zawierającą a , to znaczy, zbiór generatorów $J(a)$. Niech $I(a) = J(a) \setminus \mathcal{J}_a$. Wówczas $I(a)$ jest ideałem w S . Iloraz Reesa $J(a)/I(a)$ nazywany jest **faktorem głównym** w S . Odnotujmy, że $J(a)/I(a) = \mathcal{J}_a \cup \{\theta\}$. Każdy faktor główny w S jest albo 0-prosty, albo ma zerowe mnożenie (patrz Lemma 2.39 w [8]).

Definicja 1.2.16. *Przez **ciąg główny półgrupy** z zerem S rozumiemy ciąg ideałów w S :*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_m \supset S_{m+1} = \{0\}, \quad (1.2.2)$$

*taki, że nie istnieje ideał S leżący ściśle pomiędzy S_i a S_{i+1} , dla $i = 1, 2, \dots, m$. Przez **faktory główne** (1.2.2) rozumiemy ciąg faktorów Reesa postaci S_i/S_{i+1} , ($i = 1, 2, \dots, m$).*

Nie każda półgrupa posiada ciąg główny. Przykładem klasy mającej tę własność są półgrupy skończone. Jeśli półgrupa posiada ciąg główny, to jest on jednoznaczny w następującym sensie. Faktory ciągów głównych są izomorficzne, w pewnym porządku, do faktorów głównych w S (patrz [8]), 2.40. W konsekwencji, każde dwa ciągi główne półgrupy S mają izomorficzne faktory. W ogólniejszym kontekście mówimy o łańcuchach ideałów półgrupy S postaci:

$$S = I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \supsetneq \dots \supsetneq I_n, \quad (1.2.3)$$

gdzie I_i są dla $i = 1, 2, \dots, n$ ideałami w S . Wówczas półgrupy ilorazowe I_i/I_{i+1} nazywać będziemy **faktorami łańcucha** (1.2.3). Szczególne znaczenie będą miały dla nas takie skończone łańcuchy ideałów postaci (1.2.3), że $I_n = \{0\}$ o faktorach będących półgrupami regularnymi lub nilpotentnymi. Każda półgrupa skończona posiada tego typu łańcuch.

1.2.4 Monoidy liniowe.

Teoria monoidów liniowych, rozwinięta głównie przez L. Rennera i M. Putchę, stanowi połączenie metod abstrakcyjnej teorii półgrup, geometrii algebraicznej i teorii grup algebraicznych. Ze względu na to, że monoidy mnożeniowe algebr skończone wymiarowych nad ciałem algebraicznie domkniętym K są przykładami monoidów liniowych, pewne wymienione niżej fakty będą przydatne w naszych dalszych rozważaniach. Podstawowym odnośnikiem jest dla nas monografia Putchy [39]. Standardowe fakty z geometrii algebraicznej i teorii grup algebraicznych, a więc definicję topologii Zariskiego, rozmaitości afinicznej, wymiaru rozmaitości, pierścieni współrzędnych itd. przyjmujemy dalej za drugim i czwartym rozdziałem tej książki.

Definicja 1.2.17. (*Liniową*) **półgrupę algebraiczną** nazywamy rozmaitości afiniczną S nad ciałem algebraicznie domkniętym wraz z łącznym działaniem $\circ : S \times S \rightarrow S$ będącym jednocześnie morfizmem rozmaitości. **Homomorfizmem** pomiędzy półgrupami algebraicznymi S, S' nazywamy homomorfizm półgrupowy $\phi : S \rightarrow S'$, będący morfizmem rozmaitości. Półgrupę algebraiczną będącą monoidem nazywamy **monoidem algebraicznym**.

Przykładem liniowej półgrupy algebraicznej jest oczywiście każda algebraiczna grupa liniowa. Nas jednak półgrupy liniowe interesują głównie z punktu widzenia zastosowań do teorii algebr skończone wymiarowych. Wiadomo, że jeśli A jest algebrą skończone wymiarową z 1, to istnieje n takie, że A jest izomorficzna z pewną podalgebrą algebry macierzy $M_n(K)$. W szczególności, monoid mnożeniowy (A, \cdot) jest podmonoidem monoidu mnożeniowego algebry macierzy, $(M_n(K), \cdot)$. Część poniższych rozważań poświęcamy zatem temu szczególnemu monoidowi.

Pełen monoid liniowy. Rozważmy monoid $M_n(K)$ macierzy kwadratowych rozmiaru $n \times n$, widziany tym razem dodatkowo jako rozmaitość algebraiczna izomorficzna z K^{n^2} . Pierścień funkcji regularnych $M_n(K)$ utożsamiamy z pierścieniem wielomianów n^2 zmiennych postaci $K[x_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$. Niech $\phi : M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ będzie zwykłym mnożeniem macierzowym, a więc jeśli $a = (a_{ij}), b = (b_{ij})$ oraz $c = \phi(a, b) = (c_{ij})$ wtedy $c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}$. Nietrudno widzieć, że ϕ jest zatem morfizmem zbiorów algebraicznych. Struktury: półgrupowa i algebraiczna są w przypadku $M_n(K)$ zgodne, tj. mnożenie półgrupowe jest morfizmem zbiorów algebraicznych. Trójkę $(M_n(K), \phi, Id)$ nazywamy pełnym liniowym monoidem algebraicznym.

Szczególnie istotny będzie dla nas opis klas Greena w monoidzie $M_n(K)$ (zachodzący bez żadnego ograniczenia na ciało K). Przypomnijmy podstawowe oznaczenia z algebry

liniowej. Przez **rzęd** $r(a)$ macierzy kwadratowej $a \in M_n(\mathbb{K})$ rozumiemy wymiar podprzestrzeni liniowej przestrzeni \mathbb{K}^n rozpiętej przez kolumny a . Wiadomo, że wielkość ta równa jest wymiarowi przestrzeni rozpiętej przez wiersze tejże macierzy.

Stwierdzenie 1.2.18 ([31], 2.1). *Niech $a, b \in M_n(\mathbb{K})$. Wówczas:*

$$\begin{aligned} a \mathcal{J} b &\iff \text{Gl}_n(\mathbb{K})a \text{Gl}_n(\mathbb{K}) = \text{Gl}_n(\mathbb{K})b \text{Gl}_n(\mathbb{K}) &\iff r(A) = r(B), \\ a \mathcal{R} b &\iff a \text{Gl}_n(\mathbb{K}) = b \text{Gl}_n(\mathbb{K}) &\iff \text{Im}(a) = \text{Im}(b), \\ a \mathcal{L} b &\iff \text{Gl}_n(\mathbb{K})a = \text{Gl}_n(\mathbb{K})b &\iff \ker(a) = \ker(b). \end{aligned}$$

przy czym $\text{Im}(x), \ker(x)$ oznaczają obraz i jądro homomorfizmu liniowego $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, którego macierzą w bazie standardowej jest $x \in M_n(\mathbb{K})$.

Macierz a rzędu $j \leq n$ można przy pomocy **elementarnych operacji** wierszowych (odpowiednio: kolumnowych) sprowadzić do **zredukowanej postaci** wierszowej (kolumnowej). Postać ta ma następujące własności:

1. Współczynnik wiodący każdego niezerowego wiersza (kolumny) wynosi 1.
2. Dla każdego $i \leq j$, współczynnik wiodący $i + 1$. wiersza (kolumny) znajduje się w kolumnie (wierszu) o indeksie dalszym niż współczynnik wiodący z wiersza (kolumny) i .
3. Współczynnik wiodący niezerowego wiersza (kolumny) A jest jedynym niezerowym elementem kolumny (wiersza) go zawierającej.

Nietrudno wykazać, że macierze przynależące do tej samej \mathcal{R} -klasy to takie, które są równoważne z punktu widzenia elementarnych operacji na kolumnach. Podobnie przynależność dwóch macierzy do tej samej \mathcal{L} -klasy oznacza, że jedną można sprowadzić do drugiej przy pomocy elementarnych operacji na wierszach. Innymi słowy, zbiór reprezentantów klas, na jakie dzieli $M_n(\mathbb{K})$ relacje \mathcal{R}, \mathcal{L} to nic innego, jak zbiory macierzy w postaciach zredukowanych.

Dwóm relacjom Greena monoidu $M_n(\mathbb{K})$ nie poświęciliśmy dotąd uwagi, mianowicie relacjom \mathcal{D} oraz \mathcal{H} . Okazuje się, że \mathcal{D} -klasy te są w $M_n(\mathbb{K})$ tożsame z \mathcal{J} -klasami. Istotnie, zgodnie z [31], 1.3, $M_n(\mathbb{K})$ jest silnie π -regularna, a zatem równość rozważanych klas Greena wynika ze Stwierdzenia 1.2.9. Zgodnie z definicją klas Greena oraz ze Stwierdzeniem 1.2.18, \mathcal{H} -klasy w $M_n(\mathbb{K})$ złożone są z macierzy o identycznych obrazach i identycznych jądrach.

Warto wspomnieć o jeszcze jednym wniosku ze Stwierdzenia 1.2.18, związanym ze strukturą ideałów w $M_n(\mathbb{K})$. Każdy ideał tego monoidu jest postaci M_j , gdzie M_j jest zbiorem macierzy rozmiaru $n \times n$ o rzędzie nie większym niż j , dla $0 \leq j \leq n$. Ideały te tworzą ciąg główny monoidu $M_n(\mathbb{K})$:

$$M_n(\mathbb{K}) = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \dots \supsetneq I_1 \supsetneq I_0 = \{0\},$$

którego faktory M_j/M_{j-1} są półgrupami całkowicie 0-prostymi. Zgodnie z Twierdzeniem Reesa, 1.2.15, są to półgrupy typu macierzowego. Istotnie, można pokazać (patrz

[31], 2.3), że faktor M_j/M_{j-1} jest izomorficzny z półgrupą postaci $\mathcal{M}[\mathrm{Gl}_j(\mathbb{K}); X_j, Y_j; Q_j]$, gdzie X_j, Y_j to zbiory elementów rzędu j w $M_n(\mathbb{K})$ będące odpowiednio w postaci zredukowanej kolumnowej oraz wierszowej, zaś $Q_j = (q_{yx})$ jest, dla $x \in X_j, y \in Y_j$, macierzą postaci

$$q_{yx} = \begin{cases} yx, & r(yx) = j, \\ \theta, & r(yx) < j. \end{cases}$$

Są to skomplikowane półgrupy, szczególnie w przypadku, gdy ciało \mathbb{K} jest nieskończone. Wówczas także zbiory X_j, Y_j są nieskończone, dla $j < n$, zaś warunek określający wyrazy macierzy Q_j jest trudny do praktycznego stosowania.

Wspomnieliśmy wyżej, że jeśli A jest algebrą skończenie wymiarową z jedyneką nad ciałem \mathbb{K} , wówczas monoid mnożeniowy (A, \cdot) jest podmonoidem monoidu $M_n(\mathbb{K})$ macierzy kwadratowych $n \times n$ nad \mathbb{K} , dla pewnego n . Wiadomo, że jeśli S jest dowolną mnożeniową podpółgrupą $M_n(\mathbb{K})$ i \mathbb{K} jest algebraicznie domknięte, to domknięcie S w topologii Zariskiego na $M_n(\mathbb{K})$, a więc \overline{S} , jest półgrupą algebraiczną (patrz [39], 3.4). Monoid (A, \cdot) jest podzbiorem domkniętym w $M_n(\mathbb{K})$, a więc (A, \cdot) jest monoidem liniowym. Co więcej, jest to monoid nieprzywiedlny jako rozmaitość afiniczna.

Odnotujmy następujące dwa fakty, przydatne w dalszych rozważaniach. Pierwszy jest uogólnieniem Stwierdzenia (1.2.18) i dotyczy monoidów nieprzywiedlnych.

Stwierdzenie 1.2.19 ([39], 6.1). *Niech M będzie nieprzywiedlnym monoidem liniowym, którego grupa jedności równa jest G . Weźmy $a, b \in M$. Wówczas:*

- $a \mathcal{J} b \Leftrightarrow GaG = GbG$,
- $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow aG = bG$,
- $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow Ga = Gb$.

Drugie stwierdzenie dotyczy natomiast monoidów mnożeniowych algebr skończenie wymiarowych.

Stwierdzenie 1.2.20. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z 1. Wówczas półgrupa mnożeniowa (A, \cdot) jest silnie π -regularna.*

Przypomnijmy krótkie uzasadnienie ostatniego faktu. Jest to konsekwencja znanego rezultatu mówiącego, że monoid mnożeniowy pierścienia R jest silnie π -regularny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in R$ łańcuch ideałów prawostronnych $xR \supseteq x^2R \supseteq x^3R \supseteq \dots$ stabilizuje się, patrz [24], Exercise 23.5 oraz Exercise 23.6 (inne uzasadnienie tego lematu można znaleźć w [23], Proposition 1.2). Zgodnie ze Stwierdzeniem 1.2.9 wnosimy zatem, że jeśli A jest algebrą skończenie wymiarową z 1, to w monoidzie (A, \cdot) relacje \mathcal{J} oraz \mathcal{D} są równe.

Rozdział 2

Półgrupa klas sprzężoności ideałów lewostronnych

Celem tego rozdziału jest prezentacja głównego obiektu badań tej rozprawy – półgrupy klas sprzężoności $C(A)$ algebry skończenie wymiarowej z jedyнкą A . Definicję tę osadzamy z jednej strony w kontekście konstrukcji półgrupowych związanych z monoidem moltiplikatywnym algebry skończenie wymiarowej, a z drugiej strony, zgodnie z rozważaniami w [35], w kontekście zagadnień związanych z teorią reprezentacji algebr skończenie wymiarowych, w szczególności w kontekście charakteryzacji algebr skończonego typu reprezentacyjnego i Twierdzenia Gabriela, 1.1.23.

W pierwszym paragrafie podajemy definicję półgrupy klas sprzężoności i omawiamy kilka ważnych przykładów. W paragrafie 2.2 dowodzimy Twierdzenie 2.2.1 opisujące strukturę półgrupy $C(A)$. Motywację dla tego wyniku stanowią przedstawione w tej części konstrukcje półgrup związanych z monoidem moltiplikatywnym algebry A , rozważane w [34], a także w [32], [33]. W następnym paragrafie, nawiązując do [35], przedstawiamy związki łączące własność skończonego typu reprezentacyjnego algebry A ze skończonością półgrupy $C(A)$. Formułujemy Twierdzenie 2.3.10, mówiące o tym, że półgrupa $C(A)$ wyznacza algebrę A dla klasy algebr będących obiektem badań w Rozdziałach 3. i 4. Formułujemy też Twierdzenie 2.3.11, redukujące problem badania skończoności $C(A)$ do badania klas sprzężoności ideałów nilpotentnych. Dowód tego drugiego podajemy w paragrafie 2.4. Następnie przygotowując dowód pierwszego z wymienionych faktów, wskazujemy pewne własności algebry A , które odczytać można ze struktury półgrupy $C(A)$. Kluczową własnością tego rodzaju okazuje się struktura algebry $A/J(A)$, co formułujemy w Twierdzeniu 2.5.1. Ostatni paragraf 2.6 zawiera dowody Twierdzeń 2.5.1 oraz 2.3.10.

2.1 Definicja i podstawowe przykłady

Niech A będzie algebrą z 1 nad ciałem K . Przez $L(A)$ oznaczamy zbiór ideałów lewostronnych algebry A . Jeśli $L_1, L_2 \in L(A)$, to $L_1L_2 \in L(A)$. Mnożenie ideałów lewostronnych jest łączne, a więc $L(A)$ ma strukturę półgrupy. Przypomnijmy, że $U(A)$

jest zbiorem elementów odwracalnych algebry A . Określamy następujące działanie $\phi : A \times U(A) \rightarrow A$:

$$\phi(a, u) = u^{-1}au, \text{ gdzie } u \in U(A), a \in A.$$

Jest to w sposób oczywisty relacja równoważności. Orbitę elementu $a \in A$ przy działaniu ϕ nazywamy **klasą sprzężoności** a . Orbitę ideału $L \in L(A)$ względem ϕ oznaczamy będziemy przez $[L]$. Niech $C(A) := \{[L] \mid L \in L(A)\}$. Wówczas dla dowolnych $[L_1], [L_2] \in C(A)$:

$$[L_1][L_2] = [L_1L_2],$$

a więc $C(A)$ jest półgrupą, nazywaną dalej **półgrupą klas sprzężoności ideałów lewostronnych** algebry A .

Odnotujmy na początek prostą uwagę, wynikającą wprost z definicji $C(A)$. Zauważmy mianowicie, że jeśli $L, L' \in L(A)$, to $[L] = [L']$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L = L'u$, dla pewnego $u \in U(A)$.

Przedstawimy teraz trzy przykłady, do których odnosić się będziemy także w dalszych rozważaniach.

Przykład 1. Niech $A = M_n(D)$, gdzie D jest algebrą z dzieleniem. Wtedy $C(M_n(D))$ ma $n + 1$ elementów. Istotnie, każdy niezerowy ideał lewostronny w $M_n(D)$ jest generowany przez niezerowy idempotent, a każdy niezerowy idempotent w $M_n(D)$ jest z kolei sprzężony z idempotentem diagonalnym rzędu k postaci $e_{11} + \dots + e_{kk}$, dla $1 \leq k \leq n$, przy czym e_{ij} oznaczają jedyńki macierzowe w $M_n(D)$. Dostajemy w ten sposób n niezerowych elementów półgrupy $C(M_n(D))$, a zatem poszerzając je o klasę zera dostajemy całą półgrupę klas sprzężoności. Jak wygląda mnożenie w tej półgrupie? Dla dowolnych niezerowych x, y mamy $M_n(D)xM_n(D)y = M_n(D)y$, zatem jeśli $s_1, s_2 \in C(M_n(D))$ są niezerowe, to $s_1s_2 = s_2$. W języku teorii półgrup można powiedzieć, że $C(M_n(D))$ jest półgrupą prawostronnych zer, z dołączonym elementem zerowym (klasą ideału zerowego).

Przykład 2. Niech $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_t$ będzie algebrą półprostą o blokach prostych A_1, \dots, A_t . Wtedy $C(A) \simeq C(A_1) \times C(A_2) \times \dots \times C(A_t)$, gdzie półgrupy $C(A_i)$ są, dla $1 \leq i \leq t$, takie jak w Przykładzie 1.

Przykład 3. Jeśli A jest algebrą lokalną (czyli mającą dokładnie jeden ideał lewostronny maksymalny) postaci $K[x]/(x^n)$, wówczas $C(A)$ ma $n + 1$ elementów postaci: $[A], [A\bar{x}^i]$, dla $1 \leq i \leq n$, gdzie \bar{x} obrazem x przy homomorfizmie naturalnym $K[x] \rightarrow K[x]/(x^n)$. Półgrupa $C(A)$ jest zatem półgrupą cykliczną generowaną przez element nilpotentny $[A\bar{x}] = [J(A)]$ z dołączoną jedyńką $[A]$.

Przykład 4 ([35], Example 1). Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą ideałów lewostronnych głównych nad ciałem algebraicznie domkniętym K . Zgodnie z [10], IX.4.1

wiadomo, że istnieją algebry lokalne B_1, \dots, B_t takie, $J(B_j) = B_j x_j$, dla pewnych x_j , oraz

$$A \simeq M_{n_1}(B_1) \oplus \dots \oplus M_{n_t}(B_t).$$

Zatem $B_j = K_0[S_j]$ jest ściągniętą algebrą półgrupową, gdzie $S_j = \{1, x_j, \dots, x_j^{r_j-1}, 0\}$ oraz r_j jest minimalną liczbą całkowitą dodatnią taką, że $x_j^{r_j} = 0$. Niech $A_j = M_{n_j}(B_j)$. Za pomocą elementarnych operacji na wierszach i kolumnach łatwo sprawdzić, że każda orbita postaci $U(A_j)xU(A_j)$, $0 \neq x \in A_j$, zawiera macierz diagonalną postaci $\text{diag}(x^{i_1}, \dots, x^{i_k}, 0, \dots, 0)$, gdzie $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k < r_j$ oraz $k \leq n_j$. Co więcej, łatwo widzieć, że różne macierze tej postaci są w różnych orbitach. Skoro każdy lewostronny ideał A jest główny, to $C(A_j)$ można zidentyfikować ze zbiorem $C_j \subseteq S_j^{n_j}$ wszystkich takich ciągów (poszerzonym o ciąg zerowy) z naturalnym mnożeniem. Jest też jasne, że $C(A) \simeq C_1 \times \dots \times C_t$.

2.2 Struktura półgrupowa $C(A)$

Celem tego paragrafu będzie opisanie struktury półgrupowej $C(A)$. Główny rezultat, który wykażemy, jest następujący:

Twierdzenie 2.2.1. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedyneką nad ciałem K . Wówczas istnieje skończony łańcuch ideałów półgrupy $C(A)$:*

$$0 = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_n = C(A)$$

taki, że każdy jego faktor jest półgrupą nilpotentną lub całkowicie 0-prostą.

Wspomnieliśmy już w paragrafie 1.2.4, że jeśli A jest algebrą skończenie wymiarową z jedyneką nad ciałem K , wówczas monoid mnożeniowy (A, \cdot) jest podmonoidem monoidu $M_n(K)$ macierzy kwadratowych $n \times n$ nad K , dla pewnego n . Co więcej, zgodnie ze Stwierdzeniem 1.2.20 monoid mnożeniowy (A, \cdot) jest silnie- π -regularny (patrz Definicja 1.2.8). Zatem zgodnie z Theorem 2.14 oraz Theorem 3.5 w [31] wiadomo, że (A, \cdot) posiada skończony łańcuch ideałów taki, że każdy jego faktor jest półgrupą nilpotentną lub całkowicie 0-prostą. Twierdzenie 2.2.1 pokazuje, że $C(A)$ ma w pewnym sensie strukturę podobną do struktury (A, \cdot) .

Dowód Twierdzenia 2.2.1 wymaga pewnych konstrukcji i wyników pomocniczych. Wykorzystamy w tym celu opis struktury dwóch typów monoidów związanych z (A, \cdot) , znalezione w [34]. Przypomnijmy ich konstrukcje.

Definicja 2.2.2 ([34], §2). *Niech M będzie nieprzywiedlnym liniowym monoidem algebraicznym określonym nad ciałem algebraicznie domkniętym. Przez **monoid zbiorów domkniętych monoidu** M rozumiemy zbiór $\mathcal{D}(M)$ złożony ze wszystkich domkniętych nierozkładalnych podzbiorów niepustych M z mnożeniem:*

$$X \cdot Y = \overline{XY}, \quad \text{gdzie } X, Y \in \mathcal{D}(M),$$

przy czym \overline{T} oznacza domknięcie zbioru $T \subseteq M$ w topologii Zariskiego.

Zauważmy, że M jest podmonoidem $\mathcal{D}(M)$, ponieważ każdy podzbiór jednoelementowy monoidu M jest zbiorem domkniętym w M .

Stwierdzenie 2.2.3 ([34], 2.4). *Niech M będzie algebraicznym monoidem nieprzywiel-dnym zawierającym element zerowy. Wówczas $\mathcal{D}(M)$ ma skończony łańcuch ideałów*

$$0 = D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \dots \subsetneq D_n = \mathcal{D}(A),$$

w którym każdy faktor jest albo regularny, albo nilpotentny. Co więcej, każdy faktor regularny jest 0-rozłączną sumą swoich całkowicie 0-prostych ideałów.

Definicja 2.2.4. *Niech A będzie algebrą nad ciałem K . Niech $\mathcal{S}(A)$ będzie zbiorem wszystkich podprzestrzeni liniowych algebry A . Określamy następujące działanie dwu-argumentowe \star na $\mathcal{S}(A)$. Jeśli $V, W \in \mathcal{S}(A)$, to*

$$V \star W = \text{lin}_K(VW).$$

*Działanie \star zadaje na $\mathcal{S}(A)$ strukturę półgrupy, którą nazywać będziemy **półgrupą podprzestrzeni algebry A** . Jeśli A ma jedynekę, wówczas półgrupa podprzestrzeni algebry A jest monoidem.*

Opis struktury $\mathcal{S}(A)$, któremu poświęcona jest w dużej części [34], opiera się na wskazananiu epimorfizmu $\mu : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{S}(A)$ pozwalającego odczytać pewne własności kraty ideałów w $\mathcal{S}(A)$ przy pomocy własności kraty ideałów w $\mathcal{D}(A)$. Dokładniej, korzystamy z następującej obserwacji.

Obserwacja 2.2.5. *Niech S_1, S_2 będą półgrupami z zerem oraz $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ niech będzie epimorfizmem półgrup. Wówczas jeśli istnieje skończony łańcuch ideałów półgrupy S_1 postaci:*

$$0 = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_n = S_1$$

taki, że każdy faktor tego łańcucha jest półgrupą nilpotentną lub całkowicie 0-prostą, to ciąg ideałów $\phi(I_k)$ półgrupy S_2 , gdzie $0 \leq k \leq n$, ma faktory będące półgrupami nilpotentnymi lub całkowicie 0-prostymi.

Obserwacja ta posłuży nam w dowodzie Twierdzenia 2.2.1. W przypadku opisu struktury $\mathcal{S}(A)$ została ona wykorzystana w następujący sposób. Wiadomo, że jeśli A jest algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym, to każda podprzestrzeń liniowa algebry A jest podzbiorem domkniętym w monoidzie mnożenia (A, \cdot) algebry A . Co więcej, odwzorowanie $\mu : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{S}(A)$ określone wzorem $\mu(X) = \text{lin}_K(X)$ jest epimorfizmem półgrup, ponieważ $\overline{Z} \subseteq \text{lin}_K(Z)$ dla dowolnego podzbioru Z w A , patrz [34], §3. Zatem korzystając ze Stwierdzenia 2.2.3 oraz z Obserwacji 2.2.5 uzyskujemy skończony łańcuch ideałów w $\mathcal{S}(A)$ (zawierający $\mathcal{S}(A)$ oraz ideał zerowy) taki, że każdy jego faktor jest półgrupą nilpotentną lub 0-rozłączną sumą półgrup całkowicie 0-prostych. Zgodnie z [34], §4, wiadomo także, że wynik ten pozostaje niezmienny nawet przy założeniu, że ciało K nie jest algebraicznie domknięte. W ten sposób dostajemy rezultat mówiący o strukturze $\mathcal{S}(A)$ dla algebr skończenie wymiarowych nad dowolnym ciałem.

Wniosek 2.2.6. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem K . Wówczas istnieje skończony łańcuch ideałów monoidu $S(A)$*

$$0 = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \dots \subsetneq J_m = S(A)$$

taki, że każdy faktor tego łańcucha jest półgrupą nilpotentną lub sumą 0-rozłączną całkowicie 0-prostych ideałów.

Warto odnotować, że faktory łańcuchów ideałów półgrup $\mathcal{D}(A)$ oraz $S(A)$ opisane w Stwierdzeniu 2.2.3 oraz we Wniosku 2.2.6 mogą być nieskończonymi sumami 0-rozłącznymi półgrup całkowicie 0-prostych. Innymi słowy, można pokazać przykład algebry A , skończenie wymiarowej nad ciałem algebraicznie domkniętym, że teza Twierdzenia 2.2.1 nie będzie prawdziwa ani dla $\mathcal{D}(A)$, ani dla $S(A)$. W przypadku $C(A)$ teza ta okaże się być prawdziwa ze względu na szczególnie prostą strukturę klas Greena tej półgrupy. Następujący rezultat ma podstawowe znaczenie dla dalszych rozważań.

Stwierdzenie 2.2.7. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedyneką nad ciałem K . Wówczas półgrupa $L(A)$ jest periodyczna ograniczonego indeksu, czyli: istnieje taka liczba całkowita $N > 0$, że półgrupa generowana przez dowolny element $L(A)$ ma nie więcej niż N elementów.*

Dowód. Zgodnie z [8], 1.6, periodyczność półgrupy $L(A)$ jest równoważna z faktem, że dla każdego elementu $L \in L(A)$ istnieją takie liczby całkowite dodatnie $r < s$, że $L^r = L^s$. Wobec zawierania:

$$L \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \dots$$

widzimy, że istnieje takie $n > 0$ takie, że dla każdego $m > n$ mamy $L^m = L^n$. W przeciwnym razie otrzymalibyśmy nieskończony zstępujący ciąg parami różnych ideałów lewostronnych L_i w A . Wówczas jednak ciąg wymiarów $\dim_K(L_i)$ byłby malejącym ciągiem nieskończonym liczb całkowitych dodatnich. Wykazaliśmy zatem, że podpółgrupa $L(A)$ generowana przez dowolny element tej półgrupy ma moc nie większą niż $\dim_K(A) + 1$. Zatem $L(A)$ jest periodyczna ograniczonego indeksu. \square

Zgodnie z Corollary 2.56 w [8] otrzymujemy:

Wniosek 2.2.8. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedyneką. Każdy 0-prosty faktor główny półgrupy $L(A)$ jest całkowicie 0-prosty.*

Przejdźmy teraz do opisu klas Greena w $C(A)$. Rozpocznijmy od następującej, oczywistej obserwacji.

Obserwacja 2.2.9. *Niech A będzie algebrą z jedyneką. Wówczas przekształcenie $\phi : L(A) \rightarrow C(A)$ zadane wzorem $\phi(L) = [L]$ jest epimorfizmem półgrup.*

Obserwacja ta pozwala na opis niektórych klas Greena półgrupy $C(A)$ przy pomocy półgrupy $L(A)$.

Stwierdzenie 2.2.10. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową z jedyneką. W półgrupach $L(A)$ oraz $C(A)$ zachodzą następujące równości klas Greena:*

$$\mathcal{D} = \mathcal{J} = \mathcal{R}.$$

Dowód. Załóżmy, że elementy $[L], [L']$ są w tej samej \mathcal{L} -klasie $C(A)$. Istnieją zatem elementy $g, h \in U(A)$ oraz ideały lewostronne $I_1, I_2 <_l A$ takie, że $I_1 L g = L'$ oraz $I_2 L' h = L$. W szczególności $L' \subseteq L g$ oraz $L \subseteq L' h$. Stąd $L \subseteq L' h \subseteq L g h$. Skoro jednak $\dim_K(L) = \dim_K(L g h)$, to $L = L' h = L g h$, a więc $[L] = [L']$. Zatem \mathcal{L} jest relacją identyczności w $C(A)$. Analogicznie pokazujemy, że \mathcal{L} jest identycznością w $L(A)$. Zatem zarówno w $L(A)$, jak i w $C(A)$ zachodzi równość klas Greena: $\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L} = \mathcal{R}$.

Zgodnie ze Stwierdzeniem 2.2.7 półgrupa $L(A)$ jest periodyczna. Skoro półgrupa $C(A)$ jest obrazem epimorficznym $L(A)$, to także $C(A)$ jest periodyczna. W każdej półgrupie periodycznej zachodzi jednak równość klas Greena $\mathcal{D} = \mathcal{J}$, patrz Stwierdzenie 1.2.9. Dowód jest zatem zakończony. \square

Wniosek 2.2.11. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową z jedyneką oraz niech $L, L' \in L(A)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) $L \mathcal{R} L'$ w $L(A)$,
- (ii) $[L] \mathcal{R} [L']$ w $C(A)$.

Zatem $L \mathcal{J} L'$ w $L(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[L] \mathcal{J} [L']$ w $C(A)$.

Dowód. Implikacja (i) \Rightarrow (ii) jest jasna, ponieważ zgodnie z Obserwacją 2.2.9 półgrupa $C(A)$ jest obrazem epimorficznym $L(A)$. Załóżmy zatem, że $[L] \mathcal{R} [L']$. Istnieją wówczas ideały lewostronne $M_1, M_2 <_l A$, że $[L][M_1] = [L']$ oraz $[L'][M_2] = [L]$. Stąd:

$$L M_1 g = L', \quad L' M_2 h = L, \quad g, h \in U(A).$$

Ponieważ $M_1 g, M_2 h$ są ideałami lewostronnymi w A , to wynika stąd, że $[L] \mathcal{R} [L']$ w $C(A)$. Uzasadnienie drugiej części wniosku wynika natychmiast ze Stwierdzenia 2.2.10. \square

Odnotujmy ważną uwagę dotyczącą regularnych czynników głównych w $L(A)$, która wobec Wniosku 2.2.11 opisuje też regularne czynniki główne w $C(A)$.

Stwierdzenie 2.2.12. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową z jedyneką nad ciałem K oraz niech T będzie 0-prostym czynnikiem głównym w $L(A)$. Wówczas T ma tylko jedną niezerową \mathcal{R} -klasę i jest ona postaci:*

$$\mathcal{J}_I = \{X \in L(A) \mid X^2 = X, XA = IA\}, \quad (2.2.1)$$

gdzie $I \in T$. W szczególności \mathcal{J}_I zawiera dokładnie jeden element będący ideałem dwustronnym w A . Co więcej, niezerowe elementy T tworzą półgrupę prawostronnych zer.

Dowód. Skoro $\mathcal{J} = \mathcal{D} = \mathcal{R}$ w $L(A)$, to w T jest tylko jedna \mathcal{R} -klasa oraz każda \mathcal{H} -klasa w T jest jednoelementowa. Co więcej, jeśli $X \in \mathcal{J}_I$, wówczas XA jest dwustronnym ideałem w A , który spełnia $(XA)X = X^2 = X$, a więc $XA \in \mathcal{J}_I$. Jednakże IA jest jedynym ideałem dwustronnym w \mathcal{J}_I , ponieważ jeśli $JJ' = J, J'J = J$ dla pewnych ideałów dwustronnych J, J' w A , wówczas $J = J'$. Stąd $XA = IA$. Wykazaliśmy

zatem, że $\mathcal{J}_I \subseteq \{X \in L(A) \mid X^2 = X, XA = IA\}$. Zauważmy dalej, że jeśli $X \in L(A)$, $X^2 = X$, oraz $XA = IA$, to X, I są w tej samej \mathcal{J} -klasie. Istotnie, $X = X^2 = XAX = IAX = IX$ i podobnie $I = XI$. Wykazaliśmy zatem (2.2.1) oraz pozostałe tezy stwierdzenia. \square

Sformułujemy teraz kolejny fakt istotny dla dowodu Twierdzenia 2.2.1.

Stwierdzenie 2.2.13. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową z jedyнкą nad ciałem K oraz niech $J(A)$ oznacza radykał Jacobsona algebry A . Wówczas liczba regularnych \mathcal{J} -klas w $L(A)$ równa jest 2^k , gdzie k jest liczbą bloków prostych algebry $A/J(A)$, zgodnie z (1.1.1).*

Dowód. Zauważmy, że każda regularna \mathcal{J} -klasa w $L(A)$ jest, po dodaniu do niej elementu zerowego, całkowicie 0-prostym faktorem głównym w $L(A)$. Istotnie, w półgrupie periodycznej faktory główne mają zerowe mnożenie lub są całkowicie 0-proste. W szczególności, na mocy Stwierdzenia 2.2.12, istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem regularnych \mathcal{J} -klas w $L(A)$ oraz zbiorem niezerowych dwustronnych ideałów idempotentnych w A . Jednak zgodnie z Proposition 2.2 w [27] wiadomo, że dla dowolnego pierścienia lewostronnie doskonałego R (patrz [24], 23.18) istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem niezerowych ideałów idempotentnych w R oraz zbiorem dwustronnych ideałów pierścienia półprostego $R/J(R)$. Każda algebra skończenie wymiarowa z jedyнкą nad ciałem jest natomiast lewostronnie doskonała. Dowód jest zatem zakończony. \square

DOWÓD TWIERDZENIA 2.2.1. Dowodzimy, że teza twierdzenia jest spełniona dla półgrupy $L(A)$. Zauważmy, że $L(A)$ jest prawostronnym ideałem półgrupowym w $S(A)$ to znaczy, że $L(A)S(A)$ jest podzbiorem $L(A)$. Istotnie, niech $L \in L(A)$ oraz $S \in S(A)$. Wówczas $LS = \text{lin}_K(LS)$ jest podprzestrzenią rozpiętą przez elementy postaci ls , gdzie $l \in L(A)$ oraz $s \in S(A)$. Zatem $LS <_l A$. Dalej skorzystamy z następującego lematu.

Lemat 2.2.14. *Niech M będzie półgrupą całkowicie 0-prostą oraz niech R będzie jej niezerowym prawostronnym ideałem. Zdefiniujmy:*

$$N = \bigcup L \cap R,$$

przy czym sumujemy po takich L , że:

- L jest \mathcal{L} -klasą M ,
- $L \cap R$ nie zawiera idempotentów.

Wtedy $(N \cup \{0\})^2 = 0$, oraz $T := R \setminus N$ jest półgrupą całkowicie 0-prostą.

Dowodzimy lemat. Jest jasne, że zbiór $N \cup \{0\}$ jest sumą rozłączną pewnej liczby \mathcal{H} -klas w M niezawierających idempotentów. W szczególności \mathcal{H}_a nie jest grupą, dla każdego $a \in N \cup \{0\}$. Weźmy dowolne $a, b \in N$. Gdyby $ab \neq 0$, to na mocy Theorem 2.52(ii) w [8] mielibyśmy zawieranie $ab \in \mathcal{R}_a \cap \mathcal{L}_b$. Jednak zgodnie z Theorem 2.17 w [8] wiemy, że wówczas $\mathcal{R}_b \cap \mathcal{L}_a = \mathcal{H}_{ba}$ zawierać musi idempotent. Jednak z definicji N wiemy, że $\mathcal{H}_{ba} = \mathcal{R}_b \cap \mathcal{L}_a \subseteq N$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że $(N \cup \{0\})^2 = 0$.

Ponieważ R jest niezerowym ideałem w M , to R zawiera niezerowy idempotent, a więc T jest niezerowa. Z konstrukcji łatwo wynika, że $T^2 \subseteq T$. Pozostaje dowód, że T jest całkowicie 0-prosta. Zgodnie z Twierdzeniem Reesa (1.2.15), półgrupa M jest izomorficzna z półgrupą typu macierzowego postaci $\mathcal{M}^0[H; I, \Lambda; P]$, gdzie H jest maksymalną podgrupą w M (a więc grupą izomorficzną z \mathcal{H}_a , dla takich $a \in T$, że \mathcal{H}_a ma niezerowe mnożenie), I, Λ są zbiorami indeksującymi odpowiednio: \mathcal{R} - oraz \mathcal{L} -klasy półgrupy M , zaś $P = (p_{\lambda i})$ jest macierzą rozmiarów $|\Lambda| \times |I|$ nad $H^0 := H \cup \{\theta\}$, gdzie θ jest elementem zerowym dołączonym do H . Z definicji M wynika, że każdy wiersz (i każda kolumna) P zawiera element niezerowy. Łatwo zatem widzieć, że T jest izomorficzna z $\mathcal{M}^0[H; I', \Lambda'; P']$, gdzie I', Λ' są podzbiórmi, odpowiednio: I, Λ , indeksującymi wszystkie \mathcal{R} - oraz \mathcal{L} -klasy w T , zaś $P' = (p'_{\lambda' i'})$ jest macierzą rozmiarów $|\Lambda'| \times |I'|$ nad H^0 taką, że $(p'_{\lambda i}) = (p_{\lambda i})$, dla każdej pary $(\lambda, i) \in \Lambda' \times I'$. Z konstrukcji T wynika, że każdy wiersz i każda kolumna P' zawiera niezerowy element. Zatem zgodnie z Twierdzeniem Reesa T jest półgrupą całkowicie 0-prostą. Dowód lematu jest więc zakończony.

Kontynuujemy dowód Twierdzenia 2.2.1. Zgodnie z Wnioskiem 2.2.6 wiemy, że półgrupa $S(A)$ posiada skończony łańcuch ideałów $I_i, 1 \leq i \leq n$, takich, że każdy jego faktor jest półgrupą nilpotentną lub sumą 0-rozłączną półgrup całkowicie 0-prostych. Niech R_i będą, dla $0 \leq i \leq n$, podzbiórmi $L(A)$ postaci $R_i = L(A) \cap I_i$. Wówczas

$$0 = R_0 \subsetneq R_1 \subsetneq R_2 \subseteq \dots \subsetneq R_n = L(A)$$

jest łańcuchem ideałów w $L(A)$. Pokażemy, że łańcuch ten można zageścić do łańcucha skończonego, którego każdy faktor jest półgrupą nilpotentną lub całkowicie 0-prostą.

Rozważmy przypadek, gdy faktor I_i/I_{i-1} jest, dla pewnego $i \geq 1$, sumą 0-rozłączną swoich ideałów całkowicie 0-prostych postaci $S_w \cup \{\theta\}$ gdzie $w \in W$ oraz gdzie θ jest elementem zerowym. Oznacza to, że $I_i \setminus I_{i-1}$ jest sumą rozłączną zbiorów postaci S_w . Faktor R_i/R_{i-1} równy jest, jako zbiór,

$$(L(A) \cap I_i) \setminus (L(A) \cap I_{i-1}) \cup \{\theta\}.$$

Zbiór elementów niezerowych w R_i/R_{i-1} równy jest zatem:

$$L(A) \cap \left(\bigcup_w S_w \right).$$

Niech $L_w := L(A) \cap S_w$, dla $w \in W$. Twierdzimy, że zbiór tych $w \in W$, dla których $L_w \neq 0$ jest skończony.

Istotnie, dla każdego $w \in W$, zbiór L_w jest, po dołączeniu zera, ideałem prawostronnym w półgrupie całkowicie 0-prostej $S_w \cup \{\theta\}$. Zgodnie z powyższym lematem, jeśli $L_w \neq 0$, to istnieje podzbiór $N_w \subseteq L_w$ taki, że $(L_w \setminus N_w) \cup \{\theta\}$ jest półgrupą całkowicie 0-prostą. Zatem L_w zawiera pewną \mathcal{J} -klasę regularną w $L(A)$, powiedzmy J_w , ponieważ zbiór $I_{i-1} \cup S_w$ jest ideałem w $S(A)$. Zauważmy przy tym, że jeśli weźmiemy $w' \in W$, gdzie $w' \neq w$, i wskażemy, podobnie jak wyżej, \mathcal{J} -klasę regularną $J_{w'}$ w $L(A)$, zawartą

w $L_{w'}$, wówczas $J_w \cap J_{w'} = \emptyset$. W przeciwnym razie dostalibyśmy $L_w \cap L_{w'} \supseteq J_w \cap J_{w'} \neq \emptyset$, co przeczy założeniu, że $S_w \cap S_{w'} = L(A) \cap (L_w \cap L_{w'}) = \emptyset$.

Widzimy zatem, że gdyby istniało nieskończenie wiele takich $w \in W$, że L_w jest niezera, wówczas otrzymalibyśmy nieskończony zbiór parami różnych \mathcal{J} -klas regularnych w $L(A)$. Zgodnie z Wnioskiem 2.2.11 dostalibyśmy w ten sposób sprzeczność z Stwierdzeniem 2.2.13. Zatem $L(A)$ ma niepuste przecięcie jedynie ze skończenie wieloma zbiorami postaci $S_w, w \in W$.

Z punktu widzenia tezy dotyczącej struktury łańcucha $\{R_i\}$ możemy zatem bez straty ogólności rozważać zakładając, że każdy faktor łańcucha $\{I_i\}$ jest półgrupą nilpotentną lub całkowicie 0-prostą. Weźmy faktor $M := I_i/I_{i-1}$ będący, dla pewnego $i > 1$, półgrupą całkowicie 0-prostą w $S(A)$. Niech $R := R_i/R_{i-1}$. Wówczas skoro $L(A)$ to ideał prawostronny w $S(A)$, to:

$$R = R_i/R_{i-1} <_r I_i/I_{i-1} = M,$$

a zatem zgodnie ze sformułowanym wyżej lematem widzimy, że R jest sumą 0-rozłączną półgrup T_i oraz N_i , gdzie jest T_i całkowicie 0-prostym faktorem w $L(A)$, zaś N_i jest nilpotentna. W szczególności istnieje taki ideał $R'_i \triangleleft L(A)$, że $R_{i-1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$ jest ciągiem ideałów w $L(A)$, którego faktory są nilpotentne lub całkowicie 0-proste.

Pokazaliśmy zatem, że każdy fragment $R_{i-1} \subsetneq R_i$ łańcucha $\{R_i\}$ taki, że I_i/I_{i-1} nie jest półgrupą nilpotentną, można zagęścić do skończonego łańcucha ideałów w $L(A)$ takich, że każdy jego faktor nilpotentny lub całkowicie 0-prosty. Jest jasne, że jeśli faktor I_i/I_{i-1} jest nilpotentny, dla pewnego $i > 1$, to również R_i/R_{i-1} jest nilpotentny. W szczególności widzimy, że cały łańcuch $\{R_i\}$ można zagęścić do skończonego łańcucha ideałów w $L(A)$, w którym każdy faktor jest półgrupą nilpotentną lub całkowicie 0-prostą. Teza twierdzenia dla $C(A)$ wynika zatem z Obserwacji 2.2.5 zastosowanej dla epimorfizmu $\phi : L(A) \rightarrow C(A)$. Ten ostatni istnieje na mocy Obserwacji 2.2.9. ■

2.3 Skończoność $C(A)$, a skończony typ A

Paragraf ten ma zasadnicze znaczenie dla dalszej części rozprawy. Prezentujemy w nim podstawowe związki pomiędzy półgrupą klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry skończenie wymiarowej, a problemem charakteryzacji algebr skończonego typu reprezentacyjnego. Formułujemy też kierunki badań półgrupy klas sprzężoności, zgodnie z programem naszkicowanym w [35].

Twierdzenie 2.3.1 ([35], Corollary 4). *Założmy, że A jest skończenie wymiarową algebrą z jedyнкą nad ciałem K . Jeśli A jest skończonego typu reprezentacyjnego, to $C(A)$ jest półgrupą skończoną.*

Przypomnijmy szkic dowodu. Założmy przeciwnie, że $C(A)$ ma nieskończenie wiele elementów. Niech $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie rodziną ideałów lewostronnych, których klasy

sprzężoności są parami różne. Każdy A -moduł lewostronny postaci A/L_i ma wymiar ograniczony przez wymiar A . Zatem skoro A jest skończonego typu, to klas izomorfizmu A -modułów tej postaci jest skończenie wiele. Można jednak pokazać, patrz [35], Corollary 3, że jeśli I, J są lewostronnymi ideałami w A , to A -moduły A/I oraz A/J są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $J = Ig$, dla pewnego $g \in U(A)$. A zatem na mocy tego faktu i uwag poczynionych wyżej widzimy, że \mathcal{L} jest zbiorem reprezentantów co najwyżej skończenie wielu klas sprzężoności ideałów lewostronnych w A , co przeczy założeniu poczynionemu wobec tego zbioru na początku naszego rozumowania.

Dowód Corollary 3 w [35], na który powołujemy się wyżej, wykorzystuje następującą obserwację: jeśli $x, y \in A$, to $Ax = Ay$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = uy$, dla pewnego $u \in U(A)$ (patrz [35], Lemma 1, dla dowodu bazującego na teorii pierścieni, a także Stwierdzenie 1.2.19 dla dowodu wykorzystującego monoidy algebraiczne). Prowadzi ona natychmiast do następującego stwierdzenia odnoszącego się do pewnego ważnego podzbioru półgrupy $C(A)$.

Wniosek 2.3.2. *Istnieje naturalna bijekcja pomiędzy zbiorami:*

- *klas sprzężoności ideałów lewostronnych głównych algebry A ,*
- *warstw podwójnych $U(A)aU(A)$, $a \in A$, nazywanych też $U(A)$ -orbitami, patrz [35].*

Implikacji postulowanej w Twierdzeniu 2.3.1 nie da się odwrócić, co pokaże Przykład 2.3.9. Prawdziwe jest jednak następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.3.3 ([35], Theorem 7). *Skończenie wymiarowa algebra A nad ciałem algebraicznie domkniętym jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \geq 1$ półgrupa $C(M_n(A))$ jest skończona.*

Dobrze wiadomo, że jeśli algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego, to $M_n(A)$ także jest skończonego typu, patrz [4], I.6.11. Uzasadnienia wymaga zatem druga implikacja. W [35] dowodzi się, że ze skończoności $C(M_n(A))$ wynika, że istnieje skończenie wiele klas izomorfizmów A -modułów o n generatorach. Z założeń twierdzenia wynika zatem, że liczba klas izomorfizmu A -modułów nierozkładalnych wymiaru n nad K jest skończona, dla każdego n . Zatem korzystając z wyników dotyczących drugiej hipotezy Brauera-Thralla, patrz Hipoteza 1.1.25, uzyskanych nad ciałem algebraicznie domkniętym widzimy, że algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego.

Powyższe dwa wyniki sugerują, że warto szukać charakterystyki algebr skończenie wymiarowych A nad ciałem K takich, że $C(A)$ jest skończone. Badania te prowadzą, jak się okazuje, do interesujących rezultatów. Jako, że problem skończoności $C(A)$ jest trywialny, gdy ciało K jest skończone, wykluczamy ten przypadek z naszych rozważań. Odnotujmy także następujący wniosek ze Stwierdzenia 1.1.14.

Stwierdzenie 2.3.4 ([35], Theorem 6). *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem nieskończonym. Jeśli $C(A)$ jest półgrupą skończoną, to A jest algebrą rozdzielną.*

Zacznijmy od dwóch następujących przykładów.

Przykład 2.3.5. *Rozważmy algebrę A nad ciałem nieskończonym K postaci:*

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 \\ K & K & K & 0 \\ K & K & 0 & K \end{bmatrix} \subseteq M_4(K).$$

W tym przypadku półgrupa $C(A)$ jest nieskończona, ponieważ łatwo pokazać, że algebra A ma nieskończenie wiele klas sprzężoności ideałów lewostronnych głównych. Na mocy Wniosku 2.3.2 wystarczy wskazać nieskończenie wiele $U(A)$ -orbit w algebrze A .

Zauważmy, że radykał Jacobsona algebry A złożony jest z elementów mających zera na głównej przekątnej i jest w kwadracie zerowy. Każdy element $U(A)$ jest zatem postaci $d + j$, gdzie d jest macierzą diagonalną odwracalną, zaś j jest elementem $J(A)$. Skoro $J(A)^2 = 0$, to dla dowolnego $a \in A$ mamy: $U(A)aU(A) = DaD$, gdzie D oznacza zbiór odwracalnych macierzy diagonalnych nad K . Rozważmy następujący zbiór elementów A :

$$a_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in K^*.$$

Założmy, że $U(A)a_{\lambda_1}U(A) = U(A)a_{\lambda_2}U(A)$ dla pewnych niezerowych λ_1, λ_2 . Istnieją zatem macierze diagonalne $d, e \in D$, że $a_{\lambda_1} = da_{\lambda_2}e$. Elementarny rachunek pokazuje, że wówczas $\lambda_1 = \pm\lambda_2$, co daje postulowaną tezę.

Przykład 2.3.6. *Rozważmy algebrę nad ciałem nieskończonym K postaci:*

$$B = \begin{bmatrix} K & K & K & K & K \\ 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \subseteq M_5(K).$$

Twierdzimy, że półgrupa $C(B)$ ma nieskończenie wiele elementów, ale liczba ideałów dwustronnych w B jest skończona. Zobaczmy najpierw, dlaczego liczba elementów $C(B)$ jest nieskończona. Łatwo widać, że radykał $J(B)$ algebry B utożsamiać można z K^4 , oraz ideały lewostronne B zawarte w $J(B)$ są w bijekcji z podprzestrzeniami liniowymi w K^4 . Niech $V_a \subseteq K^4$ będzie rozpięta przez wektory $(0, 1, 1, 1)$ oraz $(1, 0, 1, a)$, dla $a \in K^*$. Podprzestrzeń V_a możemy interpretować jako zbiór macierzy postaci:

$$g \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } g \in \text{Gl}_2(K).$$

Czym jest wówczas klasa sprzężoności ideału lewostronnego odpowiadającego V_a ? Jest to zbiór macierzy postaci:

$$g \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K}) \text{ oraz } k_i \in \mathbb{K}^*.$$

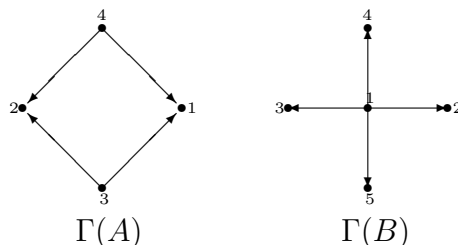
Istotnie, $U(B) = U(B/J(B)) + J(B)$, a więc działanie $U(B)$ z prawej strony na elementy z radykału jest po prostu mnożeniem przez macierze diagonalne. Zatem jeśli dla pewnych niezerowych $a, b \in \mathbb{K}^*$ klasy sprzężoności ideałów lewostronnych reprezentowanych przez V_a oraz V_b są równe, to istnieje macierz odwracalna $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$ oraz $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{K}^*$, że:

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}.$$

Łatwy rachunek pokazuje, że wówczas $a = b$. Zatem zbiór podprzestrzeni $\{V_t, t \in \mathbb{K}^*\}$ odpowiada reprezentantom nieskończenie wielu parami różnych klas sprzężoności ideałów lewostronnych w B , czyli półgrupa $C(B)$ jest nieskończona.

Dlaczego ideałów dwustronnych w B jest skończenie wiele? Zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1.14 skończoność $I(B)$, którą chcemy wykazać, równoważna jest temu, że krata $S(J(B))$ ideałów B zawartych w $J(B)$ jest rozdzielna. Łatwo widać, że te ideały są postaci $I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus I_4 \subseteq \mathbb{K}^4$ (przy powyższym utożsamieniu $J(B)$ z \mathbb{K}^4), gdzie $I_j = 0$ lub \mathbb{K} , dla każdego j . Stąd wynika już rozdzielność $S(J(B))$.

Przykłady te pokazują dwa zasadnicze problemy, jakie stoją na przeszkodzie, aby algebra miała skończenie wiele klas sprzężoności ideałów dwustronnych. Aby je zobaczyć, przyjrzyjmy się kołczanom (patrz Definicja 1.1.18) algebr rozważanych wyżej.



Kołczany tych algebr ujawniają dwie zasadnicze wady, których nie może mieć algebra o skończonej półgrupie $C(A)$. Pierwszą z nich jest posiadanie przez kołczan cyklu, a drugą jest posiadanie wierzchołka będącego początkiem czterech strzałek. Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 2.3.1 algebra mająca nieskończone $C(A)$ musi być nieskończonego typu. Zatem pierwsza z algebr ma typ nieskończony. Druga z algebr

jest natomiast rozdzielna i jej radykał jest 2-nilpotentny. W szczególności, zgodnie z Twierdzeniem Gabriela (1.1.23) graf rozdzielony tej algebry nie może mieć wierzchołka, z którym incydentne są cztery krawędzie (bo wtedy graf rozdzielony nie jest sumą rozłączną grafów Dynkina). To właśnie w klasie algebr, które obejmuje Twierdzenie Gabriela uzyskać można dużo interesujących rezultatów związanych z półgrupą klas sprzężoności. Pierwszy z nich uzyskany został w przypadku algebr bazowych.

Twierdzenie 2.3.7 ([35], Theorem 12). *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą bazową z 1, nad ciałem algebraicznie domkniętym K taką, że krata $I(A)$ jest rozdzielna (równoważnie: skończona) oraz $J(A)^2 = 0$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. $C(A)$ jest skończona,
2. graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A nie ma cykli oraz $\dim_K(eJ(A)) \leq 3$ dla każdego prymitywnego idempotentu $e \in A$.

Opuszczenie warunku, że A jest algebrą bazową natychmiast czyni powyższe twierdzenie nieprawdziwym.

Przykład 2.3.8. *Niech A będzie równe $M_n(K[x]/(x^2))$. Wówczas $J(A)^2 = 0$ oraz $|C(A)| < \infty$, ale $\max\{\dim_K(eJ(A))\} = n$.*

Rzeczywiście, jasne jest, że A jest skończonego typu reprezentacyjnego, patrz Exercise 2 w §6.7 [37] oraz [4], I.6.11. Zatem teza wynika z Twierdzenia 2.3.1.

Nawet w tak prostych przykładach wyznaczenie elementów półgrupy $C(A)$ może być kłopotliwe. Dla przykładu, prześledźmy jak wygląda ten rachunek w przypadku klas ideałów zawartych w $J(A)$, gdzie $A = M_n(K[x]/(x^2))$. W dowodzie Twierdzenia 2.3.11 zobaczymy, że zadanie opisu wszystkich elementów półgrupy klas sprzężoności algebry skończenie wymiarowej może być dalece bardziej skomplikowane.

Zauważmy, że $A = \bar{A} \oplus J(A)$, gdzie:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} K & K & \dots & K \\ K & K & \dots & K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & \dots & K \end{bmatrix}, \quad J(A) = \begin{bmatrix} Kx & Kx & \dots & Kx \\ Kx & Kx & \dots & Kx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Kx & Kx & \dots & Kx \end{bmatrix}.$$

Przez e_{ij} oznaczamy jedynki macierzowe zawarte w \bar{A} . Niech $L \in L(A)$ będzie ideałem lewostronnym w A . Przez L_{ij} oznaczać będziemy współrzędne ideału L , a więc zbioru postaci $e_{ii}Le_{jj}$. Przez L_i oznaczamy i -ty wiersz ideału L , a więc $\text{lin}_K\{L_{ij}, 1 \leq j \leq n\}$.

Zauważmy, że skoro $e_{ij}L \subseteq L$, to wszystkie wiersze ideału L są izomorficznymi przestrzeniami liniowymi, a więc L jest postaci

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_1 \\ \dots \\ L_1 \end{bmatrix}$$

Przez $d(L)$ oznaczać będziemy wymiar L_1 . Niech $L \subseteq J(A)$. Wiadomo, że każdy element odwracalny algebry A jest postaci $u = u' + j$, gdzie $u' \in U(\bar{A})$, zaś $j \in J(A)$. W szczególności $Lu = Lu'$, gdzie $u' \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$. Wiadomo, że jeśli M, N są przestrzeniami liniowymi jednakowego wymiaru nie większego niż n , to istnieje element $u \in U(M_n(\mathbb{K}))$, że $Mu = N$. Widzimy więc, że dla ideałów lewostronnych L, L' zawartych w $J(A)$ ma miejsce następująca równoważność:

$$[L] = [L'] \in C(A) \Leftrightarrow d(L) = d(L').$$

W szczególności w $M_n(\mathbb{K}[x]/(x^2))$ jest $n + 1$ klas ideałów lewostronnych zawartych w radykale $J(A)$.

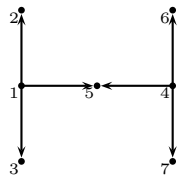
Na podstawie Twierdzenia 2.3.7 i Twierdzenia Gabriela możemy łatwo konstruować przykłady algebr rozdzielnych A nieskończonego typu takich, że $J(A)^2 = 0$, ale $C(A)$ jest skończona.

Przykład 2.3.9. Rozważmy następującą podalgebrę A algebry macierzy $M_7(\mathbb{K})$:

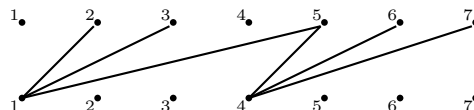
$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} & \mathbb{K} & 0 & \mathbb{K} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{K} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{K} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{K} & \mathbb{K} & \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{K} \end{bmatrix}.$$

Algebra A jest nieskończonego typu. Jednakże, $C(A)$ jest skończona.

Dowód. Skoro zbiór diagonalnych idempotentów rzędu jeden w A tworzy pełen zbiór prymitywnych idempotentów ortogonalnych, łatwo stwierdzić, że kołczan $\Gamma(A)$ algebry A jest następującej postaci:



Graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ jest, zatem, następującej postaci:



Widzimy, że $\Gamma^s(A)$ nie ma cykli. Zauważmy, że A jest algebrą bazową i $J(A)^2 = 0$. Wiemy także, że $\dim_{\mathbb{K}}(eJ(A)) \leq 3$, dla każdego prymitywnego idempotenta e w A . Z Twierdzenia 2.3.7 wynika, że $C(A)$ jest skończona. Natomiast, graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ nie jest sumą rozłączną grafów Dynkina. Zatem A nie jest skończonego typu reprezentacyjnego (patrz Twierdzenie Gabriela, 1.1.23). \square

W przypadku algebr niebazowych spełniających założenia Twierdzenia Gabriela, 1.1.23, problem charakteryzacji algebr A takich, że $C(A)$ jest skończona jest złożony i poświęcamy Rozdziały 3. i 4. Jedną z motywacji dla tych rozważań jest następujący wynik, którego dowód podamy w ostatnim paragrafie tego rozdziału.

Twierdzenie 2.3.10. *Niech A, B będą skończenie wymiarowymi algebrami nad ciałem algebraicznie domkniętym K . Załóżmy, że $J(A)^2 = 0$ oraz, że $C(A)$ jest skończona. Jeśli półgrupy $C(A)$ oraz $C(B)$ są izomorficzne, wtedy algebry A oraz B są również izomorficzne.*

W kolejnych rozdziałach sformułujemy i udowodnimy dwa rezultaty związane z opisem algebr niebazowych A spełniających założenia Twierdzenia Gabriela i takich, że $C(A)$ jest skończona. Pierwsze z nich, Twierdzenie 3.4.2, daje pełny opis takich algebr przy założeniu, że w rozkładzie $A/J(A)$ danym przez (1.1.4) wszystkie liczby r_i są nie większe niż 2. Drugie natomiast, Twierdzenie 3.4.3, dotyczy algebr, w których wszystkie r_i są większe od 5.

Wszystkie wspomniane wyżej rezultaty, oparte będą o analizę związków pomiędzy liczbą klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry A , a liczbą klas sprzężoności ideałów nilpotentnych tej algebry. Kluczowym wynikiem jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.3.11. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad dowolnym ciałem K . Następujące warunki są równoważne:*

- 1) $C(A)$ jest skończona,
- 2) liczba klas sprzężoności nilpotentnych ideałów lewostronnych w A jest skończona.

Twierdzenie to jest interesujące samo w sobie, będąc ogólnym wynikiem związanym ze strukturą ideałów lewostronnych w algebrach skończenie wymiarowych. Idea dowodu, który przedstawimy w następnym paragrafie, przedstawiona została we wprowadzeniu.

2.4 Dowód Twierdzenia 2.3.11

Nasze rozważania prowadzące do dowodu Twierdzenia 2.3.11 rozpoczniemy od pewnych znanych rezultatów dotyczących klas sprzężoności elementów idempotentnych w A oraz ideałów lewostronnych głównych generowanych przez takie elementy.

Lemat 2.4.1. *Liczba klas sprzężoności idempotentów w algebrze skończenie wymiarowej z jedyneką A jest skończona.*

Dowód. Dobrze wiadomo, że każde dwa rozkłady jedynki na sumę ortogonalnych idempotentów prymitywnych są sprzężone, patrz Theorem 3.4.1 w [10]. Stąd już łatwo wynika teza. \square

Dla uproszczenia notacji będziemy czasem pisać, że $\bar{A} = A/J(A)$ oraz $\bar{a} \in \bar{A}$ oznaczać będzie obraz $a \in A$ przy naturalnym homomorfizmie $A \rightarrow A/J(A)$.

Stwierdzenie 2.4.2. Niech e, f będą idempotentami w A . Następujące warunki są równoważne:

- (i) $\overline{Ae} \simeq \overline{Af}$ jako lewostronne \overline{A} -moduły,
- (ii) $Ae \simeq Af$ jako lewostronne A -moduły,
- (iii) \bar{e} oraz \bar{f} są sprzężone w \overline{A} ,
- (iv) e oraz f są sprzężone w A ,
- (v) $[\overline{Ae}] = [\overline{Af}]$ w $C(\overline{A})$,
- (vi) $[Ae] = [Af]$ w $C(A)$,
- (vii) e oraz f generują ten sam ideał w monoidzie mnożeniu (A, \cdot) .

Dowód. Podajemy szkic dowodu. Wystarczy sprawdzić, że

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i),$$

$$(iv) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (ii) \quad \text{oraz} \quad (iv) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (ii).$$

Jedynie implikacje $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iv)$ oraz $(vii) \Rightarrow (ii)$ wymagają dowodu.

Aby wywieść (ii) z (i) zobaczmy, że $\overline{Ae} \simeq Ae/J(A)e$ oraz izomorfizm pomiędzy \overline{Ae} oraz \overline{Af} może być podniesiony do izomorfizmu pomiędzy Ae oraz Af (patrz Proposition 17.18 w [2]).

Założmy, że $Ae \simeq Af$ jako A -moduły. Wiadomo, że

$$\text{Hom}_A(Ae, Af) \simeq eAf, \quad (2.4.1)$$

oraz każdy homomorfizm $\phi : Ae \rightarrow Af$ może być opisany wzorem $\phi(x) = x(eaf)$, dla $x \in Ae$ gdzie $a \in A$ (patrz Corollary 6.4 b w [37]). Założmy, że ϕ jest izomorfizmem. Istnieje wówczas $fbe \in fAe$ taki, że $\phi^{-1}(y) = y(fbe)$. Stąd dostajemy

$$e = eaf \cdot fbe, \quad f = fbe \cdot caf, \quad (2.4.2)$$

dla pewnych $a, b \in A$. Zgodnie z poniższymi rozkładami lewostronnych A -modułów

$$A = Ae \oplus A(1 - e), \quad A = Af \oplus A(1 - f)$$

z twierdzenia Krulla-Schmidta wnosimy, że $A(1 - e) \simeq A(1 - f)$. Stąd, podobnie jak wyżej mamy

$$\begin{aligned} 1 - f &= (1 - f)c(1 - e) \cdot (1 - e)d(1 - f) \\ 1 - e &= (1 - e)d(1 - f) \cdot (1 - f)c(1 - e) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

dla pewnych $c, d \in A$. Kładziemy

$$u = eaf + (1 - e)d(1 - f), \quad v = fbe + (1 - f)c(1 - e).$$

Zgodnie z (2.4.2) oraz (2.4.3) dostajemy $uv = 1$ oraz $eu = uf$. Zatem $(ii) \Rightarrow (iv)$.

Założmy, że zachodzi (vii) . Z Theorem 2.20 w [8] wynika, że istnieją $a, b \in A$ takie, że eah oraz fba należą do ideału półgrupy (A, \cdot) generowanego przez e oraz, że zachodzą równości $(fba)(eah) = f$, $(eah)(fba) = e$. Na mocy (2.4.1) te dwa elementy wyznaczają izomorfizm $Ae \simeq Af$. Stąd dostajemy (ii) . \square

Odnotujmy, że warunek (vii) nie występuje zwykle w rozważaniach z teorii pierścieni. Z drugiej strony, odgrywa on istotną rolę w teorii nieprzywiedlnych monoidów algebraicznych, patrz Stwierdzenie 1.2.19. Będziemy mieli okazję zobaczyć, że jest on także bardzo użyteczny w kontekście skończenie wymiarowych algebr (które są, jak wiemy, monoidami liniowymi, o ile ciało K jest algebraicznie domknięte). Choć Twierdzenie 2.3.11 dotyczy własności algebry A odnoszących się bezpośrednio do domeny zainteresowania teorii pierścieni, o tyle jego dowód opiera się w dużej mierze na rozważaniach pochodzących z teorii półgrup.

Lemat 2.4.3. *Niech $L \in L(A)$. Następujące warunki są równoważne dla elementu idempotentnego $e \in L$:*

(i) e jest idempotentem maksymalnym w L ,

(ii) ideał lewostronny $L(1 - e)$ zawarty jest w $J(A)$.

Dowód. Odnotujmy na początku, że L może być przedstawiony jako suma prosta następujących ideałów lewostronnych:

$$L = Ae \oplus L(1 - e). \quad (2.4.4)$$

Założmy najpierw, że $L(1 - e) \not\subseteq J(A)$. Wówczas istnieje pewien niezerowy element $f = f^2 \in L(1 - e)$ oraz równość (2.4.4) zastosowana do $L(1 - e)$ implikuje, że

$$L = Ae \oplus Af \oplus L(1 - e)(1 - f) = Ae \oplus Af \oplus L(1 - e - f + ef).$$

Zauważmy, że $f = f(1 - e)$ oraz $fe = 0$. Stąd już łatwo widać, że:

$$(e + f - ef)^2 = e + f - ef.$$

Bez wątpienia natomiast zachodzą równości

$$e(e + f - ef) = e = (e + f - ef)e.$$

Innymi słowy, $e \leq e + f - ef$. Jeśli e jest maksymalny w L , to dostajemy stąd $e = e + f - ef$. Zatem $f = ef$ oraz $f = f^2 = f(ef) = 0$, sprzeczność. To pokazuje, że (ii) jest konsekwencją warunku (i) .

Założmy teraz, że $L(1 - e) \subseteq J(A)$. Założmy, że $f \in L$ jest idempotentem takim, że $ef = fe = e$. Jest jasne, że $f - e \in L$ oraz $(f - e)e = 0$, zatem $f - e \in L(1 - e)$. Skoro $(f - e)^2 = f - e$, to wynika stąd, że $f - e = 0$. Zatem $(ii) \Rightarrow (i)$. \square

Wniosek 2.4.4. Niech e, e' będą idempotentami maksymalnymi w ideale lewostronnym L algebry A . Wówczas e, e' są sprzężone w A .

Dowód. Zgodnie z Lematem 2.4.3 oraz (2.4.4) dostajemy, że $\overline{Ae} = \overline{Ae'}$. Stąd, teza wynika ze Stwierdzenia 2.4.2. \square

Stwierdzenie 2.4.5. Niech $[I], [J] \in C(A)$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $[I] = [J]$,

(ii) istnieją idempotenty e, e' , maksymalne odpowiednio w I, J takie, że

$$[Ae] = [Ae'] \text{ oraz } [I(1 - e)] = [J(1 - e')].$$

Dowód. Załóżmy, że $[I] = [J]$ oraz niech e będzie idempotentem maksymalnym w I . Wówczas $J = g^{-1}Ig$ dla pewnego $g \in U(A)$ oraz $e' = g^{-1}eg$ jest idempotentem w J takim, że

$$J(1 - e') = J(1 - g^{-1}eg) = Jg^{-1}(1 - e)g = g^{-1}Igg^{-1}(1 - e)g = g^{-1}I(1 - e)g.$$

Stąd $[I(1 - e)] = [J(1 - e')]$. Co więcej, e' jest idempotentem maksymalnym w J . A zatem (ii) jest konsekwencją (i).

Pozostaje udowodnić implikację (ii) \Rightarrow (i). Na mocy Stwierdzenia 2.4.2 warunek $[Ae] = [Ae']$ implikuje, że e, e' są sprzężone. Stąd, sprzęgając ewentualnie I lub J możemy zakładać dalej, że $e = e'$, tak, że

$$I = Ae \oplus I(1 - e), \quad J = Ae \oplus J(1 - e), \quad (2.4.5)$$

oraz $I(1 - e), J(1 - e) \subseteq J(A)$. Na mocy założenia istnieje takie $g \in U(A)$, że

$$I(1 - e) = J(1 - e)g. \quad (2.4.6)$$

Element g może być reprezentowany jako macierz postaci $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$, gdzie

$$g_1 = ege, \quad g_2 = eg(1 - e), \quad g_3 = (1 - e)ge, \quad g_4 = (1 - e)g(1 - e).$$

Niech

$$I_1 = eIe, \quad I_2 = eI(1 - e), \quad I_3 = (1 - e)Ie, \quad I_4 = (1 - e)I(1 - e)$$

$$J_1 = eJe, \quad J_2 = eJ(1 - e), \quad J_3 = (1 - e)Je, \quad J_4 = (1 - e)J(1 - e).$$

Używając notacji macierzowej i stosując (2.4.6) dostajemy

$$\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_2 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2g_3 & J_2g_4 \\ J_4g_3 & J_4g_4 \end{bmatrix}. \quad (2.4.7)$$

Jest także jasne, że istnieje $h = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix} \in U(A)$ takie, że

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 - e \end{bmatrix} = 1.$$

Stąd

$$g_3 h_2 + g_4 h_4 = 1 - e.$$

A zatem

$$J(1 - e) = J(1 - e)(g_3 h_2 + g_4 h_4).$$

Na mocy (2.4.7) wnioskujemy, że $J(1 - e)g_3 = (J_2 + J_4)g_3 = 0$ oraz $J(1 - e)g_4 = I(1 - e)$.

A zatem

$$J(1 - e) = J(1 - e)g_4 h_4 = I(1 - e)h_4. \quad (2.4.8)$$

Łatwo sprawdzić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mają miejsce następujące równości:

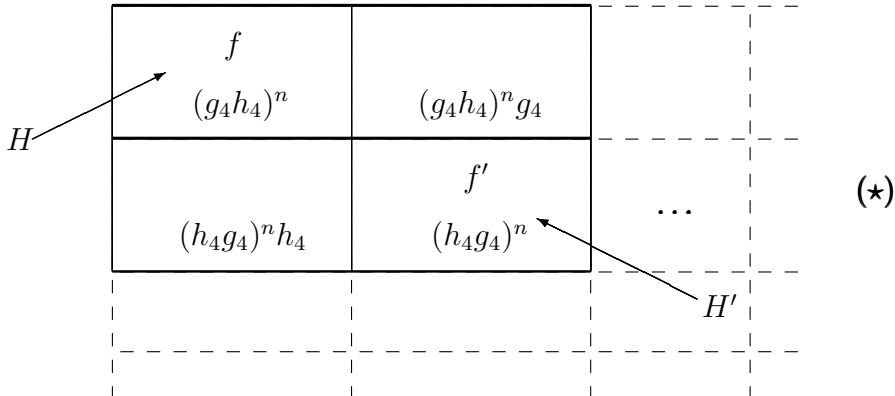
$$\begin{cases} J(1 - e)(g_4 h_4)^n = J(1 - e) \\ I(1 - e)(h_4 g_4)^n = I(1 - e). \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Zgodnie ze Stwierdzeniem 1.2.20, półgrupa mnożeniowa algebry A jest silnie π -regularna. Wynika stąd, że $(g_4 h_4)^n \in H$, $(h_4 g_4)^n \in H'$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, gdzie H, H' są maksymalnymi podgrupami monoidu $((1 - e)A(1 - e), \cdot)$. Połóżmy

$$s = (g_4 h_4)^n g_4 \in (1 - e)A(1 - e).$$

Zauważmy, że $sh_4(g_4 h_4)^{n-1} \in H$, a więc $(g_4 h_4)^n$ oraz s są w tej samej \mathcal{R} -klasie monoidu mnożeniowego $(1 - e)A(1 - e)$. W ten sam sposób przekonujemy się, że s oraz $(h_4 g_4)^n$ są w tej samej \mathcal{L} -klasie $(1 - e)A(1 - e)$. W szczególności, $(g_4 h_4)^n, (h_4 g_4)^n$ są w tej samej \mathcal{J} -klasie monoidu $(1 - e)A(1 - e)$.

Niech f, f' będą jednościami grup odpowiednio H oraz H' . Wówczas $(g_4 h_4)^n \mathcal{H}f$ oraz $(h_4 g_4)^n \mathcal{H}f'$. Skoro maksymalne podgrupy każdej podgrupy S są dokładnie \mathcal{H} -klasami S zawierającymi elementy idempotentne (patrz Twierdzenie 1.2.12), zatem egg-box pattern (patrz Definicja 1.2.11) na \mathcal{J} -klasie zawierającej f ma następującą postać



Zauważmy, że jeśli f, f' nie tylko należą do tej samej \mathcal{J} -klasy $((1-e)A(1-e), \cdot)$, ale także do tej samej \mathcal{R} - lub \mathcal{L} -klasy tego monoidu, wówczas egg-box ich \mathcal{J} -klasy staje się prostszy.

Na mocy (2.4.9), oraz zgodnie z faktem, że $f, f' \in (1-e)A(1-e)$ widzimy, że:

$$\begin{cases} J(1-e) = J(1-e)f & = Jf \\ I(1-e) = I(1-e)f' & = If' \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Implikacja (vii) \Rightarrow (iv) ze Stwierdzenia 2.4.2 pozwala na znalezienie takiego $u \in U((1-e)A(1-e))$, że w $(1-e)A(1-e)$ mamy $u^{-1}fu = f'$. Rozważmy element $\hat{u} = e + u$. Jest jasne, że $\hat{u} \in U(A)$ oraz, że $\hat{u}^{-1}f\hat{u} = f'$. Stąd na mocy (2.4.5) oraz (2.4.10) dostajemy

$$J\hat{u} = (Ae \oplus Jf)\hat{u} = Ae\hat{u} \oplus Jf\hat{u} = Ae \oplus J\hat{u}\hat{u}^{-1}f\hat{u} = Ae \oplus J\hat{u}f'.$$

Stąd zastępując J przez jego sprzężenie $J\hat{u}$ możemy zakładać, że

$$\begin{cases} J = Ae \oplus Jf' \\ I = Ae \oplus If' \end{cases}.$$

Wolno nam zatem zakładać, że $f = f'$ oraz

$$(g_4h_4)^n, (h_4g_4)^n \in H = H' = U(fAf).$$

A zatem zgodnie z (\star) , także $(g_4h_4)^ng_4, (h_4g_4)^nh_4 \in H$. Połóżmy

$$z = 1 - f + (g_4h_4)^ng_4. \quad (2.4.11)$$

Skoro $(g_4h_4)^ng_4 \in U(fAf)$, dostajemy $z \in U(A)$. Oczywiście $ef = 0$ a zatem

$$\begin{aligned} Jz &= (Ae \oplus Jf)z = Ae \oplus Jfz \\ &\stackrel{(2.4.11)}{=} Ae \oplus J(1-e)(g_4h_4)^ng_4 \\ &\stackrel{(2.4.9)}{=} Ae \oplus J(1-e)g_4 \\ &\stackrel{(2.4.8)}{=} Ae \oplus I(1-e)h_4g_4 \\ &\stackrel{(2.4.9)}{=} Ae \oplus I(1-e) = \\ &\stackrel{(2.4.5)}{=} I. \end{aligned}$$

Stąd $[I] = [J]$ w $C(A)$. Dowód stwierdzenia jest zatem zakończony. \square

Dowód Twierdzenia 2.3.11. Oczywiście warunek 2) jest konsekwencją 1). Załóżmy zatem, że w algebrze A mamy skończenie wiele klas sprzężoności ideałów lewostronnych nilpotentnych. Weźmy $I, J \in L(A)$. Zgodnie z Lematem 2.4.3 istnieją elementy idempotentne $e \in I$ oraz $e' \in J$, maksymalne (odpowiednio w I oraz J) takie, że spełnione są następujące równości:

$$I = Ae \oplus I(1-e), \quad J = Ae' \oplus J(1-e'),$$

i $I(1 - e), J(1 - e') \subseteq J(A)$. Zgodnie z Lematem 2.4.1 możemy zakładać, że e oraz e' są sprzężone. Stąd sprzęgając I lub J możemy zakładać, że $e = e'$, a zatem

$$I = Ae \oplus I(1 - e), \quad J = Ae \oplus J(1 - e),$$

oraz $I(1 - e), J(1 - e) \subseteq J(A)$.

Skoro w $J(A)$ jest jedynie skończenie wiele klas sprzężoności ideałów lewostronnych, możemy także zakładać, że $I(1 - e)$ oraz $J(1 - e)$ są sprzężone. A zatem Stwierdzenie 2.4.5 gwarantuje nam, że $C(A)$ jest skończona. Dowód jest zatem zakończony.

Następujący fakt jest natychmiastowym następstwem przeprowadzonego właśnie dowodu.

Wniosek 2.4.6. *Załóżmy, że A jest skończenie wymiarową algebrą z 1. Załóżmy też, że A ma dokładnie n klas sprzężoności idempotentów oraz, że liczba klas sprzężoności ideałów lewostronnych nilpotentnych w A jest skończona i równa m . Wówczas półgrupa $C(A)$ jest skończona i $|C(A)| \leq nm$.*

2.5 Własności rozpoznawalne

Struktura półgrupy klas sprzężoności ideałów lewostronnych pozwala na odczytanie pewnych informacji o strukturze samej algebry. Przykład takiej prostej informacji widzieliśmy w Stwierdzeniu 2.2.13, ustalającym bijekcję między liczbą klas regularnych półgrupy $C(A)$, a liczbą bloków prostych algebry $A/J(A)$. W paragrafie tym podamy więcej własności algebry A „rozpoznawalnych” w języku jej półgrupy klas sprzężoności. Pozwolą one pokazać, że w przypadku, gdy $C(A)$ jest półgrupą skończoną, wówczas jej struktura pozwala wyznaczyć, z dokładnością do izomorfizmu, strukturę $A/J(A)$.

Twierdzenie 2.5.1. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z 1 nad ciałem algebraicznie domkniętym K taką, że $C(A)$ jest skończona. Jeśli B jest K -algebrą skończenie wymiarową taką, że $C(A) \simeq C(B)$, to $A/J(A) \simeq A/J(B)$.*

Rezultat ten jest próbą przybliżenia się do odpowiedzi na pytanie kiedy struktura półgrupy klas sprzężoności ideałów lewostronnych wyznacza, z dokładnością do izomorfizmu, strukturę algebry. Nie znamy, jak dotąd, przykładu nieizomorficznych algebr skończenie wymiarowych A, B nad ciałem algebraicznie domkniętym K takich, że $C(A) \simeq C(B)$. Częściową odpowiedź na to zagadnienie stanowi Twierdzenie 2.3.10, które udowodnimy, podobnie jak Twierdzenie 2.5.1, w następnym paragrafie.

Pierwszą grupą własności algebry A , które odczytamy przy pomocy $C(A)$, związana będzie ze strukturą półgrupy mnożymy $I(A)$ ideałów dwustronnych algebry A .

Stwierdzenie 2.5.2. *Rozważmy następującą relację \sim na półgrupie $C(A)$. Jeśli $[L], [L'] \in C(A)$, dla pewnych $L, L' \in L(A)$, to:*

$$[L] \sim [L'] \Leftrightarrow [L][X] = [L'][X], \quad \text{dla każdego } [X] \text{ w } C(A).$$

Wówczas \sim jest kongruencją w $C(A)$, oraz półgrupa ilorazowa $C(A)/\sim$ jest izomorficzna z $I(A)$.

Dowód. Jest jasne, że zdefiniowana wyżej relacja \sim jest relacją równoważności. Zgodnie z (1.2.1), należy zatem pokazać, że jeśli $[L] \simeq [L']$, dla pewnych $[L], [L'] \in C(A)$, to dla dowolnych $[S], [T] \in C(A)$ mamy: $[S][L] \sim [S][L']$ oraz $[L][T] \sim [L'][T]$. Pierwsza tożsamość jest oczywista, ponieważ jeśli dla dowolnego $[X] \in C(A)$ mamy $[L][X] = [L'][X]$, to także $[S][L][X] = [S][L'][X]$. W drugim przypadku, skoro $[L][X] = [L'][X]$, dla każdego $[X] \in C(A)$, to kładąc $[X] = [T][Y]$, dla każdego $[Y] \in C(A)$ dostajemy $[L][T][Y] = [L'][T][Y]$, co oznacza, że $[L][T] \sim [L'][T]$. Zatem \sim jest kongruencją.

Zauważmy, że jeśli $[L] \sim [L']$ to $[L][A] = [L'][A]$, a więc $LA = L'A$. Zatem ideały dwustronne są w tej samej klasie relacji \sim tylko wtedy, gdy generują ten sam ideał dwustronny w A . Z drugiej strony jeśli I, J są ideałami dwustronnymi w A , to $[I] \sim [J]$ oznacza, że $[I][A] = [J][A]$, a więc $I = J$. Stąd $C(A)/\sim$ jest izomorficzna z $I(A)$, traktowaną jako półgrupa z naturalnym mnożeniem pochodzącym od mnożenia w A . \square

Zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1.14 otrzymujemy natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 2.5.3. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem nieskończonym. Wówczas własność rozdzielności algebry A jest rozpoznawalna przez $C(A)$.*

Wprowadzenie relacji \sim nie pozwala oczywiście wskazać bezpośrednio tych elementów $C(A)$, które odpowiadają ideałom dwustronnym w A . Prostym przykładem jest półgrupa $C(M_n(K))$, w której elementy niezerowe są nierozróżnialne z punktu widzenia struktury tej półgrupy. W szczególności klasa elementu $[A]$ nie można być wskazana. Mimo to zbiory reprezentantów danej klasy równoważności względem relacji \sim będą niekiedy zawierać w sobie dodatkowe informacje.

Stwierdzenie 2.5.4. *Niech $\{[I]\}_\sim$ będzie klasą równoważności elementu $[I] \in C(A)$ względem relacji \sim , przy czym $I = I^2 \triangleleft A$. Wówczas wszystkich elementów idempotentnych w $\{[I]\}_\sim$ tworzy \mathcal{R} -klasę $[I]$ w $C(A)$.*

Dowód. Dowód jest natychmiastową konsekwencją opisu \mathcal{R} -klas elementów idempotentnych w $C(A)$, uzyskanego w Stwierdzeniu 2.2.12. Skoro I jest idempotentny, to jego \mathcal{R} -klasa jest równa $\{[X] \in C(A) \mid [X]^2 = [X], [X][A] = [I]\}$. Elementy idempotentne w $\{[I]\}_\sim$ spełniają w sposób oczywisty wymienione warunki. Z drugiej strony jeśli weźmiemy dwa elementy $[L], [L']$ z \mathcal{R} -klasy elementu $[I]$, to $[L][A] = [L'][A] = [I]$, a zatem dla każdego $[X] \in C(A)$ mamy $[L][X] = [L][A][X] = [L'][A][X] = [L'][X]$. Stąd $[L] \sim [L']$. \square

Łatwo dowieść także następujący rezultat.

Stwierdzenie 2.5.5. *Minimalne niezerowe idempotenty półgrupy $C(A)$ względem naturalnego porządku (1.1.3) to klasy minimalnych niezerowych ideałów dwustronnych w A , a więc elementów $[Ae_iA]$, gdzie e_i są jedynkami algebr A_i (patrz (1.1.5)).*

Dowód. Zgodnie z dowodem Stwierdzenia 2.2.13 wiadomo, że regularnych \mathcal{J} -klas w $C(A)$ jest dokładnie tyle, co ideałów idempotentnych dwustronnych w A , a więc dokładnie tyle, co ideałów postaci: $A(e_{i_1} + \dots + e_{i_j})$, gdzie e_{i_j} są różne i należą do zbioru $\{e_1, \dots, e_k\}$. Twierdzimy, że $[X]$ jest idempotentem minimalnym w $C(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[XA]$ jest idempotentem minimalnym w $C(A)$. Ów ideał dwustronny XA musi być natomiast postaci Ae_iA , zgodnie z uwagą powyżej.

Postulowana równoważność pomiędzy minimalnością $[X]$ oraz $[XA]$ względem porządku (1.1.3) na zbiorze idempotentów niezerowych w $C(A)$ wynika z ogólnej obserwacji z teorii półgrup. Mianowicie jeśli dane są idempotenty f, e, e' w półgrupie S takie, że $e \mathcal{R} e'$ oraz $f \leq e$, to fe' jest idempotentem takim, że $fe' \mathcal{R} f$ oraz $fe' \leq e'$. A zatem e jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy e' jest minimalny. Sprawdzenie tej obserwacji jest niemal natychmiastowe. Każdy idempotent jest lewostronną jedyneką w swojej \mathcal{R} -klasie. Zatem jeśli $e \mathcal{R} e'$, to $ee' = e'$ oraz $e'e = e$. Wiemy też, że $fe = ef = f$. Stąd:

$$fe'fe' = fe'(ef)e' = f(e'e)fe' = fefe' = fe',$$

a więc fe' to idempotent. Także $fe' \mathcal{R} f$, bo: $(fe')f = fe'(ef) = fef = f$ oraz $f(fe') = fe'$. Wreszcie $fe' \leq e'$, bo: $(fe')e' = fe'$ oraz

$$e'(fe') = e'(ef)e' = (e'e)fe' = efe' = fe'.$$

□

Widzimy zatem, że umiemy rozpoznać (z dokładnością do kolejności) za pomocą $C(A)$, R -klasy $\mathcal{R}_{[Ae_iA]} = \mathcal{R}_{[Ae_i]}$. Kolejną grupę „obiektów rozpoznawalnych” stanowić będą pewne zbiory ideałów związanych z radykałem $J(A)$ algebry A . Niech $A_i \simeq M_{r_i}(\mathbb{K})$ będą takie, jak w (1.1.5). W dalszym ciągu oznaczamy przez \bar{x} element $A/J(A)$ będący obrazem $x \in A$ przy homomorfizmie naturalnym $\pi : A \rightarrow A/J(A)$. Będziemy odróżniać algebrę A_i od jej izomorficznej kopii $\bar{A}_i = \pi(A_i)$.

Definicja 2.5.6. Przez **radykał półgrupy** $C(A)$ rozumiemy największy ideał półgrupy $C(A)$ złożony jedynie z elementów nilpotentnych. Radykał $C(A)$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{N}(C(A))$.

Zauważmy, że zachodzi następująca równość

$$\mathcal{N}(C(A)) = \{[L] \in C(A) \mid L \subseteq J(A)\}.$$

Stąd $\mathcal{N}(C(A))$ jest zbiorem wszystkich elementów nilpotentnych w $C(A)$ i jednocześnie największym ideałem nilpotentnym $C(A)$.

Definicja 2.5.7. Powiemy, że elementy $[X], [Y] \in C(A)$ są **ortogonalne modulo** $\mathcal{N}(C(A))$ jeśli $[XY] \in \mathcal{N}(C(A))$. Podzbiór $\{[L_1], \dots, [L_m]\}$ półgrupy $C(A) \setminus \mathcal{N}(C(A))$ nazwiemy **pełnym zbiorem ortogonalnym modulo** $\mathcal{N}(C(A))$ jeśli jest to maksymalny podzbiór $C(A) \setminus \mathcal{N}(C(A))$, dla którego mamy

$$[L_i][L_j] \in \mathcal{N}(C(A)), \text{ dla } 1 \leq i, j \leq m, i \neq j.$$

Zacznijmy od następującej obserwacji.

Obserwacja 2.5.8. Niech $\{[L_1], \dots, [L_m]\}$ będzie pełnym zbiorem ortogonalnym modulo $\mathcal{N}(C(A))$. Wówczas nie istnieją $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ takie, że $i \neq j$ oraz

$$\overline{L_i} \cap \overline{A_l} \neq 0, \quad \overline{L_j} \cap \overline{A_l} \neq 0. \quad (2.5.1)$$

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że istnieją takie $i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, że (2.5.1) zachodzi. Wówczas $(\overline{L_i} \cap \overline{A_l})(\overline{L_j} \cap \overline{A_l}) \neq 0$, a stąd $[L_i L_j] \notin \mathcal{N}(C(A))$. Przeczy to jednak założeniom obserwacji. \square

Stwierdzenie 2.5.9. Następujące warunki są równoważne dla dowolnego zbioru L_1, L_2, \dots, L_m ideałów lewostronnych w A :

- (i) $\{[L_1], \dots, [L_m]\}$ jest pełnym zbiorem ortogonalnym modulo $\mathcal{N}(C(A))$,
- (ii) $m = k$ równa jest liczbie k bloków prostych w $A/J(A)$ tak jak w (1.1.5), oraz istnieje permutacja $\sigma \in \Sigma_k$ taka, że $0 \neq \overline{L_{\sigma(i)}} \subseteq \overline{A_i}$.

Dowód. Załóżmy, że zachodzi (i). Zgodnie z Obserwacją 2.5.8 moc pełnego zbioru ortogonalnego modulo $\mathcal{N}(C(A))$ nie przekracza liczby bloków prostych w $A/J(A)$. Załóżmy, że $m < k$. Zgodnie z Obserwacją 2.5.8 istnieje $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ takie, że

$$\overline{L_j} \cap \overline{A_i} = 0, \quad \text{dla każdego } 1 \leq j \leq m.$$

Stąd $(\overline{A_i + J(A)})\overline{L_j} = \overline{A_i L_j} = 0$, dla każdego $1 \leq j \leq m$. Stąd, wszystkie pary: $[A_i + J(A)], [L_j]$ są, dla $1 \leq j \leq m$, ortogonalne modulo $\mathcal{N}(C(A))$. Przeczy to jednak (i), a zatem oznaczają, że $m = k$. Jest także jasne, że istnieje permutacja $\sigma \in \Sigma_k$ taka, że $\overline{L_{\sigma(i)}} \subseteq \overline{A_i}$.

Założmy natomiast, że zachodzi (ii). Jest jasne, że elementy zbioru $\{[L_1], \dots, [L_k]\}$ są parami ortogonalne modulo $\mathcal{N}(C(A))$. Jeśli nie jest to pełen zbiór ortogonalny, to istnieje $[L] \in C(A) \setminus \mathcal{N}(C(A))$, ortogonalne modulo $\mathcal{N}(C(A))$ względem każdego $[L_j]$, gdzie $1 \leq j \leq k$. Stąd, istnieje $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ takie, że $\overline{L} \cap \overline{A_l} \neq 0$. A zatem $\overline{L L_{\sigma(l)}} \neq 0$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że $[L]$ oraz $[L_l]$ są ortogonalne modulo $\mathcal{N}(C(A))$. Stąd dostajemy (i). \square

Przykład 2.5.10. Elementy $[L_i]$, $1 \leq i \leq k$, określone wzorem

$$L_i = \pi^{-1}(\overline{A_i}) = A_i + J(A)$$

tworzą pełen zbiór ortogonalny modulo $\mathcal{N}(C(A))$.

Ustalmy pełen zbiór ortogonalny modulo $\mathcal{N}(C(A))$, powiedzmy $\mathcal{L} = \{[L_1], \dots, [L_k]\}$. Możemy zakładać, że $\overline{L_i} \subseteq \overline{A_i}$, dla $1 \leq i \leq k$, zgodnie ze Stwierdzeniem 2.5.9. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ określamy podzbiór \mathcal{C}_i półgrupy $C(A)$ jako zbiór wszystkich klas $[L] \in C(A)$ spełniających następujące warunki:

$$\begin{cases} [L][L_i] \notin \mathcal{N}(C(A)), \\ [L][L_j] \in \mathcal{N}(C(A)), j \neq i. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Jest jasne, że dla $1 \leq i \leq k$ mamy

$$\mathcal{C}_i = \{[L] \in C(A) \mid 0 \neq \bar{L} \subseteq \bar{A}_i\}. \quad (2.5.3)$$

Wniosek 2.5.11. *Opis zbiorów \mathcal{C}_i dany w (2.5.2) nie zależy (z dokładnością do kolejności) od wyboru pełnego zbioru ortogonalnego modulo $\mathcal{N}(C(A))$.*

W szczególności na mocy Przykładu 2.5.10 widzimy, że dla $1 \leq i \leq k$ mamy $[A_i + J(A)] \in \mathcal{C}_i$.

2.6 Dowody Twierdzeń 2.5.1 oraz 2.3.10

Paragraf ten poświęcony będzie dowodom dwóch rezultatów: Twierdzeń 2.5.1 oraz 2.3.10. Zaczniemy od uzasadnienia pierwszego z nich. Drugie jest, jak zobaczymy, nietrudną jego konsekwencją.

DOWÓD TWIERDZENIA 2.5.1. Niech \mathcal{R}_j będą, dla $1 \leq j \leq k$, \mathcal{R} -klasami minimalnych idempotentów niezerowych w $C(A)$. Zbiór ten jest, na mocy Stwierdzenia 2.5.5, w bijekcji ze zbiorem \mathcal{R} -klas elementów $[Ae_jA]$, gdzie e_j są minimalnymi idempotentami centralnymi w A i jedynekami algebr A_j tak, że $1 = e_1 + \dots + e_k$, patrz (1.1.5). Naszym celem jest wyznaczenie zbioru stałych $\{r_1, \dots, r_k\}$ z równości (1.1.4). Możemy zatem, po ewentualnym przepermutowaniu elementów tego zbioru przyjąć, że \mathcal{R}_j jest \mathcal{R} -klasą elementu $[Ae_jA]$. Weźmy zatem klasę \mathcal{R}_j , dla pewnego $1 \leq j \leq k$. Rozumowanie prowadzące do wyznaczenia liczby r_j prowadzi będziemy osobno w przypadku, gdy $J(A)e_j$ jest zerowe, oraz gdy jest niezerowe. Przekonajmy się najpierw, że rozróżnienie pomiędzy tymi przypadkami jest własnością rozpoznawalną w języku struktury $C(A)$. Zachodzi następująca równoważność:

$$\mathcal{N}(C(A))\mathcal{R}_j = 0 \Leftrightarrow J(A)e_j = 0.$$

Obydwie implikacje są oczywiste. Jeśli $\mathcal{N}(C(A))\mathcal{R}_j = 0$, to $[J(A)][Ae_j] = [J(A)e_j] = 0$, bo $[Ae_j] \in \mathcal{R}_j$ (\mathcal{R} -klasa $[Ae_jA]$ zawiera $[Ae_j]$, patrz Stwierdzenie 2.2.12). Zatem $J(A)e_j = 0$. Z drugiej strony, jeśli $J(A)e_j = 0$, to $\mathcal{N}(C(A))[Ae_j] = 0$, a skoro dla każdego $[X] \in \mathcal{R}_j$ mamy (z definicji \mathcal{R} -klasy) $[T]$ takie, że $[Ae_j][T] = [X]$, to $\mathcal{N}(C(A))\mathcal{R}_j = 0$.

Wróćmy do dowodu całego twierdzenia. Rozważamy dwa przypadki.

- $J(A)e_j = 0$. Niech $\mathcal{A}_j = \{[X] \in \mathcal{N}(C(A)) \mid \mathcal{R}_m[X] = 0, \text{ dla } m \neq j\}$. Twierdzimy, że jeśli $C(A)$ jest skończona, to:

$$|\mathcal{R}_j| = r_j \cdot |\mathcal{A}_j|. \quad (2.6.1)$$

W tym celu pokażemy najpierw, że $[L] \in \mathcal{R}_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy o L można zakładać co następuje:

$$L = Af \oplus Y, \quad \text{gdzie } Y \subseteq e_j J(A)(1 - e_j) \in L(A), \quad (2.6.2)$$

przy czym $0 \neq f = f^2 \in A_j$ oraz $f \leq e_j$ zgodnie z (1.1.3). Wywnioskujemy stąd, że $|\mathcal{R}_j| = r_j \cdot |\mathcal{A}|$, gdzie $\mathcal{A} = \{[Y] \in C(A) \mid Y \subseteq e_j J(A)(1 - e_j)\}$. Dowód (2.6.1) zakończymy wykazując, że $\mathcal{A} = \mathcal{A}_j$.

Niech $[L] \in \mathcal{R}_j$. Z definicji \mathcal{R} -klasy istnieje taki $[Z] \in C(A)$, że $[Ae_j][Z] = [L]$. Innymi słowy $Ae_j Zg = L$, dla pewnego $g \in U(A)$. Zgodnie z Lematem 2.4.3 wiemy, że $L = Af \oplus L(1 - f)$, gdzie f jest idempotentem maksymalnym w L oraz $L(1 - f) \subseteq J(A)$. W szczególności dostajemy $Ae_j Zg + J(A) = Af + J(A)$. Skoro e_j jest centralny modulo $J(A)$, to $f \in A_j + J(A)$. Zatem $\bar{f} = \bar{f}'$, dla pewnego idempotenta $f' \in A_j$. Ze Stwierdzenia 2.4.2 wynika, że f jest sprzężony z f' . W szczególności po ewentualnym sprzężeniu L możemy zakładać, że $f \in A_j$ oraz $f \leq e_j$.

Niech $Y = L(1 - f)$. Łatwo widzieć, że skoro $Ye_j \subseteq J(A)e_j = 0$ to stąd $Y = Y(1 - f) = Y(1 - e_j)$. Zachodzi też inkluzja $Y \subseteq e_j A$. Istotnie, wiadomo, że $L^2 = L$ (Stwierdzenie 2.2.12), a stąd $(Af)^2 + AfY + YAf + Y^2 = Af + Y$. Co więcej, $YAf = Y(1 - e_j)Af \subseteq J(A)e_j = 0$. Skoro $(Af)^2 = Af$, to $Af + AfY + Y^2 = Af + Y$. Jednak $Af \cap J(A) = 0$, a zatem

$$AfY + Y^2 = Y. \quad (2.6.3)$$

Przypuśćmy, że $Y \not\subseteq e_j A$. Oznaczałoby to, że $e_m Y \neq 0$, dla pewnego $m \neq j$. Z założenia $e_m Ae_j \subseteq J(A)e_j = 0$. Mnożąc więc (2.6.3) z lewej strony przez e_m dostalibyśmy $e_m Y^2 = e_m Y$. Zatem $e_m Y = e_m Y^2 = e_m Y^3 = \dots = 0$, ponieważ $Y \subseteq J(A)$. Uzyskalibyśmy w ten sposób sprzeczność z założeniem $e_m Y \neq 0$. Stąd $Y \subseteq e_j J(A)$. Udowodniliśmy zatem, że każdy element \mathcal{R}_j spełnia (2.6.2).

Weźmy teraz dowolny ideał L' mający rozkład postaci (2.6.2). A więc niech $f' \in A_j$ będzie idempotentem niezerowym spełniającym warunek $f' \leq e_j$ i niech $Y \subseteq e_j J(A)(1 - e_j)$ będzie ideałem lewostronnym, przy czym $L' = Af' \oplus Y$. Zauważmy najpierw, że w półgrupie $L(A)$ mamy $L' \mathcal{R} Ae_j$. Istotnie, $(Af' + Y)Ae_j = Ae_j$, bo $Af'Ae_j = Ae_j$ oraz $Ae_j(Af' + Y) = Af' + Y$, bo $Ae_j Af' = Af'$ oraz $Ae_j Y = AY = Y$. Zatem na mocy Wniosku 2.2.11 także $[Af' + Y] \mathcal{R}[Ae_j]$ w $C(A)$. Pokazaliśmy zatem, że $[L] \in \mathcal{R}_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy L spełnia (2.6.2).

Niech $[L_1] = [Af_1 \oplus Y_1]$ oraz $[L_2] = [Af_2 \oplus Y_2]$ będą elementami \mathcal{R}_j , przy czym f_i, Y_i spełniają warunki z (2.6.2), dla $i = 1, 2$. Jest jasne, że f_1, f_2 są idempotentami maksymalnymi, odpowiednio w L_1, L_2 . Co więcej $Af_i \cap J(A) = 0$, zatem $Y_i = L_i(1 - f_i)$, dla $i = 1, 2$. Zgodnie ze Stwierdzeniem 2.4.5 wynika stąd, że $[L_1] = [L_2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[Af_1] = [Af_2]$ oraz $[Y_1] = [Y_2]$. Na mocy Stwierdzenia 2.4.2 wiemy natomiast, że $[Af_1] = [Af_2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f_1, f_2 są sprzężone. W algebrze $A_j \simeq M_{r_j}(K)$ jest r_j klas sprzężoności idempotentów niezerowych. Stąd zachodzi równość

$$|\mathcal{R}_j| = r_j \cdot |\mathcal{A}|, \quad (2.6.4)$$

gdzie \mathcal{A} jest zbiorem klas sprzężoności ideałów lewostronnych A zawartych w $e_j J(A)(1 - e_j)$.

Aby wykazać (2.6.1) pozostaje zatem dowieść, że $\mathcal{A} = \mathcal{A}_j$. Istotnie, weźmy $[X] \in \mathcal{A}_j$. Dla każdego $m \neq j$ mamy $[Ae_m] \in \mathcal{R}_m$. Stąd $e_m X = 0$, a więc $X = e_j X$. Natomiast skoro $J(A)e_j = 0$, to $X = X(1 - e_j)$. Zatem $X = e_j X(1 - e_j)$. To dowodzi, że $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}$. Z drugiej strony dla dowolnego $m \neq j$ oraz $[L] \in \mathcal{R}_m$ mamy $[LA] = [Ae_m A]$ (patrz Stwierdzenie 2.2.12). Jeśli $[Y] \in \mathcal{A}$, to $[L][Y] = [LAY] = [Ae_m Y] = [Ae_m e_j Y] = 0$. Stąd $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_j$. Zatem zbiory te są równe, co kończy, na mocy (2.6.4), dowód (2.6.1).

W szczególności, widzimy, że zbiór liczb r_j (licząc z krotnościami) dla j takich, że $J(A)e_j = 0$ jest rozpoznawalny w języku struktury $C(A)$.

- $J(A)e_j \neq 0$. Rozważamy podzbiór $\mathcal{N}_j \subseteq \mathcal{N}(C(A))$ określony w następujący sposób: $[M] \in \mathcal{N}_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $s \in \{1, 2, \dots, k\}$, że:
 - $\mathcal{N}(C(A))[M] = 0$,
 - $\mathcal{R}_t[M] = 0$, dla $t \neq s$,
 - $[M]\mathcal{N}(C(A))\mathcal{R}_j = 0$,
 - $[M]\mathcal{R}_j \neq 0$.

Pokażemy, że zbiór ten jest niepusty oraz można z niego wybrać takie $[M]$ (zdefiniowane w języku półgrupy $C(A)$), że zachodzi równość:

$$|\mathcal{R}_{[M]}| = r_j \cdot |[M]\mathcal{N}(C(A))|, \quad (2.6.5)$$

gdzie $\mathcal{R}_{[M]}$ jest \mathcal{R} -klasą elementu $[M]$ w $C(A)$.

Niech r będzie największą liczbą nieujemną taką, że $J(A)^r e_j \neq 0$. Istnieje więc $i \in \{1, \dots, k\}$, dla którego $L := e_i J(A)^r e_j \neq 0$. Rozważmy przestrzeń $e_i A e_j$ traktowaną jako $A_i - A_j$ -bimoduł. Na mocy założenia o skończoności $C(A)$ wiemy, że A jest algebrą rozdzielną (Stwierdzenie 2.3.4). Zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1.15 oznacza to, że $e_i A e_j$ jest bimodułem łańcuchowym. Zbiór L jest natomiast niezzerowym podbimodułem w $e_i A e_j$, a jego struktura jest taka, jak struktura $A_i - A_j$ -bimodułu $e_i J(A)^r e_j$. Jest to zatem bimoduł półprosty, a skoro $e_i A e_j$ jest łańcuchowy, to L musi być prosty. Jest także jasne, że L jest ideałem lewostronnym w A . Skoro $J(A)e_j \neq 0$, to $L \subseteq J(A)$. Łatwo widzieć, że klasa $[L]$ spełnia (i)-(iv), dla $s = i$. Zatem \mathcal{N}_j jest niepusty.

Przejdziemy teraz do dowodu (2.6.5). Odnotujmy najpierw, że dla każdego m istnieje dokładnie jedno n takie, że $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{C}_n$ (patrz (2.5.2)). Zatem, dalej będziemy przyjmować, że $n = m$, a więc, że $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{C}_m$, dla $1 \leq m \leq k$. Wykażemy następujące fakty.

- (a) Załóżmy, że $[M]C(A)$ jest minimalnym (ze względu na relację inkluzji) ideałem prawostronnym głównym w $C(A)$ generowanym przez element \mathcal{N}_j . Wówczas MAe_j jest minimalnym podbimodułem w $e_s J(A)e_j$ oraz zachodzą równość:

$$\mathcal{R}_{[M]} = \mathcal{R}_{[MAe_j]}, \quad [M]\mathcal{N}(C(A)) = [MAe_j]\mathcal{N}(C(A)) \quad (2.6.6)$$

- (b) Niech L będzie ideałem lewostronnym w A oraz minimalnym podbimodułem w $e_s J(A)e_j$, dla pewnego s . Przyjmijmy, że

$$\mathcal{X}_L = \{[L_1+L_2] \mid L_1 = LAf, L_2 = LZ, \text{ dla } 0 \neq f = f^2 \leq e_j \text{ i } Z <_l A, Z \subseteq J(A)\}. \quad (2.6.7)$$

Wówczas zachodzi równość

$$\mathcal{R}_{[L]} = [L]\mathcal{C}_j = \mathcal{X}_L. \quad (2.6.8)$$

Co więcej,

$$|\mathcal{R}_{[L]}| = r_j \cdot |[L]\mathcal{N}(C(A))|. \quad (2.6.9)$$

Z obserwacji tych wynika jasno, że równość (2.6.5) jest prawdziwa, a zatem, że zbiór liczb r_j (licząc z krotnościami) takich, że $J(A)e_j \neq 0$ jest rozpoznawalny w języku struktury $C(A)$. To da tezę twierdzenia.

Dowodzimy punkt (a). Weźmy taki element $[M]$ spełniający (i)-(iv), dla pewnego s , że $[M]C(A)$ jest minimalnym ideałem prawostronnym głównym w $C(A)$ generowanym przez element \mathcal{N}_j . Na mocy (i) i (ii) widzimy, że $M = e_s M$. Z warunków (iii) i (iv) dostajemy natomiast, że $e_s MAe_j = MAe_j \neq 0$. Wynika stąd, że MAe_j jest podbimodułem w $e_s Ae_j$. Tak jak w uzasadnieniu, że \mathcal{N}_j jest zbiorem niepustym, wynika stąd, że MAe_j jest minimalnym podbimodułem w $e_s Ae_j$. Ponieważ $M \subseteq J(A)$, to $MAe_j \subseteq e_s J(A)e_j$. Widzimy dalej, że $[MAe_j]C(A) = [M][Ae_j]C(A) \subseteq [M]C(A)$. Jest jednak jasne, że $[MAe_j] \in \mathcal{N}_j$, zatem wobec założenia o minimalności ideału $[M]C(A)$ dostajemy $[MAe_j]C(A) = [M]C(A)$. Stąd $\mathcal{R}_{[M]} = \mathcal{R}_{[MAe_j]}$. Uzyskaliśmy zatem pierwszą równość w (2.6.6). Wynika z niej oczywiście druga równość. To kończy dowód (2.6.6) i punktu (a).

Dowodzimy punkt (b). Uzasadnimy najpierw równość (2.6.8). Niech $[R] \in \mathcal{R}_{[L]}$. Z definicji \mathcal{R} -klasy istnieje $[S] \in C(A)$, że $[R] = [L][S] = [L][Ae_j][S]$, bo $[L] = [L][Ae_j]$. Zauważmy, że $Ae_j S \not\subseteq J(A)$. W przeciwnym razie przyjmując (znowu z definicji \mathcal{R} -klasy), że $[R][T] = [L]$, dla pewnego $[T] \in C(A)$, dostajemy $[L] = [L][Ae_j][S][T] = [L]([Ae_j][S][T])^2 = \dots = [0]$, co przeczy założeniu o $[L]$. Zatem z (2.5.3) wynika, że $[Ae_j][S] \in \mathcal{C}_j$. Stąd $[R] \in [L]\mathcal{C}_j$, czyli $\mathcal{R}_{[L]} \subseteq [L]\mathcal{C}_j$.

Weźmy następnie $[X] \in \mathcal{C}_j$. Zgodnie z Lematem 2.4.3 mamy $X = Af \oplus X(1-f)$, przy czym $f \neq 0$ jest maksymalnym idempotentem w X oraz $X(1-f) \subseteq J(A)$. Argumentując podobnie jak w poprzednim przypadku przyjmujemy także, że

$f \leq e_j$ (korzystając z równości (2.5.3) oraz ze Stwierdzenia 2.4.2). Zatem $[L][X] = [Laf + LX(1 - f)]$. Stąd $[L]\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{X}_L$.

Weźmy wreszcie ideał lewostronny $L_1 + L_2$ taki, że $[L_1 + L_2] \in \mathcal{X}_L$. Dowodzimy, że $[L_1 + L_2] \in \mathcal{R}_{[L]}$. Zauważmy najpierw, że $LJ(A)e_j = 0$. Istotnie, $LJ(A)e_j = Le_jJ(A)e_j \subseteq L$, ponieważ L jest podbimodułem w $e_sJ(A)e_j$. Zatem gdyby ideał $LJ(A)e_j$ był niezerowy, to byłby równy $L(e_jJ(A)e_j) = L(e_jJ(A)e_j)^2 = \dots = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Wynika stąd, że skoro $L_2 \subseteq LJ(A)$, to $L_2Ae_j = 0$. Zatem $[L_1 + L_2][Ae_j] = [L_1Ae_j]$. Dalej, skoro $fe_j = f$, to w szczególności $L_1 = Laf = Le_jAf = Le_jAfe_j \subseteq Le_jAe_j$. Ale L jest także podbimodułem w e_sAe_j , a zatem $L_1 \subseteq L$. Skoro L jest prostym $A_s - A_j$ -bimodułem oraz $0 \neq L_1 \subseteq L$, to $L_1Ae_j = L$. Stąd

$$[L_1 + L_2][Ae_j] = [L]. \quad (2.6.10)$$

Z warunków podanych w (2.6.7) mamy też równość $L_1 + L_2 = Laf + LZ$, dla pewnego niezerowego idempotentu $f \leq e_j$ oraz ideału lewostronnego $Z \subseteq J(A)$. Zatem $[L_1 + L_2] = [L][Af + Z]$. Ostatnia równość oraz równość (2.6.10) implikują, że $[L_1 + L_2] \in \mathcal{R}_{[L]}$. To oznacza, że $\mathcal{X}_L \subseteq \mathcal{R}_{[L]}$. Pokazaliśmy zatem prawdziwość (2.6.8).

Dowodzimy teraz równość (2.6.9). W dalszym rozumowaniu będziemy swobodnie korzystać z następujących prostych obserwacji dotyczących reprezentantów $L_1 + L_2$ klas $[L_1 + L_2] \in \mathcal{X}_L$:

$$L_1 = L_1e_j, \quad L_2 = L_2(1 - e_j). \quad (2.6.11)$$

W szczególności suma $L_1 + L_2$ jest sumą prostą. Rzeczywiście, $L_1 = Laf = LAfe_j = L_1e_j$, dla pewnego $f \leq e_j$, zgodnie z (2.6.7). Natomiast $L_2e_j = LZe_j = 0$, bo jak wykazaliśmy wcześniej $LJ(A)e_j = 0$. Zatem $L_2 = L_2(1 - e_j)$.

Pokażemy najpierw, że jeśli $L'_1 = Laf_1, L'_2 = Laf_2$ są niezerowymi ideałami lewostronnymi w A , gdzie f_1, f_2 są idempotentami i $f_1, f_2 \leq e_j$ oraz jeśli $L'_2 = LZ_1, L''_2 = LZ_2$, gdzie $Z_1, Z_2 \subseteq J(A)$ są ideałami lewostronnymi w A , to zachodzi równoważność:

$$[L'_1 \oplus L'_2] = [L''_1 \oplus L''_2] \Leftrightarrow [L'_1] = [L''_1] \text{ oraz } [L'_2] = [L''_2] \quad (2.6.12)$$

Implikacja „ \Leftarrow ” równoważności (2.6.12) jest oczywista. Jeśli $L'_1 = L''_1g$ oraz $L'_2 = L''_2h$, dla pewnych $g, h \in U(A)$, to

$$L'_1 = L''_1e_jge_j, \quad L'_2 = L''_2(1 - e_j)h(1 - e_j),$$

oraz $u = e_jge_j + (1 - e_j)h(1 - e_j) \in U(A)$. Stąd $[L'_1 \oplus L'_2] = [L''_1 \oplus L''_2]$.

Przejdźmy do dowodu implikacji „ \Rightarrow ”. Załóżmy, że

$$L'_1 \oplus L'_2 = (L''_1 \oplus L''_2)v, \quad (2.6.13)$$

dla pewnego $v \in U(A)$. Wtedy, zgodnie z (2.6.11), $L'_1 = (L''_1 \oplus L''_2)ve_j$. Co więcej, na mocy (2.6.7) mamy równość $L''_2 = LZ$, dla pewnego ideału lewostronnego $Z \subseteq J(A)$. Zatem $L''_2ve_j = LZve_j = 0$, bo $LJ(A)e_j = 0$ (zgodnie z dowodem (2.6.10)). Na mocy (2.6.11), otrzymujemy w ten sposób $L'_1 = L''_1ve_j = L''_1e_jve_j = L''_1(e_jve_j + (1 - e_j))$. Element $e_jve_j + (1 - e_j)$ jest jednak odwracalny w A . Zatem $[L'_1] = [L''_1]$.

Dalej, na mocy (2.6.11) i (2.6.13) widzimy, że $L''_2(1 - e_j)v(1 - e_j) = L''_2v(1 - e_j) \subseteq (L''_1 \oplus L''_2)v(1 - e_j) = (L'_1 \oplus L'_2)(1 - e_j) = L'_2$. Element $(1 - e_j)v(1 - e_j)$ jest jednak odwracalny w $(1 - e_j)A(1 - e_j)$. Skoro $\dim_{\mathbb{K}}(L'_1 \oplus L'_2) = \dim_{\mathbb{K}}(L''_1 \oplus L''_2)$, a także $\dim_{\mathbb{K}}(L'_1) = \dim_{\mathbb{K}}(L''_1)$, to w rezultacie również $\dim_{\mathbb{K}}(L'_2) = \dim_{\mathbb{K}}(L''_2)$. Dostajemy więc równość $L''_2(1 - e_j)v(1 - e_j) = L'_2$. Ostatecznie, $L''_2w = L'_2$, gdzie $w = e_j + (1 - e_j)v(1 - e_j)$ jest elementem odwracalnym w A . Zatem $[L'_2] = [L''_2]$, co kończy dowód drugiej implikacji i całej równoważności (2.6.12).

Aby wykazać równość (2.6.9) wystarczy zatem, na mocy (2.6.12), uzasadnić, że zbiór $\mathcal{S}_L := \{[Laf] \in C(A) \mid 0 \neq f \leq e_j\}$ ma r_j elementów. Skoro $LJ(A)e_j = 0$ (patrz dowód (2.6.10)), to zgodnie z (1.1.4) mamy $Laf = LA_jf \subseteq Lf$. Istotnie, inkluzja ta wynika z faktu, że L jest A_j -modułem prawostronnym oraz, że $LA_t f = LA_t e_j f = 0$, dla $t \neq j$. Dostajemy zatem

$$Laf = Lf, \quad (2.6.14)$$

dla każdego $f \leq e_j$. Weźmy idempotenty niezerowe $f, f' \leq e_j$. Wówczas jeśli są one sprzężone, to $f' = g^{-1}fg$, dla pewnego $g \in U(A)$. Skoro $LJ(A)e_j = 0$, to $Le_jg^{-1}e_j = L$. W ten sposób dostajemy

$$Lf' = Lg^{-1}fg = Le_jg^{-1}e_jfg = Lfg.$$

Innymi słowy $[Lf'] = [Lf]$. Z (2.6.14) wynika zatem, że moc zbioru \mathcal{S}_L jest nie większa niż liczba klas sprzężoności idempotentów niezerowych $f \leq e_j$. Zatem zgodnie z faktem, że e_j jest jedyнкą w $A_j \simeq M_{r_j}(\mathbb{K})$ oraz ze Stwierdzeniem (2.4.2) dostajemy szacowanie

$$|\mathcal{S}_L| \leq r_j. \quad (2.6.15)$$

Z drugiej strony, zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1.15, bimoduł L utożsamić można z przestrzenią liniową macierzy prostokątnych $M_{r_s \times r_j}(\mathbb{K})$ z naturalnymi działaniami A_s oraz A_j . Wówczas biorąc idempotent diagonalny f_m rangi m algebry $A_j \simeq M_{r_j}(\mathbb{K})$, gdzie $1 \leq m \leq r_j$, widzimy, że Lf_m utożsamić można ze zbiorem macierzy, w których dokładnie m kolumn jest niezerowych. W ten sposób elementy $[Lf_m]$ są różne w $C(A)$ (bo Lf_m mają różne wymiary nad ciałem \mathbb{K}). Jest ich zaś r_j . Zatem zgodnie z (2.6.15) wnosimy, że \mathcal{S}_L ma dokładnie r_j elementów. To kończy dowód (2.6.9) i całego punktu (b).

□

Wykazaliśmy zatem Twierdzenie 2.5.1. Na jego podstawie widzimy, że jeśli półgrupa $C(A)$ jest skończona, oraz $A/J(A)$ jest taka, jak w (1.1.4), to możemy „rozpoznać” w terminach struktury $C(A)$ zbiór $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$. Przejdziemy teraz do uzasadnienia Twierdzenia 2.3.10. Zakładamy, że $J(A)^2 = 0$ oraz, że półgrupa $C(A)$ jest skończona. Zgodnie ze Stwierdzeniem 2.3.4 algebra A jest zatem rozdzielna. Rozważmy $A_i - A_j$ -bimoduły

$$J_{ij} := e_i J(A) e_j. \quad (2.6.16)$$

Zauważmy, że o ile są one niezerowe, to stanowią (wobec założenia, że $J(A)^2 = 0$) minimalne podbimoduły bimodułu $e_i A e_j$. W szczególności, zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1.15, bimoduły $e_i J(A) e_j$ są albo zerowe, albo proste i izomorficzne z modulem N_{ij} , a więc minimalnym prawostronnym ideałem w $A_i^{op} \otimes_K A_j \simeq M_{r_i r_j}(K)$. Niech m_{ij} będą zdefiniowane w następujący sposób, dla $1 \leq i, j \leq k$:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } e_i J(A) e_j = 0 \\ 1, & \text{jeśli } e_i J(A) e_j \neq 0 \end{cases}. \quad (2.6.17)$$

Możliwość rozpoznania stałych m_{ij} przy pomocy struktury $C(A)$ stanowić będzie ważny element dowodu Twierdzenia 2.3.10. Zachodzi następująca, ważna obserwacja.

Stwierdzenie 2.6.1. *Załóżmy, że A jest skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K taką, że $J(A)^2 = 0$ oraz $C(A)$ jest półgrupą skończoną. Niech*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i &= \{[L] \in \mathcal{N}(C(A)) \mid \mathcal{C}_j \cdot [L] = 0, j \neq i\}, \\ \mathcal{I}_i &= \{[L] \in \mathcal{N}(C(A)) \mid [L] \cdot \mathcal{C}_j = 0, j \neq i\}. \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Jeśli

$$\mathcal{J}_{ij} = \mathcal{J}_i \cap \mathcal{I}_j, \quad \text{dla } 1 \leq i, j \leq k, \quad (2.6.19)$$

oraz jeśli m_{ij} są takie jak w (2.6.17), wówczas

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \mathcal{J}_{ij} = \{[0]\} \\ 1, & \text{jeśli } \mathcal{J}_{ij} \neq \{[0]\} \end{cases}. \quad (2.6.20)$$

Dowód. Opis zbiorów \mathcal{J}_{ij} jest prostą konsekwencją (2.6.18) i ma postać:

$$\mathcal{J}_{ij} = \{[L] \in C(A) \mid L \subseteq e_i A e_j\}.$$

Stąd wynika prawdziwość (2.6.20). □

Jesteśmy gotowi do dowodu drugiego głównego rezultatu tego paragrafu.

DOWÓD TWIERDZENIA 2.3.10. Zauważmy, że zgodnie z (1.1.5) oraz (2.6.17), algebra A , dla której $C(A)$ jest skończona oraz $J(A)^2 = 0$ wyznacza parę (ν_A, μ_A) złożoną z niemalejącego ciągu liczb naturalnych $\nu_A = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ (możemy to zakładać po ewentualnym przepermutowaniu bloków A_1, A_2, \dots, A_k) oraz macierzy $\mu_A = [m_{ij}]$ w $M_k(\mathbb{Z}_2)$. Pokażemy teraz, że stałe te są rozpoznawalne w języku struktury $C(A)$.

Istotnie, najpierw wskazujemy zbiór $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ złożony z \mathcal{R} -klas minimalnych idempotentów niezerowych półgrupy $C(A)$. Dalej, wyznaczamy zbiory \mathcal{C}_t , dla $1 \leq t \leq k$, zgodnie z (2.5.2). W tym celu jako pełen zbiór ortogonalny modulo $\mathcal{N}(C(A))$ możemy przyjąć dowolny zbiór postaci $\{[X_1], \dots, [X_k]\}$, gdzie $[X_j] \in \mathcal{R}_j$. W ten sposób $\mathcal{R}_j \subseteq \mathcal{C}_j$, dla $1 \leq j \leq k$. Na mocy Twierdzenia 2.3.10 wyznaczamy zbiór $\{r_1, \dots, r_k\}$. Po ewentualnym przenumerowaniu możemy zakładać dalej, że liczby te tworzą ciąg niemalejący. Następnie określamy, zgodnie z (2.6.18) oraz (2.6.19), zbiory \mathcal{J}_{ij} . Wreszcie, na mocy (2.6.17) oraz Stwierdzenia 2.6.1, wyznaczamy stałe m_{ij} . Zatem para (ν_A, μ_A) jest rozpoznawalna w terminach struktury algebry $C(A)$.

Zgodnie z [37], Exercise 1 w §11.8, dla każdej pary (ν, μ) takiej jak wyżej istnieje K-algebra $A(\nu, \mu) = N \rtimes A'$, gdzie $A' = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$, $A_i \simeq M_{r_i}(\mathbb{K})$, oraz gdzie N jest $A' - A'$ -bimodułem

$$\bigoplus_{1 \leq i, j \leq k} \bigoplus m_{ij} N_{ij},$$

dla maksymalnych prawostronnych ideałów N_{ij} w $A_i^{op} \otimes A_j$. Przy tym $N^2 = 0$. Co więcej, każda skończona wymiarowa K-algebra A taka, że $J(A)^2 = 0$ jest izomorficzna z algebrą postaci $A(\nu_A, \mu_A)$.

Niech $\nu = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ będzie niemalejącym ciągiem liczb naturalnych. Przez G_ν oznaczamy podgrupę grupy permutacji Σ_k określoną w następujący sposób:

$$G_\nu = \{\pi \in \Sigma_k \mid (\pi(i) = j) \Rightarrow (r_i = r_j)\}.$$

Niech $\mu = [m_{ij}]$ oraz $\mu' = [m'_{ij}]$ będą macierzami w $M_n(\mathbb{N})$. Określamy relację \sim_ν : $[m_{ij}] \sim_\nu [m'_{ij}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\pi \in G_\nu$ takie, że

$$m'_{ij} = m_{\pi(i)\pi(j)}, \quad \text{dla wszystkich } i, j.$$

Zgodnie z [37], Exercise 1c w §11.8 wiemy, że $A(\nu, \mu) \simeq A(\nu', \mu')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu = \nu'$ oraz $\mu \sim_\nu \mu'$.

Rozważmy algebrę B taką, że półgrupy $C(A)$ oraz $C(B)$ są izomorficzne. Jest zatem jasne, że

$$J(A)^2 = 0 \iff \mathcal{N}(C(A))^2 = 0 \iff \mathcal{N}(C(B))^2 = 0 \iff J(B)^2 = 0.$$

Skoro $C(A)$ jest skończona, to $C(B)$ jest również skończona i stąd krata ideałów dwustronnych w B jest rozdzielna. Zgodnie z Twierdzeniem 2.5.1 oraz faktem, że $C(A)$ oraz $C(B)$ są izomorficzne widzimy, że ciągi niemalejące liczb naturalnych opisujące rozmiary bloków prostych algebr $A/J(A)$ oraz $B/J(B)$, dokładniej ciągi $\nu_A = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ oraz $\nu_B = (r'_1, r'_2, \dots, r'_k)$, są równe. Skoro $C(A) \simeq C(B)$, to zgodnie ze Stwierdzeniem 2.6.1 widzimy łatwo, że $\mu_A \sim_\nu \mu_B$. A zatem na mocy Exercise 1c w [37], §11.8 wiemy, że $A(\nu_A, \mu_A) \simeq A(\nu_B, \mu_B)$, a więc $A \simeq B$. \square

Rozdział 3

Skończoność $C(A)$, gdy $J(A)^2 = 0$

Celem ostatnich dwóch rozdziałów poniższej rozprawy jest zbadanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby półgrupa $C(A)$ była skończona, w przypadku gdy skończenie wymiarowa algebra A nad ciałem algebraicznie domkniętym K ma rozdzielną kratę ideałów dwustronnych oraz $J(A)^2 = 0$. Zagadnienie to formułujemy jako Problem 3.1.1. W paragrafie 3.1 zapowiadamy uzyskane w tym kontekście rezultaty. W następnej części rozdziału pokazujemy, jak przetłumaczyć Problem 3.1.1 na zagadnienie istnienia skończonej liczby orbit działania grup liniowych na pewnych zbiorach macierzy. Wprowadzamy wygodny formalizm w oparciu o definicje szkieletu i konturu, oraz pojęcie \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbity. W paragrafie 3.3 pojawia się pojęcie grafu rozdzielonego szkieletu, pozwalające na opis konkretnych typów szkieletów oraz relacji między nimi. Następnie w 3.4 formułujemy główne rezultaty – Twierdzenia 3.4.2 oraz 3.4.3. W paragrafie 3.5 dowodzimy szeregu faktów pomocniczych niezbędnych w dalszych rozważaniach. W ostatniej części rozdziału, korzystając z klasycznych metod geometrycznych, dowodzimy Twierdzenie 3.4.3 oraz jedną z implikacji Twierdzenia 3.4.2.

3.1 Sformułowanie problemów

W dalszej części pracy rozważać będziemy następujący problem.

Problem 3.1.1. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową z 1 nad ciałem algebraicznie domkniętym K . Załóżmy, że $J(A)^2 = 0$ oraz, że krata $I(A)$ ideałów dwustronnych algebry A jest skończona (równoważnie, A jest algebrą rozdzielną). Podać warunki konieczne i dostateczne do tego, aby $C(A)$ była półgrupą skończoną.*

Przypomnijmy, że problem powyższy rozważamy z jednej strony w kontekście Twierdzenia 2.3.10, a więc biorąc klasę algebr, które są całkowicie wyznaczone przez swoją półgrupę klas sprzężoności ideałów lewostronnych, ale z drugiej strony także w kontekście Twierdzenia Gabriela i związków pomiędzy skończonością $C(A)$, a własnością skończonego typu reprezentacyjnego algebry. W tym sensie następująca obserwacja jest natychmiastowym wnioskiem z rozważań poczynionych w paragrafie 2.3.

Stwierdzenie 3.1.2. *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową spełniającą założenia Problemu 3.1.1. Wówczas jeśli graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A jest sumą rozłączną grafów Dynkina, to $C(A)$ jest skończona.*

Wiadomo, że istnieją algebry nieskończonego typu reprezentacyjnego, dla których półgrupa $C(A)$ jest skończona, patrz Przykład 2.3.9. W szczególności kołczany tych algebr mają strukturę bardziej złożoną od grafów Dynkina. W klasie algebr bazowych, pełnego rozwiązania Problemu 3.1.1 dostarcza Twierdzenie 2.3.7. Uzyskana w nim charakteryzacja oparta jest jedynie na wiedzy o strukturze kołczanu algebry. Natomiast w przypadku ogólnym nie tylko kształt grafu rozdzielonego, ale także wielkości bloków algebry $A/J(A)$ odgrywać będą zasadniczą rolę. W tym kontekście wyróżniamy dwie podklasy w klasie algebr określonych w założeniach Problemu 3.1.1:

(W1) algebry A takie, że $A/J(A) \simeq \underbrace{\mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}}_{k_1} \oplus \underbrace{\mathbb{M}_2(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{K}) \oplus \dots \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{K})}_{k_2}$,
dla $k_1, k_2 \geq 0$,

(W2) algebry A takie, że $A/J(A) \simeq \mathbb{M}_{r_1}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{M}_{r_2}(\mathbb{K}) \oplus \dots \oplus \mathbb{M}_{r_k}(\mathbb{K})$, dla $r_i \geq 6$.

Zgodnie z Twierdzeniem 2.3.11 wiadomo, że jeśli \mathbb{K} -algebra A jest skończenie wymiarowa, to skończoność $C(A)$ równoważna jest istnieniu skończenie wielu klas sprzężoności nilpotentnych ideałów lewostronnych w A . Nasze podejście do Problemu 3.1.1 będzie zatem następujące. W paragrafie 3.2 sformułujemy ogólne zagadnienie, przynależące do algebry liniowej i teorii grup algebraicznych, a mianowicie: problem istnienia skończenie wielu orbit działania pewnych grup liniowych na pewnym zbiorze macierzy blokowych. Jest ono modyfikacją zagadnienia macierzowego rozważanego w teorii reprezentacji par zbiorów częściowo uporządkowanych, patrz [4], §16.1. Zagadnienie to, jak wykażemy we Wniosku 3.2.9, jest równoważne problemowi skończoności zbioru klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry A zawartych w $J(A)$.

Przedstawimy teraz wstępny zarys dalszych rozważań. Weźmy algebrę A spełniającą założenia Problemu 3.1.1. Niech r_i będą takie, jak w (1.1.4), zaś niech J_{ij} będą podzbiórmi radykału $J(A)$, zgodnie z (3.2.1). Definiujemy też stałe

$$a_i := \sum_{j: J_{ij} \neq 0} r_j.$$

Rozważmy zbiór macierzy blokowych \mathcal{M}_A postaci

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad (3.1.1)$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{M}_{a_i \times r_j}(\mathbb{K})$ oraz $a_{ij} = 0$, o ile $J_{ij} = 0$.

Jeśli przez \mathfrak{H} oznaczymy grupę $\mathrm{Gl}_{a_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{a_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathrm{Gl}_{a_k}(\mathbb{K})$, zaś przez \mathfrak{G} oznaczymy grupę $\mathrm{Gl}_{r_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{r_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathrm{Gl}_{r_k}(\mathbb{K})$, to rozważać możemy działanie grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ na \mathcal{M}_A zadane wzorem:

$$\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}, \quad (3.1.2)$$

gdzie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_A$. Zobaczymy (Stwierdzenie 3.2.8), że orbitom powyższego działania odpowiadać będą, w sposób wzajemnie jednoznaczny, klasy sprzężoności ideałów lewostronnych algebry A zawartych w $J(A)$. Istotnym krokiem pośrednim będzie zauważenie, że istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem wszystkich ideałów lewostronnych nilpotentnych $L <_l A$ oraz pewnym podzbiorem zbioru wszystkich k -tek podprzestrzeni (W_1, \dots, W_k) , gdzie $W_i \subseteq K^n$ (patrz Stwierdzenie 3.2.2). Pokażemy, że każdej takiej k -tce podprzestrzeni odpowiada w sposób jednoznaczny orbita pewnego lewostronnego działania grupy \mathfrak{H} na \mathcal{M}_A . Orbita ta złożona będzie z takich macierzy \mathcal{A} postaci (3.1.1), których wiersze tworzące bloki $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik}]$, interpretowane jako wektory w K^n , rozpinają W_i . Następnie pokażemy, że w orbitach działania (3.1.2) na \mathcal{A} znajdują się dokładnie te orbity lewostronnego działania \mathfrak{H} na \mathcal{M}_A , które odpowiadają k -tkom (W_1, \dots, W_k) , reprezentującym ideały lewostronne sprzężone w A .

Dalsze rozważania w tym rozdziale skoncentrowane będą wokół zagadnienia macierzowego, do którego zredukujemy w opisany wyżej sposób rozważany przez nas problem (Wniosek 3.2.9). Aby rozwiązać to zagadnienie, wprowadzimy pewien wygodny sposób zapisu macierzy postaci (3.1.1) oraz sposób opisu orbit działań grup liniowych na tych zbiorach, mianowicie przez pojęcia szkieletu i konturu.

3.2 Szkielet i kontur algebry

Przejdziemy teraz do opisu ideałów lewostronnych zawartych w radykale $J(A)$ algebry spełniającej założenia Problemu 3.1.1. Niech r_i będą takie, jak w (1.1.4), zaś niech $A_i \simeq M_{r_i}(K)$ będą algebraami takimi jak w (1.1.5). Niech J_{ij} będą określone tak, jak w (2.6.16). Wówczas J_{ij} są podprzestrzeniami $J(A)$ oraz używając notacji macierzowej możemy napisać, że

$$A = A' \oplus J(A) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1k} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1} & J_{n2} & \dots & J_{kk} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Przypomnijmy, że gdy $J(A)^2 = 0$, wówczas J_{ij} , o ile są niezerowe, są minimalnymi podbimodułami $A_i - A_j$ -bimodułu $e_i A e_j$. Zatem zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1.15 zbiór J_{ij} , o ile jest niezerowy, utożsamiać można zatem z przestrzenią macierzy prostokątnych $M_{r_i \times r_j}(K)$. Wniosek z powyższych rozważań jest następujący.

Wniosek 3.2.1. *Niech A będzie rozdzielną algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym K i taką, że $J(A)^2 = 0$. Niech $n := r_1 + r_2 + \dots + r_k$, gdzie $r_i \geq 1$ są takie jak w (1.1.4). Wówczas algebra A może być traktowana jako podalgebra w $M_n(K[x]/(x^2))$, gdzie $x^2 = 0$, przy czym jeśli A ma rozkład (1.1.5), to $A' \subseteq M_n(K)$, oraz $J_{ij} = e_i J(A) e_j$, o ile jest niezerowe, utożsamiać możemy z odpowiednim zbiorem macierzy prostokątnych rozmiaru $r_i \times r_j$ o współczynnikach w ideale pierścienia $K[x]/(x^2)$ generowanym przez warstwę elementu $x \in K[x]$.*

Niech f_1, f_2, \dots, f_n będą kolejnymi idempotentami diagonalnymi rzędu jeden w $M_n(K)$. Zgodnie z powyższym stwierdzeniem tworzą one pełen zbiór prymitywnych idempotentów ortogonalnych w A . Niech $r_i = n_i - n_{i-1}$. Wówczas możemy zmienić indeksowanie elementów f_i tak, aby dla pewnych $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k = n$ zbiory $E_i = \{f_{n_{i-1}+1}, f_{n_{i-1}+2}, \dots, f_{n_i}\}$, dla $i = 0, 1, \dots, k-1$ spełniały zależność: $Af_p A = Af_q A$ wtedy i tylko wtedy, gdy f_p, f_q są w tym samym E_i . Co więcej, f_1, \dots, f_n mają tę własność, że $e_i := f_{n_{i-1}+1} + \dots + f_{n_i}$ jest, dla $i = 1, 2, \dots, k$, obustronną jedyneką algebry A_i , a elementy zbioru E_i są idempotentami diagonalnymi rzędu 1 w A_i .

Rozważmy rozkład K^n na sumę prostą postaci $K^{r_1} \oplus K^{r_2} \oplus \dots \oplus K^{r_k}$. Niech

$$J_i := \{j_1, j_2, \dots, j_{t_i}\} \quad (3.2.2)$$

będą, dla $1 \leq i \leq k$, takimi zbiorami indeksów, że $J_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow j \in J_i$. Przyjmijmy, że

$$\mathbb{V}_i := \{v \in K^n \mid \pi_j(v) = 0, j \notin J_i\},$$

gdzie $\pi_j : K^n \rightarrow K^{r_j}$ jest naturalnym rzutowaniem. Niech $a_i := \sum_{j \in J_i} r_j$. Wówczas \mathbb{V}_i jest, jako przestrzeń liniowa, izomorficzna z K^{a_i} .

Stwierdzenie 3.2.2. *Załóżmy, że algebra A spełnia założenia Problemu 3.1.1. Wówczas*

(1) *przestrzenie liniowe $\{fJ(A) \subseteq K^n \mid f \in E_i\}$ są parami izomorficzne i są izomorficzne z \mathbb{V}_i ,*

(2) *istnieje bijekcja pomiędzy następującymi zbiorami:*

- *zbiorem $L_J(A)$ lewostronnych ideałów algebry A zawartych w $J(A)$,*
- *zbiorem k -tek podprzestrzeni (W_1, \dots, W_k) , gdzie $W_i \subseteq \mathbb{V}_i$, dla $1 \leq i \leq k$.*

Dowód. Jeśli f_p, f_q są idempotentami ortogonalnymi rzędu 1 zawartymi w tym samym E_i oraz jeśli f_{ts} są, dla $n_i + 1 \leq t, s \leq n_{i+1}$, jedynekami macierzowymi w A_i , to $f_p = f_{pp}$ oraz $f_q = f_{qq}$, przy czym $f_{pq}f_{qq}J(A) = f_{pp}J(A)$ oraz $f_{qp}f_{pp}J(A) = f_{qq}J(A)$. Zatem zachodzi (1).

Niech $L \in L_J(A)$. Wówczas na mocy (3.2.1):

$$L = AL = (A' + J(A))L = A'L = A_1L \oplus A_2L \oplus \dots \oplus A_kL.$$

Skoro $J(A)^2 = 0$ oraz $A_iA_j = 0$, dla $1 \leq i, j \leq k$, to jest jasne, że: $AA_iL = A'A_iL = A_iA_iL = A_iL$. Zatem każdy ideał lewostronny L algebry A zawarty w $J(A)$ jest sumą prostą ideałów lewostronnych algebry A zawartych w $A_iJ(A)$, dla $1 \leq i \leq k$. Wystarczy zatem pokazać, że każdemu ideałowi lewostronnemu L zawartemu w $A_iJ(A)$ odpowiada jednoznacznie podprzestrzeń liniowa w \mathbb{V}_i .

Niech $L \subseteq A_iJ(A)$ będzie ideałem lewostronnym w A . Wówczas

$$L = e_iL = \bigoplus_{f \in E_i} fL,$$

gdzie E_i jest zbiorem prymitywnych idempotentów ortogonalnych rzędu 1, zgodnie z oznaczeniami przyjętymi wyżej. Co więcej jeśli f_p, f_q są idempotentami, zawartymi w tym samym E_i , to łatwo widać, że przestrzenie $f_p L, f_q L$ traktowane jako podprzestrzenie w $K^n x$ są równe $W_i x$ dla pewnej podprzestrzeni $W_i \subseteq \mathbb{V}_i$.

Odwrotnie, weźmy podprzestrzeń liniową $V \subseteq \mathbb{V}_i$. Rozważamy zbiór macierzy rozmiarów $r_i \times n$, których każdy wiersz zawarty jest w Vx . Jasne jest, że dostajemy w ten sposób ideał lewostronny algebry A zawarty w $A_i J(A)$, co postulowaną odpowiedniość. Dowód stwierdzenia jest zakończony. □

Naszym kolejnym celem jest przeformułowanie zagadnienia istnienia skończenie wielu klas sprzężoności ideałów lewostronnych w A , na pewne zagadnienie macierzowe, zgodnie z zapowiedziami poczynionymi w paragrafie 3.1. W tym celu wprowadzimy najpierw notację wygodną do opisu tych zagadnień.

Definicja 3.2.3. Niech (s_1, s_2, \dots, s_t) oraz (r_1, r_2, \dots, r_s) będą ciągami liczb całkowitych dodatnich. Rozważmy dowolny podzbiór $I \subseteq \{1, 2, \dots, t\} \times \{1, 2, \dots, s\}$ oraz funkcję $f : I \rightarrow \mathbb{N}^2$ określoną wzorem $f(i, j) = (s_i, r_j)$. Zbiór par:

$$\mathcal{S} = \{((i, j), f(i, j)) \mid (i, j) \in I\}$$

nazywać będziemy **szkieletem**.

Będziemy często pisać w skrócie, że $\mathcal{S} = (I, f)$. Element zbioru $(i, j) \in I$ nazywać będziemy **blokiem szkieletu** \mathcal{S} o rozmiarach $s_i \times r_j$. Liczby s_i, r_j nazywać będziemy odpowiednio: **wysokością** i **szerokością** bloku (i, j) . Dla ustalonego i zbiór elementów $\{(i, j) \in I\}$ nazywać będziemy i -tym **wierszem szkieletu** \mathcal{S} . Analogicznie definiujemy **kolumny szkieletu**. Na mocy powyższej definicji jest jasne, że wszystkie bloki ustalonego wiersza szkieletu \mathcal{S} mają jednakową wysokość, zaś wszystkie bloki ustalonej kolumny \mathcal{S} mają jednakową szerokość.

Definicja 3.2.4. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem. Powiemy, że $\mathcal{S}' = (I', f')$ jest **podszkieletem** \mathcal{S} o ile spełnione są następujące warunki:

- $I' \subseteq I$,
- $f' = f|_{I'}$.

Definicja 3.2.5. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem, zaś K – ciałem. Niech $f(i, j) = (s_i, r_j)$, dla $(i, j) \in I$. Rozważmy K -podprzestrzeń

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \subseteq M_{(s_1+s_2+\dots+s_t) \times (r_1+r_2+\dots+r_s)}(K)$$

złożoną z macierzy blokowych postaci:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{ts} \end{bmatrix},$$

gdzie a_{ij} jest macierzą o s_i wierszach i r_j kolumnach, oraz $a_{ij} = 0$, o ile $(i, j) \notin I$. Przestrzeń $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ nazwiemy **przestrzenią konturów szkieletu \mathcal{S}** , a jej elementy – **konturami o szkielecie \mathcal{S}** .

Jeśli $\mathcal{A} = (a_{ij})$ jest konturem o szkielecie \mathcal{S} , to dla $(i, j) \in I$ macierze $a_{ij} \in M_{s_i \times r_j}(\mathbb{K})$ nazywać będziemy **blokami konturu \mathcal{M}** . Liczby s_i, r_j nazywać będziemy odpowiednio: **wysokością** i **szerokością** bloku a_{ij} . Załóżmy, że elementy $(i, j_1), (i, j_2), \dots, (i, j_p)$ stanowią i -ty wiersz szkieletu \mathcal{S} . Przez i -ty **wiersz konturu \mathcal{A}** rozumiemy macierz blokową postaci $\begin{bmatrix} a_{ij_1} & a_{ij_2} & \dots & a_{ij_p} \end{bmatrix}$. Analogicznie definiujemy **kolumny konturu** o szkielecie \mathcal{S} .

Definicja 3.2.6. Rozważmy dowolny szkielet $S = (I, f)$. Niech $f(i, j) = (s_i, r_j)$, dla $(i, j) \in I$. Określamy grupy

$$\mathfrak{H} := \text{Gl}_{s_1}(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_{s_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{s_t}(\mathbb{K}), \quad \mathfrak{G} := \text{Gl}_{r_1}(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_{r_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{r_s}(\mathbb{K}).$$

Rozważamy lewostronne działanie grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}^\circ$ na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ (gdzie \mathfrak{G}° to grupa antyizomorficzna do \mathfrak{G}) zadane w następujący sposób: jeśli weźmiemy $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \dots, h_t) \in \mathfrak{H}$ i $\mathfrak{g} = (g_1, g_2, \dots, g_s) \in \mathfrak{G}$, oraz $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$, to wynik działania parą $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{G}^\circ$ na \mathcal{A} oznaczamy przez $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$, przy czym:

$$\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} := \begin{bmatrix} h_1 a_{11} g_1 & h_1 a_{12} g_2 & \dots & h_1 a_{1s} g_s \\ h_2 a_{21} g_1 & h_2 a_{22} g_2 & \dots & h_2 a_{2s} g_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_t a_{t1} g_1 & h_t a_{t2} g_2 & \dots & h_t a_{ts} g_s \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

Orbity $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ względem działania (3.2.3) nazywać będziemy $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -**orbitami** na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.

Definicja 3.2.7. Niech A będzie skończenie wymiarową \mathbb{K} -algebrą spełniającą założenia Problemu 3.1.1. Niech $a_i = \sum_{j \in J_i} r_j$, gdzie r_j są takie jak w (1.1.4), zaś J_i są zbiorami zdefiniowanymi w (3.2.2). Rozważmy zbiór $I_A = \{(i, j) : J_{ij} \neq \emptyset\}$ oraz funkcję $f_A : I_A \rightarrow \mathbb{N}^2$ taką, że $f(i, j) := (a_i, r_j)$. Szkielet (I_A, f_A) , oznaczany przez \mathcal{S}_A , nazywać będziemy **lewostronnym szkieletem algebry A** . Przestrzeń konturów o szkielecie \mathcal{S}_A oznaczamy symbolem \mathcal{M}_A i nazywamy **przestrzenią lewostronnych konturów algebry A** , a jej elementy **lewostronnymi konturami algebry A** .

Ze względu na to, że w pracy tej zajmujemy się wyłącznie klasami sprzężoności ideałów lewostronnych będziemy, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, pomijając określenie określenie „lewostronny szkielet”, czy „lewostronny kontur” pisząc krócej – „kontur” lub „szkielet”. Pojęcie szkieletu algebry jest szczególnym przypadkiem pojęcia szkieletu określonego w Definicji 3.2.3 przy czym jeśli $\mathcal{S} = \mathcal{S}_A$, dla pewnej algebry A , to wysokość dowolnego bloku szkieletu \mathcal{S} znajdującego się w i -tym wierszu, równa jest sumie szerokości bloków \mathcal{S} znajdujących się w i -tym wierszu \mathcal{S} . Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnego szkieletu spełniającego ten warunek istnieje algebra A , spełniająca założenia Problemu 3.1.1 taka, że $\mathcal{S} = \mathcal{S}_A$.

Przyjmijmy też pewną wygodną notację dla oznaczeń konturów. Kontury o szkielecie $\mathcal{S} = (I, f)$ przedstawiać będziemy w formie graficznej prezentując, zamiast całych macierzy rozmiarów $(s_1 + s_2 + \dots + s_t) \times (r_1 + r_2 + \dots + r_s)$, jedynie te bloki a_{ij} , gdzie $(i, j) \in I$. Jeśli, dla przykładu $I = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2)\}$, zaś $f(i, j) = (2, 2)$, dla $(i, j) \in I$, to kontur o szkielecie \mathcal{S} postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

reprezentowany będzie jako:

		1 0	1 0	0 0
		0 1	2 0	1 0
1 0	1 0			
3 0	0 1			

W podobny sposób oznaczane będą same szkielety; przy czym pola odpowiadające blokom szkieletu pozostawiać będziemy puste, lub zamiast konkretnych macierzy, wpisywać w nie będziemy jedynie oznaczenia samych bloków.

Zauważmy, że jeśli algebra A spełnia założenia Problemu 3.1.1, to zbiór konturów algebry A jest dokładnie tym samym, co zbiór wszystkich możliwych macierzy postaci (3.1.1), spełniających (i), (ii) dla pewnej k -tce podprzestrzeni liniowych (W_1, W_2, \dots, W_k) , gdzie $W_i \subseteq \mathbb{V}_i$, gdzie $1 \leq i \leq k$. Wprowadzone wyżej definicje są zatem sformalizowaniem intuicji przedstawionej w poprzednim paragrafie. Sformulujemy teraz problem macierzowy, którego analizie poświęcona będzie pozostała część rozprawy.

Stwierdzenie 3.2.8. *Załóżmy, że algebra A spełnia założenia Problemu 3.1.1. Wówczas następujące dwa zbiory są w bijekcji:*

- zbiór $C(J(A))$ klas sprzężoności idealów lewostronnych nilpotentnych algebry A ,
- zbiór $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na zbiorze konturów \mathcal{M}_A algebry A .

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.2.2 wynika, że zbiór $L_J(A)$ idealów lewostronnych nilpotentnych algebry A jest w bijekcji ze zbiorem k -tek podprzestrzeni liniowych (W_1, W_2, \dots, W_k) , gdzie $W_i \subseteq \mathbb{V}_i$. Rozważmy odwzorowanie: $f : \mathcal{M}_A \rightarrow L_J(A)$ zadane w następujący sposób. Dla $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_A$ i -ty wiersz konturu \mathcal{A} jest postaci $\mathcal{A}^{(i)} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik}]$, gdzie $a_{ij} \in M_{a_i \times r_j}(K)$. Niech W_i będzie, dla $1 \leq i \leq k$, podprzestrzenią \mathbb{V}_i rozpiętą przez wektory znajdujące się w kolejnych wierszach macierzy $\mathcal{A}^{(i)}$. Niech L będzie elementem $L_J(A)$ odpowiadającym k -tce (W_1, W_2, \dots, W_k) .

Wówczas kładziemy $f(\mathcal{A}) := L$. Odwzorowanie f jest surjekcją, ponieważ każdej k -tce (W_1, W_2, \dots, W_k) odpowiada pewien kontur $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_A$ zaś, zgodnie ze Stwierdzeniem 3.2.2, każdemu elementowi $L_J(A)$ odpowiada pewna k -tka (W_1, W_2, \dots, W_k) . Łatwo także widzieć, że jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_A$, to $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{A}, \mathcal{B} są w tej samej orbicie lewostronnego działania \mathfrak{H} na \mathcal{M}_A (zadanego wzorem analogicznym do (3.1.2)). Orbitę tę oznaczmy jako $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}$. Zatem jeśli rozważymy odwzorowanie $\bar{f} : \{\mathfrak{H}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{M}_A\} \rightarrow L_J(A)$ określone na zbiorze orbit działania \mathfrak{H} na \mathcal{M}_A wzorem $\bar{f}(\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}) = f(\mathcal{A})$, to \bar{f} jest dobrze określoną bijekcją.

Założmy dalej, że ideały lewostronne nilpotentne L_1 i L_2 są w tej samej klasie sprzężoności w A . W szczególności istnieje $u \in U(A)$, że $L_1 u = L_2$. Wiadomo, że $U(A) = U(A/J(A)) + J(A)$. Zatem, zgodnie z (3.2.1), możemy przyjąć, że:

$$U(A) = \begin{bmatrix} \text{Gl}_{r_1}(\mathbb{K}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{Gl}_{r_2}(\mathbb{K}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \text{Gl}_{r_3}(\mathbb{K}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \text{Gl}_{r_k}(\mathbb{K}) \end{bmatrix} \oplus J(A).$$

Niech $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ będą konturami takimi, że $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}_i} = \bar{f}^{-1}(L_i)$, dla $i = 1, 2$. Wówczas

$$[L_1] = [L_2] \text{ w } C(A) \Leftrightarrow \exists \mathfrak{g} \in \mathfrak{H} \text{ taki, że } \mathfrak{H}_{\mathcal{A}_1 \mathfrak{g}} = \mathfrak{H}_{\mathcal{A}_2}.$$

Niech $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}} \mathfrak{G}$ oznacza zbiór konturów postaci: $\{\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} \mid \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}\}$, dla ustalonego $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_A$. Jest to zatem $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbita konturu \mathcal{A} względem (3.2.3). Określamy odwzorowanie $\bar{\bar{f}} : \{\mathfrak{H}_{\mathcal{A}} \mathfrak{G} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{M}_A\} \rightarrow C(J(A))$ wzorem: $\bar{\bar{f}}(\mathfrak{H}_{\mathcal{A}} \mathfrak{G}) = \bar{f}(\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g})$. Z tego, co powiedzieliśmy wyżej wynika, że $\bar{\bar{f}}$ jest dobrze określoną bijekcją. □

Z Twierdzenia 2.3.11 wynika zatem następujący wniosek.

Wniosek 3.2.9. *Założmy, że algebra A spełnia założenia Problemu 3.1.1. Wówczas półgrupa $C(A)$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na przestrzeni konturów \mathcal{M}_A algebry A jest skończona.*

Dalsza część naszych rozważań skoncentrowana będzie zatem na badaniu zależności pomiędzy skończonością liczby $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit przestrzeni konturów algebry skończenie wymiarowej A , a strukturą szkieletu algebry A . W następnym rozdziale wprowadzimy narzędzia niezbędne do opisu tej struktury w języku własności pewnych grafów.

3.3 Graf rozdzielony szkieletu

Definicja 3.3.1. *Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem, jak w Definicji 3.2.3. Rozważmy graf niezorientowany $\Gamma_{\mathcal{S}} = (V_{\mathcal{S}}, E_{\mathcal{S}})$, gdzie $V_{\mathcal{S}} = (\{1, 2, \dots, t\} \times \{0\}) \cup (\{1, 2, \dots, s\} \times \{1\})$, zaś $E_{\mathcal{S}} = \{(i, 0), (j, 1)\} \mid (i, j) \in I$. Graf ten nazywać będziemy **grafem rozdzielonym szkieletu \mathcal{S}** . Mówimy, że $e \in E_{\mathcal{S}}$ ma wagę $f(i, j)$ jeśli $e = \{(i, 0), (j, 1)\}$.*

Elementy $v \in V_S$ należące do zbioru $\{1, 2, \dots, t\} \times \{0\}$ nazywać będziemy **wierzchołkami wierszowymi**, zaś elementy należące do zbioru $\{1, 2, \dots, s\} \times \{1\}$ – **wierzchołkami kolumnowymi** grafu Γ_S .

Widzimy zatem, że jeśli A jest algebrą spełniającą założenia Problemu 3.1.1, to kontur rozdzielony szkieletu algebry A jest tym samym co (niezorientowany) graf rozdzielony $\Gamma^s(A) = (V^s, E^s)$ algebry A (patrz Definicja 1.1.18). Wprowadzimy teraz szereg pojęć pomocniczych związanych ze strukturą szkieletów, które pozwolą nam na wysłowienie twierdzeń dotyczących skończoności zbioru $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na zbiorze konturów \mathcal{M}_A .

Definicja 3.3.2. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem.

- Mówimy, że \mathcal{S} jest szkieletem **spójnym**, jeśli graf rozdzielony Γ_S jest spójny.
- **Cykle** w szkielecie \mathcal{S} nazywamy ciąg $(i_1, j_1), \dots, (i_{2p}, j_{2p}) \in I$ taki, że $i_1 = i_2, j_2 = j_3, i_3 = i_4, \dots, i_{2p-1} = i_{2p}, i_{2p} = j_1$ oraz $(i, j) \neq (i_{l+1}, j_{l+1})$ dla wszystkich l (indeksy modulo $2p$).
- Blok $(i, j) \in I$ nazywamy **blokiem końcowym** jeśli jest on jedynym blokiem w zawierającym go wierszu lub w zawierającej go kolumnie konturu \mathcal{S} .
- Blok $(i, j) \in I$ nazywamy **grubym**, jeśli blok ten jest rozmiarów $p \times q$, przy czym $q \geq 2$. Szkielet, którego wszystkie bloki są grube nazywamy **grubym szkieletem**.
- Blok, który nie jest gruby nazwiemy blokiem **płaskim**. Szkielet, którego wszystkie bloki są płaskie nazywamy **płaskim szkieletem**.
- Jeśli $\Gamma_S = (V_S, E_S)$ jest grafem rozdzielonym szkieletu $\mathcal{S} = (I, f)$ to powiemy, że krawędź $\{(i, 0), (j, 1)\} \in E_S$ odpowiadająca blokowi $(i, j) \in I$ jest **grubą krawędzią**, jeśli (i, j) jest grubym blokiem.

Odnotujmy oczywistą obserwację.

Obserwacja 3.3.3. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem spójnym, zaś Γ_S niech będzie grafem rozdzielonym szkieletu \mathcal{S} . Wówczas:

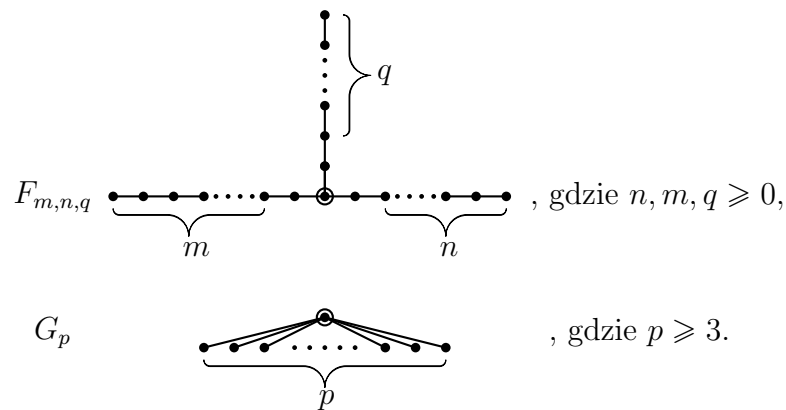
- \mathcal{S} jest acykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy Γ_S jest acykliczny,
- jeśli Γ_S jest acykliczny, to istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem spójnych podgrafów w grafie Γ_S , a zbiorem spójnych podszykieletów szkieletu \mathcal{S} .

Założmy, że szkielet \mathcal{S} złożony jest z samych grubych bloków. Wówczas graf rozdzielony Γ_S tego szkieletu nazywać będziemy **grafem grubym**.

Definicja 3.3.4. Drogą w grafie $\Gamma = (V, E)$ nazywamy zbiór $W = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parami różnych krawędzi Γ takich, że e_i jest incydentna z e_j , wtedy i tylko wtedy, gdy $|i - j| = 1$.

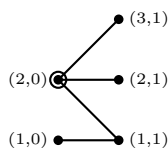
Definicja 3.3.5. Niech \mathcal{S} będzie szkieletem, zaś $\Gamma_{\mathcal{S}} = (V_{\mathcal{S}}, E_{\mathcal{S}})$ – grafem rozdzielonym szkieletem \mathcal{S} . Załóżmy, że $\Gamma_{\mathcal{S}}$ jest grafem spójnym i acyklicznym. Powiemy, że wierzchołek $v \in V_{\mathcal{S}}$ jest **wierzchołkiem węzłowym**, jeśli stopień wierzchołka v (czyli liczba krawędzi incydentnych z v) wynosi co najmniej 3. Drogę (jednoznacznie wyznaczoną) pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami węzłowymi grafu $\Gamma_{\mathcal{S}}$ nazywamy **drogą węzłową**.

Zdefiniujemy teraz dwie rodziny grafów: $F_{n,m,q}$, gdzie $n, m, q \geq 0$, oraz G_p , dla $p \geq 3$, które posłużą do opisu grafów nie będących sumą rozłączną grafów Dynkina.

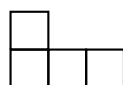


Będziemy stosować następującą umowę w notacji. Załóżmy, że $\Gamma := \Gamma_{\mathcal{S}} = (V_{\mathcal{S}}, E_{\mathcal{S}})$ jest grafem rozdzielonym szkieletem \mathcal{S} , przy czym Γ jest jednym z grafów $F_{n,m,q}$ lub G_k oraz Γ zawiera dokładnie jeden wierzchołek węzłowy. Jeśli wierzchołek węzłowy grafu Γ należy do zbioru wierzchołków wierszowych grafu Γ , to będziemy pisać, że graf szkieletem \mathcal{S} ma postać $\vec{\Gamma}$. Jeśli natomiast wierzchołek węzłowy grafu Γ należy do zbioru wierzchołków kolumnowych grafu Γ , to będziemy pisać, że graf szkieletem \mathcal{S} ma postać $\downarrow\Gamma$.

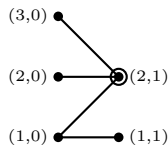
Przykład. Jeśli graf rozdzielony szkieletem algebry A ma postać \vec{D}_5 , a więc jest na przykład:



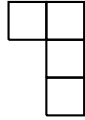
to zgodnie z definicją 3.3.1 szkieletem \mathcal{S}_A ma dwa wiersze i trzy kolumny, przy czym $I_A = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$, a więc szkieletem ten ma postać:



Jeśli jednak graf rozdzielony algebry A ma postać $\downarrow D_5$, a więc jest na przykład postaci:



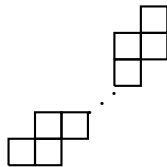
wówczas odpowiadający mu szkielet ma trzy wiersze i dwie kolumny, przy czym $I_A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$, a więc szkielet ten ma postać:



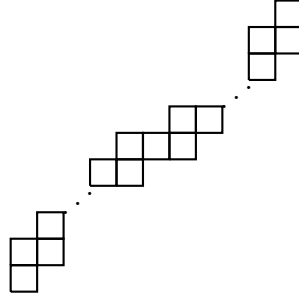
Widzimy zatem, że będziemy chcieli rozróżniać grafy będące grafami rozdzielonymi szkieletów mających co najmniej trzy bloki w jednym wierszu (i nie mających trójki bloków w żadnej kolumnie) od grafów konturów mających co najmniej trzy bloki tylko w jednej kolumnie (a nie mających trójki bloków w żadnym wierszu). Rozróżnienie to ma istotne znaczenie dla badania skończoności $C(A)$. Dla przykładu, jeśli A jest algebra bazową spełniającą założenia Problemu 3.1.1, to z Twierdzenia 2.3.7 wynika, że jeśli szkielet A posiada więcej niż trzy bloki w jednym wierszu, to $C(A)$ jest nieskończona. Natomiast fakt posiadania dowolnej liczby bloków w tej samej kolumnie szkieletu A nie implikuje w klasie algebr bazowych A tego, że $C(A)$ jest nieskończona.

Definicja 3.3.6. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem.

- Powiemy, że szkielet \mathcal{S} jest **n -tką wierszową** jeśli $I = \{(i_1, j), (i_2, j), \dots, (i_n, j)\}$. Innymi słowy, graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S} jest postaci G_n . Analogicznie definiujemy **n -tkę kolumnową**.
- Powiemy, że \mathcal{S} jest **schodkowy** jeśli $I = \{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3), \dots\}$ lub $I = \{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_2), \dots\}$ przy czym $i_p \neq i_q$ oraz $j_p \neq j_q$, dla wszystkich $p \neq q$. Innymi słowy, graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S} jest postaci A_k , dla pewnego k . Przykładem takiego szkieletu jest:

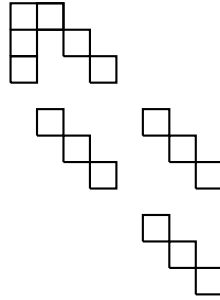


- Powiemy, że szkielet \mathcal{S} jest **wierszowo dwuschodkowy** jeśli graf rozdzielony tego szkieletu jest postaci: $\overrightarrow{F_{n,m,0}}$, dla pewnych $n, m \geq 1$, tzn. gdy ma on postać na przykład:



Analogicznie określamy szkielet **kolumnowo dwusiodkowy**. Jest to szkielet o grafie rozdzielonym $\downarrow F_{n,m,0}$, dla pewnych $n, m \geq 1$.

- Powiemy, że szkielet \mathcal{S} jest **wierszowo trójsiodkowy** jeśli jest to szkielet o grafie $\overrightarrow{F_{n,m,q}}$, dla pewnych $n, m, q \geq 1$. Analogicznie określamy szkielet **kolumnowo trójsiodkowy**. Poniżej podajemy przykład szkieletu o grafie rozdzielonym $\downarrow F_{4,4,4}$:



3.4 Twierdzenia związane z Problemem 3.1.1

Definicja 3.4.1. Niech $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ będą szkieletami. Powiemy, że **szkielet \mathcal{S}_1 zawiera się w szkielecie \mathcal{S}_2** jeśli spełnione są następujące warunki:

(1) $\Gamma_{\mathcal{S}_1} = (V_1, E_1)$ jest podgrafem grafu $\Gamma_{\mathcal{S}_2} = (V_2, E_2)$, tzn. gdy istnieją iniekcje

$$\phi : V_1 \rightarrow V_2, \psi : E_1 \rightarrow E_2 \text{ takie, że } \psi(\{(i, 0), (j, 1)\}) = \{\phi(i, 0), \phi(j, 1)\}.$$

(2) jeśli dla $e_1 \in E_1$ oraz $e_2 \in E_2$ mamy $\psi(e_1) = e_2$, oraz jeśli $(s_1, t_1), (s_2, t_2)$ są wagami odpowiednio krawędzi e_1 i e_2 , to $s_1 \leq s_2, t_1 \leq t_2$.

W takiej sytuacji będziemy też mówić, że graf $\Gamma_{\mathcal{S}_1}$ zawiera się w grafie $\Gamma_{\mathcal{S}_2}$.

Jesteśmy gotowi do sformułowania głównych rezultatów związanych z Problemem 3.1.1.

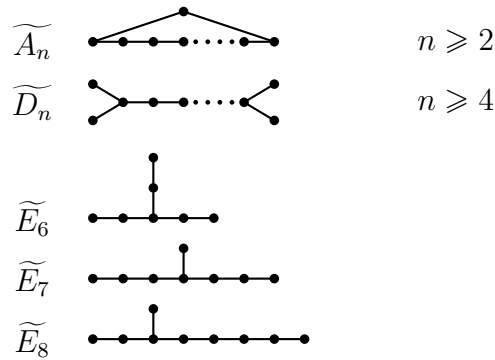
Twierdzenie 3.4.2. Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K , spełniającą założenia Problemu 3.1.1 i mającą postać (W1). Wówczas na przestrzeni konturów \mathcal{M}_A algebry A istnieje skończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit wtedy i tylko wtedy szkielet \mathcal{S}_A jest acykliczny i spełnia następujące warunki:

- (i) \mathcal{S}_A nie zawiera wierszowej czwórki,

- (ii) \mathcal{S}_A nie zawiera grubej kolumnowej czwórki,
- (iii) \mathcal{S}_A nie zawiera grubego szkieletu wierszowo trójschodkowego,
- (iv) graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S}_A nie zawiera grubej drogi węzłowej (to znaczy: drogi węzłowej o grubych krawędziach).

Twierdzenie 3.4.3. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K , spełniającą założenia Problemu 3.1.1 i mającą postać (W2). Wówczas na przestrzeni konturów \mathcal{M}_A algebry A istnieje skończenie wiele $\mathfrak{S} - \mathfrak{G}$ -orbit wtedy i tylko wtedy gdy graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A jest acykliczny oraz jest sumą rozłączną grafów Dynkina. Innymi słowy $C(A)$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy A jest skończonego typu reprezentacyjnego.*

Warto wyjaśnić skąd biorą się warunki (i)-(iv) z tezy Twierdzenia 3.4.2. Zgodnie z Lemmą VII.2.1 w [4], do tego by graf Γ był sumą rozłączną grafów Dynkina, wystarcza aby Γ nie zawierał żadnego z wymienionych poniżej tak zwanych **grafów Euklidesowych** (nazywanych też **rozszerzonymi grafami Dynkina**):



Przyjmuje się przy tym notację, według której indeks w grafie Euklidesowym odnosi się do liczby wierzchołków grafu minus jeden (i tak, na przykład, graf \widetilde{A}_n na $n + 1$ wierzchołków), podczas gdy indeks w grafie Dynkina odpowiada dokładnie liczbie jego wierzchołków.

Można sprawdzić, że acykliczność grafu Γ równoważna jest temu, że nie zawiera on grafu \widetilde{A}_n , a brak grubej drogi węzłowej równoważny jest nie zawieraniu grafu \widetilde{D}_n o grubej drodze węzłowej. Okazuje się jednak, że jeśli algebra A spełnia założenia Problemu 3.1.1, a w rozkładzie (1.1.4) ilorazu $A/J(A)$ występują bloki rozmiarów r_i mniejszych niż 6 to możliwe jest, żeby graf rozdzielony algebry A zawierał pewne grafy Euklidesowe tak, że $C(A)$ będzie skończona. Przykładem jest algebra bazowa podana w Przykładzie 2.3.9, której graf rozdzielony zawiera \widetilde{D}_6 . W paragrafie 3.6 przyjrzymy się tej kwestii dokładniej. Pokażemy, na przykład, że jeśli $r_i \geq 2$, to graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A nie może zawierać grafów $\widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6$, a jeśli $r_i \geq 3$, to $\Gamma^s(A)$ nie może zawierać także grafów $\downarrow \widetilde{E}_6$ oraz \widetilde{E}_7 . Intuicja jest następująca: im większe rozmiary bloków, tym mniej grafów Euklidesowych może zawierać graf rozdzielony algebry.

3.5 Modyfikacje szkieletów

W paragrafie tym dowodzimy kilka faktów technicznych, dotyczących zależności pomiędzy liczbą orbit na zbiorze konturów przy pewnych jego modyfikacjach. Wykażemy także, że jeśli szkielet \mathcal{S} zawiera cykl, to na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ istnieje nieskończenie wiele \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit. Na zakończenie dodamy także pewne uwagi związane z konturami, których wszystkie bloki są macierzami 0–1-kowymi. Wprowadzamy także istotne dla dalszej pracy pojęcie: postaci zredukowanej szkieletu oraz formułujemy Lemat 3.5.11, mający kluczowe znaczenie dla dalszych rozważań.

Zacniemy od dwóch oczywistych uwag, które będziemy wykorzystywać wielokrotnie w dalszej części pracy.

Obserwacja 3.5.1. *Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem, zaś $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^0$ niech będzie podzbiorem zbioru $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ złożonym z konturów $\mathcal{A} = (a_{ij})$ takich, że $a_{ij} \neq 0$, dla $(i, j) \in I$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- *istnieje skończenie wiele \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$,*
- *istnieje skończenie wiele \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^0$.*

Obserwacja 3.5.2. *Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem takim, że istnieją podszkielety $\mathcal{S}_i = (I_i, f_i)$, dla $1 \leq i \leq q$, szkieletu \mathcal{S} takie, że:*

- *$I_i \cap I_j = \emptyset$, dla dowolnych $1 \leq i, j \leq q$,*
- *$I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_q = I$,*
- *jeśli $(a, b) \in I_i$ oraz $(a', b) \in I_j$, dla pewnych a, a', b , to $i = j$,*
- *jeśli $(c, d) \in I_i$ oraz $(c, d') \in I_j$, dla pewnych c, d, d' , to $i = j$.*

Innymi słowy szkielet \mathcal{S} rozłożyć można na sumę rozłączną szkieletów \mathcal{S}_i takich, że graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S} jest sumą rozłączną grafów rozdzielonych szkieletów \mathcal{S}_i . Załóżmy, że na przestrzeń konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ szkieletu \mathcal{S} działa, zgodnie z (3.2.3), grupa $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$, zaś na przestrzenie konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_i}$ szkieletów \mathcal{S}_i działają, zgodnie z (3.2.3) grupy $\mathfrak{H}_i \times \mathfrak{G}_i$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- *istnieje skończenie wiele \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$,*
- *dla każdego $1 \leq i \leq q$ istnieje skończenie wiele \mathfrak{H}_i – \mathfrak{G}_i -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_i}$.*

Następny fakt mówi o zależności pomiędzy liczbą orbit na konturach pochodzących od szkieletów zawartych w danym szkielecie \mathcal{S} , od liczby orbit na konturach pochodzących od samego \mathcal{S} .

Lemat 3.5.3. *Załóżmy, że szkielet $\mathcal{S}_1 = (I_1, f_1)$ zawiera się w szkielecie $\mathcal{S}_2 = (I_2, f_2)$. Rozważmy zbiory konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$ oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_2}$ i działające na nich, zgodnie z (3.2.3), odpowiednio, grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ oraz $\mathfrak{H}' \times \mathfrak{G}'$. Wówczas jeśli istnieje skończenie wiele \mathfrak{H}' – \mathfrak{G}' -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_2}$, to istnieje skończenie wiele \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$.*

Dowód lematu poprzedzimy następującą obserwacją.

Obserwacja 3.5.4. Niech $s, t \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ będą macierzami o następującej postaci blokowej:

$$s = \begin{bmatrix} s' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} t' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $s', t' \in M_{n' \times m'}$, dla pewnych $1 \leq n' \leq n$, $1 \leq m' \leq m$. Wówczas jeśli

$$s = gth, \tag{3.5.1}$$

dla pewnych $g \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$, $h \in \text{Gl}_m(\mathbb{K})$, to istnieją takie $g' \in \text{Gl}_{n'}(\mathbb{K})$ oraz $h' \in \text{Gl}_{m'}(\mathbb{K})$, że

$$s' = g't'h'.$$

Dowód. Załóżmy, że macierze g, h mają następujące postaci blokowe:

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix},$$

gdzie $g_1 \in M_{n' \times n'}(\mathbb{K})$, $h_1 \in M_{m' \times m'}(\mathbb{K})$. Wówczas zgodnie z (3.5.1) zachodzi równość:

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 s' h_1 & g_1 s' h_2 \\ g_3 s' h_1 & g_3 s' h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem zachodzi równość $g_1 s' h_1 = t'$, co oznacza, że:

$$r(s') = r(s) = r(t) = r(t') = r(g_1 s' h_1) = r(g_1 s') = r(s' h_1), \tag{3.5.2}$$

gdzie $r(x)$ oznacza rząd macierzy x . Rozważmy dwa przypadki.

Załóżmy, że $m' \geq n'$. Niech $G_1, S' \in M_{m' \times m'}(\mathbb{K})$ będą macierzami mającymi następującą postać blokową:

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S' = \begin{bmatrix} s' & \\ & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas z równości (3.5.2) wynika, że:

$$r(S') = r(G_1 S') = r(S' h_1). \tag{3.5.3}$$

Macierze $G_1 S'$ oraz S' możemy traktować jako macierze pewnych przekształceń $K^{m'} \rightarrow K^{m'}$ w bazie standardowej. Jest jasne, że $\ker(G_1 S') \supseteq \ker(S')$. Wobec równości (3.5.3) dostajemy zatem $\ker(G_1 S') = \ker(S')$. Ze Stwierdzenia 1.2.18 oraz z następującego po nim komentarza wynika, że $G_1 S'$ oraz S' są w tej samej \mathcal{L} -klasie monoidu masyfikatywnego $M_{m' \times m'}(\mathbb{K})$, a zatem mają identyczne postaci (schodkowe) wierszowe zredukowane. Skoro zarówno $G_1 S'$, jak i S' mają jedynie pierwsze n' wierszy niezerowych, to istnieją macierze $e, f \in \text{Gl}_{n'}(\mathbb{K})$, że:

$$\begin{bmatrix} e g_1 s' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & id_{m'-n'} \end{bmatrix} G_1 S' = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & id_{m'-n'} \end{bmatrix} S' = \begin{bmatrix} f s' & \\ & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $(e^{-1}f)s' = g_1s'$. Analogicznie, korzystając z równości (3.5.3), pokazujemy że $\text{Im}(S') = \text{Im}(S'h_1)$, a zatem elementy S' oraz $S'h_1$ są w tej samej \mathcal{R} -klasie monoidu $M_{m' \times m'}(\mathbb{K})$ i mają identyczne postaci (schodkowe) kolumnowe zredukowane. Dostajemy w ten sposób równość $s'u = s'h_1$, dla pewnego $u \in \text{Gl}_{m'}(\mathbb{K})$. Stąd:

$$t' = g_1s'h_1 = (e^{-1}f)s'h_1 = (e^{-1}f)s'u,$$

co daje tezę pierwszym przypadku.

Jeśli $m' \leq n'$, wówczas zauważmy, że $(g_1s'h_1)^T = h_1^T s'^T g_1^T$, gdzie x^T jest macierzą transponowaną do macierzy x . Wówczas rozmiar macierzy h_1^T jest nie większy od rozmiaru macierzy g_1^T , zatem korzystając z pierwszego przypadku widzimy, że $t'^T = (g_1s'h_1)^T = vs'^T w$, dla pewnych $v \in \text{Gl}_{m'}(\mathbb{K})$, $w \in \text{Gl}_{n'}(\mathbb{K})$. Zatem $t' = w^T s' u^T$. Kończy to dowód w drugim przypadku. \square

DOWÓD LEMATU 3.5.3. Załóżmy, że na zbiorze $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$ jest nieskończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit. Niech

$$\mathfrak{H} = \text{Gl}_{s_1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{s_t}(\mathbb{K}), \quad \mathfrak{G} = \text{Gl}_{r_1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{r_s}(\mathbb{K}).$$

Zauważmy, że liczba $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_2}$ nie zależy od kolejności wierszy i kolumn szkieletu \mathcal{S}_2 , tak więc możemy założyć, że

$$\mathfrak{H}' = \text{Gl}_{s_1+s'_1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{s_t+s'_t}(\mathbb{K}) \times \mathfrak{H}'', \quad \mathfrak{G}' = \text{Gl}_{r_1+r'_1}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Gl}_{r_s+r'_s}(\mathbb{K}) \times \mathfrak{G}'',$$

gdzie $r'_i, s'_j \geq 0$. Niech kontury $\{\mathcal{A}_l\}_{l=1}^\infty$ będą reprezentantami parami różnych $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$, przy czym $\mathcal{A}_l = (a_{ij}^l)$ oraz a_{ij}^l jest macierzą rozmiaru $s_i \times r_j$. Rozważmy następujący zbiór $\{\mathcal{B}_l\}_{l=1}^\infty$ konturów w $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_2}$, gdzie $\mathcal{B}_l = (b_{ij}^l)$ zadany jest przez:

$$b_{ij}^l = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_{ij}^l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{(s_i+s'_i) \times (r_j+r'_j)} & , \text{ o ile } i \leq t, j \leq s \text{ oraz } (i, j) \in I_1 \\ 0 & , \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Z założenia o skończoności zbioru $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_2}$ wynika, że dla pewnych l_1, l_2 istnieją takie $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}'$ oraz $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{G}'$, że $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{B}_{l_1} \cdot \mathfrak{g}' = \mathcal{B}_{l_2}$. Niech $\mathfrak{h}' = (h'_1, h'_2, \dots, h'_t, \dots)$, $\mathfrak{g}' = (g'_1, g'_2, \dots, g'_s, \dots)$, gdzie $h'_i \in \text{Gl}_{s_i+s'_i}(\mathbb{K})$ oraz $g'_j \in \text{Gl}_{r_j+r'_j}(\mathbb{K})$. Zgodnie z Obserwacją 3.5.4 wiemy, że dla $1 \leq i \leq t$ oraz $1 \leq j \leq s$ istnieją takie macierze $h_i \in \text{Gl}_{s_i}(\mathbb{K})$ oraz $g_j \in \text{Gl}_{r_j}(\mathbb{K})$, że jeśli $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \dots, h_t)$ oraz $\mathfrak{g} = (g_1, g_2, \dots, g_s)$, to $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}_{l_1} \cdot \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{l_2}$. To jednak stoi w sprzeczności z założeniem, że $\{\mathcal{A}_l\}_{l=1}^\infty$ są reprezentantami parami różnych $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$. Zatem uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem, że na zbiorze $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$ jest nieskończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit. \square

Kolejny fakt ma zasadnicze znaczenie dla dalszych rozważań.

Stwierdzenie 3.5.5. Niech \mathcal{S} będzie szkieletem, zaś $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ – przestrzenią konturów szkieletu \mathcal{S} , na którą działają grupy $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}$, zgodnie z (3.2.3). Wówczas jeśli \mathcal{S} zawiera cykl, to na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ jest nieskończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit.

Dowód. Zauważmy, że jeśli szkielet \mathcal{S} ma cykl, to w szczególności \mathcal{S} zawiera pewien cykl \mathcal{S}' o wszystkich blokach rozmiaru 1×1 . Zbiór konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}'}$ szkieletu \mathcal{S}' złożony jest zatem z pewnych macierzy rozmiaru $r \times s$, dla $r, s > 0$. Na zbiór ten działają, zgodnie z (3.2.3) grupy macierzy diagonalnych $\mathfrak{H}' = D_r(\mathbb{K})$ oraz $\mathfrak{G}' = D_s(\mathbb{K})$. Z Lematu 3.5.3 wynika, że do wykazania tezy wystarczy stwierdzić, że zbiór $D_r(\mathbb{K}) - D_s(\mathbb{K})$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}'}$ jest nieskończony.

Założmy, że $\mathcal{S}' = (I', f')$. Dla każdego $(i, j) \in I'$ istnieje kontur $\mathcal{A}_{ij} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}'} = M_{r \times s}(\mathbb{K})$ taki, w którym jedyny niezerowy element, równy 1, znajduje się w i -tym wierszu i j -tej kolumnie. Weźmy dowolny $(p, q) \in I'$. Dla każdego niezerowego $\gamma \in \mathbb{K}$ rozważmy element:

$$\mathcal{A}_\gamma = \gamma \mathcal{A}_{pq} + \sum_{(p,q) \neq (i,j) \in I'} \mathcal{A}_{ij}.$$

Założmy, że istnieją takie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}'$ oraz $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}'$, że $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}_{\gamma_1} \cdot \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{\gamma_2}$, dla pewnych niezerowych $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$. Niech e_1, e_2, \dots, e_r będą diagonalnymi idempotentami rzędu 1 w $M_r(\mathbb{K})$, zaś f_1, \dots, f_s niech będą diagonalnymi idempotentami rzędu 1 w $M_s(\mathbb{K})$. Wówczas dostajemy:

$$\mathcal{A}_{\gamma_2} = \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} \mathfrak{h} e_i \mathcal{A}_{\gamma_1} f_j \mathfrak{g}.$$

Skoro $\mathfrak{h} e_i = e_i \mathfrak{h}$ oraz $\mathfrak{g} f_j = f_j \mathfrak{g}$, dla każdego i, j , dostajemy:

$$\mathcal{A}_{\gamma_2} = \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} (e_i \mathfrak{h} e_i) \mathcal{A}_{\gamma_1} (f_j \mathfrak{g} f_j).$$

Przestrzeń $M_{r \times s}(\mathbb{K})$ jest sumą prostą przestrzeni $e_i M_{r \times s}(\mathbb{K}) f_j$, zatem jeśli $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \dots, h_r) \in D_r(\mathbb{K})$, $\mathfrak{g} = (g_1, g_2, \dots, g_s) \in D_s(\mathbb{K})$, to dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 &= h_i g_j, & \text{dla } (i, j) \neq (p, q), (i, j) \in I', \\ \gamma_2 &= h_p \gamma_1 g_q. \end{cases} \quad (3.5.4)$$

Skoro \mathcal{S}' jest cyklem, to wynika stąd łatwo, że $\gamma_1 = \gamma_2$. Istotnie, założmy, że zbiór I' składa się z par $(i_1, j_1), \dots, (i_{2m}, j_{2m}) \in I$. Skoro \mathcal{S}' jest cyklem, to na mocy drugiego punktu Definicji 3.3.2 zachodzą następujące równości:

$$i_1 = i_2, \quad j_2 = j_3, \quad i_3 = i_4, \quad \dots, \quad i_{2m-1} = i_{2m}, \quad j_{2m} = j_1, \quad (3.5.5)$$

przy czym $(i_l, j_l) \neq (i_{l+1}, j_{l+1})$ dla wszystkich l (indeksy modulo $2m$). Co więcej, możemy założyć, że $i_1 = p, j_1 = q$. Z pierwszego równania w (3.5.4) oraz z warunków $p = i_1 = i_2, j_{2m} = j_1 = q$ wynika zatem, że:

$$h_p g_{j_2} = h_{i_3} g_{j_3} = \dots = h_{2m-1} g_{2m-1} = h_{2m} g_q = 1. \quad (3.5.6)$$

Skoro $j_2 = j_3$, to $g_{j_2} = g_{j_3}$, a więc na mocy (3.5.6) dostajemy $h_p = h_{i_3}$. Podobnie, skoro $i_3 = i_4$, to $h_{i_3} = h_{i_4}$. Korzystając w analogiczny sposób z kolejnych warunków podanych w (3.5.5) oraz z kolejnych równości wymienionych w (3.5.6) pokazujemy, że $h_p = h_{i_l}$, dla dowolnego $1 \leq l \leq 2m$. Zatem $h_p g_q = 1$. Drugi warunek w (3.5.4) mówi jednak, że $h_p g_q = \gamma_2 \gamma_1^{-1}$. Zatem $\gamma_1 = \gamma_2$. Wynika stąd, że jeśli $\gamma_1 \neq \gamma_2$, to $\mathcal{A}_{\gamma_1}, \mathcal{A}_{\gamma_2}$

należą do różnych $D_r(K) - D_s(K)$ -orbit. Skoro ciało K jest nieskończone, to oznacza, że na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}'}$ jest nieskończenie wiele $D_r(K) - D_s(K)$ -orbit, a zatem dowód jest zakończony. \square

W kolejnych paragrafach dowodzić będziemy wielokrotnie, że działanie grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$, zgodnie z (3.2.3), na przestrzeni konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ pewnego szkieletu \mathcal{S} ma skończenie wiele orbit. Jednym z warunków wystarczających do tego, by liczba orbit była skończona jest zaobserwowanie, że w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur $\overline{\mathcal{A}}$, którego każdy blok jest macierzą 0 – 1-kową czyli taką, że każdy jej wyraz równy jest 0 lub 1. Nie jest jasne czy jest to warunek konieczny. Z tego powodu konieczne jest przeformułowanie rezultatów udowodnionych na początku tego paragrafu, na przypadek konturów 0 – 1-kowych. Dowody, które pomijamy, są prostymi modyfikacjami przeprowadzonych wyżej.

Obserwacja 3.5.6. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem, zaś $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^0$ niech będzie podzbiorem zbioru $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ złożonym z konturów $\mathcal{A} = (a_{ij})$ takich, że $a_{ij} \neq 0$, dla $(i, j) \in I$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy,
- w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^0$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Obserwacja 3.5.7. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem takim, że istnieją podszkielety $\mathcal{S}_i = (I_i, f_i)$, dla $1 \leq i \leq q$, szkieletu \mathcal{S} takie, że:

- $I_i \cap I_j = \emptyset$, dla dowolnych $1 \leq i, j \leq q$,
- $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_q = I$
- jeśli $(a, b) \in I_i$ oraz $(a', b) \in I_j$, dla pewnych a, a', b , to $i = j$,
- jeśli $(c, d) \in I_i$ oraz $(c, d') \in I_j$, dla pewnych c, d, d' , to $i = j$.

Załóżmy, że na przestrzeń konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ szkieletu \mathcal{S} działa, zgodnie z (3.2.3), grupa $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$, zaś na przestrzenie konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_i}$ szkieletów \mathcal{S}_i działają, zgodnie z (3.2.3) grupy $\mathfrak{H}_i \times \mathfrak{G}_i$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy,
- dla każdego $1 \leq i \leq q$, w $\mathfrak{H}_i - \mathfrak{G}_i$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_i}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Lemat 3.5.8. Załóżmy, że szkielet $\mathcal{S}_1 = (I_1, f_1)$ zawiera się w szkielecie $\mathcal{S}_2 = (I_2, f_2)$. Rozważmy zbiory konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$ oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_2}$ i działające na nich, zgodnie z (3.2.3), odpowiednio, grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ oraz $\mathfrak{H}' \times \mathfrak{G}'$. Wówczas jeśli w $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_2}$ istnieje kontur 0 – 1-kowy, to w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_1}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Przechodzimy teraz do definicji kluczowej dla dowodu Twierdzenia 3.4.2.

Definicja 3.5.9. Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem takim, że jeśli $(i, j) \in I$, to wysokość tego bloku równa jest sumie szerokości wszystkich bloków znajdujących się w i -tym wierszu \mathcal{S} . Powiemy wówczas, że szkielet \mathcal{S} posiada **postać zredukowaną**.

Rozważmy następujący podzbiór I' zbioru I :

$$I' := \{(i, j) \in I \mid f(i, j) = (a, b), \text{ gdzie } a \geq 2\}.$$

Jeśli $I' = \emptyset$ to powiemy, że postać zredukowana szkieletu \mathcal{S} jest trywialna. Jeśli $I' \neq \emptyset$, wówczas rozważamy szkielet (I', f') , przy czym jeśli $f(i, j) = (a, b)$, to $f'(i, j) := (a - 1, b)$, dla każdego $(i, j) \in I' \subseteq I$. Szkielet (I', f') oznaczamy będziemy przez \mathcal{S}^r i nazywać będziemy nietrywialną postacią zredukowaną szkieletu \mathcal{S} . Jeśli I' jest zbiorem niepustym, wówczas **przestrzeń konturów zredukowanych szkieletu \mathcal{S}** nazywamy przestrzeń konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}^r}$.

Z Definicji 3.2.7 wynika, że szkielet każdej algebry spełniającej założenia Problemu 3.1.1 posiada postać zredukowaną. Może być ona w pewnych przypadkach trywialna. Zauważmy, że jeśli szkielet \mathcal{S} ma postać zredukowaną, to wiersz każdego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ można traktować jako macierz kwadratową, zgodnie z Definicją 3.2.5. Odnotujmy wreszcie następującą uwagę, która będzie wielokrotnie wykorzystywana w dowodach wykorzystujących pojęcie postaci zredukowanej szkieletu.

Obserwacja 3.5.10. Niech \mathcal{S} będzie szkieletem mającym postać zredukowaną. Jeśli szkielet \mathcal{S}' powstaje przez usunięcie pewnych wierszy szkieletu \mathcal{S} , wówczas \mathcal{S}' również posiada postać zredukowaną.

Sformułujemy teraz fakt kluczowy dla dalszych rozważań.

Lemat 3.5.11. Załóżmy, że szkielet \mathcal{S} posiada postać zredukowaną. Jeśli jest to postać trywialna, wówczas w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu zawartego w $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Jeśli istnieje szkielet zredukowany \mathcal{S}^r szkieletu \mathcal{S} oraz jeśli \mathfrak{H}' , \mathfrak{G}' działają zgodnie z (3.2.3) na przestrzeń konturów zredukowanych $\mathcal{M}_{\mathcal{S}^r}$, wówczas następujące warunki są równoważne:

- (i) w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy,
- (ii) w $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}^r}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Dowód. Załóżmy najpierw, że postać zredukowana \mathcal{S} jest trywialna. Zatem w każdym wierszu \mathcal{S} znajduje się dokładnie jeden blok rozmiarów 1×1 . Jest więc jasne, że w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu należącego do $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Przyjmijmy dalej, że szkielet \mathcal{S} posiada nietrywialną postać zredukowaną \mathcal{S}^r . Zgodnie z Definicją 3.5.9, szkielet \mathcal{S}^r jest zawarty w szkielecie \mathcal{S} . Stąd implikacja (i) \Rightarrow (ii) wynika natychmiast z Lematu 3.5.8.

Implikację (ii) \Rightarrow (i) dowodzimy przez indukcję względem liczby r wierszy szkieletu \mathcal{S} . Niech $r = 1$. Weźmy kontur $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Skoro szkielet \mathcal{S} ma postać zredukowaną

\mathcal{S}^r , to jedyny wiersz konturu \mathcal{A} można traktować jako macierz kwadratową rozmiaru $n > 1$. Wystarczy zatem wykazać, że w $\text{Gl}_n(\mathbb{K}) - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu \mathcal{A} znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Jeśli rząd \mathcal{A} jest równy n , wówczas istnieje takie $h \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$, że $h\mathcal{A}$ (zdefiniowane zgodnie z (3.2.3) jako $h \cdot \mathcal{A} \cdot id$) jest macierzą identyczności i dowód jest zakończony. Jeśli natomiast rząd \mathcal{A} jest mniejszy od n , wówczas istnieje $h' \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$, że macierz $h'\mathcal{A}$ ma ostatni wiersz zerowy. Jeśli przez \mathcal{A}' oznaczymy macierz rozmiarów $(n - 1) \times n$ powstającą z pierwszych $n - 1$ wierszy $h'\mathcal{A}$, wówczas $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}^r}$, a zatem zgodnie z (ii) istnieją takie $h'' \in \text{Gl}_{n-1}(\mathbb{K})$ oraz $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, że $h''\mathcal{A}' \cdot \mathfrak{g}$ jest macierzą 0 – 1-kową. Zatem biorąc macierz $h''' = \begin{bmatrix} h'' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ widzimy, że $h'''h'\mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ jest macierzą 0 – 1-kową, co kończy dowód w przypadku $r = 1$.

Założmy, że teza indukcji jest prawdziwa dla każdego szkieletu o liczbie wierszy mniejszej niż r . Weźmy szkielet \mathcal{S} o wierszach $\mathcal{S}^{(1)}, \dots, \mathcal{S}^{(r)}$. Niech $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ będzie konturem o wierszach $\mathcal{A}^{(1)}, \dots, \mathcal{A}^{(r)}$, gdzie $\mathcal{A}^{(i)} \in M_{a_i \times a_i}(\mathbb{K})$ jest macierzą kwadratową, dla $1 \leq i \leq r$, zgodnie z założeniem, że \mathcal{S} posiada postać zredukowaną. Skoro postać ta jest nietrywialna, to możemy zakładać dodatkowo, że $a_i > 1$, dla pewnego $1 \leq i \leq r$. Rozważmy dwa przypadki:

- Rząd macierzy $\mathcal{A}^{(i)}$ jest mniejszy od a_i , dla każdego $1 \leq i \leq r$.

Jeśli $a_i = 1$, dla pewnego i , wówczas macierz $\mathcal{A}^{(i)} \in M_{1 \times 1}(\mathbb{K})$ jest zerowa. Natomiast kontur $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^{(i)}$ ma szkielet postaci $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^{(i)}$ o $t - 1$ wierszach. Zgodnie z Obserwacją 3.5.10 szkielet $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^{(i)}$ posiada postać zredukowaną. Teza wynika zatem łatwo z założenia indukcyjnego zastosowanego do $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^{(i)}$.

Założmy więc, że $a_i > 1$, dla każdego $1 \leq i \leq r$. Istnieje zatem takie $\mathfrak{h} = (h_1, \dots, h_r) \in \mathfrak{H}$, że $h_i\mathcal{A}^{(i)}$ jest macierzą, której ostatni wiersz jest zerowy. Niech $\mathcal{A}'^{(i)} \in M_{(a_i-1) \times a_i}$ będzie macierzą powstającą z $h_i\mathcal{A}^{(i)}$ przez usunięcie ostatniego, zerowego wiersza. Wówczas kontur \mathcal{A}' złożony z wierszy $\mathcal{A}'^{(i)}$, dla $1 \leq i \leq r$, należy do przestrzeni konturów zredukowanych $\mathcal{M}_{\mathcal{S}^r}$ szkieletu \mathcal{S} . Na mocy (ii) istnieją zatem takie $\mathfrak{h}' = (h'_1, \dots, h'_r) \in \mathfrak{H}'$ oraz $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{G}'$, że $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A}' \cdot \mathfrak{g}'$ jest konturem 0 – 1-kowym. Biorąc zatem $h''_i = \begin{bmatrix} h'_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}_{a_i}(\mathbb{K})$, dla $1 \leq i \leq r$, oraz określając $\bar{\mathfrak{h}} = (h''_1 h_1, \dots, h''_r h_r) \in \mathfrak{H}$ widzimy, że $\bar{\mathfrak{h}} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ jest konturem 0 – 1-kowym. Otrzymaliśmy zatem tezę indukcji w tym szczególnym przypadku.

- Istnieje $1 \leq i \leq r$, że macierz $\mathcal{A}^{(i)}$ jest odwracalna.

Możemy przyjąć, że $\mathcal{A}^{(1)} =: g \in \text{Gl}_{a_1}(\mathbb{K})$ jest odwracalna. Na mocy założenia indukcyjnego możemy także przyjąć, że wiersze $\mathcal{A}^{(i)}$ są, dla $i > 1$, macierzami 0 – 1-kowymi. Istotnie, kontur $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^{(1)}$ ma szkielet o $t - 1$ wierszach, który zgodnie z Obserwacją 3.5.10 posiada postać zredukowaną. Jeśli zatem wiersze $\mathcal{A}^{(i)}$ są, dla $i > 1$, macierzami 0 – 1-kowymi, to kładziemy $\mathfrak{h} = (g^{-1}, id_{a_2}, id_{a_3}, \dots, id_{a_r})$ i dostajemy, że kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}$ jest 0 – 1-kowy. Zatem także w tym przypadku wykazaliśmy tezę indukcyjną.

□

3.6 Geometryczne własności przestrzeni konturów. Dowód Twierdzenia 3.4.3.

Głównym celem tego paragrafu będzie dowód Twierdzenia 3.4.3. Przedstawione argumenty pozwolą także na dowód jednej z implikacji Twierdzenia 3.4.2. „Geometryczne własności”, które będziemy rozważać związane są z interpretacją działania (3.2.3) jako działania grupy algebraicznej na rozmaiłości (patrz [47], 21.4.1), a więc w kontekście geometrii algebraicznej. Chodzi o wykorzystanie następującej obserwacji wiążącej wymiar grupy algebraicznej G działającej na rozmaiłości X (patrz [47], 14.1) z liczbą orbit tego działania. Jest to podstawowy rezultat teorii grup algebraicznych, wynikający z faktu, że wymiar każdej z orbit Gx elementów $x \in X$ jest nie większy niż wymiar grupy G (patrz [47], 21.4.3). Występuje on niekiedy także w rozważaniach z teorii reprezentacji (patrz na przykład [7], strona 1).

Obserwacja 3.6.1. *Załóżmy, że grupa algebraiczna G działa na rozmaiłość X . Wówczas jeśli działanie to ma skończenie wiele orbit, to $\dim(G) \geq \dim(X)$.*

Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem, zaś $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ – przestrzenią konturów szkieletu \mathcal{S} nad ciałem K . Zauważmy, że

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \bigoplus_{(i,j) \in I} M_{s_i \times r_j}(K),$$

gdzie $f(i, j) = (s_i, r_j)$. Na mocy [37], §8.8, $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ ma strukturę rozmaiłości algebraicznej wymiaru

$$\dim(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}) = \sum_{(i,j) \in I} s_i r_j.$$

Co więcej, rozumując identycznie do [37], §8.8 widzimy, że przy działaniu grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ zgodnie z (3.2.3) zbiór $K \subseteq \mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ złożony z elementów postaci:

$$K = \{(a \cdot id_{s_1}, \dots, a \cdot id_{s_t}, a^{-1} \cdot id_{r_1}, \dots, a^{-1} \cdot id_{r_s}) \mid a \in K^*\}$$

działa trywialnie na elementy rozmaiłości \mathcal{M} . Co więcej K ma strukturę grupy algebraicznej izomorficznej z K^* tak, że możemy rozważać działanie $(\mathfrak{H} \times \mathfrak{G})/K$ na \mathcal{M} . W szczególności $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ jest $(\mathfrak{H} \times \mathfrak{G})/K^*$ -modułem. Co więcej, $(\mathfrak{H} \times \mathfrak{G})/K^*$ jest zbiorem algebraicznym wymiaru:

$$\dim((\mathfrak{H} \times \mathfrak{G})/K^*) = \sum_{i:(i,j) \in I} s_i^2 + \sum_{j:(i,j) \in I} r_j^2 - 1.$$

Stąd, na mocy Obserwacji 3.6.1, uzyskujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.6.2. *Jeśli $\mathcal{S} = (I, f)$ jest szkieletem, zgodnie z Definicją 3.2.3, zaś $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ – przestrzenią konturów nad \mathcal{S} , wówczas jeśli zachodzi nierówność*

$$\dim(\mathcal{M}_{\mathcal{S}}) > \dim((\mathfrak{H} \times \mathfrak{G})/K^*),$$

czyli równoważnie, jeśli:

$$d(\mathcal{S}) := \sum_{i:(i,j) \in I} s_i^2 + \sum_{j:(i,j) \in I} r_j^2 - \sum_{(i,j) \in I} s_i r_j \leq 0. \quad (3.6.1)$$

to zbiór $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ jest nieskończony.

Idea dowodu Twierdzenia 3.4.3 jest następująca. Wykażemy, że jeśli szkielet acykliczny \mathcal{S} ma bloki szerokości nie mniejszej niż 6 oraz graf $\Gamma_{\mathcal{S}}$ tego szkieletu nie jest sumą rozłączną grafów Dynkina, to \mathcal{S} zawiera pewien szkielet \mathcal{S}' , dla którego $d(\mathcal{S}') = 0$. A więc zgodnie z Lematem 3.5.3 liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{S} jest nieskończona. Szkielet \mathcal{S}' będzie należeć do jednej z rodzin szkieletów, które wskażemy wprost w Stwierdzeniach 3.6.4 oraz 3.6.5. Aby wskazać te rodziny odwołujemy się do pewnych znanych wyników kombinatorycznych.

W paragrafie 1.1.3 podaliśmy definicję całkowitej formy kwadratowej zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n oraz pojęcie formy kwadratowej q_{Γ} kołczanu Γ , patrz (1.1.6). Jeśli Γ jest skończony, spójny i acykliczny wówczas, zgodnie z Lemma VII.4.1 w [4], definicja q_{Γ} zależy jedynie od grafu $\bar{\Gamma}$ powstającego z kołczanu Γ po zaniebaniu orientacji. W [37], §8.8 definiuje się formę kwadratową także dla grafu nieorientowanego, zgodnie ze wzorem (1.1.6), zakładając oczywiście, że graf ten jest skończony i acykliczny. Badanie zależności pomiędzy kołczanami, a ich formami kwadratowymi stanowi ważny aspekt kombinatoryczny teorii reprezentacji algebr (patrz [42], a także [4] VII. 3-4). Dla nas istotny jest następujący rezultat.

Stwierdzenie 3.6.3 (Proposition VII.4.5, [4]). *Jeśli graf nieorientowany Γ jest skończony, spójny i acykliczny, to:*

- Γ jest grafem Dynkina wtedy i tylko wtedy, gdy q_{Γ} jest dodatnio określona,
- Γ jest grafem Euklidesowym wtedy i tylko wtedy, gdy q_{Γ} jest dodatnio półokreślona, ale nie jest dodatnio określona,
- Γ nie jest ani grafem Dynkina ani grafem Euklidesowym wtedy i tylko wtedy, gdy q_{Γ} jest nieokreślona.

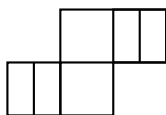
W języku form kwadratowych liczba $d(\mathcal{S})$, występująca w (3.6.1), jest ewaluacją całkowitej formy kwadratowej $q_{\Gamma_{\mathcal{S}}}$ grafu rozdzielonego $\Gamma_{\mathcal{S}}$ szkieletu \mathcal{S} , na wektorze $x = [s_1, \dots, s_t, r_1, \dots, r_s]$, gdzie s_i, r_j są takie, jak w Definicji 3.2.3. Wniosek 3.6.2 mówi zatem, że jeśli znajdziemy szkielet \mathcal{S} taki, że $d(\mathcal{S}) \leq 0$, wówczas zbiór $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ jest nieskończony. W związku ze Stwierdzeniem 3.6.3 widzimy, że warto przyjrzeć się dokładniej strukturze szkieletów \mathcal{S} , których grafy rozdzielone są Euklidesowe oraz takich, że rozmiary ich bloków spełniają warunek $d(\mathcal{S}) = 0$.

Stwierdzenie 3.6.4. *Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie szkieletem, zaś $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ – przestrzenią konturów o szkielecie \mathcal{S} (nad ciałem nieskończonym K). Niech $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ działa na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$, traktowanym jako rozmaitość algebraiczna, przy czym zachodzi jedna z następujących sześciu możliwości:*

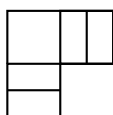
- (a) $\mathfrak{H} = \text{Gl}_2(K)$, $\mathfrak{G} = (K^*)^4$ oraz \mathcal{S} złożony jest z bloków rozmiarów 2×1 postaci:



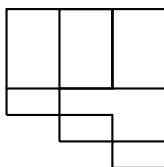
- (b) $\mathfrak{H} = (\text{Gl}_2(K))^2$, $\mathfrak{G} = (K^*)^2 \times \text{Gl}_2(K) \times (K^*)^2$ oraz \mathcal{S} złożony jest z czterech bloków rozmiaru 2×1 oraz dwóch bloków rozmiaru 2×2 postaci:



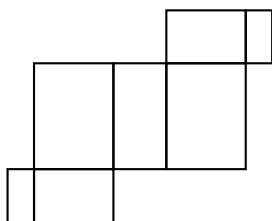
(c) $\mathfrak{H} = (\mathbb{K}^*)^2 \times \text{Gl}_2(\mathbb{K})$, $\mathfrak{G} = \text{Gl}_2(\mathbb{K}) \times (\mathbb{K}^*)^2$ oraz \mathcal{S} złożony jest z dwóch bloków rozmiaru 2×1 , dwóch bloków rozmiaru 1×2 oraz jednego bloku rozmiaru 2×2 postaci:



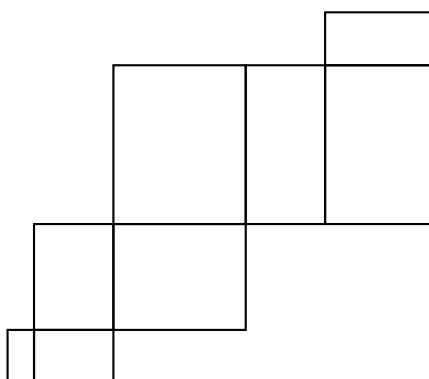
(d) $\mathfrak{H} = (\mathbb{K}^*)^3 \times \text{Gl}_3(\mathbb{K})$, $\mathfrak{G} = \text{Gl}_2(\mathbb{K})^3$ oraz \mathcal{S} złożony jest z trzech bloków rozmiaru 3×1 oraz trzech bloków rozmiaru 1×2 postaci:



(e) $\mathfrak{H} = \text{Gl}_2(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_4(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_2(\mathbb{K})$, $\mathfrak{G} = \mathbb{K}^* \times \text{Gl}_3(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_2(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_3(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^*$ oraz \mathcal{S} złożony jest z dwóch bloków rozmiaru 2×1 , dwóch bloków rozmiaru 3×2 , dwóch bloków rozmiaru 4×3 oraz jednego bloku rozmiaru 4×2 postaci:



(f) $\mathfrak{H} = \text{Gl}_2(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_4(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_6(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_2(\mathbb{K})$, $\mathfrak{G} = \mathbb{K}^* \times \text{Gl}_3(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_5(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_3(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_4(\mathbb{K})$ oraz \mathcal{S} złożony jest z ośmiu bloków o rozmiarach odpowiednio: 2×1 , 2×3 , 4×3 , 4×5 , 6×5 , 6×3 , 6×4 oraz 2×4 postaci:

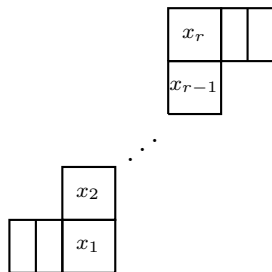


Wówczas w każdym z przypadków (a) – (f) zachodzi równość $d(\mathcal{S}) = 0$. Analogicznie w przypadkach (a') – (f') powstających z (a) – (f) przez symetrię, to znaczy przez rozważanie szkieletów $\mathcal{S}' = (I', f')$, gdzie $I' = \{(j, i) \mid (i, j) \in I, f'(j, i) := f(i, j)\}$, oraz działania $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}'}$, gdzie $\mathfrak{H}' := \mathfrak{G}$ oraz $\mathfrak{G}' := \mathfrak{H}$. Zatem działanie $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ ma w każdym z tych przypadków nieskończenie wiele orbit. Analogicznie w przypadku działania $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}'}$.

Dowód jest elementarnym rachunkiem, zatem możemy go pominąć. Bezpośrednio z Wniosku 3.6.2 wynika też następująca uwaga, będąca uogólnieniem punktów (b) i (c) powyższego stwierdzenia.

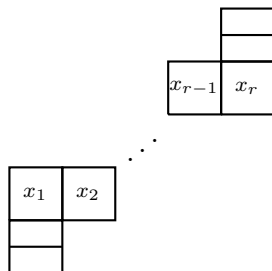
Stwierdzenie 3.6.5. Niech \mathcal{S} będzie szkieletem acyklicznym jednego z następujących typów:

(i)



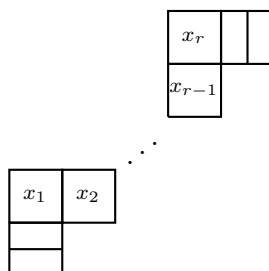
gdzie x_1, \dots, x_r to bloki rozmiarów 2×2 tworzące kontur schodkowy \mathcal{S}' , a pozostałe cztery bloki są rozmiarów 2×1 ,

(ii)



gdzie x_1, \dots, x_r to bloki rozmiarów 2×2 tworzące kontur schodkowy \mathcal{S}' , zaś pozostałe cztery bloki są rozmiarów 1×2 ,

(iii)



gdzie x_1, \dots, x_r to bloki rozmiarów 2×2 tworzące kontur schodkowy \mathcal{S}' , a pozostałe pary bloków są odpowiednio rozmiarów 2×1 oraz 1×2 .

Wówczas istnieje nieskończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na przestrzeni konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.

Wskazane w powyższych stwierdzeniach rodziny szkieletów pozwalają oceniać kiedy działanie (3.2.3) ma skończenie wiele orbit. Jeśli szkielet \mathcal{S} zawiera jeden ze szkieletów wskazanych wyżej, wówczas liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ jest nieskończona. Czy można wskazać więcej szkieletów acyklicznych dających taki warunek konieczny? O kompletności powyższej listy świadczy argumentacja podana wcześniej. Grafy rozdzielone szkieletów wymienionych w dwóch powyższych stwierdzeniach są grafami Euklidesowymi, a zgodnie ze Stwierdzeniem 3.6.3 tylko graf Euklidesowy może być grafem rozdzielonym szkieletu \mathcal{S} takiego, że $d(\mathcal{S}) = 0$. Dla każdego grafu Euklidesowego rozważyć można jego formę kwadratową i znaleźć minimum tej formy. W ten sposób uzyskujemy przykłady podane wyżej.

Jeśli A jest algebrą spełniającą założenia Problemu 3.1.1 oraz jeśli $r_i \geq 0$ są rozmiarami macierzy występujących w rozkładzie (1.1.4) ilorazu $A/J(A)$, to z powyższych dwóch stwierdzeń wypływa następujący wniosek.

Wniosek 3.6.6. *Założmy, że A spełnia założenia Problemu 3.1.1 oraz $C(A)$ jest skończona. Wówczas*

- (a) jeśli $r_i \geq 2$, dla każdego i , to graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera grafów $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6$,
- (b) jeśli $r_i \geq 3$, dla każdego i , to graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera grafów $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7$,
- (c) jeśli $r_i \geq 4$, dla każdego i , to graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera grafów $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7$,
- (d) jeśli $r_i \geq 5$, dla każdego i , to graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera grafów $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$,
- (e) jeśli $r_i \geq 6$, dla każdego i , to graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera grafów $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$.

Dowód. Z założenia, że $C(A)$ jest skończona oraz z Wniosku 3.2.9 wynika, że liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ orbit na przestrzeni \mathcal{M}_A konturów algebry A jest skończona. Na mocy Stwierdzenia 3.5.5 widzimy zatem, że szkielet \mathcal{S}_A algebry A jest acykliczny. Równoważnie, graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A jest acykliczny, a więc nie zawiera grafu \widetilde{A}_n . Dowodzimy teraz kolejne punkty wniosku.

Założmy, że A spełnia warunek $r_i \geq 2$. Zgodnie z Definicją 3.2.7 wiemy, że jeśli w i -tym wierszu szkieletu \mathcal{S}_A znajduje się q_i bloków to $a_i \geq 2q_i$. Rozmiar każdego bloku (i, j) szkieletu \mathcal{S}_A równy jest zatem $p \times q$, gdzie $p \geq 2q_i$ oraz $q \geq 2$. Założmy dalej, że liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ orbit na przestrzeni \mathcal{M}_A jest skończona oraz, że $\Gamma^s(A)$ zawiera \widetilde{D}_n , dla pewnego n . Oznacza to, że graf rozdzielony $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ szkieletu \mathcal{S}_A algebry A zawiera \widetilde{D}_n , dla pewnego $n \geq 4$.

Niech $n = 4$. Wówczas $\widetilde{D}_4 = G_4$, a zatem graf $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawiera wierzchołek incydentny z czterema krawędziami. W szczególności szkielet \mathcal{S}_A zawiera wierszową czwórkę lub kolumnową czwórkę. Zgodnie z uwagami poczynionymi na początku dowodu każdy blok wierszowej czwórki zawartej w \mathcal{S}_A ma rozmiary nie mniejsze niż 8×2 , zaś każdy blok kolumnowej czwórki zawartej w \mathcal{S}_A ma rozmiary nie mniejsze niż 1×2 . Widzimy zatem, że jeśli $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawiera \widetilde{D}_4 , to \mathcal{S}_A zawiera jeden ze szkieletów wymienionych w punktach (a), (a') Stwierdzenia 3.6.4. Na mocy Lematu 3.5.3 dostajemy zatem sprzeczność z założeniem, że liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ orbit na przestrzeni \mathcal{M}_A jest skończona.

Niech $n > 4$. Skoro graf rozdzielony $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ szkieletu \mathcal{S}_A algebry A zawiera \widetilde{D}_n , to $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawiera przynajmniej dwa wierzchołki węzłowe. Co więcej, wierzchołki te połączone są grubą drogą węzłową. Istotnie, graf \widetilde{D}_n zawiera dwa różne wierzchołki, z których każdy incydentny jest z trzema krawędziami. Co więcej, wierzchołki te są połączone drogą w \widetilde{D}_n . Skoro każdy blok \mathcal{S}_A jest gruby, to droga ta jest gruba.

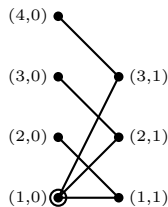
Istnieją zatem takie bloki $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, oraz z_1, z_2, \dots, z_{n-4} szkieletu \mathcal{S}_A , że:

- (1) x_1, x_2, x_3 leżą w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie szkieletu \mathcal{S}_A ,
- (2) y_1, y_2, y_3 leżą w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie szkieletu \mathcal{S}_A ,
- (3) bloki x_i, y_j nie leżą w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie szkieletu \mathcal{S}_A , o ile $(i, j) \neq (1, 1)$,
- (4) bloki z_1, z_2, \dots, z_{n-4} tworzą kontur schodkowy,
- (5) $z_1 = x_1, y_1 = z_{n-4}$,
- (6) każdy z bloków x_i, y_i, z_i ma rozmiary nie mniejsze niż 2×2 .

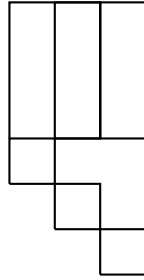
Wynika stąd, że $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawiera jeden ze szkieletów (i)-(iii) opisanych w Stwierdzeniu 3.6.5. Istotnie, każdy szkielet spełniający warunki (1)-(6) jest postaci $\mathcal{S}' = (I, f')$, gdzie $\mathcal{S} = (I, f)$ jest szkieletem postaci (i)-(iii) opisanym w Stwierdzeniu 3.6.5. Co więcej, skoro szkielety postaci (i)-(iii) zawierają jedynie bloki rozmiarów nie większych niż 2×2 , każdy szkielet postaci \mathcal{S}' zawiera szkielet postaci \mathcal{S} .

Na mocy Lematu 3.5.3 oraz ze Stwierdzenia 3.6.5 wynika zatem, że liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A jest nieskończona. Jest to sprzeczność z założeniem przyjętym na początku dowodu. Wykazaliśmy zatem, że $\Gamma^s(A)$ nie zawiera grafu \widetilde{D}_n .

Pokażemy teraz, że $\Gamma^s(A)$ nie zawiera także \widetilde{E}_6 . Załóżmy przeciwnie. Wówczas graf rozdzielony $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ posiada podgraf postaci:

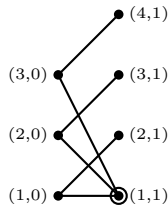


Szkielet \mathcal{S}_A zawiera zatem wiersz, w którym znajdują się przynajmniej 3 bloki x, y, z , odpowiadające odpowiednio krawędziom $\{(1, 0), (1, 1)\}, \{(1, 0), (2, 1)\}, \{(1, 0), (3, 1)\}$ powyższego grafu, rozmiarów nie mniejszych niż 6×2 (ponieważ $q_i \geq 3$, dla tego wiersza) takie, że w kolumnach \mathcal{S}_A zawierających x, y, z znajdują się odpowiednio bloki $x' \neq x, y' \neq y, z' \neq z$, odpowiadające krawędziom $\{(2, 0), (1, 1)\}, \{(3, 0), (2, 1)\}, \{(4, 0), (3, 1)\}$ powyższego grafu, rozmiarów nie mniejszych niż 2×2 . Szkielet \mathcal{S}_A zawiera zatem szkielet wierszowo trójschodkowy $\mathcal{S}' = (I', f')$ złożony z trzech bloków rozmiarów 6×2 oraz trzech bloków rozmiarów 2×2 postaci:



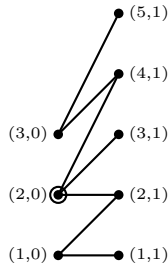
Jest jasne, że \mathcal{S}' zawiera natomiast szkielet opisany w punkcie (d) Stwierdzenia 3.6.4. Zatem sam szkielet \mathcal{S}_A zawiera szkielet (d). Na mocy Stwierdzenia 3.6.4 oraz Lematu 3.5.3 liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A jest zatem nieskończona, co przeczy założeniu przyjętemu na początku dowodu. Zatem graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera \overrightarrow{E}_6 . Dowód punktu (a) jest zakończony.

Założmy dalej, że $r_i \geq 3$. Z punktu (a) wynika, że graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera grafów $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \overrightarrow{E}_6$. Pozostaje zatem pokazać, że $\Gamma^s(A)$ nie zawiera także grafów $\downarrow \widetilde{E}_6$ oraz \overrightarrow{E}_7 . Zgodnie z Definicją 3.2.7 wiemy, że jeśli w i -tym wierszu szkieletu \mathcal{S}_A znajduje się q_i bloków, wówczas $a_i \geq 3q_i$. Rozmiar każdego bloku (i, j) szkieletu \mathcal{S}_A równy jest zatem $p \times q$, gdzie $p \geq 3q_i$ oraz $q \geq 3$. Założmy, wbrew tezie punktu (b), że $\Gamma^s(A)$ zawiera $\downarrow \widetilde{E}_6$. Graf rozdzielony $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ szkieletu \mathcal{S}_A zawiera zatem graf postaci:



Szkielet \mathcal{S}_A zawiera zatem kolumnę, w której znajdują się przynajmniej 3 bloki x, y, z , odpowiadające odpowiednio krawędziom $\{(1, 0), (1, 1)\}, \{(2, 0), (1, 1)\}, \{(3, 0), (1, 1)\}$ powyższego grafu, rozmiarów nie mniejszych niż 9×3 (ponieważ $q_i \geq 3$, dla tego wiersza) takie, że w wierszach \mathcal{S}_A zawierających x, y, z znajdują się odpowiednio bloki $x' \neq x, y' \neq y, z' \neq z$, odpowiadające krawędziom $\{(1, 0), (2, 1)\}, \{(2, 0), (3, 1)\}, \{(4, 0), (4, 1)\}$ powyższego grafu, rozmiarów nie mniejszych niż 9×3 . Zatem szkielet \mathcal{S}_A zawiera szkielet opisany w punkcie (d') Stwierdzenia 3.6.4. W szczególności, na mocy Stwierdzenia 3.6.4 oraz Lematu 3.5.3, liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A jest nieskończona, co przeczy założeniu przyjętemu na początku dowodu. Zatem graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera $\downarrow \widetilde{E}_6$.

Podobnie wykazujemy, że $\Gamma^s(A)$ nie zawiera także grafu \widetilde{E}_7 . Gdyby było inaczej, wówczas graf rozdzielony $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawierałby graf postaci:



Podobnie jak wyżej pokazalibyśmy zatem, że \mathcal{S}_A zawiera szkielec opisany w punkcie (e) Stwierdzenia 3.6.4. W szczególności, na mocy Stwierdzenia 3.6.4 oraz Lematu 3.5.3, liczba \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na \mathcal{M}_A byłaby nieskończona, co przeczyłoby założeniu przyjętemu na początku dowodu. Zatem graf $\Gamma^s(A)$ nie zawiera \widetilde{E}_7 i dowód punktu (b) jest zakończony.

Punkty (c)-(e) dowodzi się analogicznie. Aby wykazać punkt (c) wystarczy, na mocy punktów (a), (b) pokazać, że graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ nie zawiera $\downarrow\widetilde{E}_7$. Podobnie jak wyżej pokazujemy, że jeśli algebra A spełnia $r_i \geq 4$ oraz $\Gamma^s(A)$ zawiera $\downarrow\widetilde{E}_7$, wówczas szkielec \mathcal{S}_A algebry A zawierać musi szkielec wymieniony w punkcie (e') Stwierdzenia 3.6.4. Na mocy Lematu 3.5.3 przeczy to jednak założeniu o skończoności zbioru \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na \mathcal{M}_A . Aby wykazać punkt (d) wystarczy, na mocy punktów (a)-(c) pokazać, że $\Gamma^s(A)$ nie zawiera \widetilde{E}_8 . Jeśli jednak $r_i \geq 5$ oraz jeśli $\Gamma^s(A)$ zawiera $\downarrow\widetilde{E}_7$, wówczas szkielec \mathcal{S}_A algebry A zawierać musi szkielec wymieniony w punkcie (f) Stwierdzenia 3.6.4 co prowadzi do sprzeczności z założeniem o skończoności zbioru \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na \mathcal{M}_A . Wreszcie, aby wykazać punkt (e) wystarczy, na mocy punktów (a)-(d) pokazać, że graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ nie zawiera $\downarrow\widetilde{E}_8$. Skoro jednak możemy przyjąć, że $r_i \geq 6$, to gdyby $\Gamma^s(A)$ zawierał $\downarrow\widetilde{E}_8$, wówczas szkielec \mathcal{S}_A zawierałby szkielec wymieniony w punkcie (f') Stwierdzenia 3.6.4, co prowadziło, podobnie jak w poprzednich przypadkach, do sprzeczności z założeniem o skończoności zbioru \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na \mathcal{M}_A . □

DOWÓD TWIERDZENIA 3.4.3. Załóżmy, że graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A jest acykliczny i jest sumą rozłączną grafów Dynkina. Zatem na mocy Stwierdzenia 3.1.2 wiemy, że $C(A)$ jest skończona. Zgodnie z Wnioskiem 3.2.9 widzimy także, że jeśli \mathcal{S}_A jest szkieletem algebry A oraz \mathcal{M}_A – przestrzenią konturów algebry A , to liczba \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na \mathcal{M}_A jest skończona.

Założmy teraz, że liczba \mathfrak{H} – \mathfrak{G} -orbit na \mathcal{M}_A jest skończona. Na mocy Stwierdzenia 3.5.5 szkielec \mathcal{S}_A algebry A nie zawiera cyklu. Zatem graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A jest acykliczny. Z założenia o algebrze A wiemy też, że stałe r_i występujące w rozkładzie $A/J(A)$ są niemniejsze od 6. A zatem na mocy Wniosku 3.6.6 graf rozdzielony $\Gamma^s(A)$ algebry A nie może mieć spójnego podgrafu będącego jednym z grafów Euklidesowych. Zatem na mocy Lemma VII.2.1 w [4], graf $\Gamma^s(A)$ jest sumą rozłączną grafów Dynkina. □

Na mocy Twierdzenia 2.3.1 wiadomo, że jeśli A jest skończonego typu reprezentacyjnego, to półgrupa $C(A)$ jest skończona. Zgodnie zaś z Twierdzeniem 2.3.3, skończenie wymiarowa algebra A nad ciałem algebraicznie domkniętym jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \geq 1$, półgrupa $C(M_n(A))$ jest skończona. Twierdzenie 3.4.3 pokazuje, że zachodzi następująca zależność:

Wniosek 3.6.7. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K oraz taką, że $J(A)^2 = 0$. Wówczas A jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy półgrupa $C(M_6(A))$ jest skończona.*

Dowód. Jeśli A jest skończonego typu reprezentacyjnego, to $C(M_6(A))$ jest skończona, na mocy Twierdzenia 2.3.3. Jeśli zaś półgrupa $C(M_6(A))$ jest skończona, to zgodnie ze Stwierdzeniem 2.3.4 algebra $M_6(A)$ jest rozdzielna. Co więcej, jest jasne, że $J(M_6(A))^2 = M_6(J(A))^2 = 0$ (patrz [24], strona 57) oraz, że algebra $M_6(A)$ spełnia warunek (W2). Zatem $M_6(A)$ jest skończonego typu reprezentacyjnego, na mocy Twierdzenia 3.4.3. Wynika stąd, że także A jest skończonego typu, ponieważ algebry A i $M_6(A)$ mają równoważne kategorie skończenie wymiarowych modułów lewostronnych (patrz [4], I.6.11). \square

Zakończywszy dowód Twierdzenia 3.4.3 warto poczynić komentarz dotyczący związku rozważanych przez nas obiektów ze znanymi konstrukcjami z teorii reprezentacji. Wielokrotnie wspomniano już o związku problemu skończoności $C(A)$ z problemem skończonego typu reprezentacyjnego algebry A . Przeformułowanie problemu skończoności $C(A)$ do problemu skończoności liczby $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit działania (3.2.3) okazuje się stanowić pewną analogię dla przeformułowania zagadnienia skończonego typu reprezentacyjnego do problemu badania orbit działań grup algebraicznych. Odpowiedniość ta została sformułowana w Stwierdzeniu 1.1.22. Na czym polega ta analogia?

Przyjmijmy, że A jest algebrą spełniającą warunki Problemu 3.1.1 oraz niech $d_A = (r_1, \dots, r_k)$, gdzie r_i są stałymi występującymi w rozkładzie (1.1.4) algebry półprostej $A/J(A)$. W paragrafie 1.1.3 mówiliśmy o przestrzeni liniowej $\text{rep}_K(\Gamma, d)$ i o orbitach działania grup liniowych na tej przestrzeni, patrz (1.1.7). Niech $\Gamma_A = (V, E)$ będzie kołczanem algebry A . Zgodnie ze Stwierdzeniem 1.1.22, jeśli chcemy by algebra A miała skończony typ, to liczba \mathfrak{G}_{d_A} -orbit przy działaniu (1.1.8) na $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ musi być skończona. Rozważmy szkielec $\mathcal{S} = (I, f)$ taki, że $I = E$, zaś $f(i, j) = (r_j, r_i)$. Wówczas przestrzeń konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ szkielec \mathcal{S} utożsamiać można, na mocy (1.1.7), ze zbiorem $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$. Zatem możemy mówić o działaniu grupy $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ na $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$, zgodnie z (3.2.3).

Zauważmy, że działanie $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ ma skończenie wiele orbit wtedy i tylko wtedy, gdy działanie $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ na szkielec $\mathcal{S}' = (I', f)$, gdzie $I' = \{(i, j) \mid (j, i) \in I\}$ zadane zgodnie z (3.2.3) ma skończenie wiele orbit. Nietrudno natomiast widzieć, że jeśli szkielec \mathcal{S}_A algebry A ma postać (I_A, f_A) , to $I_A = I'$, zaś $f_A(i, j) = (a_i, r_j)$ oraz $f'(i, j) = (r_i, r_j)$. W szczególności szkielec \mathcal{S}' oraz \mathcal{S}_A różnią się jedynie wysokością wierszy oraz \mathcal{S}' jest zawarty w \mathcal{S}_A .

Jest jasne, że każde dwa elementy $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ należące do pewnej \mathfrak{G}_{d_A} -orbity przy działaniu (1.1.8) należą także do tej samej $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ -orbity $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ przy działaniu (3.2.3). Zatem jeśli działanie $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ na $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ ma nieskończenie wiele orbit, to liczba $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ -orbit na $\mathcal{M}_{S'}$ jest nieskończona, a zatem na mocy Lematu 3.5.3 także liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A , gdzie $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}$ są takie, jak w Definicji 3.2.6, jest nieskończona. Zatem na mocy Wniosku 3.2.9 półgrupa $C(A)$ jest nieskończona.

Przypomnijmy, że jeśli A jest algebrą z 1 nad ciałem K , to rozważać można działanie $U(A) \times U(A)$ na grupę addytywną algebry A zadane wzorem: $(u_1, u_2)(a) = u_1 a u_2^{-1}$, dla $u_1, u_2 \in U(A), a \in A$. Orbity tego działania nazywamy, za [35], $U(A)$ -orbitami algebry A . Przyjmijmy, że A spełnia założenia Problemu 3.1.1. Nietrudno widzieć, że zbiór $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ orbit na $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ jest w bijekcji ze zbiorem $U(A)$ -orbit elementów $J(A)$ algebry A . Innymi słowy, zgodnie z Lemma 1 w [35], zbiór $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ orbit na $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ jest w bijekcji ze zbiorem nilpotentnych ideałów lewostronnych głównych algebry A . A zatem na mocy Proposition 9 z [35], zbiór $\mathfrak{G}_{d_A} - \mathfrak{G}_{d_A}^0$ orbit na $\text{rep}_K(\Gamma_A, d_A)$ przy działaniu (3.2.3) jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $U(A)$ -orbit na A jest skończony.

* * *

Drugi wniosek ze Stwierzeń 3.6.4 i 3.6.5 to jedna z implikacji Twierdzenia 3.4.2.

Wniosek 3.6.8. *Niech A będzie algebrą spełniającą założenia Twierdzenia 3.4.2 oraz taką, że istnieje skończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A . Wówczas szkielet \mathcal{S}_A algebry A jest acykliczny oraz:*

- (i) \mathcal{S}_A nie zawiera wierszowej czwórki,
- (ii) \mathcal{S}_A nie zawiera grubej kolumnowej czwórki,
- (iii) \mathcal{S}_A nie zawiera grubego szkieletu wierszowo trójschodkowego,
- (iv) graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S}_A nie zawiera grubej drogi węzłowej.

Dowód. Fakt, że \mathcal{S}_A jest acykliczny wynika natychmiast ze Stwierdzenia 3.5.5. Wykażemy, że dla rozważanej klasy algebr poniższe warunki są następstwami zaprzeczenia warunkom (i)-(iv), odpowiednio:

- (i') szkielet \mathcal{S}_A zawiera szkielet (a) wymieniony w Stwierdzeniu 3.6.4,
- (ii') szkielet \mathcal{S}_A zawiera szkielet (a') wymieniony w Stwierdzeniu 3.6.4,
- (iii') szkielet \mathcal{S}_A zawiera szkielet (d) wymieniony w Stwierdzeniu 3.6.4,
- (iv') szkielet \mathcal{S}_A zawiera jeden ze szkieletów (i)-(iii) wymienionych w Stwierdzeniu 3.6.5.

Zgodnie z Lematem 3.5.3 jeśli spełniony zostanie dowolny z warunków (i')-(iv'), to zbiór $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A będzie nieskończony na mocy Stwierzeń 3.6.4, oraz 3.6.5. Uzyskamy zatem sprzeczność z założeniem wniosku i dowód będzie zakończony.

Założmy, że algebra A nie spełnia warunku (i), a zatem, że szkielet \mathcal{S}_A zawiera wierszową czwórkę w swoim i -tym wierszu. Zgodnie z Definicją 3.2.7 wiadomo, że skoro w i -tym wierszu \mathcal{S}_A znajdują się cztery bloki, to $a_i \geq 4$. Zatem i -ty wiersz szkieletu \mathcal{S}_A zawiera szkielet postaci (a) wymieniony w Stwierdzeniu 3.6.4. Zachodzi zatem (i').

Założmy, że nie jest spełniony warunek (ii), a zatem, że szkielet \mathcal{S}_A zawiera w l -tej kolumnie grubą kolumnową czwórkę złożoną z bloków x_1, x_2, x_3, x_4 należących do wierszy o indeksach odpowiednio i_1, \dots, i_4 . Skoro bloki x_j są grube, to zgodnie z Definicją 3.2.7 widzimy, że mają one rozmiary odpowiednio $a_{i_j} \times q$, gdzie $q \geq 2$. A zatem w l -tej kolumnie szkieletu \mathcal{S}_A zawarty jest szkielet (a') wymieniony w Stwierdzeniu 3.6.4. Zachodzi zatem (ii').

Przyjmijmy, że algebra A nie spełnia warunku (iii), a zatem, że szkielet \mathcal{S}_A zawiera gruby szkielet wierszowo trójschodkowy. Możemy przyjąć bez straty ogólności, że każdy blok szkieletu A jest gruby. Na mocy definicji szkieletu wierszowo trójschodkowego, graf rozdzielony $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ algebry A zawiera, jako podgraf, graf postaci $\overrightarrow{F_{n,m,q}}$, dla pewnych $m, m, q \geq 1$. W szczególności $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawiera graf $\overrightarrow{F_{1,1,1}} = \overrightarrow{E_6}$. Skoro jednak każdy blok szkieletu \mathcal{S}_A jest gruby to zgodnie z dowodem punktu (a) Wniosku 3.6.6 widzimy, że szkielet \mathcal{S}_A zawiera szkielet (d) wymieniony w Stwierdzeniu 3.6.4. Zatem (iii') jest następstwem zaprzeczenia warunku (iii).

Na koniec, założmy, że A nie spełnia warunku (iv), a więc graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S}_A zawiera grubą drogę węzłową. Wówczas, analogicznie jak w dowodzie punktu (a) Wniosku 3.6.6 widzimy, że szkielet \mathcal{S}_A zawiera jeden ze szkieletów (i)-(iii) wymienionych w Stwierdzeniu 3.6.5. Stąd zaprzeczenie warunku (iv) pociąga za sobą (iv'). Dowód jest zatem zakończony. \square

Naszym dalszym celem będzie zatem dowód drugiej implikacji Twierdzenia 3.4.2. Temu poświęcony będzie następny rozdział pracy.

Rozdział 4

Algebry o blokach rozmiarów nie większych niż 2

Celem tego rozdziału jest dowód Twierdzenia 3.4.2. Jedną z implikacji stanowiących tezę tego rezultatu została udowodniona w paragrafie 3.6. W paragrafie 4.1 rozważamy przypadek szczególny konturów o blokach szerokości równej 2. Pokazujemy najpierw, że tezę można w tym przypadku sprowadzić do dowodu technicznych Lematów 4.1.2 oraz 4.1.3. Następnie, po dość żmudnych rachunkach, uzyskujemy te rezultaty. W paragrafie 4.2 przechodzimy do dowodu ogólnego przypadku. Wprowadzamy najpierw szereg pojęć pomocniczych, aby sformułować w ich języku zagadnienie równoważne z brakującą implikacją Twierdzenia 3.4.2. Następnie przedstawiamy kombinatoryczne rozumowanie redukujące uzyskane w ten sposób zagadnienie do kilku nietrudnych lematów pomocniczych. W ostatniej części pokazujemy, że lematy te można z kolei sprowadzić do rezultatów uzyskanych w paragrafie 4.1. W ten sposób zamykamy dowód Twierdzenia 3.4.2.

4.1 Specjalny przypadek Twierdzenia 3.4.2 dla bloków szerokości 2.

Celem naszych dalszych rozważań jest pokazanie, że jeśli dana jest algebra A spełniająca założenia Problemu 3.1.1 oraz warunek (W1), to jeśli szkielet \mathcal{S}_A jest acykliczny i spełniający warunki (i)-(iv) Twierdzenia 3.4.2, to liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A jest skończona. W tym paragrafie pokażemy, że fakt ten jest prawdziwy w przypadku tych algebr A , w których iloraz $A/J(A)$ jest izomorficzny z sumą prostą algebr macierzy $M_2(K)$. Są to dokładnie te algebry A , spełniające założenia Twierdzenia 3.4.2, dla których wszystkie bloki szkieletu \mathcal{S}_A są grube. Rezultat ten jest następujący.

Stwierdzenie 4.1.1. *Niech A będzie algebrą spełniającą założenia Problemu 3.1.1 oraz taką, że*

$$A/J(A) \simeq \underbrace{M_2(K) \oplus M_2(K) \oplus \dots \oplus M_2(K)}_k.$$

Założmy, że szkielet \mathcal{S}_A algebry A jest acykliczny oraz:

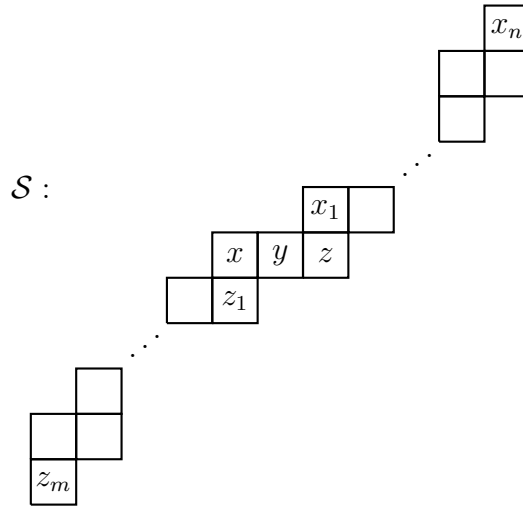
- (i) \mathcal{S}_A nie zawiera wierszowej czwórki,
- (ii) \mathcal{S}_A nie zawiera grubej kolumnowej czwórki,
- (iii) \mathcal{S}_A nie zawiera grubego szkieletu wierszowo trójschodkowego,
- (iv) graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S}_A nie zawiera grubej drogi węzłowej.

Niech \mathcal{A} będzie dowolnym konturem o szkielecie \mathcal{S}_A . Wówczas w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu \mathcal{A} znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

4.1.1 Dwa lematy

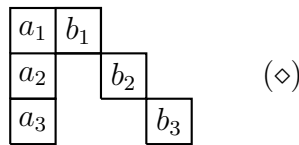
Dowód Stwierdzenia 4.1.1 wyprowadzimy z następujących dwóch lematów.

Lemat 4.1.2. Rozważmy szkielet wierszowo dwusiodkowy \mathcal{S} będący sumą rozłączną: wiersza złożonego z bloków x, y, z o rozmiarach 5×2 oraz dwóch szkieletów schodkowych $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ o blokach rozmiarów 3×2 , a końcami których są odpowiednio bloki x_1, x_n oraz z_1, z_m , dla pewnych n, m . Grafem rozdzielonym tego szkieletu jest $\overrightarrow{F_{n,m,0}}$. Szkielet \mathcal{S} ma na przykład postać:

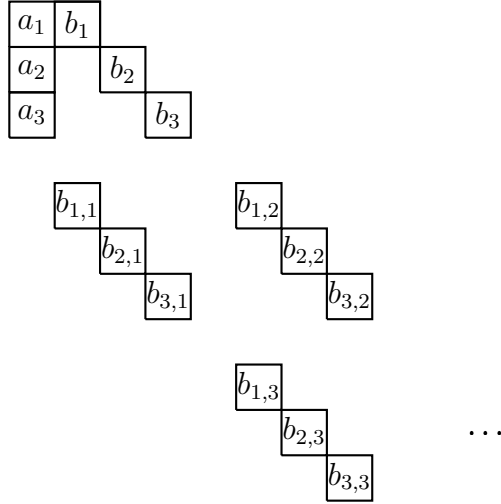


Załóżmy, że grupa $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ działa na \mathcal{M}_S zgodnie z (3.2.3). Wówczas w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_S$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_S$.

Lemat 4.1.3. Rozważmy następujący szkielet złożony z sześciu bloków a_i, b_i rozmiarów 3×2 , dla $i = 1, 2, 3$.



Niech \mathcal{S} będzie szkieletem kolumnowo trójschodkowym powstającym przez dodanie do szkieletu postaci (\diamond) trzech szkieletów schodkowych $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$, przy czym szkielet \mathcal{S}_i złożony jest z bloków $b_{i,s}$ rozmiarów 3×2 , gdzie $1 \leq s \leq s_i$, dla pewnych $s_i > 0$. Grafem rozdzielonym \mathcal{S} jest więc $\downarrow F_{s_1, s_2, s_3}$. Szkielet \mathcal{S} ma na przykład postać:



Załóżmy, że grupa $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ działa na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ zgodnie z (3.2.3). Wówczas w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.

Dowody powyższych faktów wymagać będą od nas pewnych dodatkowych definicji i dość żmudnych rachunków, dlatego poprzedzimy je dowodem Stwierdzenia 4.1.1.

DOWÓD STWIERDZENIA 4.1.1. Zauważmy, że jeśli szkielet \mathcal{S}_A jest spójny i acykliczny oraz spełnia warunki (i)-(iv), wówczas \mathcal{S}_A jest jednym ze szkieletów typu:

- (a) schodkowego
- (b) wierszowo lub kolumnowo dwuschodkowego
- (c) kolumnowo trójschodkowego.

Istotnie, niech $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ będzie grafem rozdzielonym szkieletu \mathcal{S}_A . Jest on, zgodnie z Obserwacją 3.3.3, również spójny i acykliczny. Na mocy (i), (ii) wiemy, że żaden wierzchołek $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ nie jest incydentny z więcej niż trzema krawędziami. Istotnie, gdyby pewien wierzchołek wierszowy (a więc postaci $(x, 0)$, patrz Definicja 3.2.7) był incydentny z co najmniej czterema krawędziami grafu $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$, wówczas szkielet \mathcal{S}_A zawierałby czwórkę wierszową, co przeczy (i). Gdyby natomiast pewien wierzchołek kolumnowy był incydentny z co najmniej czterema krawędziami grafu $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$, wówczas szkielet \mathcal{S}_A zawierałby czwórkę kolumnową. Na mocy założenia o algebrze A wiemy, że każdy blok \mathcal{S}_A jest gruby (ponieważ $A/J(A)$ jest sumą prostą algebr postaci $M_2(K)$). Zatem czwórka kolumnowa zawarta w \mathcal{S}_A byłaby grubą czwórką kolumnową, co przeczy (ii).

Zgodnie z (iv) wiemy, że co najwyżej jeden wierzchołek grafu $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ może być incydentny z dokładnie trzema jego krawędziami. Innymi słowy, graf $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawiera co najwyżej jeden wierzchołek węzłowy. Istotnie, gdyby $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawierał dwa wierzchołki węzłowe, wówczas ze spójności $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ wynikałoby, że wierzchołki te łączy pewna droga w $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$. Skoro jednak każdy blok \mathcal{S}_A jest gruby, to wskazana droga byłaby grubą drogą węzłową w $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$, co przeczyłoby (iv).

Wykazaliśmy zatem, że $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ zawiera co najwyżej jeden wierzchołek węzłowy. Co więcej, pokazaliśmy, że jeśli wierzchołek taki istnieje, to jest on incydentny z dokładnie trzema

krawędziami. Na mocy założeń o spójności i acykliczności $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ widzimy zatem, że graf ten musi być postaci A_s , dla pewnego $s \geq 0$ (gdy nie zawiera on wierzchołka węzłowego) lub w jednej z postaci $\overrightarrow{F_{n,m,q}}$, $\downarrow F_{n,m,q}$, dla pewnych $n, m, q \geq 0$ (gdy zawiera on dokładnie jeden wierzchołek węzłowy). Na mocy (iii) wiemy jednak, że $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ nie może zawierać grafu postaci $\overrightarrow{F_{n,m,q}}$, dla $n, m, q > 0$. Zatem $\Gamma_{\mathcal{S}_A}$ jest w jednej z postaci: A_s , dla $s \geq 0$; $\overrightarrow{F_{n,m,0}}$, dla $n, m \geq 0$; lub $\downarrow F_{n,m,q}$, dla pewnych $n, m, q \geq 0$. Innymi słowy $\Gamma_{\mathcal{S}}$ jest albo szkieletem typu schodkowego, albo typu dwusiodkowego (wierszowego lub kolumnowego) albo typu kolumnowo trójsiodkowego.

Założmy, że \mathcal{S}_A jest typu schodkowego. Z Definicji 3.2.7 wynika, że bloki \mathcal{S}_A są, w zależności od ich liczby w danym wierszu, rozmiarów 2×2 lub 4×2 . Zatem zgodnie z Definicją 3.5.9 szkielec zredukowany \mathcal{S}_A^r szkieletu \mathcal{S}_A algebry A jest szkieletem typu schodkowego i bloki tego szkieletu mają rozmiary 1×2 lub 3×2 . W szczególności \mathcal{S}_A^r zawarty jest w pewnym szkielecie wierszowo dwusiodkowym \mathcal{S} opisanym w Lemacie 4.1.2. Założmy, że zgodnie z 3.2.3 na przestrzeń konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_A^r}$ działają grupy \mathfrak{H}' , \mathfrak{G}' , zaś na przestrzeń konturów $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ działają grupy \mathfrak{H}'' , \mathfrak{G}'' . Na mocy Lematu 4.1.2 wiemy, że w $\mathfrak{H}'' - \mathfrak{G}''$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A}'' \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Zatem z Lematu 3.5.8 wynika, że w $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_A^r}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Wobec tego na mocy Lematu 3.5.11 widzimy, że w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_A$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Analogicznie, korzystając z Lematu 4.1.2 widzimy, że jeśli \mathcal{S}_A jest typu wierszowo dwusiodkowego, to w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_A}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Korzystając z Lematu 4.1.3 widzimy natomiast, że analogiczna teza zachodzi wtedy, gdy \mathcal{S}_A jest typu kolumnowo trójsiodkowego. Co więcej, dla każdego szkieletu kolumnowo dwusiodkowego \mathcal{S}_A istnieje algebra A' spełniająca założenia dowodzonego przez nas stwierdzenia taka, że $\mathcal{S}_{A'}$ jest kolumnowo trójsiodkowy oraz \mathcal{S}_A jest zawarty w $\mathcal{S}_{A'}$. Skoro teza dowodzonego stwierdzenia zachodzi w przypadku, gdy szkielec algebry A jest kolumnowo trójsiodkowy, to na mocy Lematu 3.5.8 teza zachodzi także w przypadku, gdy szkielec algebry A jest typu kolumnowo dwusiodkowego. Zatem jeśli szkielec \mathcal{S}_A algebry A jest postaci (b) lub (c) to w orbicie dowolnego konturu \mathcal{A} należącego do $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_A}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli szkielec \mathcal{S}_A jest spójny i acykliczny, to w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie każdego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ istnieje kontur 0 – 1-kowy. Zatem teza całego stwierdzenia wynika z Obserwacji 3.5.7. \square

Przejdziemy teraz do dowodów poszczególnych lematów. Na początku przypomnimy znaną definicję.

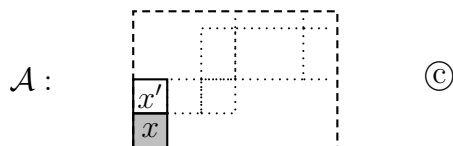
Definicja 4.1.4. Niech $x \in M_{n \times m}(K)$. Powiemy, że macierz x jest **quasi-permutacyjna** jeśli w każdym wierszu i w każdej kolumnie x znajduje się co najwyżej jeden element niezerowy i (o ile istnieje to) jest on równy 1. Kontur \mathcal{A} o szkielecie \mathcal{S} nazwiemy **konturem quasi-permutacyjnym** jeśli każdy jest blok jest macierzą quasi-permutacyjną.

4.1.2 Dowód Lematu 4.1.2

Zacniemy od dowodu Lematu 4.1.2. W tym celu potrzebne będzie wprowadzenie kilku nowych definicji i udowodnienie faktów pomocniczych dotyczących orbit konturów o szkieletach, których grafy rozdzielone są grafami Dynkina typu A_n oraz D_n . Idea dowodu jest następująca. Postępujemy w trzech krokach. Najpierw rozważamy podszkielet \mathcal{S}_1 szkieletu \mathcal{S} i pokazujemy, że w orbicie każdego konturu \mathcal{A} o szkielecie \mathcal{S}_1 znajduje się kontur 0 – 1-kowy \mathcal{A}' mający w miejscu bloku x_1 pewną „swobodę”. Następnie, korzystając z tej „swobody” dołączamy do \mathcal{A}' kolejne trzy bloki x, y, z i znajdujemy, w orbicie tak uzyskanego konturu \mathcal{A}'' , kontur 0 – 1-kowy $\overline{\mathcal{A}''}$, mający „swobodę” w miejscu bloku x . Wreszcie, do $\overline{\mathcal{A}''}$ dołączamy kontur o szkielecie \mathcal{S}_2 i pokazujemy, że założone „swobody” pozwalają na doprowadzenie go do postaci 0 – 1-kowej $\overline{\mathcal{A}}$, zgodnie z tezą Lematu.

Przypomnijmy oznaczenia, które będziemy wykorzystywać w dalszym ciągu tego paragrafu. Niech \mathcal{A} będzie spójnym i acyklicznym konturem o s wierszach i t kolumnach. Przyjmujemy, że \mathfrak{H} jest iloczynem grup liniowych $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_s$, gdzie $H_k \simeq \text{Gl}_{i_k}(\mathbb{K})$, dla pewnych $i_k \geq 1$ oraz przyjmujemy, że $\mathfrak{G} = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t$, przy czym $G_l \simeq \text{Gl}_{j_l}(\mathbb{K})$, dla pewnych $j_l \geq 1$. Na konturze \mathcal{A} zadane jest lewostronne działanie grupy \mathfrak{H} oraz prawostronne działanie grupy \mathfrak{G} , zgodnie z (3.2.3), a więc takie, że jeśli $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$ jest postaci (h_1, \dots, h_s) , $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ jest postaci (g_1, \dots, g_t) oraz $x \in M_{i_k \times j_l}(\mathbb{K})$ jest blokiem znajdującym się w k -tym wierszu i l -tej kolumnie konturu \mathcal{A} , to obraz \mathcal{A} po zadziałaniu nań z lewej strony elementem \mathfrak{h} oraz z prawej strony elementem \mathfrak{g} , oznaczany przez $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$, ma w k -tym wierszu oraz w l -tej kolumnie blok postaci $h_k x g_l$. Jeśli $\mathfrak{h} = (h_1, \dots, h_s) \in \mathfrak{H}$ to macierz h_k nazywamy k -tą współrzędną elementu \mathfrak{h} , dla $1 \leq k \leq s$. Analogicznie określamy współrzędne elementu $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$.

Definicja 4.1.5. Załóżmy, że \mathcal{A} jest spójnym i acyklicznym konturem oraz x jego blokiem takim, że \mathcal{A} zawiera tylko jeden blok $x' \neq x$ w tej samej kolumnie co x oraz takim, że \mathcal{A} nie zawiera bloków $x'' \neq x$ w tym samym wierszu co x . Taką sytuację przedstawiamy graficznie w postaci:

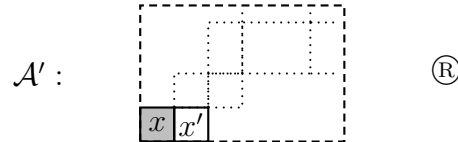


Niech $x \in M_{m \times k}(\mathbb{K})$. Powiemy, że kontur \mathcal{A} ma **swobodę typu** $\overrightarrow{\text{B}}$ (odpowiednio typu $\overrightarrow{\text{D}}$) w bloku x jeśli:

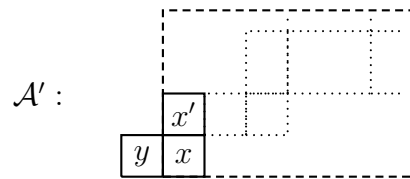
- (1) Każdy z bloków \mathcal{A} jest macierzą 0 – 1-kową.
- (2) Istnieje permutacja $\sigma \in \Sigma_m$ taka, że dla każdej macierzy $a \in B_m(\mathbb{K})$ (odpowiednio dla każdej macierzy $a \in D_m(\mathbb{K})$) istnieją $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ takie, że \mathfrak{h} działa na wierszu zawierającym blok x jako identyczność (to znaczy: jeśli $\mathfrak{h} = (h_1, \dots, h_t) \in \mathfrak{H}$, oraz jeśli x jest w j -tym wierszu konturu \mathcal{A} , to $h_j = \text{id}$) oraz jeśli rozważymy kontur $\mathcal{A}_{\sigma^{-1}a\sigma}$ otrzymany z \mathcal{A} przez zastąpienie x przez $\sigma^{-1}a\sigma x$, to kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}_{\sigma^{-1}a\sigma} \cdot \mathfrak{g}$ jest 0 – 1-kowy.

Mówimy wówczas, że lewostronne działanie grupy $\sigma^{-1} B_m(\mathbb{K})\sigma$ (odpowiednio $\sigma^{-1} D_m(\mathbb{K})\sigma$) na blok konturu \mathcal{A} można **zrekompensować** działaniem $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$.

Dualnie definiujemy swobodę typu $B\downarrow$ (odpowiednio typu $D\downarrow$) w bloku x dla spójnego i acyklicznego konturu \mathcal{A}' , takiego, że w tym samym wierszu \mathcal{A}' , w którym znajduje się blok x , znajduje się tylko jeden blok $x' \neq x$ oraz takiego, że w kolumnie zawierającej blok x nie ma bloku $x'' \neq x$.



Stwierdzenie 4.1.6. Przyjmijmy, że spójny i acykliczny kontur \mathcal{A} jest postaci $\textcircled{\text{C}}$ z Definicji 4.1.5 oraz, że \mathcal{A} ma swobodę typu \overrightarrow{B} w bloku x . Załóżmy, że każdy blok konturu \mathcal{A} jest macierzą quasi-permutacyjną. Rozpatrujemy kontur acykliczny \mathcal{A}' będący sumą rozłączną konturu \mathcal{A} i pojedynczego bloku y , znajdującego się w tym samym wierszu co blok x .



Wówczas w wierszu \mathcal{A}' zawierającym blok y nie ma żadnego bloku $y' \neq x, y$, zaś w kolumnie \mathcal{A}' zawierającej blok y nie ma żadnego bloku $y'' \neq y$. Co więcej, jeśli $y \in M_{m \times q}(\mathbb{K})$, to $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}'$ -orbita konturu \mathcal{A}' , gdzie $\mathfrak{G}' = \text{Gl}_q(\mathbb{K}) \times \mathfrak{G}$, zawiera kontur $\overline{\mathcal{A}}$ o blokach quasi-permutacyjnych taki, że w miejscu bloku y kontur $\overline{\mathcal{A}}$ ma swobodę typu $B\downarrow$.

Przed dowodem tego stwierdzenia wykażemy, że wynika z niego pierwszy z trzech, zapowiedzianych na drodze do dowodu Lematu 4.1.2, kroków.

Wniosek 4.1.7. Jeśli \mathcal{A} jest konturem schodkowym o końcach w blokach x, y , to orbita \mathcal{A} zawiera kontury quasi-permutacyjne $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ takie, że \mathcal{A}_1 ma swobodę typu \overrightarrow{B} lub $B\downarrow$ w miejscu bloku x , zaś \mathcal{A}_2 ma swobodę typu \overrightarrow{B} lub $B\downarrow$ w miejscu bloku y .

Dowód. Indukcja względem liczby bloków w \mathcal{A} . Załóżmy najpierw, że \mathcal{A} zawiera jeden blok $x \in M_{m \times k}(\mathbb{K})$. Wówczas \mathfrak{H} jest grupą $\text{Gl}_m(\mathbb{K})$, zaś $\mathfrak{G} = \text{Gl}_k(\mathbb{K})$. Orbita konturu \mathcal{A} zawiera zatem kontur $\overline{\mathcal{A}} = \{e\}$, przy czym e jest macierzą postaci $\begin{bmatrix} id_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{m \times k}(\mathbb{K})$, zaś s jest rzędem x . Pokażemy, że $\overline{\mathcal{A}}$ posiada swobody typu \overrightarrow{B} i $B\downarrow$.

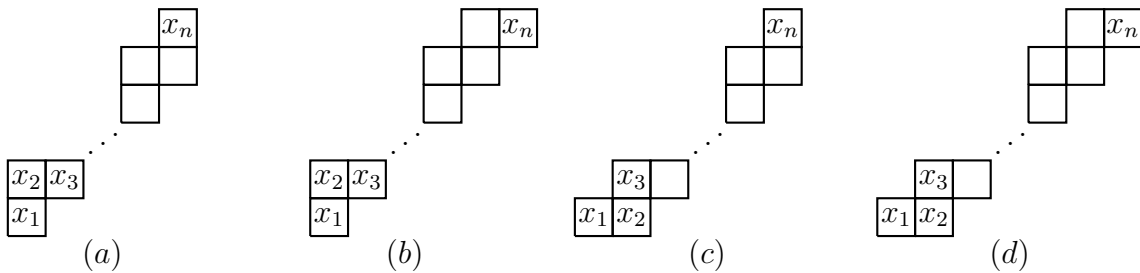
Jeśli $b \in B_m(\mathbb{K})$ to be jest macierzą blokową postaci: $\begin{bmatrix} b' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{m \times k}(\mathbb{K})$, gdzie $b' \in B_s(\mathbb{K})$. Istnieje więc $g \in \text{Gl}_k(\mathbb{K})$ takie, że $beg = e$. To oznacza, że kontur $\overline{\mathcal{A}}$

ma w bloku e swobodę typu \overrightarrow{B} . Rozumowanie dla swobody typu $B\downarrow$ jest analogiczne. Istotnie, jeśli przez $B_k^-(K) \subseteq Gl_k(K)$ oznaczymy grupę macierzy dolnotrójkątnych, to $B_k^-(K) = j_k^{-1} B_k(K) j_k$, gdzie j_k jest macierzą postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \in \Sigma_k.$$

Zatem jeśli $c \in B_k(K)$, to istnieje $c' \in B_s^-(K)$ taki, że $e j_k^{-1} c j_k = \begin{bmatrix} c' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Prawostronne działanie grupy $j_k^{-1} B_k(K) j_k$ na bloku e można zatem zrekompensować lewostronnym działaniem grupy $Gl_m(K)$. W ten sposób pierwszy krok indukcji jest zakończony.

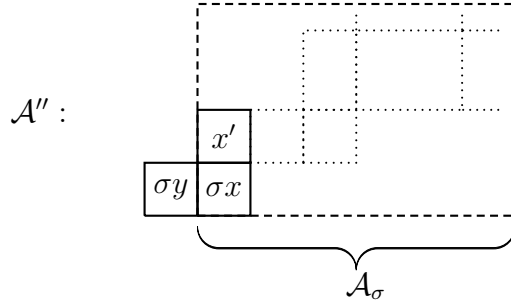
Rozważmy dalej kontur schodkowy \mathcal{A} o n kolejnych blokach x_1, x_2, \dots, x_n , gdzie $n > 1$. Jest on w jednej z postaci:



Pokażemy tezę w przypadku konturu (b). Rozumowanie w przypadkach (a), (c), (d) jest analogiczne. Niech $\mathcal{A}' = \{x_2, \dots, x_n\}$, $\mathcal{A}'' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ powstają z konturu \mathcal{A} po usunięciu odpowiednio bloku x_1 oraz bloku x_n . Wówczas zgodnie z założeniem indukcyjnym w orbitach \mathcal{A}' oraz \mathcal{A}'' istnieją kontury quasi-permutacyjne $\overrightarrow{\mathcal{A}'}$ oraz $\overrightarrow{\mathcal{A}''}$ mające swobody typu $B\downarrow$ oraz \overrightarrow{B} odpowiednio w miejscu bloków x_2 oraz x_{n-1} . Zatem ze Stwierdzenia 4.1.6 (oraz jego dualnej wersji) wiemy, że w orbicie konturów $\overrightarrow{\mathcal{A}'} \cup \{x_1\}$ oraz $\overrightarrow{\mathcal{A}''} \cup \{x_n\}$ znajdują się kontury quasi-permutacyjne o swobodach typu \overrightarrow{B} oraz $B\downarrow$ odpowiednio w miejscach bloków x_1 oraz x_n . Są to szukane kontury quasi-permutacyjne $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. \square

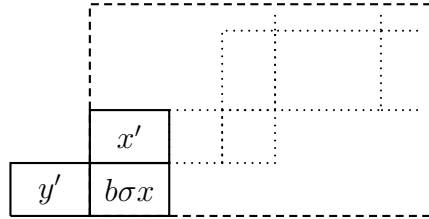
DOWÓD STWIERDZENIA 4.1.6. Z założenia o \mathcal{A} wynika, że nie istnieje $y' \neq y, x$ takie, że y' leży w wierszu konturu \mathcal{A}' zawierającym x . Zakładamy też, że \mathcal{A}' jest spójny i acykliczny, a zatem y jest jedynym blokiem w zawierającej go kolumnie konturu \mathcal{A}' .

Dowodzimy, że w orbicie konturu \mathcal{A}' istnieje kontur quasi-permutacyjny. Z założenia o \overrightarrow{B} -swobodzie konturu \mathcal{A} w bloku x wynika, że istnieje permutacja $\sigma \in \Sigma_m$ taka, że dla każdego $a \in B_m(K)$ istnieją $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ takie, że $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}_{\sigma^{-1}a\sigma} \cdot \mathfrak{g}$ jest quasi-permutacyjnym konturem (wszystkie jego bloki są macierzami quasi-permutacyjnymi). Zgodnie z punktem (2) Definicji 4.1.5, element \mathfrak{h} działa jak identyczność na tym wierszu konturu $\mathcal{A}_{\sigma^{-1}a\sigma}$, który zawiera $\sigma^{-1}a\sigma x$. Rozważmy kontur \mathcal{A}'' postaci:

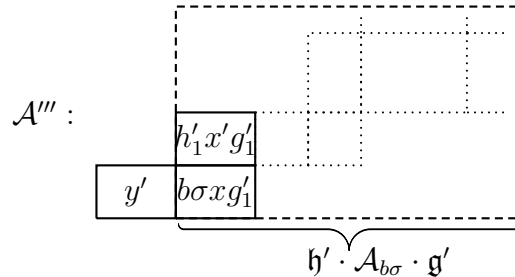


przy czym \mathcal{A}_σ powstaje z konturu \mathcal{A} przez zastąpienie bloku x blokiem σx . Kontur \mathcal{A}_σ jest quasi-permutacyjny i nietrudno widzieć, że lewostronne działanie grupy $B_m(K)$ na blok σx tego konturu można zrekompensować działaniem $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$.

Rozważmy blok σy konturu \mathcal{A}'' , gdzie $y \in M_{m \times q}(K)$. Na blok ten działamy z lewej strony przez $B_m(K)$ i z prawej strony przez $Gl_q(K)$. Na mocy Lemma 8 w [35] w orbicie elementu σy względem działania $B_m(K) - B_q(K)$ znajduje się macierz quasi-permutacyjna $b\sigma y b'$, gdzie $b \in B_m(K), b' \in B_q(K)$. Przyjmijmy, że rząd macierzy $b\sigma y b'$ równy jest i . Istnieje macierz $\sigma' \in \Sigma_q$ taka, że $y' := b\sigma y b' \sigma'$ ma pierwsze i -kolumn niezerowych, a pozostałe, o ile macierz y' ma więcej niż i kolumn, są zerowe. Co więcej, σ' jest taka, że jedynki w macierzy y' znajdują się w miejscach $(1, j_1), \dots, (i, j_i)$, gdzie $j_1 < j_2 < \dots < j_i$. Zatem otrzymujemy kontur postaci:



Skoro jednak macierz $b \in B_m(K)$, a lewostronne działanie $B_m(K)$ na blok σx konturu \mathcal{A}_σ można zrekompensować działaniem $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$, to istnieją $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g}' \in \mathfrak{G}$ takie, że w orbicie konturu \mathcal{A}'' znajduje się kontur quasi-permutacyjny \mathcal{A}''' będący sumą rozłączną konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A}_{b\sigma} \cdot \mathfrak{g}'$ oraz bloku y' postaci:



przy czym przyjmujemy, że h'_1, g'_1 są macierzami stojącymi odpowiednio na jednej ze współrzędnych \mathfrak{h} i jednej ze współrzędnych \mathfrak{g} , działających na kontur $\mathcal{A}_{b\sigma}$. Kładąc zatem $\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A}'''$ dostajemy pierwszą część tezy stwierdzenia. Zauważmy też, że skoro $b \in B_m(K)$, to działanie $B_m(K)$ na blok $b\sigma x g'_1$ konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A}_{b\sigma} \cdot \mathfrak{g}'$ można w dalszym ciągu zrekompensować przy pomocy działania $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$.

Aby dokończyć dowód stwierdzenia pozostaje wykazać, że kontur $\overline{\mathcal{A}}$ ma w bloku y' swobodę typu $B\downarrow$. Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami y' to macierz quasi-permutacyjna rozmiaru $m \times q$ postaci:

$$y' = \left[\begin{array}{ccc|c} \vdots & & & \\ 1 & \leftarrow j_1 & & \\ \vdots & & & \\ & 1 & \leftarrow j_2 & \\ \vdots & & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \leftarrow j_i \\ & & & 1 \\ & & & \vdots \end{array} \right] \quad (*)$$

Niech $B' \subseteq \text{Gl}_q(\mathbb{K})$ będzie zbiorem macierzy postaci

$$B' := \begin{bmatrix} B_i(\mathbb{K}) & 0 \\ * & B_{q-i}(\mathbb{K}) \end{bmatrix}$$

Wykażemy, że jeśli $B := B_m(\mathbb{K})$, to wówczas zachodzi inkluzja

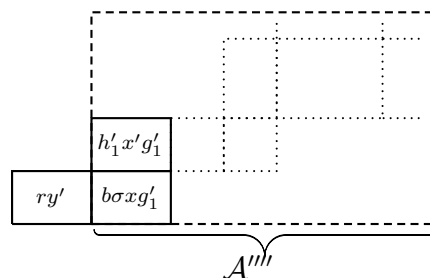
$$y'B' \subseteq By'. \quad (4.1.1)$$

Pokażmy najpierw, jak z inkluzji tej wynika $B\downarrow$ -swoboda konturu $\overline{\mathcal{A}}$ w bloku y' .

Niech $\epsilon \in \Sigma_q$ będzie postaci $\begin{bmatrix} 0 & id_i \\ id_{q-i} & 0 \end{bmatrix}$. Zauważmy, że

$$B' = \epsilon B_q(\mathbb{K})\epsilon^{-1}. \quad (4.1.2)$$

Przyjmijmy, że $\mathcal{A}'''' := \mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A}_{b\sigma} \cdot \mathfrak{g}'$. Niech $\mathfrak{G}' = \text{Gl}_q(\mathbb{K}) \times \mathfrak{G}$. Szukamy takiego $\tau \in \Sigma_q$, że dla każdego $a \in B_q(\mathbb{K})$ kontur postaci: $\mathcal{A}'''' \cup \{y'\tau^{-1}a\tau\}$, powstający z $\overline{\mathcal{A}}$ po zamianie bloku y' na blok $y'\tau^{-1}a\tau$, ma w swojej $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}'$ orbicie kontur kontur quasi-permutacyjny. Weźmy $\tau^{-1} := \epsilon$ z równości (4.1.2). Dla każdego $a \in B_q(\mathbb{K})$ niech $b' \in B'$ będzie postaci $b' = \epsilon a \epsilon^{-1}$. Na mocy (4.1.1) istnieje taki element $r \in B$, że $ry' = y'b'$. Aby wykazać $B\downarrow$ swobodę $\overline{\mathcal{A}}$ w y' wystarczy zatem wykazać, że dla dowolnego $r \in B$ kontur $\mathcal{A}'''' \cup \{ry'\}$ ma w swojej $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}'$ -orbicie kontur quasi-permutacyjny.



Mnożymy wiersz konturu $\mathcal{A}'''' \cup \{ry'\}$ zawierający ry' z lewej strony przez $r^{-1} \in B$. Przyjmijmy, że \mathcal{A}'''' przechodzi przy tym działaniu na kontur \mathcal{A}''''_{r-1} . Wówczas w miejscu bloku ry' stoi blok quasi-permutacyjny y' . Korzystając natomiast z faktu, że działanie $B_m(K)$ na blok $b\sigma xg'_1$ konturu \mathcal{A}'''' można zrekompensować przez działanie $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ widzimy, że istnieją takie $\mathfrak{h}'' \in \mathfrak{H}$ (działające trywialnie na wierszu konturu \mathcal{A}''''_{r-1} zawierającym $r^{-1}b\sigma xg'_1$) oraz $\mathfrak{g}'' \in \mathfrak{G}$, że $\mathfrak{h}'' \cdot \mathcal{A}''''_{r-1} \cdot \mathfrak{g}'' \cup \{y'\}$ jest konturem quasi-permutacyjnym, pozostającym w orbicie $\mathcal{A}'''' \cup \{ry'\}$. A zatem, że kontur $\overline{\mathcal{A}}$ ma w bloku y' swobodę typu $B\downarrow$.

Do zakończenia dowodu całego stwierdzenia brakuje nam jeszcze uzasadnienia inkluzji (4.1.1). Weźmy $b' \in B'$ postaci $(\beta_{c,d})$, gdzie $1 \leq c, d \leq q$ oraz $\beta_{c,d} \in K$. Wówczas macierz $y'b'$ ma postać:

$$y'b' = \left[\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{j_1,1} & \beta_{j_1,2} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_{j_2,2} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{j_i,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right] \mathbf{0}$$

Dla $1 \leq l \leq i$, niezerowy wiersz j_l macierzy $y'b'$ jest dokładnie wierszem o indeksie l w macierzy b' . Co więcej, wiersze o indeksach j_1, \dots, j_i są jedynymi niezerowymi wierszami macierzy $y'b'$. Aby pokazać (4.1.1) wystarczy wskazać $a \in B$ takie, że $ay' = y'b'$. Niech $a = (\alpha_{c,d}) \in M_{m \times m}(K)$ będzie macierzą, w której j_l -ta kolumna jest identyczna z l -tą kolumną macierzy $y'b'$, dla $1 \leq l \leq i$. Jest to możliwe, bo j_l są indeksami wierszy w $y' \in M_{m \times q}$, a więc $j_l \leq m$, dla wszystkich l . Pozostałe kolumny macierzy a o indeksach $s \neq j_l$, są postaci e_s^T , gdzie $e_s \in K^m$ jest s -tym wektorem bazy standardowej. Macierz a ma zatem postać:

$$a = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & \beta_{j_1,1} & \cdots & \beta_{j_1,2} & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \beta_{j_2,2} & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \beta_{j_i,i} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array} \right]$$

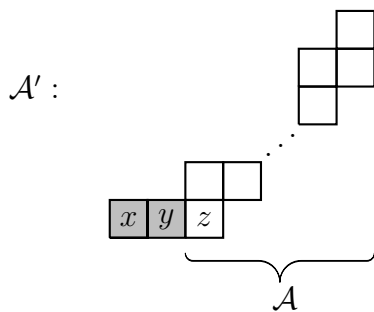
Zauważmy, że $\alpha_{c,d} = 0$, o ile $c > d$. Co więcej, na przekątnej macierzy a znajdują się albo jedynki, albo elementy $\beta_{j_l,l}$, gdzie $1 \leq l \leq i$. Elementy $\beta_{j_l,l}$ znajdują się jednak na przekątnej macierzy b' . Zatem $a \in B$. Łatwo sprawdzić, że $ay' = y'b'$. To kończy dowód inkluzji (4.1.1) i całego stwierdzenia. \square

Przejdziemy teraz do realizacji drugiego kroku na drodze do dowodu Lematu 4.1.2. Mając 0 – 1-kowy kontur schodkowy o swobodzie w jednym z końców, dołączymy do niego dwa bloki tak, by uzyskać kontur o szkielecie, którego graf rozdzielony jest grafem Dynkina typu D_n . Zaczniemy od następującego faktu technicznego.

Stwierdzenie 4.1.8. *Załóżmy, że $x \in M_{m \times k}(\mathbb{K})$ oraz $y \in M_{m \times q}(\mathbb{K})$. Wówczas w $B_m(\mathbb{K}) - \text{Gl}_k(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_q(\mathbb{K})$ -orbicie konturu $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix}$, o następujących własnościach:*

- (1) \bar{x} jest macierzą quasi-permutacyjną, zaś \bar{y} jest macierzą 0 – 1-kową, oraz w każdej kolumnie \bar{y} są co najwyżej dwa wyrazy równe 1. Co więcej, jeśli w danej kolumnie macierzy \bar{y} jedynki znajdują się w wierszach $i_1 \neq i_2$, to jeden z wierszy i_1, i_2 macierzy \bar{x} jest zerowy,
- (2) dla dowolnego $d \in D_k(\mathbb{K})$ istnieją takie $e \in D_m(\mathbb{K})$ oraz $f \in D_q(\mathbb{K})$, że $e\bar{x}d = \bar{x}$ oraz $e\bar{y}f = \bar{y}$.

Wniosek 4.1.9. *Rozważmy acykliczny kontur \mathcal{A}' postaci $\mathcal{A} \cup \{x, y\}$ będący sumą rozłączną konturu schodkowego \mathcal{A} o bloku końcowym z oraz dwóch bloków x, y takich, że x, y, z są jedynymi blokami należącymi do wiersza konturu \mathcal{A}' , zawierającego z .*



Wówczas w orbicie konturu \mathcal{A}' znajduje się kontur 0 – 1-kowy o swobodzie typu $D \downarrow$ w miejscu bloku x .

Dowód. Załóżmy, że $x \in M_{m \times k}(\mathbb{K})$ oraz $y \in M_{m \times q}(\mathbb{K})$. Na mocy Stwierdzenia 4.1.6 możemy zakładać, że kontur \mathcal{A} jest w postaci quasi-permutacyjnej i ma swobodę typu \overrightarrow{B} w bloku z . Zatem istnieje takie $\sigma \in \Sigma_m$, że lewostronne działanie $\sigma^{-1} B_m(\mathbb{K}) \sigma$ na blok z konturu \mathcal{A} można zrekompensować działaniem $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$. Korzystając ze Stwierdzenia 4.1.8 dla konturu $\begin{bmatrix} \sigma x & \sigma y \end{bmatrix}$ wiemy, że w jego $B_m(\mathbb{K}) - \text{Gl}_k(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_q(\mathbb{K})$ -orbicie znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\begin{bmatrix} \overline{\sigma x} & \overline{\sigma y} \end{bmatrix}$. Wiemy, że $\overline{\sigma x} = b\sigma xg$, $\overline{\sigma y} = b\sigma yh$, dla pewnych $b \in B_m(\mathbb{K})$, $g \in \text{Gl}_k(\mathbb{K})$, $h \in \text{Gl}_q(\mathbb{K})$. Mnożąc wiersz konturu \mathcal{A}' zawierający blok z przez $\sigma^{-1}b\sigma$ dostajemy kontur postaci: $\{\sigma^{-1}\overline{\sigma x}g^{-1}, \sigma^{-1}\overline{\sigma y}h^{-1}\} \cup \mathcal{A}_{\sigma^{-1}b\sigma}$, gdzie $\mathcal{A}_{\sigma^{-1}b\sigma}$ powstaje z konturu \mathcal{A} przez zamianę bloku z na blok $\sigma^{-1}b\sigma z$. Korzystając z \overrightarrow{B} -swobody konturu \mathcal{A} widzimy zatem, że w orbicie \mathcal{A}' znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\{\sigma^{-1}\overline{\sigma x}, \sigma^{-1}\overline{\sigma y}\} \cup \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}_{\sigma^{-1}b\sigma} \cdot \mathfrak{g}$, dla pewnych $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$. Pokażemy, że ma on swobodę typu $D \downarrow$ w miejscu bloku x .

Niech $\overline{\mathcal{A}} = \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}_{\sigma^{-1}b\sigma} \cdot \mathfrak{g}$. Łatwo widzieć, że $\begin{bmatrix} \sigma^{-1}\overline{\sigma x} & \sigma^{-1}\overline{\sigma y} \end{bmatrix}$ spełnia nadal warunki wymienione w punkcie (2) Stwierdzenia 4.1.8, a zatem dla każdego $d \in D_k(\mathbb{K})$ istnieją

takie $e \in D_m(\mathbb{K})$ oraz $f \in D_q(\mathbb{K})$, że $e\sigma^{-1}\overline{\sigma x}d = \sigma^{-1}\overline{\sigma x}$ oraz $e\sigma^{-1}\overline{\sigma y}f = \sigma^{-1}\overline{\sigma y}$. Co więcej, $e = \sigma^{-1}e'\sigma$, dla pewnego $e' \in D_m(\mathbb{K})$. Jednak mnożenie $\overline{\mathcal{A}}$ w miejscu bloku z z lewej strony przez $\sigma^{-1}B_m(\mathbb{K})\sigma$ można zrekompensować działaniem $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$, a zatem jeśli przez $\overline{\mathcal{A}}_e$ oznaczymy kontur powstały z $\overline{\mathcal{A}}$ przez zamianę bloku z na ez , to w orbicie konturu $\{e\sigma^{-1}\overline{\sigma x}d, e\sigma^{-1}\overline{\sigma y}f\} \cup \overline{\mathcal{A}}_e$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Zatem $\{\sigma^{-1}\overline{\sigma x}, \sigma^{-1}\overline{\sigma y}\} \cup \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}_{\sigma^{-1}b\sigma} \cdot \mathfrak{g}$ ma $D\downarrow$ -swobodę w miejscu bloku x . \square

DOWÓD STWIERDZENIA 4.1.8. Dowodzimy, że w $B_m(\mathbb{K}) - \text{Gl}_k(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_q(\mathbb{K})$ -orbicie konturu $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\begin{bmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{bmatrix}$ spełniający (1). Rozumujemy przez indukcję ze względu na m . Gdy $m = 1$ teza jest jasna. Niech $m = 2$. Jeśli rzędy obydwu macierzy x, y są równe 2, wówczas również nie ma czego dowodzić. Jeśli x ma rząd 2, zaś y ma rząd ≤ 1 , wówczas kontur postaci $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ ma w swojej $B_2(\mathbb{K}) - \text{Gl}_k(\mathbb{K}) \times \text{Gl}_q(\mathbb{K})$ -orbicie kontur postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Jeśli α lub β są równe 0, wówczas nie ma czego dowodzić. W przeciwnym przypadku działamy na powyższy kontur macierzami: $b \in B_2(\mathbb{K}), g \in \text{Gl}_k(\mathbb{K})$ oraz $id_q \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$, przy czym

$$b = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha\beta^{-1} \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & id_{k-2} \end{bmatrix}$$

i dostajemy kontur w żądanej postaci. Analogicznie, gdy macierz y ma rząd 2, a macierz x rząd ≤ 1 . Jeśli obydwie macierze x, y mają rząd ≤ 1 , wówczas $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ ma w swojej orbicie kontur postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 & \cdots \\ \beta_1 & 0 & \cdots & \beta_2 & 0 & \cdots \end{bmatrix},$$

dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$. Łatwo widzieć, że orbicie tego konturu znajdziemy kontur w żądanej postaci. Zatem pierwszy krok indukcji jest zakończony.

Założmy, że $m > 2$. Istnieją takie $b \in B_m(\mathbb{K})$ oraz $g \in \text{Gl}_k(\mathbb{K})$, że macierz $x' := bxg$ jest postaci (*) z dowodu Stwierdzenia 4.1.6. Istnieje dalej macierz $g' \in \text{Gl}_q(\mathbb{K})$, że $y' = byg'$ jest w postaci kolumnowej zredukowanej. Niech $i, j \leq m$ będą indeksami odpowiednio: ostatniego niezerowego wiersza w x' oraz ostatniego niezerowego wiersza w y' . Jeśli $i, j < m$, wówczas teza sprowadza się do jednego z poprzednich kroków indukcji. Możemy więc założyć, że i lub j jest równe m .

Rozważamy następujące przypadki:

- $m = j > i$. Wówczas, po ewentualnej permutacji kolumn x' , kontur $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ jest postaci:

x''	0	y''
0	r	0

}
}

x'
 y'

przy czym macierze x'', y'' mają i wierszy, zaś macierz r jest postaci:

$$r = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (**)$$

Zauważmy zatem, że istnieje macierz $b \in \begin{bmatrix} id_i & 0 \\ 0 & b' \end{bmatrix} \subseteq B_m(K)$ taka, że $b'r$ jest macierzą quasi-permutacyjną. Jednocześnie $bx' = x'$. Zatem teza wynika z założenia indukcyjnego zastosowanego do $\begin{bmatrix} bx'' & by'' \end{bmatrix}$.

- $m = i > j$. Wówczas, po ewentualnym przepermutowaniu kolumn x' , kontur $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ jest postaci:

x''	0	y''
0	p	0

}
}

x'
 y'

gdzie x'', y'' są pewnymi macierzami o j wierszach, zaś p jest macierzą quasi-permutacyjną. Zatem teza wynika w tym przypadku z założenia indukcyjnego zastosowanego do x'', y'' .

- Niech $i = j = m$. Zauważmy, że wówczas kontur $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ jest taki, że x' jest macierzą quasi-permutacyjną, a y' ma postać (**). Rozważmy ostatnią kolumnę macierzy y' . Jeśli, poza wierszem m -tym, nie występuje w niej element niezerowy,

wówczas teza łatwo wynika z założenia indukcyjnego, bowiem kontur $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ przyjmuje, po ewentualnej permutacji kolumn w x' , postać:

$$\begin{array}{|ccc|c|ccc|c|} \hline & & & 0 & & & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (4.1.3)$$

Przyjmijmy zatem, że w ostatniej kolumnie macierzy y' znajduje się element niezerowy, nie będący w m -tym wierszu. Przyjmijmy, że $n < m$ jest największym indeksem wiersza zawierającego taki element. Przyjmijmy też, że x', y' są wybrane tak, że n jest możliwie najmniejsze, to znaczy: jeśli $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}$ jest w $B_m(K) - Gl_k(K) \times Gl_q(K)$ -orbicie konturu $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$, macierz x_1 jest quasi-permutacyjna, zaś macierz y_1 jest postaci (**), to o ile w ostatniej kolumnie macierzy y_1 znajduje się element niezerowy w wierszu różnym od m -tego, to element ten znajduje się w wierszu n' , gdzie $n' \geq n$. Rozważamy dwa przypadki:

- wiersze n -ty oraz m -ty macierzy x', y' mają, po ewentualnej permutacji kolumn w x' , postać:

$$\begin{array}{|cccc|cccc|} \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline \end{array},$$

dla pewnego $\alpha \neq 0$. Wówczas istnieją takie $b \in B_m(K)$, $g \in Gl_k(K)$, że by' ma n -ty wiersz zerowy, a pozostałe wiersze takie jak odpowiednie wiersze y' . Co więcej $bx'g = x'$. Jednak para $\begin{bmatrix} x' & by' \end{bmatrix}$ znajduje się w $B_m(K) - Gl_k(K) \times Gl_q(K)$ -orbicie $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$, zaś by' ma postać (**). Zatem z wyboru n wynika, że ten przypadek sprowadza się do rozpatrzonej wcześniej sytuacji (4.1.3).

- wiersze n -ty oraz m -ty macierzy x', y' mają, po ewentualnej permutacji kolumn w x' , postać:

$$\begin{array}{|cccc|cccc|} \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline \end{array},$$

dla pewnego $\alpha \neq 0$. Wówczas możemy, przy pomocy elementów $b \in B_m(K)$, wyzerować wszystkie elementy znajdujące się powyżej α w ostatniej kolumnie y' . Zatem w orbicie $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ znajduje się kontur postaci:

$$\begin{array}{|ccc|c|ccc|c|} \hline & & & 0 & & & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Teza wynika zatem łatwo z założenia indukcyjnego.

Krok indukcyjny jest zatem zakończony. Wykazaliśmy (1).

Dowodzimy (2). Rozważmy dowolne $d = (\delta_1, \dots, \delta_k) \in D_k(\mathbb{K})$. Niech j_1, \dots, j_t będą indeksami niezerowych wierszy w \bar{x} . Wówczas na mocy (1) w każdym niezerowym wierszu macierzy $\bar{x}d$ znajduje się dokładnie jeden element niezerowy, równy jednemu z δ_i . Dla j_l -tego wiersza macierzy $\bar{x}d$ oznaczmy ten element, o ile wiersz ten jest niezerowy, przez δ'_{j_l} . Wówczas kładąc $e = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in D_m(\mathbb{K})$, gdzie

$$\eta_s = \begin{cases} (\delta'_s)^{-1} & , \text{ o ile } s \in \{j_1, \dots, j_t\} \\ 1 & , \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

dostajemy $e\bar{x}d = \bar{x}$. Załóżmy dalej, że dla pewnego $l \in \{j_1, \dots, j_t\}$ istnieje takie $l' \neq l$, że w pewnej kolumnie macierzy \bar{y} w wierszach l i l' znajdują się jedynki. Wówczas, zgodnie z (1), wiersz l' macierzy \bar{x} jest zerowy.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \leftarrow l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \leftarrow l' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \end{array} \right)$$

Niech $(j_1, j'_1), \dots, (j_s, j'_s)$ będą wszystkimi parami indeksów mającymi własność taką, jak para (l, l') . Rozważmy macierz $f = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in D_m(\mathbb{K})$, gdzie:

$$\gamma_s = \begin{cases} (\delta'_{j'_s})^{-1} & , \text{ o ile } s = j'_s, \text{ dla pewnego } l \\ 1 & \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas $fe\bar{x}d = \bar{x}$. Zauważmy natomiast, że wobec (1) w każdej kolumnie macierzy $fe\bar{y}$ stoją co najwyżej dwa niezerowe elementy, i zgodnie z definicją macierzy e, f , elementy te są równe. Zatem istnieje macierz diagonalna $d' \in D_q(\mathbb{K})$ taka, że $fe\bar{y}d' = \bar{y}$. \square

Zauważmy, że w sformułowaniu Wniosku 4.1.9 nie zakładaliśmy nic o wielkości bloków rozważanego konturu. Istotnie, kontur ten ma szkielet, którego graf rozdzielony jest grafem Dynkina D_n , a więc zgodnie ze Stwierdzeniem 3.1.2 na przestrzeni konturów o tym szkielecie musi być skończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit. Kluczową rolę odgrywa natomiast fakt istnienia swobody w odpowiednim bloku. Pozwoli nam ona na dobudowanie kolejnych bloków tak, by uzyskać kontur opisany w tezie Lematu 4.1.2. Teraz, gdy przechodzimy do ostatniego kroku na drodze do dowodu lematu, rozmiary bloków zaczną mieć istotne znaczenie.

Definicja 4.1.10. Niech $x \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ będzie macierzą 0–1-kową. Powiemy, że x jest **wierszowo quasi-permutacyjna** jeśli w każdym wierszu macierzy x znajduje się co najwyżej jeden element niezerowy, oraz jeśli istnieje takie l , że każda kolumna macierzy x , poza l -tą, zawiera co najwyżej jeden element niezerowy. Ponadto l -ta kolumna macierzy x zawiera co najwyżej dwa elementy niezerowe. Analogicznie definiujemy macierz **kolumnowo quasi-permutacyjną**.

Odnotujmy oczywistą obserwację.

Obserwacja 4.1.11. Załóżmy, że macierz $x \in M_{n \times k}(\mathbb{K})$ jest kolumnowo quasi-permutacyjna (odpowiednio: wierszowo quasi-permutacyjna). Wówczas dla każdej macierzy diagonalnej $e \in D_n(\mathbb{K})$ istnieje macierz diagonalna $f \in D_k(\mathbb{K})$ taka, że $exf = x$ (odpowiednio: dla każdej macierzy diagonalnej $f \in D_k(\mathbb{K})$ istnieje macierz diagonalna $e \in D_n(\mathbb{K})$ taka, że $exf = x$).

Lemat 4.1.12. Rozważmy kontur $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$, gdzie $x, y \in M_{3 \times 2}(\mathbb{K})$. Wówczas istnieją macierze $h \in \text{Gl}_3(\mathbb{K})$, $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$, $d \in D_2(\mathbb{K})$ takie, że kontur $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix}$ jest 0 – 1-kowy, gdzie $\bar{x} := hxg$, $\bar{y} := hyd$. Macierz \bar{x} jest wierszowo quasi-permutacyjna, zaś macierz \bar{y} jest kolumnowo quasi-permutacyjna. Zatem dla dowolnej macierzy diagonalnej $e \in D_2(\mathbb{K})$ istnieją macierze $h_e \in D_3(\mathbb{K})$, $d_e \in D_2(\mathbb{K})$ takie, że macierze $\bar{x}_d := h_e \bar{x} e$, $\bar{y}_d = h_e \bar{y} d_e$ są 0 – 1-kowe.

DOWÓD LEMATU 4.1.12. Działając lewostronnie grupą $\text{Gl}_3(\mathbb{K})$ na kontur $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ możemy go doprowadzić do postaci $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$, gdzie y' jest jedną z następujących macierzy:

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.4)$$

gdzie $\theta \in \mathbb{K}$. Stosując dalej operacje kolumnowe na x' możemy doprowadzić kontur $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ do postaci $\begin{bmatrix} x'' & y' \end{bmatrix}$, gdzie x'' jest w jednej z następujących postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.5)$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Jako, że operacje elementarne mnożenia trzeciego wiersza przez skalar, oraz odejmowania od pierwszych dwóch wierszy wielokrotności wiersza trzeciego nie zmieniają macierzy y' , możemy wykonać te operacje na macierzach postaci (4.1.5) dochodząc, także przy pomocy operacji na kolumnach x'' , do konturu $\begin{bmatrix} x''' & y' \end{bmatrix}$, gdzie x''' jest w jednej z postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.6)$$

dla $\alpha \in \mathbb{K}$. Zatem o ile x''' nie jest trzecią lub czwartą z wymienionych w (4.1.6) macierzy, dla $\alpha \neq 0$, to przyjmujemy $\bar{x} := x'''$ oraz $\bar{y} := y'$, gdzie y' jest w jednej z postaci (4.1.4), dla $\theta = 0$ lub $\theta = 1$. Wówczas \bar{x} jest macierzą quasi-permutacyjną, a \bar{y} jest macierzą kolumnowo quasi-permutacyjną.

Pozostaje zatem przypadek, gdy macierz x''' równa jest jednej z macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dla pewnego niezerowego $\alpha \in K$. Jeśli y' jest postaci (4.1.4) i ma rząd równy 1, wówczas działając na $\begin{bmatrix} x''' & y' \end{bmatrix}$ z lewej strony macierzą elementarną mnożenia drugiego wiersza przez α^{-1} , nie zmieniamy bloku y' . Zatem i w tym przypadku w $\text{Gl}_3(K) - \text{Gl}_2(K) \times \text{D}_2(K)$ -orbicie konturu $\begin{bmatrix} x''' & y' \end{bmatrix}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix}$. Co więcej \bar{x} jest wierszowo quasi-permutacyjna, oraz macierz \bar{y} jest kolumnowo quasi-permutacyjna. Jeśli y' jest rzędu 2 to rozumowanie jest równie proste.

Pokazaliśmy zatem, że jeśli $x, y \in M_{3 \times 2}(K)$, to w $\text{Gl}_3(K) - \text{Gl}_2(K) \times \text{D}_2(K)$ -orbicie konturu $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix}$ taki, że \bar{x} jest wierszowo quasi-permutacyjna, oraz macierz \bar{y} jest kolumnowo quasi-permutacyjna. Zatem z Obserwacji 4.1.11 wynika, że dla każdego $e \in \text{D}_2(K)$ istnieją $h_e \in \text{D}_3(K), d_e \in \text{D}_2(K)$ takie, że macierze $\bar{x}_d := h_e \bar{x} e, \bar{y}_d = h_e \bar{y} d_e$ są 0 – 1-kowe. \square

Zakończyliśmy przygotowania do dowodu Lematu 4.1.2. Sam dowód nie przedstawia obecnie żadnych trudności.

DOWÓD LEMATU 4.1.2. Rozważmy kontur $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_S$. Niech $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ będą podkonturami konturu \mathcal{A} o szkieletach równych odpowiednio $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$. Na mocy Wniosku 4.1.9 możemy zakładać, że kontur $\mathcal{A}_1 \cup \{x, y, z\}$ jest w postaci 0 – 1 i ma swobodę typu D \downarrow w bloku x . Dowód jest indukcją ze względu na liczbę bloków konturu \mathcal{A}_2 . Możemy zakładać, że \mathcal{A}_2 składa się z parzystej liczby bloków. Istotnie, jeśli teza zachodzi, gdy \mathcal{A}_2 ma $2n$ bloków, to zachodzi także, gdy ma ich $2n - 1$, dla $n > 0$. Poprawność kolejnych kroków indukcyjnych wynika natychmiast z Lematu 4.1.12. \square

4.1.3 Dowód Lematu 4.1.3

W paragrafie tym udowodnimy Lemat 4.1.3. Zaczniemy od pewnych faktów przygotowawczych. Przyjrzymy się dokładniej $\text{Gl}_3(K)^3 - \text{Gl}_2(K)^4$ -orbitom konturów o szkieletach postaci (\diamond) , zdefiniowanych w sformułowaniu Lematu 4.1.3. Będziemy nazywać je krótko: konturami postaci (\diamond) (o blokach a_i, b_i , dla $i = 1, 2, 3$).

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_1 \\ \hline a_2 & \\ \hline a_3 & \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline & b_2 \\ \hline & \\ \hline & b_3 \\ \hline \end{array}
 \quad (\diamond)$$

W dalszym ciągu będziemy czasem stosować następującą konwencję zapisu bloków konturów takich, jak w Lemacie 4.1.3. Choć rozważane przez nas kontury będą miały bloki rozmiarów 3×2 , uprościmy zapis graficzny jeśli w danym wierszu konturu pojawią się macierze, które w odpowiadających sobie wierszach mają zera. Zapis tych zer zostanie pominięty. I tak dla przykładu parę macierzy postaci

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

zapisywać będziemy w postaci:

$$\begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Definicja 4.1.13. Niech $a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 \in M_{3 \times 2}(K)$ będą niezerowymi macierzami. Powiemy, że dwie macierze w postaci blokowej

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}$$

są **podobnymi kolumnowo trójkami** jeśli \mathcal{A}_1 doprowadzić można do \mathcal{A}_2 za pomocą następujących operacji elementarnych:

- operacje kolumnowe
- operacje wierszowe w obrębie bloku a_1 ,
- operacje wierszowe w obrębie bloku a_2 ,
- operacje wierszowe w obrębie bloku a_3 .

Obserwacja 4.1.14. Następujące kontury reprezentują wszystkie, z dokładnością do kolejności bloków, parami różne klasy podobieństwa kolumnowego trójek macierzy rozmiarów 3×2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ (i) & (ii) & (iii) & (iv) & (v) & (vi) & (vii) \end{array}$$

W powyższym wykazie, jak i w dowodzie obserwacji przyjmujemy konwencję przyjętą przed Definicją 4.1.13, a więc pomijamy zapis wierszy zerowych.

Dowód. Rozważmy dowolną trójkę $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$, taką jak w Definicji 4.1.13. Załóżmy, że $r(a_1) = r(a_2) = r(a_3) = 1$. Możemy przyjąć, że macierze a_i mają jeden niezerowy wiersz. Istotnie, każdy z bloków a_i doprowadzić możemy, niezależnie od pozostałych bloków, do postaci wierszowej zredukowanej, której jedyne niezerowe elementy znajdują się w pierwszym wierszu. Możemy zatem przyjąć, zgodnie z naszą notacją, że \mathcal{A} jest macierzą rozmiarów 3×2 , w której każdy wiersz jest niezerowy. Wykażemy, że \mathcal{A} jest trójką kolumnowo podobną do (i), (ii) lub (iii).

Jeśli \mathcal{A} jest macierzą rzędu 1, to jest trójką kolumnowo podobną do (i). Istotnie, po wykonaniu operacji na kolumnach tej macierzy dostajemy, z dokładnością do kolejności wierszy, macierz:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \alpha & 0 \\ \hline \beta & 0 \\ \hline \end{array}$$

dla pewnych $\alpha, \beta \neq 0$ należących do ciała K . Po przemnożeniu drugiego i trzeciego wiersza powyższej macierzy odpowiednio przez α^{-1} oraz β^{-1} dochodzimy do postaci (i).

Jeśli \mathcal{A} jest macierzą rzędu 2, to jest trójką kolumnowo podobną do (ii) lub (iii). Istotnie, po wykonaniu operacji na kolumnach tej macierzy dostajemy, z dokładnością do kolejności wierszy, macierz:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$$

gdzie $\alpha, \beta \in K$ oraz $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Jeśli $\alpha = 0$ lub $\beta = 0$, to mnożąc trzeci wiersz przez skalar dostajemy trójkę kolumnowo podobną do (ii). Jeśli $\alpha, \beta \neq 0$, to trójka \mathcal{A} jest kolumnowo podobna do (iii).

Zauważmy dalej, że jeśli dowolna z macierzy a_1, a_2, a_3 jest rzędu 2, to przy pomocy operacji wierszowych można ją sprowadzić do macierzy postaci $\begin{bmatrix} id_2 \\ 0 \end{bmatrix}$; niezależnie od operacji, jakie wykonujemy na pozostałych blokach. Na podstawie poprzedniego przypadku jest zatem jasne, że wszystkie klasy podobieństwa kolumnowego trójek (a_1, a_2, a_3) takich, że $r(a_i) > 1$, dla pewnego $i \in \{1, 2, 3\}$, są reprezentowane przez kontury (iv)-(vii). \square

Definicja 4.1.15. *Dane są dwie pary niezerowych macierzy (a, b) oraz (a, b') o rozmiarach $n \times m$. Powiemy, że para (a, b) jest **wierszowo podobna** do (a, b') jeśli macierz blokową postaci $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ można sprowadzić do macierzy blokowej postaci $\begin{bmatrix} a & b' \end{bmatrix}$ poprzez następujące operacje elementarne:*

- operacje elementarne na wierszach zachowujące blok a ,
- operacje elementarne na kolumnach należących do bloku b .

Obserwacja 4.1.16. *Niech \mathcal{A} będzie konturem postaci (\diamond) takim, że kolumna (a_1, a_2, a_3) bloków konturu \mathcal{A} jest jedną z trójek macierzy reprezentowanych przez kontury (i)-(vii) wymienione w Obserwacji 4.1.14. Jeśli (a_i, b_i) jest parą macierzy występujących w pewnym wierszu konturu \mathcal{A} , to (a_i, b_i) jest wierszowo podobna do jednej z następujących par:*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (a)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (b)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (c)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (d)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (e)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (f)$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\
(g) & & (h) & & (i) & \\
\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
(j) & & (k) & & (l) & \\
\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \text{, gdzie } \theta \neq 0 \\
(m) & & (n) & & (o) & & (p) \\
\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \text{, gdzie } \theta \neq 0 \\
(q) & & (r) & & (s) & & (t)
\end{array}$$

Dowód. Załóżmy, że (a, b) jest dowolną parą macierzy wpisanych w wierszu konturu \mathcal{A} postaci (\diamond) , którego bloki a_i są jednej z postaci wymienionych w Obserwacji 4.1.14. Para ta jest wierszowo podobna do pary (a, b') gdzie b' jest postacią kolumnową zredukowaną macierzy b . Rozważamy następujące przypadki:

- Przypadek 1. $r(a) = r(b') = 1$. Wówczas macierz b' jest w jednej z postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.7)$$

gdzie α, β, γ są pewnymi elementami ciała K . Zauważmy, że drugi i trzeci wiersz macierzy a są zerowe, zatem następujące operacje elementarne nie zmieniają macierzy a :

- zamiana drugiego i trzeciego wiersza
- odjęcie wielokrotności drugiego lub trzeciego wiersza od pozostałych wierszy

Stąd jeśli b' jest pierwszą z macierzy wymienionych w (4.1.7) to (a, b') jest wierszowo podobna do:

- jednej z par: (a), (b), (c), o ile $\alpha = \beta = 0$,
- jednej z par: (d), (e), (f), o ile $\alpha \neq 0$ lub $\beta \neq 0$.

Jeśli b' jest drugą lub trzecią z macierzy wymienionych w (4.1.7) to (a, b') jest wierszowo podobna do (d), (e) lub (f).

- Przypadek 2. $r(a) = 2, r(b') = 1$. Wówczas macierz b' jest w jednej z postaci wymienionych w (4.1.7). W tym przypadku macierzy a nie zmieniają operacje elementarne odjęcia wielokrotności trzeciego wiersza od pierwszego lub drugiego wiersza. Stąd jeśli β lub γ są niezerowe, to para (a, b') jest wierszowo podobna do

pary (s). Załóżmy, że $\beta = \gamma = 0$. Wówczas jeśli b' jest drugą lub trzecią z macierzy wymienionych w (4.1.7), to para (a, b') jest wierszowo podobna do pary (n) lub pary (s), zaś jeśli b' jest pierwszą z macierzy wymienionych w (4.1.7) to (a, b') jest wierszowo podobna do:

- pary (m), o ile $\alpha = 0$,
- jednej z par (p), o ile $\alpha \neq 0$.

- Przypadek 3. $r(a) = 1, r(b') = 2$. Wówczas macierz b' jest w jednej z postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.8)$$

gdzie α, β, γ są pewnymi elementami ciała K . Stąd, podobnie jak w Przypadku 1, jeśli b' jest pierwszą z macierzy wymienionych w (4.1.8) to (a, b') jest wierszowo podobna do:

- jednej z par: (g), (h), (i), o ile $\alpha = 0$,
- jednej z par: (j), (k), (l), o ile $\alpha \neq 0$.

Jeśli b' jest drugą z macierzy wymienionych w (4.1.8) to (a, b') jest wierszowo podobna do:

- jednej z par: (g), (h), (i), o ile $\gamma = 0$,
- jednej z par: (j), (k), (l), o ile $\gamma \neq 0$.

Jeśli b' jest natomiast trzecią z macierzy wymienionych w (4.1.8), to (a, b') jest wierszowo podobna do jednej z par: (j), (k), (l).

- Przypadek 4. $r(a) = r(b') = 2$. Wówczas macierz b' jest w jednej z postaci wymienionych w (4.1.8). W tym przypadku macierzy a nie zmieniają operacje elementarne odjęcia wielokrotności trzeciego wiersza od pierwszego lub drugiego wiersza. Stąd jeśli b' jest pierwszą z macierzy wymienionych w (4.1.8), to para (a, b') jest wierszowo podobna do:

- jednej z par (t), o ile α, β są niezerowe,
- pary (r), o ile $\alpha \neq 0, \beta = 0$,
- pary (q), o ile $\alpha = 0, \beta \neq 0$,
- pary (o), o ile $\alpha = \beta = 0$.

Jeśli b' jest drugą lub trzecią z macierzy wymienionych w (4.1.8), to para (a, b') jest wierszowo podobna do jednej z par: (q), (r) lub (t).

□

Poniższy wniosek, ważny dla dowodu Lematu 4.1.3, jest natychmiastową konsekwencją Obserwacji 4.1.16.

Wniosek 4.1.17. Niech \mathcal{A} będzie konturem postaci (\diamond) . Wówczas w $\text{Gl}_3(\mathbb{K})^3 - \text{Gl}_2(\mathbb{K})^4$ -orbicie konturu \mathcal{A} znajduje się kontur \mathcal{A}' , o blokach $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$, który z dokładnością do kolejności wierszy, spełnia następujące dwie własności:

- (1) każdy blok a_i konturu \mathcal{A}' jest reprezentowany przez jeden z konturów z postaci (i)-(vii) wymienionych w Obserwacji 4.1.14,
- (2) każdy wiersz (a_i, b_i) konturu \mathcal{A}' jest reprezentowany przez jeden z wierszy (a)-(t), wymienionych w Obserwacji 4.1.16.

Udowodnimy teraz następujący kluczowy rezultat, do którego sprowadzimy następnie dowód całego Lematu 4.1.3.

Lemat 4.1.18. Niech \mathcal{K} będzie konturem w postaci (\diamond) o wierszach złożonych z bloków a_i, b_i , gdzie $i = 1, 2, 3$, oraz niech $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0, 0)$ będą parami elementów z ciała \mathbb{K} . Wówczas jeśli $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}$ działają na kontur \mathcal{K} zgodnie z (3.2.3), to istnieją takie $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathfrak{H}, (t, g_1, g_2, g_3) \in \mathfrak{G}$ oraz $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}^*$, że:

- $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{K} \cdot \mathfrak{g}$ jest konturem 0 – 1-kowym, to znaczy: macierze $h_i a_i t$ oraz $h_i b_i g_i$ są 0 – 1-kowe, dla $i = 1, 2, 3$,
- macierze $\gamma_i \cdot \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} \cdot g_i$ są 0 – 1-kowe, dla $i = 1, 2, 3$.

Dowód poprzedzimy następującą obserwacją.

Obserwacja 4.1.19. Niech (a, b) będzie jedną z par macierzy rozmiarów 3×2 wymienionych w punktach (a)-(t) Obserwacji 4.1.16. Niech x będzie niezerową macierzą rozmiaru 1×2 . Wówczas o ile (a, b) nie jest postaci (o), to istnieją macierze odwracalne $f \in \text{Gl}_3(\mathbb{K}), g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ oraz niezerowy element $\gamma \in \mathbb{K}$ takie, że:

$$fa = a, \quad fbg = b, \quad \gamma xg = x', \quad (4.1.9)$$

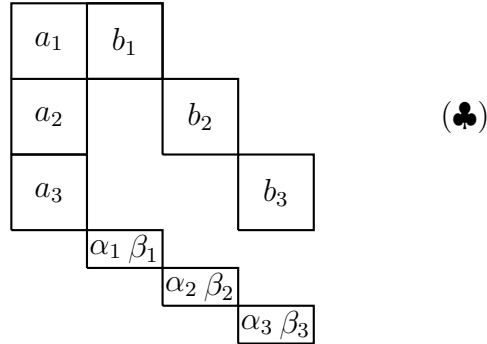
przy czym x' jest macierzą 0 – 1-kową.

Dowód. Niech $x = (\alpha_1, \alpha_2)$. Jeśli α_1 lub α_2 jest równe 0, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$.

Przyjmijmy najpierw, że druga kolumna macierzy b jest zerowa. Wówczas, aby spełnione były równości (4.1.9) wystarczy przyjąć, że $f = id_3, g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$, oraz $\gamma = \alpha_1^{-1}$. Teza zachodzi zatem, jeśli (a, b) jest w jednej z postaci (a)-(f) lub (m), (n), (p), (s).

W pozostałych przypadkach: (g)-(l) oraz (q), (r), (t), istnieje taki niezerowy wiersz macierzy b , powiedzmy, że jest to l -ty wiersz, że l -ty wiersz macierzy a jest zerowy. Wtedy l -ty wiersz macierzy b ma postać $(0, 1)$. Przyjmujemy wówczas, że $f \in \text{Gl}_3(\mathbb{K})$ jest macierzą diagonalną operacji elementarnej mnożenia l -tego wiersza przez $\alpha_1^{-1} \alpha_2$, zaś g jest macierzą postaci $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$ oraz $\gamma = \alpha_1^{-1}$. Dowód obserwacji jest zatem zakończony. \square

DOWÓD LEMATU 4.1.18. Dowód sprowadza się, w sposób oczywisty, do następującego, równoważnego sformułowania. Załóżmy, że do konturu \mathcal{K} dołączone zostają następujące trzy bloki rozmiarów 1×2 :



Wówczas jeśli grupy $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}$ działają na powyższy kontur zgodnie z (3.2.3), to w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie tak uzyskanego konturu znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Przejdźmy do dowodu. Elementy $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ działające na kontur postaci (\clubsuit) zgodnie z (3.2.3) oznaczać będziemy w następujący sposób:

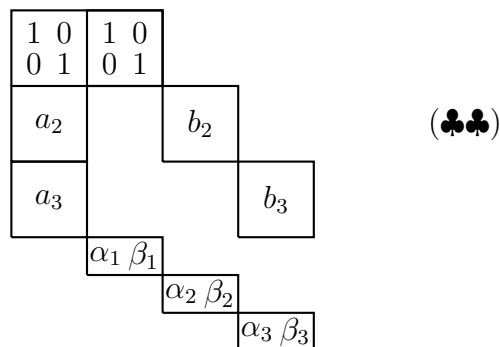
$$\mathfrak{h} = (f_1, f_2, f_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \mathfrak{g} = (t, g_1, g_2, g_3), \quad (4.1.10)$$

gdzie $f_i \in \text{Gl}_3(\mathbb{K}), t, g_i \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ oraz $\gamma_i \in \mathbb{K}^*$, dla $i = 1, 2, 3$.

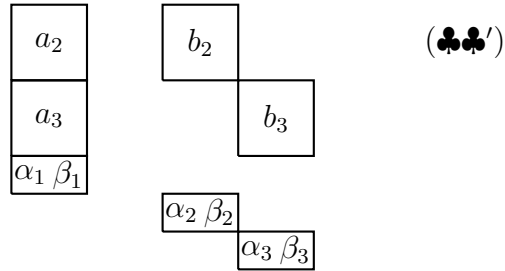
Zgodnie z Wnioskiem 4.1.17 możemy przyjąć, że każdy wiersz (a_i, b_i) konturu \mathcal{K} jest w jednej z postaci (a)-(t), wymienionych w Obserwacji 4.1.16. Załóżmy zatem najpierw, że żadna z par (a_i, b_i) nie jest postaci (o). Wówczas do każdej trójki macierzy: $a_i, b_i, (\alpha_i, \beta_i)$ zastosować można Obserwację 4.1.19 uzyskując macierze $f_i \in \text{Gl}_3(\mathbb{K}), g_i \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ oraz elementy niezerowe $\gamma_i \in \mathbb{K}$ takie, że spełnione są równości (4.1.9). Zatem kładąc $t = id_2$ i działając elementami $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ postaci (4.1.10) na kontur (\clubsuit) widzimy, że w jego $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Rozważmy dalej następujące przypadki.

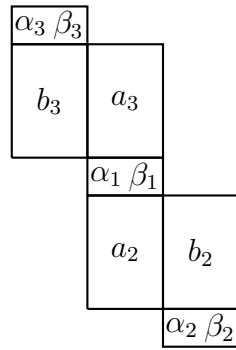
- (1) Dokładnie jeden z wierszy (a_i, b_i) konturu (\clubsuit) jest w postaci (o). Możemy przyjąć, że jest to wiersz (a_1, b_1) . Kontur (\clubsuit) jest zatem w postaci:



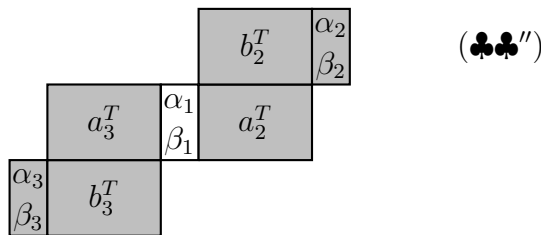
Rozważmy poniższy kontur o blokach a_2, b_2, a_3, b_3 rozmiarów 3×2 oraz blokach $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)$ rozmiarów 1×2 .



Pokażemy, że jeśli $\mathfrak{H}' = \text{Gl}_3(\mathbb{K})^2 \times (\mathbb{K}^*)^3$ oraz $\mathfrak{G}' = \text{Gl}_2(\mathbb{K})^3$, to w $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbicie konturu $(\clubsuit\clubsuit')$ znajduje się kontur 0–1-kowy. Zauważmy, że po zamianie kolejności wierszy i odpowiednich czynników w grupach \mathfrak{H}' , \mathfrak{G}' , fakt ten jest równoważny temu, że kontur 0–1-kowy znajduje się w $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbicie konturu:



Równoważnie, istnieje kontur 0–1-kowy w $\mathfrak{G}' - \mathfrak{H}'$ -orbicie konturu transponowanego o blokach rozmiarów 2×3 oraz 2×1 postaci:



Ostatni kontur ma oczywiście w swojej $\mathfrak{G}' - \mathfrak{H}'$ -orbicie kontur 0–1-kowy. Istotnie, wystarczy zauważyć, że na mocy Wniosku 4.1.7 można zakładać, że wszystkie bloki konturu $(\clubsuit\clubsuit'')$ za wyjątkiem $(\alpha_1 \beta_1)^T$ są macierzami quasi-permutacyjnymi, a więc postać 0–1-kową dostajemy łatwo przez zadziałanie na ten kontur elementami grup \mathfrak{G}' , \mathfrak{H}' , których wszystkie współrzędne są macierzami diagonalnymi.

Wykazaliśmy zatem, że w $\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'$ -orbicie konturu $(\clubsuit\clubsuit')$ znajduje się kontur 0–1-kowy. Niech $f_2, f_3 \in \text{Gl}_3(\mathbb{K})$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}^*$, $t, g_2, g_3 \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ będą macierzami takimi, że $\mathfrak{h}' \cdot (\clubsuit\clubsuit') \cdot \mathfrak{g}'$ jest 0–1-kowy, dla $\mathfrak{h}' = (f_2, f_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathfrak{H}'$ oraz

$\mathfrak{g}' = (t, g_2, g_3) \in \mathfrak{G}'$. Pokażemy teraz jak rozstrzygnąć tezę dowodzonego stwierdzenia w przypadku konturu $(\clubsuit\clubsuit)$. Niech

$$g_1 = t \in \text{Gl}_2(\mathbb{K}), \quad f_1 = \begin{bmatrix} g_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}_3(\mathbb{K}).$$

Wówczas kładąc $\mathfrak{h} = (f_1, f_2, f_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{g} = (t, g_1, g_2, g_3) \in \mathfrak{G}$ widzimy, że $\mathfrak{h} \cdot (\clubsuit\clubsuit) \cdot \mathfrak{g}$ jest konturem 0 – 1-kowym.

- (2) Dokładnie dwa wiersze (a_i, b_i) konturu (\clubsuit) są w postaci (o). Możemy przyjąć, że są to wiersze $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$. Kontur (\clubsuit) jest zatem postaci:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline a_3 \\ \hline \end{array} & & & \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline \end{array} \\ & \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \end{array} & & & \\ & & \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_2 & \beta_2 \\ \hline \end{array} & & \\ & & & \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_3 & \beta_3 \\ \hline \end{array} & & (\clubsuit\clubsuit\clubsuit) \end{array}$$

Rozważmy następujący kontur:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline a_3 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \end{array} & & & & (\clubsuit\clubsuit\clubsuit') \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_2 & \beta_2 \\ \hline \end{array} & & & & \\ & & & \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_3 & \beta_3 \\ \hline \end{array} & & \end{array}$$

Kontur ten zawarty jest w konturze $(\clubsuit\clubsuit')$, a więc zgodnie z Lematem 3.5.8 jeśli $\mathfrak{H}'' = \text{Gl}_3(\mathbb{K}) \times (\mathbb{K}^*)^3$ oraz $\mathfrak{G}'' = \text{Gl}_2(\mathbb{K})^2$, to istnieją takie $\mathfrak{h}'' = (f_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathfrak{H}''$ oraz $\mathfrak{g}'' = (t, g_3) \in \mathfrak{G}''$, że $\mathfrak{h}'' \cdot (\clubsuit\clubsuit\clubsuit') \cdot \mathfrak{g}''$ jest konturem 0 – 1-kowym.

Pokażemy teraz, że w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu $(\clubsuit\clubsuit\clubsuit)$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Kładziemy $g_1 = g_2 = t$ oraz $f_1 = f_2 = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wówczas jeśli $\mathfrak{h} = (f_1, f_2, f_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ oraz $\mathfrak{g} = (t, g_1, g_2, g_3)$, to $\mathfrak{h} \cdot (\clubsuit\clubsuit\clubsuit) \cdot \mathfrak{g}$ jest konturem 0 – 1-kowym.

- (3) Wszystkie trzy wiersze (a_i, b_i) konturu (\clubsuit) są w postaci (o). Przypadek ten rozstrzygamy analogicznie do poprzednich zauważając, że problem sprowadza się do znalezienia konturu 0 – 1-kowego w $(\mathbb{K}^*)^3 - \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ -orbicie poniższego konturu:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 \\ \hline \alpha_3 & \beta_3 \\ \hline \end{array}$$

Dowód lematu jest zatem zakończony. □

Pokażemy teraz, że dowód Lematu 4.1.3 sprowadza się do wykazanego wyżej Lematu 4.1.18. Udowodnimy w tym celu następujące stwierdzenie o charakterze technicznym.

Stwierdzenie 4.1.20. *Rozważamy kontur schodkowy \mathcal{A} postaci (d) z dowodu Wniosku 4.1.7, złożony z kolejnych bloków $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_n, d_n$ rozmiarów 3×2 postaci:*

$$\begin{array}{cc} \boxed{c_1} & \boxed{d_1} \\ & \boxed{c_2} & \boxed{d_2} \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{c_n} & \boxed{d_n} \end{array}$$

Wówczas istnieją $\mathfrak{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathfrak{H} = \text{Gl}_3(\mathbb{K})^n$ oraz $\mathfrak{g} = (id_2, g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathfrak{G} = \text{Gl}_2(\mathbb{K})^{n+1}$, że

- (i) macierz $h_1 c_1$ równa jest iloczynowi $q e$ macierzy: kolumnowo quasi-permutacyjnej q i diagonalnej e ,
- (ii) macierze $h_i d_i g_i$ są wierszowo quasi-permutacyjne, dla $1 \leq i \leq n$,
- (iii) macierze $h_i c_i g_{i-1}$ są kolumnowo quasi-permutacyjne, dla $1 < i \leq n$.

Co więcej:

- (a) jeśli e jest macierzą skalarną, to istnieją takie $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g}' \in \mathfrak{G}$, że $\mathfrak{h}' \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} \mathfrak{g}'$ jest konturem 0–1-kowym, przy czym pierwsza współrzędna \mathfrak{g}' działająca na blok $h_1 c_1$ jest macierzą identity,
- (b) istnieją $\alpha', \beta' \in \mathbb{K}$ takie, że $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$ oraz dla dowolnych $\gamma \in \mathbb{K}^*$ i $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ takich, że $\gamma \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \end{bmatrix} g$ jest macierzą 0–1-kową, istnieją takie $\mathfrak{h}''(\gamma, g) \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g}''(\gamma, g) \in \mathfrak{G}$ (zależne od γ, g), że $\mathfrak{h}''(\gamma, g) \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} \mathfrak{g}''(\gamma, g)$ jest konturem 0–1-kowym i pierwsza współrzędna $\mathfrak{g} \mathfrak{g}''(\gamma, g)$ działająca na blok $h_1 c_1$ równa jest g .

Dowód. Dowodzimy punkty (i), (ii), (iii) przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ teza wynika z Lematu 4.1.12. Załóżmy dalej, że dla ustalonego n teza zachodzi dla wszystkich $m < n$. Niech kontur \mathcal{A} ma $2n$ bloków. Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieją takie $h'_1, \dots, h'_{n-1} \in \text{Gl}_3(\mathbb{K})$ oraz $g'_1, \dots, g'_{n-1} \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$, że punkty (i), (ii), (iii) spełnione są dla bloków $h'_1 c_1, h'_1 d_1 g'_1, \dots, h'_{n-1} c_{n-1} g'_{n-2}, h'_{n-1} d_{n-1} g'_{n-1}$. Rozważmy macierze $c_n g'_{n-1}, d_n$. Z Lematu 4.1.12 wynika, że istnieją $h \in \text{Gl}_3(\mathbb{K})$ oraz $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ takie, że $h c_n g'_{n-1}$ jest iloczynem $q_n e_n$ macierzy kolumnowo quasi-permutacyjnej q_n oraz macierzy diagonalnej e_n , zaś $h d_n g$ jest macierzą wierszowo quasi-permutacyjną. Zatem pokazaliśmy, że istnieją elementy $\mathfrak{h}_n = (h'_1, \dots, h'_{n-1}, h) \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}_n = (id, g'_1, \dots, g'_{n-1}, g) \in \mathfrak{G}$ takie, że $\mathfrak{h}_n \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}_n$ spełnia następujące własności:

- (i') w miejscu bloków c_1, c_n konturu \mathcal{A} kontur $\mathfrak{h}_n \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}_n$ ma macierze będące iloczynami macierzy kolumnowo quasi-permutacyjnej i diagonalnej,
- (ii') w miejscu bloków d_i ma macierze wierszowo quasi-permutacyjne, dla $1 \leq i \leq n$,
- (iii') w miejscu bloków c_i ma macierze kolumnowo quasi-permutacyjne, dla $1 < i < n$.

Korzystając z Obserwacji 4.1.11 możemy wskazać macierze diagonalne $e_{n-1} \in D_3(K)$, $f_n \in D_2(K)$ spełniające warunki

$$f_n = e_n^{-1}, \quad (hc_n g'_{n-1})f_n = q_n, \quad e_{n-1}(h'_{n-1}d_{n-1}g'_{n-1})f_n = h'_{n-1}d_{n-1}g'_{n-1},$$

oraz takie, że $e_{n-1}(h'_{n-1}c_{n-1}g'_{n-2})$ jest iloczynem macierzy diagonalnej e_{n-1} oraz macierzy kolumnowo quasi-permutacyjnej $h'_{n-1}c_{n-1}g'_{n-2}$. Korzystając w ten sposób $n-1$ -krotnie z Obserwacji 4.1.11 doprowadzamy kolejne zbiory ostatnich i kolumn (dla $i = 2, \dots, n$) konturu do postaci 0-1-kowej używając macierzy diagonalnych e_{n+1-i}, f_{n+2-i} . W miejscu bloku c_1 konturu \mathcal{A} znajduje się zatem blok postaci $e_1 h'_1 c_1$. Przy tym, ponownie na mocy Obserwacji 4.1.11, $e_1 h'_1 c_1 = h'_1 c e'$ dla pewnej macierzy diagonalnej e' . Pokazaliśmy zatem, że krok indukcyjny jest poprawny. Dowód pierwszej części stwierdzenia jest zatem zakończony.

Dowodzimy punkt (a). Rozważmy kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ spełniający (i), (ii), (iii). Przyjmijmy też, że e jest macierzą skalarną. Wówczas jest jasne, że w orbicie \mathcal{A} jest kontur 0-1-kowy. Istotnie, istnieją macierze skalarne $a_1, \dots, a_n \in D_3(K)$ oraz $b_1, \dots, b_n \in D_2(K)$, że:

- $a_1(h_1 c_1) = a_1 q e = q$,
- $a_i(h_i c_i g_{i-1}) b_{i-1} = h_i c_i g_{i-1}$, dla $i = 2, \dots, n$,
- $a_i(h_i d_i g_i) b_i = h_i d_i g_i$, dla $i = 1, \dots, n$.

Zatem jeśli $\mathfrak{h}' = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathfrak{g}' = (id_2, b_1, \dots, b_n)$, to kontur $\mathfrak{h}' \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} \mathfrak{g}'$ jest 0-1-kowy. To kończy uzasadnienie punktu (a).

Dowodzimy punkt (b). Rozważmy kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ spełniający (i), (ii), (iii). Zgodnie z punktem (i), blok tego konturu, znajdujący się w pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie, ma postać $q e$, gdzie q jest macierzą kolumnowo quasi-permutacyjną rozmiarów 3×2 , zaś e jest macierzą diagonalną rozmiarów 2×2 postaci $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, dla pewnych $\alpha, \beta \in K^*$.

W celu dowodu lematu rozważymy kilka przypadków, w zależności od możliwych postaci macierzy q . Pokażemy jednak najpierw, że jeśli umiemy dowieść tezę w przypadku, gdy pierwszy blok $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ ma postać $q e$, to umiemy ją także wykazać, gdy pierwszy blok $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ ma postać $(\sigma q \epsilon) e$, dla dowolnych macierzy permutacji $\sigma \in \Sigma_3$ oraz $\epsilon \in \Sigma_2$. Zauważmy, że jeśli q był macierzą kolumnowo quasi-permutacyjną, to także macierz $\sigma q \epsilon$ jest kolumnowo quasi-permutacyjna. Przypuśćmy zatem, że dany jest kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ o pierwszym bloku $(\sigma q \epsilon) e$, spełniający (i), (ii), (iii). Rozważamy kontur $\mathcal{K} = \mathfrak{h}_\sigma \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} \mathfrak{g}_\epsilon$, gdzie

$$\mathfrak{h}_\sigma = (\sigma^{-1}, id_3, id_3, \dots, id_3), \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{g}_\epsilon = (e^{-1} \epsilon^{-1} e, id_2, id_2, \dots, id_2).$$

Jest to kontur spełniający (i), (ii), (iii) o pierwszym bloku równym $q e$. Na mocy przyjętego przez nas założenia istnieją takie $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$, że dla dowolnych $\gamma \in K^*$

oraz $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ takich, że $\gamma \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \end{bmatrix} g$ jest 0 – 1-kowa, istnieją $\mathfrak{h}''(\gamma, g) \in \mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{g}''(\gamma, g) \in \mathfrak{G}$ (zależne od γ, g) takie, że pierwsza współrzędna $\mathfrak{g}''(\gamma, g)$ to g oraz kontur $\mathfrak{h}''(\gamma, g) \cdot \mathcal{K} \cdot \mathfrak{g}''(\gamma, g)$ jest 0 – 1-kowy. Dowodzimy zatem tezę dla konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$. Rozważamy parę elementów $\alpha'', \beta'' \in \mathbb{K}$ takich, że $\begin{bmatrix} \alpha'' & \beta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \cdot e^{-1}\epsilon e$. Wówczas jeśli $\gamma \in \mathbb{K}^*$ oraz $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ są takie, że $\gamma \begin{bmatrix} \alpha'' & \beta'' \end{bmatrix} g$ jest 0 – 1-kowa, to także $\gamma \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \end{bmatrix} (e^{-1}\epsilon g)$ jest macierzą 0 – 1-kową. Zatem zgodnie z założeniem dla konturu \mathcal{K} istnieją $\mathfrak{h}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g) \in \mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{g}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g) \in \mathfrak{G}$ takie, że $\mathfrak{h}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g) \cdot \mathcal{K} \cdot \mathfrak{g}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g)$ jest 0 – 1-kowy i pierwsza współrzędna $\mathfrak{g}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g)$ to $(e^{-1}\epsilon)g$. Czyli z definicji \mathcal{K} wynika, że kontur:

$$\mathfrak{h}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g)(\mathfrak{h}_\sigma \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} \mathfrak{g}_\epsilon) \mathfrak{g}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g) = \mathfrak{h}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g) \mathfrak{h}_\sigma (\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}) \mathfrak{g}_\epsilon \mathfrak{g}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g)$$

jest 0 – 1-kowy, a pierwsza współrzędna $\mathfrak{g}_\epsilon \mathfrak{g}''(\gamma, e^{-1}\epsilon g)$ równa jest $(e^{-1}\epsilon^{-1}e)(e^{-1}\epsilon g) = g$. Zatem wykazaliśmy tezę dla konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ o pierwszym bloku $(\sigma q \epsilon)e$. Stąd wniosek, że rozważając różne przypadki postaci macierzy q możemy, bez straty ogólności, zaniedbywać kolejność wierszy i kolumn w q .

- q jest macierzą rzędu 1. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $q\epsilon$ ma jedną z postaci:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.11)$$

Wówczas jeśli $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ oraz $\gamma \in \mathbb{K}^*$ są takie, że $\gamma \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} g$ jest macierzą 0 – 1-kową, to macierz $q\epsilon g$ jest jednej z postaci:

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1} & \gamma^{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

W pierwszym przypadku wymienionym w (4.1.11) kładziemy zatem $\alpha' := \alpha$, $\beta' := \beta$. Niech $(g, id_2, id_2, \dots, id_2) \in \mathfrak{G}$. Rozważmy kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \bar{\mathfrak{g}}$, gdzie $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(g, id_2, id_2, \dots, id_2)$. Wówczas kontur ten spełnia warunki (i), (ii), (iii). Co więcej, macierz $q\epsilon g$ stojąca w pierwszym rzędzie i pierwszej kolumnie tego konturu jest postaci $q'e'$, gdzie q' jest macierzą kolumnowo quasi-permutacyjną, zaś e' macierzą skalarną. Zgodnie z punktem (a) istnieją zatem takie $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}'$ oraz $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{G}'$, że $\mathfrak{h}' \mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \bar{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}'$ jest konturem 0 – 1-kowym. W szczególności kładąc: $\mathfrak{h}''(\gamma, g) := \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{g}''(\gamma, g) := (g, id_2, id_2, \dots, id_2) \mathfrak{g}'$ dostajemy tezę punktu (b) w rozważanym przypadku.

Gdy $q\epsilon$ jest w drugiej z postaci wymienionych w (4.1.11), wówczas kładziemy odpowiednio: $\alpha' := \alpha$, $\beta' := 0$. Dalsze postępowanie jest analogicznie jak w przypadku pierwszej postaci.

- q jest macierzą rzędu 2. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $q\epsilon$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że jeśli kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ złożony jest z dokładnie jednego bloku qe , wówczas teza jest oczywista. Istotnie, niech $\alpha' = \beta' = 1$. Wówczas dla dowolnych $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ oraz $\gamma \in \mathbb{K}^*$ takich, że $\gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} g$ jest macierzą 0 – 1-kową kładziemy $\mathfrak{h}''(\gamma, g) := (h)$, gdzie $h = \begin{bmatrix} g^{-1}e^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}_3(\mathbb{K})$ oraz $\mathfrak{g}''(\gamma, g) := (g)$. Wtedy $\mathfrak{h}''(\gamma, g)\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}\mathfrak{g}''(\gamma, g)$ złożony jest z jednego bloku q , będącego macierzą 0 – 1-kową. Załóżmy zatem w dalszym ciągu, że kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ złożony jest z przynajmniej dwóch bloków.

Rozważmy macierz wierszowo quasi-permutacyjną $h_1d_1g_1$ będącą w tym samym wierszu konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$, co macierz qe . Możemy założyć (permutując ewentualnie kolumny w macierzach stanowiących drugą kolumnę konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$, patrz argument odnośnie możliwości permutowania wierszy i kolumn qe), że jest ona w jednej z czterech postaci:

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.12)$$

Zauważmy, że tezę punktu (b) wystarczy dowieść jedynie w przypadkach, gdy $h_1d_1g_1$ jest w pierwszej lub drugiej z wymienionych wyżej postaci. Istotnie, łatwo widzieć, że operacja dodania drugiego wiersza do pierwszego lub trzeciego wiersza wykonana jednocześnie na qe oraz $h_1d_1g_1$ nie zmienia pierwszej z tych macierzy, zaś drugą z nich doprowadza, z dokładnością do permutacji kolumn, do jednej z dwóch pierwszych postaci wymienionych w (4.1.12).

- Rozważmy przypadek, gdy macierz $h_1d_1g_1$ jest w pierwszej z postaci, wymienionych w (4.1.12). Niech $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{K}$ będą takie, że:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot h_1d_1g_1 = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ \theta_2 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$. Kładziemy $\alpha' = \beta' = 1$ oraz rozważamy dowolne $\gamma \in \mathbb{K}^*$, $g \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ takie, że $\gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} g$ jest macierzą 0 – 1-kową. Bierzymy wówczas $\mathfrak{h}''(\gamma, g) := (h, id_3, id_3, \dots, id_3) \in \mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{g}''(\gamma, g) := (g, id_2, id_2, \dots, id_2) \in \mathfrak{G}$, gdzie:

$$h = \begin{bmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i kontur $\mathfrak{h}''(\gamma, g)\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}\mathfrak{g}''(\gamma, g)$ jest 0 – 1-kowy.

Przyjmijmy zatem, że $(\theta_1, \theta_2) \neq (0, 0)$. Wówczas kładziemy $\alpha' = -\theta_2$, $\beta' = \theta_1$. Niech $g = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_4 \end{bmatrix} \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ oraz $\gamma \in \mathbb{K}^*$ będą takie, że $\gamma \begin{bmatrix} -\theta_2 & \theta_1 \\ & \end{bmatrix} g$

jest macierzą 0 – 1-kową postaci $\begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$. Wówczas:

$$\begin{cases} \rho_1 = \gamma(-\tau_1\theta_2 + \tau_3\theta_1) \\ \rho_2 = \gamma(-\tau_2\theta_2 + \tau_4\theta_1). \end{cases}$$

W szczególności biorąc macierz

$$g' = \det(g) \cdot g^{-1} = \begin{bmatrix} \tau_4 & -\tau_2 \\ -\tau_3 & \tau_1 \end{bmatrix}$$

dostajemy:

$$\gamma g' \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_2 \\ -\rho_1 \end{bmatrix}. \quad (4.1.13)$$

Rozważmy zatem elementy $\bar{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{H}$, $\bar{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{G}$ postaci $\mathfrak{h} = (h, id_3, id_3, \dots, id_3)$, $\mathfrak{g} = (g, id_2, id_2, \dots, id_2)$ takie, że:

$$h = \begin{bmatrix} \gamma g' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas działając elementami $\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{g}}$ na kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ zgodnie z (3.2.3) zmieniamy jedynie pierwszy wiersz konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ tak, że na mocy (4.1.13) w miejscach bloków qe oraz $h_1 d_1 g_1$ znajdują się bloki:

$$\begin{bmatrix} \gamma \cdot \det(g) & 0 \\ 0 & \gamma \cdot \det(g) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \rho_2 & 0 \\ -\rho_1 & 0 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{bmatrix},$$

gdzie $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \{0, 1\}$. Zauważmy, że jeśli $\rho_2 = 0$, to kontur $\bar{\mathfrak{h}}\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}$ spełnia warunki (i), (ii), (iii) i w miejscu bloku qe konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ znajduje się teraz macierz postaci qe' , gdzie q jest kolumnowo quasi-permutacyjna, zaś e' jest macierzą skalarną. Zatem w przypadku, gdy $\rho_2 = 0$, zgodnie z punktem (a) istnieją takie $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}'$ oraz $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{G}$, że $\mathfrak{h}'\bar{\mathfrak{h}}\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}'$ jest konturem 0 – 1-kowym. Zauważmy przy tym, że pierwsza współrzędna elementu $\bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}'$ równa jest g . Zatem kładąc $\mathfrak{h}''(\gamma, g) := \mathfrak{h}'\bar{\mathfrak{h}}$ oraz $\mathfrak{g}'(\gamma, g) := \bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}'$ dostajemy tezę punktu (b) dla $\rho_2 = 0$. Postępowanie jest analogiczne w przypadku, gdy $\rho_1 = 0$.

Jeśli $\rho_1 = \rho_2 = 1$, to zauważmy, że mnożąc macierze stanowiące pierwszy wiersz konturu $\bar{\mathfrak{h}}\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}$ z lewej strony przez macierz:

$$h' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

otrzymamy macierze postaci:

$$\begin{bmatrix} \gamma \cdot \det(g) & 0 \\ \gamma \cdot \det(g) & \gamma \cdot \det(g) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{bmatrix},$$

gdzie $\rho_3, \rho_4 \in \{0, 1\}$. Zatem pierwsza z powyższych macierzy jest iloczynem macierzy 0 – 1-kowej i skalarnej. Rozważmy zatem kontur $\bar{h}' h \cdot \mathcal{A} \cdot g \bar{g}$, gdzie $\bar{h}' = (h', id_3, id_3, \dots, id_3) \bar{h}$. Pierwszy blok tego konturu jest iloczynem macierzy 0 – 1-kowej i skalarnej. Pozostałe bloki tego konturu są 0 – 1-kowe. Zatem analogicznie jak w dowodzie punktu (a) (w którym nie korzystamy z faktu, że q jest macierzą kolumnowo quasi-permutacyjną, a jedynie z faktu, że jest to macierz 0 – 1-kowa) dowodzimy, że istnieją takie $h' \in \mathfrak{H}$ oraz $g' \in \mathfrak{G}$, że pierwsza współrzędna g' jest idencją, oraz kontur $h' \bar{h}' h \cdot \mathcal{A} \cdot g \bar{g} g'$ jest 0 – 1-kowy. Zatem kładąc $h''(\gamma, g) := h' \bar{h}'$ oraz $g''(\gamma, g) := g \bar{g} g'$ dostajemy tezę dla $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

- Rozważmy przypadek, gdy w pierwszych dwóch wierszach macierzy $h_1 d_1 g_1$ znajduje się macierz idencji. Jeśli kontur $h \cdot \mathcal{A} \cdot g$ złożony jest jedynie z dwóch bloków, wówczas uzasadnienie jest łatwe. Kładziemy $\alpha' = \beta' = 1$ i dla dowolnych $g \in Gl_2(K)$ oraz $\gamma \in K^*$ takich, że $\gamma \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} g$ jest macierzą 0 – 1-kową, kładziemy $h''(\gamma, g) := (h) \in \mathfrak{H}$, $g''(\gamma, g) := (g, eg) \in \mathfrak{G}$, gdzie $h = \begin{bmatrix} g^{-1} e^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Gl_3(K)$. W rezultacie $h''(\gamma, g) h \cdot \mathcal{A} \cdot g g''(\gamma, g)$ ma dwa 0 – 1-kowe bloki, postaci q oraz $h_1 d_1 g_1$.

Założmy, że $h \cdot \mathcal{A} \cdot g$ ma więcej niż dwa bloki. W tym przypadku łatwo widać, że teza punktu (b) dla konturu $h \cdot \mathcal{A} \cdot g$ jest równoważna tezie punktu (b) dla konturu schodkowego złożonego z bloków $(h_2 c_2 g_1) e$, $h_2 d_2 g_2$, $h_3 c_3 g_2$, $h_3 d_3 g_3$ itd, a więc konturu powstającego z $h \cdot \mathcal{A} \cdot g$ przez usunięcie wiersza złożonego z bloków $q e$ oraz $h_1 d_1 g_1$, oraz przemnożenie kolumny zawierającej blok (kolumnowo quasi-permutacyjny) $h_2 c_2 g_1$ przez macierz diagonalną e . Zatem dowodząc punkt (b) przez indukcję ze względu na liczbę bloków $h \cdot \mathcal{A} \cdot g$ widzimy, że rozważany podprzypadek sprowadzić można do przypadku, gdy $h \cdot \mathcal{A} \cdot g$ ma jeden blok, lub ma dwa bloki, lub gdy pierwszy wiersz tego konturu ma postać rozważaną w poprzednich przypadkach.

□

DOWÓD LEMATU 4.1.3. Zgodnie z Lematem 3.5.8 możemy zakładać, że s_i są liczbami parzystymi postaci $2t_i$, dla pewnych liczb całkowitych t_i , $i = 1, 2, 3$. Niech $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_S$. Możemy także przyjąć (wobec Obserwacji 3.5.6), że wszystkie bloki konturu \mathcal{A} są niezerowe. Oznaczmy przez $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ podkontury konturu \mathcal{A} złożone z bloków:

- kontur \mathcal{A}_0 : z bloków a_i, b_i , dla $i = 1, 2, 3$,
- kontury \mathcal{A}_i : z bloków b_{ij} , dla $i = 1, 2, 3$ oraz $j \leq s_i$.

Zauważmy, że jeśli bloki x, y konturu \mathcal{A} leżą w tym samym wierszu lub tej samej kolumnie, oraz $x \in \mathcal{A}_i, y \in \mathcal{A}_j$, dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$, to $i = j$. Jeśli zatem na kontury \mathcal{A}_i działają, zgodnie z (3.2.3), grupy $\mathfrak{H}_i \times \mathfrak{G}_i \simeq Gl_3(K)^{t_i} \times Gl_2(K)^{t_i+1}$, gdzie $i = 1, 2, 3$, to

$$\mathfrak{H} \simeq Gl_3(K)^3 \times \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_3, \quad \mathfrak{G} \simeq Gl_2(K) \times \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \mathfrak{G}_3 \quad (4.1.14)$$

(możemy zakładać że pierwsze współrzędne elementów grupy \mathfrak{G}_i działają na kolumny zawierające bloki b_i konturu \mathcal{A} , dla $i = 1, 2, 3$).

Chcemy teraz wskazać takie elementy $f_1, f_2, f_3 \in \text{Gl}_3(\mathbb{K})$ oraz takie elementy $t, g_1, g_2, g_3 \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$, że macierze $f_i a_i t, f_i b_i g_i$ będą 0 – 1-kowe, dla $i = 1, 2, 3$. Ze względu jednak na to, że będziemy chcieli, aby macierze g_i działały z prawej strony także na bloki $b_{i,1}$ konturu \mathcal{A} , dobierzemy macierze f_i, t, g_i tak, by działanie g_i na bloku $b_{i,1}$ można było zrekompensować działaniem $\mathfrak{H}_i \times \mathfrak{G}_i$ na kontur \mathcal{A}_i , dla $i = 1, 2, 3$. W tym celu skorzystamy najpierw z punktu (b) Stwierdzenia 4.1.20 zastosowanego osobno do każdego z konturów \mathcal{A}_i . Gwarantuje on istnienie takich $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0, 0)$, że dla dowolnych $\gamma'_i \in \mathbb{K}^*$ oraz $g'_i \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ takich, że $\gamma'_i \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} g'_i$ jest macierzą 0 – 1-kową, istnieją elementy $\mathfrak{h}_i(\gamma'_i, g'_i) \in \mathfrak{H}_i, \mathfrak{g}_i(\gamma'_i, g'_i) \in \mathfrak{G}_i$ (zależne od γ'_i, g'_i), że $\mathfrak{h}_i(\gamma'_i, g'_i) \cdot \mathcal{A}_i \cdot \mathfrak{g}_i(\gamma'_i, g'_i)$ jest 0 – 1-kowy, oraz pierwsza współrzędna $\mathfrak{g}_i(\gamma'_i, g'_i)$ równa jest g'_i . A zatem, niezależnie od wyboru $\gamma'_i \in \mathbb{K}^*$ oraz $g'_i \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$ możemy dobrać elementy grup $\mathfrak{H}_i, \mathfrak{G}_i$ porządkujące kontury \mathcal{A}_i do postaci 0 – 1-kowej. Wybór odpowiednich elementów \mathbb{K}^* oraz $\text{Gl}_2(\mathbb{K})$ związany będzie z wyborem elementów $\text{Gl}_3(\mathbb{K})$ oraz $\text{Gl}_2(\mathbb{K})$, doprowadzających bloki a_i, b_i do postaci 0 – 1-kowej.

Zgodnie z Lematem 4.1.18 wskazujemy takie $f_1, f_2, f_3 \in \text{Gl}_3(\mathbb{K}), \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}^*$, oraz $t, g_1, g_2, g_3 \in \text{Gl}_2(\mathbb{K})$, że:

$$f_i a_i t, \quad f_i b_i g_i, \quad \gamma_i \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} g_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.15)$$

są macierzami 0 – 1-kowymi.

Jesteśmy gotowi do przedstawienia konstrukcji elementów $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ takich, że $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ jest konturem 0 – 1-kowym.

- współrzędne \mathfrak{h} działające na wiersze konturu \mathcal{A} złożone z bloków: a_i, b_i , są równe f_i , dla $i = 1, 2, 3$,
- współrzędna \mathfrak{g} działająca na kolumnę konturu \mathcal{A} złożoną z bloków: a_1, a_2, a_3 , jest równa t ,
- współrzędne \mathfrak{g} działające na kolumnę konturu \mathcal{A} zawierającą blok b_i oraz blok pierwszej kolumny konturu \mathcal{A}_i są równe g_i , dla $i = 1, 2, 3$,
- jeśli $\phi_i : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_i$ oraz $\psi_i : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_i$ są rzutowaniami, zgodnie z (4.1.14), to $\phi_i(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_i(\gamma_i, g_i)$ oraz $\phi_i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_i(\gamma_i, g_i)$, dla $i = 1, 2, 3$. Współrzędna \mathfrak{g} działająca na blok b_i jest pierwszą współrzędną $\mathfrak{g}_i(\gamma_i, g_i)$, a więc jest równa g_i , zgodnie z poprzednim punktem.

W ten sposób w konturze $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ w miejscu bloków a_i, b_i pojawiają się macierze 0 – 1-kowe, zgodnie z Lematem 4.1.18. Co więcej, zgodnie z tym lematem współrzędne g_i działające na $b_{i,1}$ są takie, że dla pewnych $\gamma_i \in \mathbb{K}^*$ macierz $\gamma_i \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} g_i$ jest 0 – 1-kowa, a więc na mocy punktu (b) Stwierdzenia 4.1.20 kontur $\mathfrak{h}_i(\gamma_i, g_i) \cdot \mathcal{A}_i \cdot \mathfrak{g}_i(\gamma_i, g_i)$ jest 0 – 1-kowy, dla $i = 1, 2, 3$. Zatem wszystkie bloki konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ są 0 – 1-kowe, co kończy dowód. \square

4.2 Dowód Twierdzenia 3.4.2.

Celem tego paragrafu będzie dowód Twierdzenia 3.4.2. Przypomnijmy, że jedną z implikacji tego twierdzenia udowodniliśmy we Wniosku 3.6.8. Pozostaje zatem dowieść, że jeśli A jest algebrą spełniającą założenia Problemu 3.1.1 oraz warunek (W1), to jeśli szkielet \mathcal{S}_A algebry A jest acykliczny oraz spełnia warunki (i)-(iv) wymienione w Twierdzeniu 3.4.2, to liczba $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na \mathcal{M}_A jest skończona.

Definicja 4.2.1. *Założmy, że szkielet \mathcal{S} jest acykliczny, że posiada postać zredukowaną (patrz Definicja 3.5.9) oraz, że każdy blok \mathcal{S} ma szerokość nie większą niż 2. Założmy ponadto, że spełnione są następujące warunki:*

- (i') \mathcal{S} nie zawiera wierszowej czwórki,
- (ii') \mathcal{S} nie zawiera grubej kolumnowej czwórki,
- (iii') \mathcal{S} nie zawiera grubego szkieletu wierszowo trójschodkowego,
- (iv') graf rozdzielony szkieletu \mathcal{S} nie zawiera grubej drogi węzłowej.

Wówczas powiemy, że szkielet \mathcal{S} jest **dopuszczalny**.

Odnotujmy ważną obserwację dotyczącą szkieletów dopuszczalnych, wynikającą bezpośrednio z Obserwacji 3.5.10.

Obserwacja 4.2.2. *Niech \mathcal{S} będzie szkieletem dopuszczalnym. Jeśli szkielet \mathcal{S}' powstaje przez usunięcie pewnych wierszy szkieletu \mathcal{S} , wówczas \mathcal{S}' jest również dopuszczalny.*

Niech A będzie algebrą spełniającą założenia Problemu 3.1.1 oraz warunek (W1). Wówczas szkielet \mathcal{S}_A tej algebry jest dopuszczalny. Dla dowodu brakującej implikacji Twierdzenia 3.4.2 wystarczy zatem wykazać następujący fakt.

Twierdzenie 4.2.3. *Jeśli szkielet \mathcal{S} jest dopuszczalny, to istnieje skończenie wiele $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbit na $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.*

4.2.1 Quasi-grube składowe

Definicja 4.2.4. *Niech $\mathcal{S} = (I, f)$ będzie spójnym i acyklicznym szkieletem. Na zbiorze podszykieletów \mathcal{S} można wprowadzić relację częściowego porządku pochodzącą od relacji częściowego porządku na podzbiorach zbioru I . Powiemy, że szkielet \mathcal{S}' jest **grubą składową** szkieletu \mathcal{S} jeśli jest maksymalnym spójnym podszykieletem szkieletu \mathcal{S} złożonym wyłącznie z grubych bloków.*

Odnotujmy następującą obserwację. Każdy szkielet dopuszczalny jest szkieletem pewnej algebry spełniającej założenia Problemu 3.1.1 i warunek (W1). Zatem zgodnie z pierwszym zdaniem dowodu Twierdzenia 4.1.1 dostajemy opis wszystkich grubych składowych szkieletów dopuszczalnych. W szczególności dostajemy następujący wniosek.

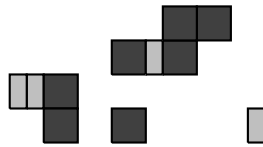
Wniosek 4.2.5. *Jeśli szkielet \mathcal{S} jest dopuszczalny, to każda jego gruba składowa jest albo szkieletem schodkowym, albo wierszowo dwuschodkowym, albo kolumnowo trójschodkowym.*

Zauważmy, że gruba składowa szkieletu dopuszczalnego nie jest zwykle szkieletem dopuszczalnym. Stąd wprowadzamy także następującą definicję.

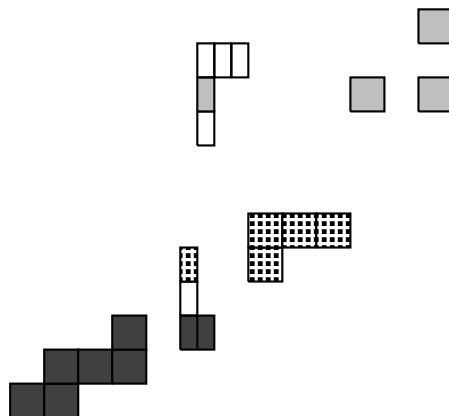
Definicja 4.2.6. *Niech $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ będą grubymi składowymi szkieletu dopuszczalnego \mathcal{S} , zaś niech $\mathcal{S}'_1, \dots, \mathcal{S}'_m$ podszytymi szkieletu \mathcal{S} , złożonymi ze wszystkich wierszy \mathcal{S} zawierających odpowiednio szkielety: $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$. Szkielety \mathcal{S}'_i nazywać będziemy **quasi-grubymi składowymi szkieletu \mathcal{S}** .*

Jasne jest, że dwie różne quasi-grube składowe szkieletu \mathcal{S} są rozłączne. Z Obserwacji 4.2.2 wynika także, że quasi-gruba składowa szkieletu dopuszczalnego jest szkieletem dopuszczalnym.

Dla ułatwienia notacji przyjmijmy, że jeśli $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$, to bloki konturu \mathcal{A} tworzące kontur o szkielecie będącym quasi-grubą składową w \mathcal{S} nazywać będziemy quasi-grubą składową konturu \mathcal{A} . Dla ilustracji powyższej definicji rozważmy dwa przykłady. Pierwszy z nich to przykład szkieletu dopuszczalnego złożonego z dokładnie jednej quasi-grubej składowej (ciemnym kolorem zaznaczono bloki tworzące grubą składową szkieletu \mathcal{S}).



Rozważmy też następujący szkielet.



Szkielet ten ma trzy quasi-grube składowe: bloki pierwszej z nich, zawarte w pierwszym i trzecim wierszu szkieletu, oznaczone są kolorem jasnoszarym. W piątym i szóstym wierszu znajduje się druga quasi-gruba składowa, której bloki oznaczono czarnymi kropkami. Trzecia quasi-gruba składowa znajduje się w ósmym, dziewiątym i dziesiątym wierszu, i jej bloki oznaczone są kolorem ciemnoszarym.

Wprowadzimy pewną konwencję zapisową, ułatwiającą opis działania grupy $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ na elementach $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.

Definicja 4.2.7. Niech \mathcal{S} będzie szkieletem, zaś $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Niech \mathcal{A}' będzie podkonturem konturu \mathcal{A} . Załóżmy, że bloki \mathcal{A}' należą do wierszy konturu \mathcal{A} o indeksach i_1, \dots, i_p oraz do kolumn \mathcal{A} o indeksach j_1, \dots, j_q . Niech $\mathfrak{h} = (h_1, \dots, h_t) \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g} = (g_1, \dots, g_s) \in \mathfrak{G}$. Podkontur konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ powstający w miejscu podkonturu \mathcal{A}' po zadziałaniu elementami $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$, oznaczać będziemy przez $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}' \cdot \mathfrak{g}$. Ponadto powiemy, że:

- $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ nie zmieniają podkonturu \mathcal{A}' jeśli $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}' \cdot \mathfrak{g} = \mathcal{A}'$,
- \mathfrak{h} działa jak identyzacja na \mathcal{A}' jeśli h_{i_l} są macierzami identyzacji, dla $1 \leq l \leq p$,
- \mathfrak{g} działa jak identyzacja na \mathcal{A}' jeśli g_{j_l} są macierzami identyzacji, dla $1 \leq l \leq q$,
- $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ nie zmieniają istotnie podkonturu \mathcal{A}' jeśli \mathfrak{h} działa jak identyzacja na \mathcal{A}' , zaś \mathfrak{g}' działa jak identyzacja na wszystkie grube bloki \mathcal{A}' .

Warto odnotować obserwację motywującą wprowadzenie Definicji 4.2.7. Poprzedzimy ją definicją.

Definicja 4.2.8. Macierz $x \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ nazwiemy **jednowartościową** jeśli $x = sq$, gdzie s jest macierzą skalarną, zaś q jest macierzą 0 – 1-kową.

Obserwacja 4.2.9. Niech \mathcal{A} będzie konturem o szkielecie \mathcal{S} , którego wszystkie grube bloki są 0 – 1-kowe, zaś wszystkie płaskie bloki są jednowartościowe. Wówczas jeśli $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ nie zmieniają istotnie konturu \mathcal{A} , to wszystkie grube bloki $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ są 0 – 1-kowe, zaś wszystkie płaskie bloki $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ są jednowartościowe.

4.2.2 Dowód głównego rezultatu

Pokażemy, że do dowodu Twierdzenia 4.2.3 wystarczą następujące trzy lematy.

Lemat 4.2.10. Niech \mathcal{S} będzie spójnym szkieletem dopuszczalnym złożonym z dokładnie jednej quasi-grubej składowej, oraz niech $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Wówczas w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu \mathcal{A} znajduje się kontur \mathcal{A}' taki, że każdy jego gruby blok jest macierzą 0 – 1-kową, zaś każdy płaski blok – macierzą jednowartościową.

Lemat 4.2.11. Niech \mathcal{S} będzie spójnym i płaskim szkieletem dopuszczalnym, oraz niech $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Wówczas w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu \mathcal{A} znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

Lemat 4.2.12. Niech \mathcal{S} będzie szkieletem dopuszczalnym, oraz niech $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ będzie konturem, w którym każdy gruby blok jest macierzą 0 – 1-kową, zaś każdy płaski blok jest macierzą jednowartościową. Wówczas w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu \mathcal{A} znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

DOWÓD TWIERDZENIA 4.2.3 (a więc także dowód Twierdzenia 3.4.2). Rozumowanie jest indukcją ze względu na liczbę n quasi-grubych składowych w \mathcal{S} . Jeśli $n = 0$, to teza wynika z Lematu 4.2.11. Załóżmy, że $n = 1$ i rozważmy dowolny kontur $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Wówczas \mathcal{A} można przedstawić jako sumę rozłączną konturów dopuszczalnych $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$, gdzie \mathcal{A}' jest quasi-grubą składową w \mathcal{A} , zaś \mathcal{A}'' jest konturem o szkielecie płaskim (niekoniecznie spójnym). Zgodnie z Lematem 4.2.10, możemy zakładać, że wszystkie grube bloki konturu \mathcal{A}' są macierzami $0 - 1$ -kowymi oraz, że wszystkie płaskie bloki konturu \mathcal{A}' są macierzami jednowartościowymi. Zgodnie z Lematem 4.2.11 oraz z Obserwacją 3.5.7 (potrzebną, gdyż \mathcal{A}'' może nie być spójnym konturem) widzimy, że istnieją takie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, że $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}'' \cdot \mathfrak{g}$ jest konturem $0 - 1$ -kowym oraz, że $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ nie zmieniają istotnie konturu \mathcal{A}' . Zatem zgodnie z Obserwacją 4.2.9 kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ ma każdy gruby blok w postaci $0 - 1$ -kowej oraz każdy płaski w postaci jednowartościowej. Zgodnie z Lematem 4.2.12 w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ znajduje się kontur $0 - 1$ -kowy. To kończy pierwszy krok indukcji.

Założmy dalej, że teza twierdzenia spełniona jest dla dowolnego szkieletu dopuszczalnego o n quasi-grubych składowych. Rozważmy szkielet dopuszczalny \mathcal{S} mający $n + 1$ quasi-grubych składowych $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{n+1}$. Niech $\Gamma_{\mathcal{S}_t}$ będzie, dla $1 \leq t \leq n + 1$, podgrafem spójnym grafu rozdzielonego $\Gamma_{\mathcal{S}}$ odpowiadającym quasi-grubej składowej \mathcal{S}_t (patrz Obserwacja 3.3.3). Wówczas powiemy, że dwie quasi-grube składowe $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j$ tego szkieletu są połączone w \mathcal{S} , jeśli istnieje taka droga Λ_{ij} w $\Gamma_{\mathcal{S}}$, że Λ_{ij} zawiera pewną krawędź z $\Gamma_{\mathcal{S}_i}$ i pewną krawędź z $\Gamma_{\mathcal{S}_j}$ i nie zawiera żadnej krawędzi w $\Gamma_{\mathcal{S}_k}$, dla $k \notin \{i, j\}$. Z założenia o dopuszczalności, szkielet \mathcal{S} nie zawiera cyklu. Zatem spośród $n + 1$ quasi-grubych składowych szkieletu \mathcal{S} istnieje przynajmniej jedna składowa, która połączona jest z co najwyżej jedną różną od siebie quasi-grubą składową szkieletu \mathcal{S} . Możemy założyć, że jest to \mathcal{S}_1 . Przyjmijmy też, że $\overline{\mathcal{S}_1}$ jest maksymalnym spójnym podszykiem w $\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)$ zawierającym \mathcal{S}_1 . Zauważmy, że jest to szkielet dopuszczalny. Istotnie, jeśli blok x należy do $\overline{\mathcal{S}_1}$, to zgodnie z definicją tego szkieletu cały wiersz szkieletu \mathcal{S} zawierający x jest poza $(\mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)$. Skoro zaś $\overline{\mathcal{S}_1}$ jest maksymalnym spójnym podszykiem $\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n)$, to cały wiersz szkieletu \mathcal{S} zawierający blok x należy do $\overline{\mathcal{S}_1}$. Zatem szkielet ten powstaje z \mathcal{S} przez usunięcie pewnej liczby wierszy, czyli na mocy Obserwacji 4.2.2 szkielet $\overline{\mathcal{S}_1}$ jest dopuszczalny. Z tych samych powodów także szkielet $\mathcal{S} \setminus \overline{\mathcal{S}_1}$ jest dopuszczalny.

Niech $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Wówczas \mathcal{A} można przedstawić jako sumę rozłączną konturów dopuszczalnych $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$, gdzie $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{S}_1}}$, zaś $\mathcal{A}'' \in \mathcal{M}_{\mathcal{S} \setminus \overline{\mathcal{S}_1}}$ jest konturem o dokładnie n quasi-grubych składowych. Na mocy założenia indukcyjnego zastosowanego do szkieletu dopuszczalnego $\mathcal{S} \setminus \overline{\mathcal{S}_1}$ możemy przyjąć, że \mathcal{A}'' jest konturem $0 - 1$ -kowym. Zgodnie z pierwszym krokiem indukcji widzimy, że istnieją takie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, że $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A}'' \cdot \mathfrak{g}$ jest konturem $0 - 1$ -kowym. Pokażemy, że elementy $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ nie zmieniają istotnie konturu \mathcal{A}' . Rzeczywiście, z założenia $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{S}_1}}$, zaś $\overline{\mathcal{S}_1}$ posiada dokładnie jedną quasi-grubą składową w \mathcal{S} , równą \mathcal{S}_1 , połączoną z co najwyżej jedną różną od siebie quasi-grubą składową tego szkieletu. Wynika stąd, że istnieje co najwyżej jedna kolumna szkieletu \mathcal{S} , która zawiera zarówno bloki $\overline{\mathcal{S}_1}$, jak i $\mathcal{S} \setminus \overline{\mathcal{S}_1}$. Kolumna ta, o ile istnieje i jest, po-

wiedźmy, k -tą kolumną w \mathcal{S} , złożona jest z bloków płaskich. Ponadto, szkielety $\overline{\mathcal{S}}_1$ oraz $\mathcal{S} \setminus \overline{\mathcal{S}}_1$ nie mają wspólnych wierszy. Zatem rzeczywiście można dobrać $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ tak, żeby \mathfrak{h} działało jak identyżność na wszystkich wierszach \mathcal{A}'' oraz, żeby \mathfrak{g} działało jak identyżność na wszystkich kolumnach \mathcal{A}'' , za wyjątkiem k -tej. Elementy te nie zmieniają zatem istotnie konturu \mathcal{A}'' .

Stąd kontur $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ ma wszystkie grube bloki w postaci 0 – 1-kowej, oraz wszystkie płaskie w postaci jednowartościowej. Teza kroku indukcyjnego wynika zatem z Lematu 4.2.12. Kończy to dowód twierdzenia. \square

Uzyskaliśmy zatem dowód drugiej implikacji tezy Twierdzenia 3.4.2, a zatem, łącznie z Wnioskiem 3.6.8, dowód całego Twierdzenia 3.4.2.

4.2.3 Dowody lematów pomocniczych

W paragrafie tym udowodnimy trzy lematy, które posłużyły do zamknięcia dowodu Twierdzenia 3.4.2.

DOWÓD LEMATU 4.2.12. Zgodnie z Obserwacją 3.5.7 możemy zakładać, że \mathcal{S} jest szkieletem spójnym. Rozumowanie jest indukcją ze względu na liczbę t wierszy szkieletu \mathcal{S} . Udowodnimy że dla każdego konturu o niezerowych blokach $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^0$ istnieją takie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, że $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ jest 0 – 1-kowy oraz, że współrzędne $g_i \in \text{Gl}_{r_i}(\mathbb{K})$ (zgodnie z Definicją 3.2.3 grupy $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}$ są produktami odpowiednio t oraz s grup macierzy odwracalnych $\text{Gl}_{s_i}(\mathbb{K})$ oraz $\text{Gl}_{r_j}(\mathbb{K})$, dla $1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s$) elementu \mathfrak{g} są macierzami skalarnymi dla wszystkich i takich, że i -ta kolumna konturu \mathcal{A} jest gruba. Na mocy Obserwacji 3.5.6 tak sformułowana teza jest wystarczająca do dowodu całego lematu.

Niech $t = 1$. Zatem \mathcal{A} ma jeden wiersz złożony z bloków x_1, \dots, x_s . Jeśli żaden z bloków x_i nie jest płaski, to \mathcal{A} jest konturem 0 – 1-kowym i wystarczy przyjąć, że $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ mają macierze identyżności na każdej ze współrzędnych. W ten sposób elementy te spełniają, w sposób trywialny, obydwie części tezy indukcji. Załóżmy zatem, że \mathcal{A} zawiera bloki płaskie x_{i_1}, \dots, x_{i_q} , dla pewnych i_1, \dots, i_q . Przyjmijmy też, że w kolumnach o indeksach i_1, \dots, i_q konturu \mathcal{A} znajdują się macierze jednowartościowe $a_{i_1}, \dots, a_{i_q} \in \text{M}_{s_1 \times 1}(\mathbb{K})$ postaci $a_{i_l} = \alpha_{i_l} \cdot q_{i_l}$, gdzie $\alpha_{i_l} \in \mathbb{K}^*$, zaś q_{i_l} jest macierzą 0 – 1-kową. Zatem biorąc $\mathfrak{h} = (id_{s_1}), \mathfrak{g} = (g_1, \dots, g_s)$, gdzie $g_i \in \text{Gl}_{r_i}(\mathbb{K})$ oraz:

$$g_i = \begin{cases} \alpha_{i_l}^{-1}, & i = i_l, \text{ dla pewnego } l, \\ id_{r_i} & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

widzimy, że $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ jest szukanym konturem 0 – 1-kowym. Co więcej, \mathfrak{g} działa jak identyżność na wszystkich kolumnach \mathcal{A} , które są grube, a więc spełnia drugi warunek tezy indukcyjnej.

Załóżmy zatem, że teza indukcyjna zachodzi dla dowolnego konturu o szkielecie dopuszczalnym \mathcal{S} mającym mniej niż t wierszy. Przyjmijmy, że \mathcal{S} ma t wierszy oraz

weźmy kontur $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^0$ taki, że każdy gruby blok \mathcal{A} jest macierzą 0 – 1-kową, zaś każdy płaski blok \mathcal{A} jest macierzą jednowartościową. Załóżmy, że w pierwszym wierszu szkieletu \mathcal{S} bloki znajdują się w kolumnach m_1, \dots, m_k . Będą one dalej oznaczane jako $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}$. Niech \mathcal{S}' będzie szkieletem powstałym przez usunięcie pierwszego wiersza szkieletu \mathcal{S} . Jest to, zgodnie z Obserwacją 4.2.2, szkielet dopuszczalny. Ze spójności szkieletu \mathcal{S} wynika, że każda składowa spójna \mathcal{S}' zawiera blok leżący w jednej z kolumn m_1, \dots, m_k . Niech $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p$ będą tymi składowymi i niech m_{i_1}, \dots, m_{i_p} będą odpowiadającymi im w ten sposób kolumnami. Niech $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$ będą podkonturami \mathcal{A} o szkieletach odpowiednio $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p$. Jest jasne, że składowa spójna szkieletu dopuszczalnego jest dopuszczalna, a zatem kontury \mathcal{A}_i są, dla $1 \leq i \leq p$, dopuszczalne. Każdy z nich ma mniej niż t wierszy, a więc z założenia indukcyjnego oraz z Obserwacji 3.5.7 istnieją takie $\mathfrak{h}' = (h'_1, \dots, h'_t) \in \mathfrak{H}$ oraz $\mathfrak{g}' = (g'_1, \dots, g'_s) \in \mathfrak{G}$, że podkontury $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A}_j \cdot \mathfrak{g}'$ konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ są 0 – 1-kowe, dla $1 \leq j \leq p$. Co więcej możemy założyć, że \mathfrak{h}' działa jak identyfikacja na pierwszy wiersz \mathcal{A} . Zgodnie z założeniem indukcyjnym współrzędne g'_l elementu \mathfrak{g}' są macierzami skalarnymi dla wszystkich l takich, że kolumna l szkieletu \mathcal{S} zawiera grube bloki konturu \mathcal{A}_j , dla pewnego j . Twierdzimy, że uzyskany kontur $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ ma następujące własności:

- (i) wszystkie bloki konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ nie należące do pierwszego wiersza $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ są 0 – 1-kowe,
- (ii) wszystkie bloki pierwszego wiersza $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ są macierzami jednowartościowymi.

Pierwsza własność jest jasna. Załóżmy, że (ii) nie zachodzi. Zatem pewien blok $x' = \mathfrak{h}' \cdot x \cdot \mathfrak{g}'$ pierwszego wiersza i m_i -tej kolumny szkieletu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ nie jest macierzą jednowartościową. Wiadomo, że \mathfrak{h}' działa jak identyfikacja na pierwszym wierszu \mathcal{A} , czyli $x' = x \cdot \mathfrak{g}' = x g_{m_i}$. Zatem x nie może być macierzą rozmiarów $s_1 \times 1$, ponieważ z założenia x byłby macierzą jednowartościową, a więc i $x \cdot g_{m_i}$ musiałaby być jednowartościowa. Zatem x jest gruby. Jeżeli w kolumnie konturu \mathcal{A} zawierającej x znajduje się dowolny blok jednego z konturów \mathcal{A}_j , to $g_{m_{i_j}}$ jest z założenia indukcyjnego macierzą skalarną. Z kolei, z założeń przyjętych w lemacie x był macierzą 0 – 1-kową. Zatem $x' = x \cdot g_{m_{i_j}}$ jest jednowartościowa. Pozostaje zatem możliwość, że x jest jedynym blokiem znajdującym się w zawierającej go m_i -tej kolumnie konturu \mathcal{A} . Wtedy jednak można założyć, że $g'_{m_i} = id_{r_{m_i}}$ i $x' = x$ jest macierzą 0 – 1-kową. Doszliśmy zatem do sprzeczności z założeniem, że (ii) nie zachodzi.

Teraz $\mathfrak{h}' \cdot x_{m_i} \cdot \mathfrak{g}'$ jest blokiem należącym do pierwszego wiersza i m_i -tej kolumny konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$, dla $1 \leq i \leq k$. Na mocy (ii) jest to macierz jednowartościowa, a więc macierz postaci $\alpha_i \cdot q_i$, gdzie q_i jest 0 – 1-kowa, zaś $\alpha_i \in K^*$. Przyjmijmy, że \mathcal{A}'_i jest maksymalnym spójnym podkonturem konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ zawierającym blok $\mathfrak{h}' \cdot x_{m_i} \cdot \mathfrak{g}'$ oraz nie zawierającym bloków $\mathfrak{h}' \cdot x_{m_j} \cdot \mathfrak{g}'$ pierwszego wiersza konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$, dla $j \neq i$. Jest jasne, że każdy blok konturu $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}'$ należy do jednego z konturów \mathcal{A}'_i . Co więcej jeśli \mathcal{A}'_i oraz \mathcal{A}'_j posiadają bloki w tej samej kolumnie, to $i = j$. Niech J_i będzie zbiorem indeksów kolumn zawierających bloki w konturze \mathcal{A}'_i . Z tego, co powiedzieliśmy wynika, że $J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_r = \{1, \dots, s\}$. Niech I_i będzie zbiorem indeksów

wierszy zawierających bloki w konturze $\mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A}_i \cdot \mathfrak{g}'$.

Określamy elementy $\mathfrak{h}'' = (h_1'', \dots, h_t'') \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}'' = (g_1'', \dots, g_s'') \in \mathfrak{G}$ takie, że: $h_1'' = id_{s_1}$, zaś dla $j > 1$:

$$h_j'' = \alpha_i \cdot id_{s_j}, \quad \text{o ile } j \in I_i,$$

natomiast

$$g_j'' = \alpha_i^{-1} \cdot id_{r_j}, \quad \text{o ile } j \in J_i.$$

Łatwo widzieć, że $\mathfrak{h}'' \mathfrak{h}' \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}' \mathfrak{g}''$ jest macierzą 0 – 1-kową. Krok indukcyjny jest zatem zakończony. \square

DOWÓD LEMATU 4.2.11. Na mocy Lematu 4.2.12 wystarczy pokazać, że w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur \mathcal{A}' , którego każdy blok jest macierzą jednowartościową. Istotnie, jeśli wskażemy kontur \mathcal{A}' , to skoro będzie on konturem płaskim, to zgodnie z Lematem 7.11 w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie \mathcal{A}' , a więc także w $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ -orbicie \mathcal{A} , istnieje będzie kontur 0 – 1-kowy.

Twierdzimy, że istnieją takie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, że każda współrzędna \mathfrak{g} jest macierzą identycznościową (odpowiednich rozmiarów) oraz $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g}$ ma wszystkie bloki jednowartościowe. Od tej pory możemy zatem zakładać, że \mathcal{S} ma jeden wiersz złożony, zgodnie z warunkiem (i) w Definicji 4.2.1, z co najwyżej trzech bloków.

Jeśli \mathcal{S} składa się z jednego bloku, wówczas teza dowodzonego lematu jest oczywista. Załóżmy zatem, że \mathcal{S} ma przynajmniej dwa bloki. Wówczas \mathcal{S} posiada postać zredukowaną \mathcal{S}^r . Bloki szkieletu \mathcal{S}^r mają rozmiary: 1×1 , w przypadku gdy \mathcal{S}^r składa się z dwóch bloków lub rozmiary 2×1 , w przypadku gdy \mathcal{S}^r składa się z trzech bloków. Zgodnie z Lematem 3.5.11 wystarczy pokazać tezę dla konturów zawartych w $\mathcal{M}_{\mathcal{S}^r}$. W pierwszym przypadku nie ma zatem czego dowodzić, ponieważ macierze rozmiarów 1×1 są zawsze jednowartościowe. Załóżmy zatem, że \mathcal{S}^r ma trzy bloki. Teza sprowadza się zatem do sprawdzenia, że dla każdej trójki $a, b, c \in M_{2 \times 1}(\mathbb{K})$ macierzy postaci:

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, istnieje taka macierz $g \in Gl_2(\mathbb{K})$, że macierze ga, gb oraz gc są jednowartościowe. Fakt ten wynika jednak natychmiast z rozumowania przyjętego w przypadku trzecim dowodu Lematu 4.1.3. \square

DOWÓD LEMATU 4.2.10. Szkielet dopuszczalny \mathcal{S} powstaje przez dodanie pewnej liczby płaskich bloków do wierszy jedynej swojej grubej składowej \mathcal{S}' . Na mocy Wniosku 4.2.5, szkielet \mathcal{S}' jest albo schodkowy, albo wierszowo dwusiodkowy, albo kolumnowo trójsiodkowy. Tezę lematu będziemy dowodzić osobno w przypadkach, gdy \mathcal{S}' jest w jednej z tych trzech postaci. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego lematu możemy zakładać, że wszystkie rozważane kontury mają niezerowe bloki.

- \mathcal{S}' jest szkieletem wierszowo dwusiodkowym.

Pokażemy najpierw, że także szkielet \mathcal{S} jest wierszowo dwusiodkowy. Zgodnie z warunkiem (i') wymienionym w Definicji 4.2.1, żaden wiersz szkieletu \mathcal{S} nie może zawierać czterech bloków. Zauważmy także, że żadne dwa różne wiersze \mathcal{S} nie mogą zawierać trzech bloków. Załóżmy przeciwnie, że i -ty oraz j -ty wiersz \mathcal{S} zawierają trzy bloki. Z definicji \mathcal{S} istnieją bloki grube x, y zawarte odpowiednio w i -tym oraz w j -tym wierszu \mathcal{S} . Wiadomo też, że grube bloki w \mathcal{S} stanowią podszykielet spójny \mathcal{S}' . W szczególności pomiędzy wierzchołkami grafu rozdzielonego $\Gamma_{\mathcal{S}}$ odpowiadającymi i -temu oraz j -temu wierszowi \mathcal{S} przechodzi gruba droga. Skoro jednak każdy z tych wierszy ma trzy bloki, to wskazana gruba droga jest drogą węzłową, co przeczy warunkowi (iv') wymienionemu w Definicji 4.2.1. Pokazaliśmy zatem, że żadne dwa różne wiersze \mathcal{S} nie mogą zawierać trzech bloków. Z poczynionych wyżej obserwacji wynika, że szkielet $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ składa się z co najwyżej dwóch bloków płaskich, które mogą być dołączone jedynie do końcówek szkieletu \mathcal{S}' . Zatem \mathcal{S} jest szkieletem wierszowo dwusiodkowym.

Pokażemy teraz, że szkielet \mathcal{S} zawarty jest w pewnym grubym szkielecie dopuszczalnym, będącym jednocześnie szkieletem wierszowo dwusiodkowym. Jeśli $\mathcal{S} = (I, f)$, gdzie $f(i, j) = (a_i, s_j)$ oraz a_i jest sumą szerokości (równych s_j , dla pewnych j) bloków w i -tym wierszu \mathcal{S} , to szkielet $\bar{\mathcal{S}}$ definiujemy jako parę (I, f') , gdzie $f'(i, j) = (a'_i, 2)$ oraz a'_i jest sumą szerokości (równych 2) bloków w i -tym wierszu szkieletu $\bar{\mathcal{S}}$. Jest jasne, że skoro $s_j \leq 2$, dla wszystkich j takich, że $(i, j) \in I$, to szkielet $\bar{\mathcal{S}}$ zawiera szkielet \mathcal{S} . Z definicji $\bar{\mathcal{S}}$ widać też natychmiast, że jest to szkielet wierszowo dwusiodkowy i dopuszczalny. Bloki $\bar{\mathcal{S}}$ mają rozmiary równe:

- 2×2 , dla wierszy $\bar{\mathcal{S}}$ mających dokładnie jeden blok,
- 4×2 , dla wierszy $\bar{\mathcal{S}}$ mających dokładnie dwa bloki,
- 6×2 , dla wierszy $\bar{\mathcal{S}}$ mających dokładnie trzy bloki.

Zgodnie z Lematem 3.5.8 wystarczy zatem dowieść, że w $\bar{\mathfrak{H}} - \bar{\mathfrak{G}}$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{S}}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy, gdzie odpowiednie grupy $\bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{G}}$ działają na $\mathcal{M}_{\bar{\mathcal{S}}}$ zgodnie z (3.2.3).

Rozważmy postać zredukowaną $\bar{\mathcal{S}}^r$ szkieletu $\bar{\mathcal{S}}$ (zgodnie z definicją dopuszczalności istnieje postać zredukowana szkieletu, a skoro $\bar{\mathcal{S}}$ ma grube bloki - to postać ta jest nietrywialna). Zgodnie z Lematem 3.5.11 wystarczy pokazać, że w $\bar{\mathfrak{H}}' - \bar{\mathfrak{G}}'$ -orbicie dowolnego konturu (o niezerowych blokach) $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{S}}^r}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy, gdzie $\bar{\mathfrak{H}}', \bar{\mathfrak{G}}'$ są odpowiednimi grupami działającymi na $\mathcal{M}_{\bar{\mathcal{S}}^r}$. Zatem zgodnie z Definicją 3.5.9 widzimy, że liczba kolumn szkieletu $\bar{\mathcal{S}}^r$ jest identyczna z liczbą kolumn szkieletu $\bar{\mathcal{S}}$, oraz bloki $\bar{\mathcal{S}}^r$ mają rozmiary równe:

- 1×2 , dla wierszy $\bar{\mathcal{S}}^r$ mających dokładnie jeden blok,
- 3×2 , dla wierszy $\bar{\mathcal{S}}^r$ mających dokładnie dwa bloki,
- 5×2 , dla wierszy $\bar{\mathcal{S}}^r$ mających dokładnie trzy bloki.

Zatem $\overline{\mathcal{S}}^r$ jest równy jednemu ze szkieletów opisanych w Lemacie 4.1.2. W szczególności z Lematu 4.1.2 wynika, że w $\overline{\mathfrak{H}}' - \overline{\mathfrak{G}}'$ -orbicie dowolnego konturu $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{S}}^r}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy.

- Szkielet \mathcal{S}' jest schodkowy.

Podobnie jak w poprzednim przypadku wykazujemy, że żaden wiersz szkieletu \mathcal{S} nie może zawierać czterech bloków, ani żadne dwa różne wiersze \mathcal{S} nie mogą mieć trzech bloków. Wynika stąd, że \mathcal{S} jest szkieletem wierszowo dwuschodkowym. Skoro \mathcal{S} jest dopuszczalny, to teza wynika z poprzedniego przypadku.

- Szkielet \mathcal{S}' jest kolumnowo trójschodkowy.

Argumentując podobnie jak wyżej widzimy, że żaden wiersz szkieletu dopuszczalnego \mathcal{S} nie może zawierać czterech bloków oraz, że żadne dwa różne wiersze \mathcal{S} nie mogą zawierać trzech bloków. Zatem szkielet \mathcal{S} jest kolumnowo trójschodkowy. Istnieje zatem szkielet dopuszczalny i kolumnowo trójschodkowy $\overline{\mathcal{S}}$ o blokach szerokości dokładnie 2, który zawiera szkielet \mathcal{S} . Zgodnie z Lematem 3.5.8 wystarczy wykazać, że w orbicie dowolnego konturu o szkielecie $\overline{\mathcal{S}}$ znajduje się kontur 0 – 1-kowy. Podobnie jak wcześniej widzimy, że i w tym przypadku wystarczy rozważyć orbity konturów o szkielecie $\overline{\mathcal{S}}^r$ będącym postacią zredukowaną szkieletu $\overline{\mathcal{S}}$. Jednak skoro szerokości bloków należących do $\overline{\mathcal{S}}^r$ są równe 2, to $\overline{\mathcal{S}}^r$ równy jest jednemu ze szkieletów opisanych w Lemacie 4.1.3. Zatem teza wynika z Lematu 4.1.3.

□

Bibliografia

- [1] ANDERSEN O.: *Ein Bericht ber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, Praca doktorska, Hamburg (1952).
- [2] ANDERSON F., FULLER K.: *Rings and categories of modules*, 2nd. ed., Graduate Texts in Mathematics 13, Springer (1992).
- [3] ARA P., GOODEARL K.R., O'MEARA K.C., PARDO E.: *Separative cancellation for projective modules over exchange rings*, Israel J. Math. 105 (1998), 105-137.
- [4] ASSEM I., SIMSON D., SKOWROŃSKI A.: *Elements of the representation theory of associative algebras. 1: Techniques of representation theory*, London Mathematical Society, Student Texts 65, Cambridge University Press (2006).
- [5] BAUTISTA R.: *On algebras of strongly unbounded representation type*, Comment. Math. Helv., vol. 60 (1985), 392-399.
- [6] BAUTISTA R., GABRIEL P., ROITER A.V., SALMERON L.: *Representation-finite algebras and multiplicative bases*, Invent. Math. 81 (1985), 217-285.
- [7] BONGARTZ K.: *Quadratic forms and finite representation type*, Lecture Notes in Mathematics 1146, Springer (1985), 325-339.
- [8] CLIFFORD A.H, PRESTON G.B.: *The algebraic theory of semigroups*, American Mathematical Society (1961).
- [9] CURTIS C.W., REINER I.: *Methods of representation theory, with applications to finite groups and orders*, tom 2., Wiley, New York (1987).
- [10] DROZD Y.A., KIRICHENKO V.V.: *Finite dimensional algebras*, Springer (1994).
- [11] FACCHINI A.: *Direct sum decomposition of modules, semilocal endomorphism rings, and Krull monoids*, J. Algebra 256 (2002), 280-307.
- [12] HAN J.: *Conjugate action in a left artinian ring*, Bull. Korean Math. Soc. 32 (1995), No. 1, 35-43.
- [13] HAN J.: *Group actions in a regular ring*, Bull. Korean Math. Soc. 42 (2005), No. 4, 807-815.

- [14] HIRANO Y.: *Rings with finitely many orbits under the regular action*, w: Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups, pp. 343-348, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 236, Dekker New York (2004).
- [15] HAZEWINKEL M., GUBARENI N., KIRICHENKO V.V.: *Algebras, rings and modules. Vol. 1*, Mathematics and its applications 575, Springer (2004).
- [16] HAZEWINKEL M., GUBARENI N., KIRICHENKO V.V.: *Algebras, rings and modules. Vol. 2*, Mathematics and its applications 586, Springer (2007).
- [17] HEATHERLY H., TUCCI R.: *The semigroup of right ideals of a ring*, Mathematica Pannonica 18.1 (2007), 19-26.
- [18] HEATHERLY H., TUCCI R.: *The semigroup of right ideals of a right weakly regular ring*, Mathematica Pannonica 18.2 (2007), 157-167.
- [19] HEATHERLY H., TUCCI R.: *Rings whose semigroup of right ideals is J-trivial*, International Electronic Journal of Algebra Mathematics 10 (2011), 151-161.
- [20] HOWIE J.M.: *An introduction to semigroup theory*, Academic Press (1976).
- [21] HRYNIEWICKA M., KREMPA J.: *On rings with finite number of orbits*, Publ. Mat. 58 (2014), 233-249.
- [22] IWAHORI N.: *On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec 1, 10 (1964), 215-236.
- [23] JESPER E., OKNIŃSKI J.: *Descending chain conditions and graded rings*, J. Algebra 178 (1995), 458-479.
- [24] LAM Y.: *A first course in noncommutative rings*, Graduate Texts in Mathematics 131. 2ed., Springer (2001).
- [25] LANG S.: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer (2002).
- [26] MECEL A., OKNIŃSKI J.: *Conjugacy classes of left ideals of a finite dimensional algebra*, Publ. Mat. 57 (2013), 477-496.
- [27] MICHLER G.: *Idempotent ideals in perfect rings.*, Canad. J. Math. 21 (1969), 301-309.
- [28] NAZAROVA L.A., ROITER A.V.: *Kategorielle Matrizen-Probleme und die Brauer-Thrall-Vermutung*, Mitt. Math. Sem. Giessen 115 (1975), 1-153.
- [29] NERETIN Y.: *Infinite symmetric group and combinatorial descriptions of semi-groups of double cosets*, Preprint w arXiv: 1106.1161v1 (2011).
- [30] NERETIN Y.: *Sphericity and multiplication of double cosets for infinite-dimensional classical groups*, Prepring w arXiv: 1101.4759 (2011).
- [31] OKNIŃSKI J.: *Semigroups of matrices*, Series in algebra 6, World Scientific (1998).

- [32] OKNIŃSKI J.: *Regular J-classes of subspace semigroups*, Semigroup Forum 65 (2002), no. 3, 450-459.
- [33] OKNIŃSKI J.: *The algebra of the subspace semigroup of $M_2(F_q)$* , Colloq. Math. 92 (2002), no. 1, 131-139.
- [34] OKNIŃSKI J., PUTCHA M.: *Subspace semigroups*, J. Algebra 233 (2000), 87-104.
- [35] OKNIŃSKI J., RENNER L.: *Algebras with finitely many orbits*, J. Algebra 264 (2003), 479-495.
- [36] OLSHANSKI G.I.: *On semigroups related to infinite-dimensional groups*, W: Topics in representation theory (A. A. Kirillov, ed.). Advances in Soviet Math., vol. 2. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1991), 67-101.
- [37] PIERCE R.S.: *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics 88, Springer (1982).
- [38] PUTCHA M.S.: *Sandwich matrices, Solomon algebras, and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. 340 (1993), 415-428.
- [39] PUTCHA M.S.: *Linear algebraic monoids*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 133, Cambridge (1998).
- [40] RENNER L.E.: *Linear algebraic monoids*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Ser. 134, Springer (2005).
- [41] RINGEL C.M.: *Report on the Brauer-Thrall conjectures: Rojters theorem and the theorem of Nazarova and Rojter*, Representation Theory II, Proc. ICRA II (Ottawa, 1979), Lecture Notes in Mathematics 831, Springer (1980), 104-136.
- [42] RINGEL C.M.: *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics 1099, Springer (1984).
- [43] ROITER A.V.: *The unboundeness of the dimension of the indecomposable representations of algebras that have an infinite number of indecomposable representations*, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 32 (1968), 1275-1282.
- [44] SIMSON D.: *Linear representations of partially ordered dets and vector space categories*, Algebra, Logic and Applications, Gordon and Breach, London (1992).
- [45] SOLOMON L.: *The Bruhat decomposition, Tits system and Iwahori ring for the monoid of matrices over a finite field*, Geometriae Dedicata 36 (1990), 15-49.
- [46] SHAPS M.: *Deformations of finite-dimensional algebras and their idempotents*, Trans. Amer. Math. Soc. 307 (1988), 843-856.
- [47] TAUVEL R., YU R.: *Lie algebras and algebraic groups*, Monographs in Mathematics, Springer (2005).