Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Bartosz Łanucha

Przestrzenie de Branges'a-Rovnyaka

De Branges-Rovnyak Spaces

Praca doktorska wykonana

w Zakładzie Funkcji Analitycznych

Instytutu Matematyki

Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej

pod kierunkiem

Prof. dr hab. Marii Nowak

Lublin, 2014

Abstract

The spaces now called de Branges-Rovnyak spaces were introduced by de Branges and Rovnyak in [4] in 1966 and further studied in [3]. It was realized soon that these spaces have numerous connections with other topics in complex analysis and operator theory. For example, they were critical in de Branges's discovery of his proof of the Bieberbach conjecture.

De Branges-Rovnyak spaces on the unit disk $\mathbb{D}$ are a family of subspaces $\mathcal{H}(b)$ of the Hardy space H^2 parametrized by b in the closed unit ball of H^∞. To give a precise definition of $\mathcal{H}(b)$ assume that $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, where $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$, and let T_φ denote the bounded Toeplitz operator on H^2, that is, $T_\varphi f = P(\varphi f)$, where P is the orthogonal projection of $L^2(\mathbb{T})$ onto H^2.

Given a function b in the unit ball of H^∞, the de Branges-Rovnyak space $\mathcal{H}(b)$ is the image of H^2 under the operator $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$. The space $\mathcal{H}(b)$ is given the Hilbert space structure that makes the operator $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$ a coisometry of H^2 onto $\mathcal{H}(b)$, namely

$$\langle (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} f, (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} g \rangle_b = \langle f, g \rangle_2 \quad (f, g \in (\ker(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})^\perp).$$

The general theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces subdivides into two cases, according to whether or not b is an extreme point of the unit ball of H^∞. Perhaps the most important examples of extreme b are inner functions. If b is inner, then

$$\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2$$

and is called the model space associated to b.

Chapter 1 of this dissertation has an introductory character. Following Sarason [34] we describe the notions of contractive containment and of complementary space for arbitrary Hilbert spaces. Moreover, we present basic properties of Hardy spaces and Toeplitz operators.

In Chapter 2 we consider the spaces $\mathcal{H}(b)$ when b is not an extreme point of the unit ball of H^∞. Then there exists an outer function $a \in H^\infty$ for which $|a|^2+|b|^2=1$ a. e. on $\mathbb{T}$. Moreover, if we suppose that $a(0)>0$, then a is uniquely determined, and we say that (b,a) is a pair.

Recall now that the Smirnov class $\mathcal{N}^+$ consists of the holomorphic functions in $\mathbb{D}$ that are quotients of functions in H^∞ in which the denominators are outer functions. If (b,a) is a pair, then the quotient $\varphi = b/a$ is in $\mathcal{N}^+$. Conversely, for every nonzero function $\varphi \in \mathcal{N}^+$ there exists a unique pair (b,a) such that $\varphi = b/a$. It is worth noting here that if φ is rational, then the functions a and b in the representation of φ are also rational (see [35]).

For a function $\varphi = b/a \in \mathcal{N}^+$ we define (densely on H^2) the operator T_φ by the formula $T_\varphi f = \varphi f$. It was proved in [35] that if φ is a nonzero function in $\mathcal{N}^+$ with canonical representation $\varphi = b/a$, then the de Branges-Rovnyak space $\mathcal{H}(b)$ is the domain of $T_{\overline{\varphi}}$ and for $f \in \mathcal{H}(b)$,

$$\|f\|_b^2 = \|f\|_2^2 + \|T_{\overline{\varphi}} f\|_2^2.$$

In Chapter 2 we consider rational pairs (b,a) such that

$$\varphi(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1-\overline{\lambda}_j z)},$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are distinct points from $\mathbb{T}$. Then there is a unique polynomial r of degree n, without zeros in $\overline{\mathbb{D}}$, such that $r(0)>0$, and

$$a(z) = \frac{\prod_{j=1}^n (1-\overline{\lambda}_j z)}{r(z)}, \quad b(z) = \frac{1}{r(z)}.$$

Let φ be as above. Then for every f in $\mathcal{H}(b)$,

$$T_{\overline{\varphi}} f(z) = f(z) + \sum_{j=1}^n \overline{a}_j \lambda_j \frac{f(\lambda_j)-f(z)}{\lambda_j - z},$$

where $a_j = \left(\prod_{l=1, l\neq j}^n (1-\overline{\lambda}_l \lambda_j)\right)^{-1}$. Using this result we obtain the following characterization of $\mathcal{H}(b)$ in terms of the zeros of a.

Theorem. *Let (b,a) be a rational pair and let $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ be the simple zeros of a on $\mathbb{T}$. Then*

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}(a) \oplus_{\mathcal{H}(b)} \operatorname{span}\{k^b_{\lambda_1}, \ldots, k^b_{\lambda_n}\},$$

where

$$k^b_{\lambda_j}(z) = \frac{1-\overline{b(\lambda_j)}b(z)}{1-\overline{\lambda}_j z}, \quad 1 \le j \le n.$$

We remark that recently the above result has been generalized to the case when λ_j are zeros of arbitrary order [16].

In this chapter we also obtain some results showing the connection between spaces $\mathcal{H}(b)$ and the generalized Dirichlet spaces.

In Chapter 3 we deal with the so-called truncated Toeplitz operators. These are operators A_φ, $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, densly defined on the model spaces $K_b = H^2 \ominus bH^2$ by the formula

$$A_\varphi f = P_b(\varphi f)$$

where P_b is the orthogonal projection of $L^2(\mathbb{T})$ onto K_b. The operator A_φ can be seen as a compression to K_b of the classical Toeplitz operator T_φ. Let

$$\mathscr{T}(K_b) = \{A_\varphi\colon \ \varphi \in L^2(\mathbb{T}) \text{ and } A_\varphi \text{ is bounded}\}.$$

We note that if B_n is a finite Blaschke product of degree n, then K_{B_n} has dimension n. By elementary linear algebra, the complex vector space of all linear transformations on K_{B_n} has dimension n^2. By Sarason [29], $\mathscr{T}(K_{B_n})$ has dimension $2n-1$.

If B_n has distinct zeros $a_1, \ldots, a_n$ and

$$k_{a_j}(z) = \frac{1}{1-\overline{a}_j z}, \qquad \widetilde{k}_{a_j}(z) = \frac{B_n(z)}{z-a_j}, \quad z \in \mathbb{D},$$

then the set $\{k_{a_1}, \ldots, k_{a_n}\}$ as well as $\{\widetilde{k}_{a_1}, \ldots, \widetilde{k}_{a_n}\}$ is a (non-orthonormal) basis for K_{B_n}. J. A. Cima, W. T. Ross and W. R. Wogen [9] proved that then the matrix representation of a truncated Toeplitz operator with respect to each of these bases is completely determined by entries along the main diagonal and the first row. As remarked in [9], there is nothing special about the first row and an analogous result can be obtained where the representing matrix is determined by the entries along the main diagonal and any other row or column. A similar result for matrix representations of a truncated Toeplitz operator with respect to the so-called Clark basis was also given in [9].

Here we show that these results can be extended to the case when B is an infinite Blaschke product whose zeros $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ satisfy some additional conditions. In particular, we describe matrix representations of truncated Toeplitz operators with respect to the conjugate kernel basis $\{\widetilde{k}_{a_j}\}_{j=1}^\infty$ for interpolating Blaschke products. The proofs of sufficiency given in [9] rely on the fact that if B is a Blaschke product of degree n, then the dimension of $\mathscr{T}(K_B)$ is $2n-1$. Our proofs are based on Sarason's characterization of the space $\mathscr{T}(K_{B_n})$ given in [29].

One of the main theorems proved in Chapter 3 is the following.

Theorem. *Let B be an infinite Blaschke product with uniformly separated zeros $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ and let A be a bounded linear operator on K_B. If $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ is the matrix representation of A with respect to the basis $\{\widetilde{k}_{a_j}\}_{j=1}^{\infty}$, then $A \in \mathscr{T}(K_B)$ if and only if*

$$r_{s,p} = \frac{B'(a_1)}{B'(a_s)} \frac{(a_p - a_1)r_{1,p} + (a_1 - a_s)r_{1,s}}{a_p - a_s},$$

for all $s \neq p$.

Spis treści

Wstęp

Przestrzenie, obecnie zwane przestrzeniami de Branges'a-Rovnyaka, zostały wprowadzone przez L. de Branges'a i J. Rovnyaka w roku 1966 w [4] i dalej badane w książce „Square Summable Power Series" [3]. Wkrótce okazało się, że przestrzenie te odgrywają istotną rolę w wielu zagadnieniach analizy zespolonej i teorii operatorów. Między innymi, przestrzenie te odegrały kluczową rolę w dowodzie de Branges'a słynnej hipotezy Bieberbacha. Należy jeszcze podkreślić, że na dalszy rozwój teorii przestrzeni de Barnges'a-Rovnyaka ogromny wpływ wywarły publikacje D. Sarasona, między innymi [30]-[35].

Niech H^2 oznacza klasyczną przestrzeń Hardy'ego, czyli przestrzeń wszystkich szeregów potęgowych $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ takich, że $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Ponadto, niech H^∞ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji analitycznych i ograniczonych w kole jednostkowym $\mathbb{D}$. Ogólnie mówiąc, przestrzenie de Branges'a-Rovnyaka to rodzina podprzestrzeni $\mathcal{H}(b)$ przestrzeni H^2, wyznaczonych przez funkcje b z domkniętej kuli jednostkowej przestrzeni H^∞.

Poniżej przedstawimy szczegółową definicję przestrzeni $\mathcal{H}(b)$. W tym celu przypomnijmy, że każda funkcja $f \in H^2$ ma granicę niestyczną $f(e^{it})$ dla prawie wszystkich e^{it}. Niech $\mathcal{H}^2$ oznacza zbiór wszystkich funkcji brzegowych $f(e^{it})$, $f \in H^2$. Wtedy $\mathcal{H}^2$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $L^2 = L^2(\partial\mathbb{D})$, składającą się dokładnie z tych funkcji klasy L^2, dla których wszystkie współczynniki Fouriera ze wskaźnikami ujemnymi zerują się. Ponadto, wszystkie harmoniczne przedłużenia za pomocą całki Poissona funkcji klasy $\mathcal{H}^2$ są funkcjami analitycznymi w kole jednostkowym $\mathbb{D}$ i stanowią klasę H^2. W dalszym ciągu przestrzeń H^2 będziemy identyfikować z przestrzenią $\mathcal{H}^2$.

Dla $\varphi \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ operator Toeplitza $T_\varphi \colon H^2 \to H^2$ jest określony wzorem $T_\varphi f = P(\varphi f)$, gdzie $P : L^2 \to H^2$ oznacza rzut ortogonalny przestrzeni L^2 na przestrzeń H^2. Dodajmy przy tym, że dla $\varphi \in L^2$ operator Toeplitza zdefiniowany jak powyżej, jest operatorem gęsto określonym na przestrzeni H^2.

Dla ustalonej funkcji b z domkniętej kuli jednostkowej przestrzeni H^∞, przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest obrazem przestrzeni H^2 poprzez operator $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$, z iloczynem skalarnym

$$\langle (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} f, (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} g \rangle_b = \langle f, g \rangle_2, \quad f, g \in (\ker(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})^\perp,$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni H^2.

Zauważmy, że przy tak określonym iloczynie skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$, odwzorowanie $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$ jest częściową izometrią przestrzeni H^2 na $\mathcal{H}(b)$, a przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest kontrakcyjnie zawarta w przestrzeni H^2.

Powyżej przedstawiona definicja przestrzeni de Branges'a-Rovnyaka pochodzi z książki D. Sarasona [34], gdzie autor przedstawił ogólną konstrukcję pewnych przestrzeni Hilberta zawartych kontrakcyjnie w innych przestrzeniach Hilberta. Konstruowane przez Sarasona przestrzenie są obrazami ograniczonych operatorów liniowych z odpowiednio określonym iloczynem skalarnym. Dokładniej, jeśli A jest ograniczonym operatorem liniowym z przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}_1$ w przestrzeń Hilberta $\mathscr{H}$ oraz $\mathcal{R}(A) = A(\mathscr{H}_1)$, to na przestrzeni $\mathcal{R}(A)$ można określić iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)}$ w następujący sposób:

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle x_\perp, y_\perp \rangle_{\mathscr{H}_1},$$

gdzie $x_\perp$, $y_\perp$ oznaczają rzuty ortogonalne odpowiednio elementów $x, y \in \mathscr{H}_1$ na przestrzeń $(\ker A)^\perp$. Jeśli $\mathcal{M}(A) = (\mathcal{R}(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)})$, to $\mathcal{M}(A)$ jest przestrzenią Hilberta zawartą w sposób ograniczony w $\mathscr{H}$ oraz operator $A : \mathscr{H}_1 \to \mathcal{M}(A)$ jest częściową izometrią. Jeśli ponadto $\|A\| \leq 1$, to możemy zdefiniować przestrzeń $\mathcal{H}(A)$ równością

$$\mathcal{H}(A) = \mathcal{M}((I - AA^*)^{1/2}).$$

Wtedy obie przestrzenie $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$ są zawarte kontrakcyjnie w $\mathcal{H}$. Zauważmy, że zgodnie z wprowadzonymi wcześniej oznaczeniami, dla ustalonego b z domkniętej kuli jednostkowej w H^∞ mamy $\mathcal{H}(T_b) = \mathcal{H}(b)$.

Ze względu na równość

$$\mathscr{H} = \mathcal{M}(A) + \mathcal{H}(A),$$

przestrzenie $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$ są nazywane przestrzeniami komplementarnymi. Zostały one dokładnie omówione w pierwszej części rozdziału 1. Ponadto w rozdziale tym omawiamy podstawowe własności przestrzeni Hardy'ego oraz operatorów Topelitza, z których korzystamy w dalszym ciągu niniejszej rozprawy. W szczególności, przedstawiamy warunki konieczne i dostateczne na to, by operator Toeplitza był izometrią (twierdzenie 1.24), bądź częściową izometrią (twierdzenie 1.25). Zaprezentowany dowód twierdzenia 1.24 pochodzi z pracy [6], natomiast przedstawiony dowód twierdzenia 1.25 jest uproszczoną wersją oryginalnego dowodu z pracy [5]. Rozdział 1 kończymy omówieniem podstawowych własności i znanych przykładów przestrzeni de Branges'a-Rovnyaka. Jednym z ważniejszych przykładów tych przestrzeni jest tak zwana przestrzeń modelowa. Jest to przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ wyznaczona przez funkcje wewnętrzną b. W tym przypadku przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest zwykłą podprzestrzenią przestrzeni H^2, która jest dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni bH^2, czyli

$$\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2.$$

Ponadto, pokazujemy między innymi, że jeśli $\|b\|_\infty < 1$, to $\mathcal{H}(b) = H^2$ i normy $\|\cdot\|_b$, $\|\cdot\|_2$ są równoważne, natomiast jeśli $b(z) = \lambda$, $|\lambda| = 1$, to $\mathcal{H}(b) = \{0\}$.

Ogólna teoria przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ dzieli się na dwa przypadki, w zależności od tego czy b jest, czy nie jest, punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞. Rozdział 2 tej rozprawy poświęcony jest przestrzeniom $\mathcal{H}(b)$ dla b nie będących punktami ekstremalnymi.

Przypomnijmy, że funkcja analityczna b taka, że $|b(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$, nie jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy $\log(1 - |b|^2)$ jest funkcją całkowalną na $\mathbb{T}$. Z tego względu, z każdą taką funkcją b można powiązać dokładnie jedną ograniczoną funkcję zewnętrzną a taką, że

$$|a(e^{it})|^2 + |b(e^{it})|^2 = 1 \quad \text{p.w. na } \mathbb{T},$$

oraz $a(0) > 0$. W takim przypadku (b, a) będziemy nazywać parą kanoniczną.

Niech $\mathcal{N}^+$ oznacza klasę Smirnova, złożoną z funkcji φ, analitycznych w kole jednostkowym $\mathbb{D}$, postaci $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$, gdzie $\varphi_1, \varphi_2 \in H^\infty$ oraz φ_2 jest funkcją zewnętrzną. Wiadomo, że funkcja analityczna φ, która nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{D}$, należy do klasy $\mathcal{N}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją jednoznacznie przedstawić w postaci $\varphi = b/a$, gdzie (b, a) jest parą kanoniczną. Przedstawienie funkcji $\varphi \in \mathcal{N}^+$ w postaci $\varphi = b/a$ nazywamy reprezentacją kanoniczną. Dla $\varphi = b/a \in \mathcal{N}^+$, D. Sarason rozpatrywał operatory $T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi^*$, gdzie T_φ jest operatorem określonym na przestrzeni aH^2 (a więc gęstej podprzestrzeni przestrzeni H^2) wzorem $T_\varphi f = \varphi f$. Podkreślmy tutaj, że tak zdefiniowany operator T_φ nie musi być ograniczony. W 2008 roku, w pracy [35], Sarason wykazał, że jeśli $\varphi = b/a$ jest reprezentacją kanoniczną niezerowej funkcji z klasy $\mathcal{N}^+$, to przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest dziedziną operatora $T_{\overline{\varphi}}$ oraz dla wszystkich $f \in \mathcal{H}(b)$,

$$\|f\|_b^2 = \|f\|_2^2 + \|T_{\overline{\varphi}} f\|_2^2.$$

Pomimo wielu twierdzeń opisujących strukturę i własności przestrzeni $\mathcal{H}(b)$, w ogólnym przypadku nie zostały jeszcze dokładnie scharakteryzowane elementy tej przestrzeni. Jak do tej pory, najwięcej wyników dotyczących opisu elementów przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ otrzymano w przypadku, gdy b jest funkcją wymierną.

Jak zostało pokazane w rozdziale 2, z twierdzenia Fejéra-Riesza wynika, że funkcja $\varphi \in \mathcal{N}^+$ jest funkcją wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje b i a występujące w reprezentacji kanonicznej $\varphi = b/a$ są funkcjami wymiernymi. Ponadto, jeśli funkcja wymierna b nie jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞, to wtedy odpowiadająca jej funkcja zewnętrzna a taka, że (b, a) tworzą parę kanoniczną, jest również funkcją wymierną. W szczególności, oznacza to, że funkcja a jest funkcją wymierną nie zerującą się w kole jednostkowym $\mathbb{D}$. Podkreślmy, że w tym przypadku funkcje b i a są funkcjami analitycznymi w domknięciu koła jednostkowego $\mathbb{D}$.

Jeden z ciekawszych wyników charakteryzujących przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest twierdzenie C. Costary i T. Ransforda z 2013 roku ([11]), opisujące elementy przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ w terminach zer funkcji a, leżących na okręgu jednostkowym. Mianowicie, wykazali oni, że jeśli (b, a) jest wymierną parą kanoniczną i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$, to

$$\mathcal{H}(b) = \left\{ p + \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j) g : \ p \in P_{n-1}, \ g \in H^2 \right\},$$

gdzie P_{n-1} oznacza zbiór wielomianów stopnia co najwyżej $n-1$. Zwróćmy uwagę, że powyższy wynik jest uogólnieniem wyniku dla przypadku $n = 1$, otrzymanego przez D. Sarasona w pracy [32].

Okazuje się również, że dla pewnych funkcji wymiernych b przestrzenie $\mathcal{H}(b)$ mogą być identyfikowane z tak zwanymi uogólnionymi przestrzeniami Dirichleta.

Dla $\lambda \in \mathbb{T}$ i funkcji $f \in H^2$ lokalną całkę Dirichleta funkcji f w punkcie λ definiujemy wzorem

$$D_\lambda(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(\lambda) - f(e^{it})}{\lambda - e^{it}} \right|^2 dt.$$

gdzie $f(\lambda)$ oznacza granicę niestyczną funkcji f w punkcie λ. Jeśli $f(\lambda)$ nie istnieje, to przyjmujemy $D_\lambda(f) = \infty$. Dla skończonej, dodatniej miary borelowskiej μ na okręgu $\mathbb{T}$, uogólnioną przestrzeń Dirichleta $\mathcal{D}(\mu)$ definiujemy jako przestrzeń funkcji $f \in H^2$, dla których

$$D_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}} D_\lambda(f) d\mu(\lambda) < \infty.$$

Przestrzeń $\mathcal{D}(\mu)$ jest przestrzenią Hilberta z normą określoną wzorem

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}(\mu)} = \|f\|^2_2 + D_\mu(f).$$

W przypadku, gdy $\mu = \delta_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{T}$, czyli μ jest miarą jednostkową skupioną w punkcie λ, to $D_\mu(f) = D_\lambda(f)$ i przestrzeń $\mathcal{D}(\delta_\lambda)$ nazywamy lokalną przestrzenią Dirichleta w punkcie λ. Związek lokalnych przestrzeni Dirichleta z przestrzeniami de Branges'a-Rovnyaka został zauważony już przez Richtera i Sundberga [26] w roku 1991. Sześć lat później D. Sarason [32] wykazał, że jeśli $\lambda \in \mathbb{T}$ oraz

$$b_\lambda(z) = \frac{(1-\alpha)\overline{\lambda}z}{1-\alpha\overline{\lambda}z}, \quad \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

to przestrzenie $\mathcal{D}(\delta_\lambda)$ i $\mathcal{H}(b_\lambda)$ są równe jako przestrzenie Hilberta. W 2010 N. Chevrot, D. Guillot i T. Ransford [7] wyznaczyli wszystkie funkcje b i miary μ dla których $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{H}(b)$ z równością norm.

Omówimy teraz główne wyniki autora niniejszej pracy, zawarte w rozdziale 2. W rozdziale tym rozpatrujemy między innymi wymierne pary kanoniczne (b, a), dla których

$$\varphi(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1-\overline{\lambda}_j z)},$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są różnymi liczbami z okręgu jednostkowego $\mathbb{T}$. Wtedy

$$a(z) = \frac{\prod_{j=1}^n (1-\overline{\lambda}_j z)}{r(z)}, \quad b(z) = \frac{1}{r(z)},$$

gdzie r jest pewnym wielomianem stopnia n, nie zerującym się w $\overline{\mathbb{D}}$ oraz takim, że $r(0) > 0$.

Przy powyższych założeniach wykazujemy, że jeśli $f \in \mathcal{H}(b)$, to

$$T_{\overline{\varphi}} f(z) = f(z) + \sum_{j=1}^n \overline{a}_j \lambda_j \frac{f(\lambda_j) - f(z)}{\lambda_j - z},$$

gdzie $a_j = \left(\prod_{l=1, l\neq j}^n (1-\overline{\lambda}_l \lambda_j)\right)^{-1}$, a $f(\lambda_j)$ oznacza granicę niestyczną funkcji f w punkcie λ_j. Z powyższego wzoru wynika, że w tym przypadku przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ pokrywa się z uogólnioną przestrzenią Dirichleta $\mathcal{D}(\mu)$, gdzie $\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{\lambda_j}$, a

$\mu_1, \ldots, \mu_n$ są dowolnymi liczbami dodatnimi. Pokazujemy, że równość tych przestrzeni zachodzi również w bardziej ogólnym przypadku, mianowicie, gdy (b, a) jest taką wymierną parą kanoniczną, że $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są pojedynczymi zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$. Fakt ten został po raz pierwszy wykazany inną metodą w 2013 roku w pracy C. Costary i T. Ransforda [11].

W rozdziale 2 pokazujemy również, że przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ może być zapisana jako suma prosta przestrzeni aH^2 i pewnej przestrzeni skończenie wymiarowej. Dokładniej, dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Jeśli (b, a) jest wymierną parą kanoniczną i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są jednokrotnymi zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$, to*

$$\mathcal{H}(b) = aH^2 \oplus_{\mathcal{H}(b)} \operatorname{span}\{k^b_{\lambda_1}, \ldots, k^b_{\lambda_n}\},$$

gdzie

$$k^b_{\lambda_j}(z) = \frac{1 - \overline{b(\lambda_j)}b(z)}{1 - \overline{\lambda}_j z}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dodajmy tutaj, że nasze twierdzenie zostało ostatnio uogólnione przez E. Fricaina, A Hartmanna i W. T. Rossa ([16]), na przypadek, gdy λ_j są zerami dowolnego rzędu.

Korzystając z opisanej wyżej charakteryzacji przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ pochodzącej od C. Costary i T. Ransforda, otrzymujemy również pewne wyniki dotyczące przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ w przypadku, gdy (b, a) jest wymierną parą kanoniczną i funkcja a ma na okręgu $\mathbb{T}$ zero rzędu $k \geq 2$. Między innymi pokazujemy, że jeśli (b, a) jest wymierną parą kanoniczną i λ jest zerem rzędu $k \geq 2$ funkcji a na $\mathbb{T}$, to każdą funkcję $f \in \mathcal{H}(b)$ można zapisać w postaci

$$f(z) = f(\lambda) + f'(\lambda)(z - \lambda) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(z - \lambda)^{k-1} + (z - \lambda)^k h(z),$$

gdzie $f(\lambda), \ldots, f^{(k-1)}(\lambda)$ oznaczają odpowiednie granice niestyczne w punkcie λ oraz h jest elementem przestrzeni $\mathcal{H}(\widetilde{b})$, gdzie funkcja $\widetilde{b}$ tworzy parę kanoniczną z funkcją $\widetilde{a}$, której zerami na okręgu $\mathbb{T}$ są pozostałe zera funkcji a.

Na zakończenie rozdziału 2 rozpatrujemy przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ z

$$b(z) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^n},$$

gdzie $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Pokazujemy, że wtedy

$$\mathcal{H}(b) = aH^2 \oplus_{\mathcal{H}(b)} K_B,$$

gdzie K_B jest przestrzenią modelową odpowiadającą skończonemu iloczynowi Blaschkego B, którego zerami są punkty $w_k = \sqrt[n]{\alpha} e_k$, $e_k = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$, $k = 1, \dots, n$.

Powyższy rozkład przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ nawiązuje do rozkładu uogólnionej przestrzeni Dirichleta $\mathcal{D}(\mu)$ z $\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \delta_{\lambda_j}$;

$$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{M}(a) \oplus_{\mathcal{D}(\mu)} K_{\tilde{B}},$$

gdzie $K_{\tilde{B}}$ jest przestrzenią modelową odpowiadającą pewnemu skończonemu iloczynowi Blaschkego $\tilde{B}$.

Pokazujemy, że jeśli $\mu = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \delta_{e_j}$ oraz B i $\tilde{B}$ są iloczynami Blaschkego występującymi w powyższych dwóch rozkładach, to $B = \tilde{B}$.

Rozdział 3 jest poświęcony tak zwanym obciętym operatorom Toeplitza. Ogólnie mówiąc, obcięty operator Toeplitza można traktować jako zawężenie do przestrzeni modelowej klasycznego operatora Toeplitza na H^2.

Dla ustalonej funkcji wewnętrznej b niech

$$K_b = \mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2$$

będzie przestrzenią modelową wyznaczoną przez tę funkcję. Dla $\varphi \in L^2$ obcięty operator Toeplitza A_φ definiujemy na gęstej podprzestrzeni przestrzeni modelowej K_b wzorem

$$A_\varphi f = P_b(\varphi f),$$

gdzie P_b oznacza rzut ortogonalny przestrzeni L^2 na przestrzeń K_b. Niech $\mathscr{T}(K_b)$ oznacza zbiór wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza na przestrzeni K_b, tzn.,

$$\mathscr{T}(K_b) = \{A_\varphi\colon\ \varphi \in L^2 \text{ i } A_\varphi \text{ jest ograniczony}\}.$$

Wiadomo, że ograniczony operator liniowy na przestrzeni Hardy'ego H^2 jest operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $M = [r_{m,n}]_{m,n\geq 0}$ w bazie $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ jest macierzą Toeplitza, tzn. gdy istnieje ciąg liczb zespolonych $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ taki, że $r_{m,n} = c_{m-n}$. Okazuje się, że w wielu przypadkach również obcięte operatory Toeplitza można scharakteryzować za pomocą macierzy w odpowiedniej bazie przestrzeni modelowej. Na przykład, gdy $b(z) = z^n$, to K_b jest zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej $n-1$ i ograniczony operator liniowy A na K_b jest obciętym operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M_A = [r_{k,m}]_{k,m=0}^{n-1}$ tego operatora w bazie $\{z^k\}_{k=0}^{n-1}$ jest macierzą o n wierszach i n kolumnach, która może być traktowana jako obcięcie nieskończonej macierzy Toeplitza.

Jeśli B_n jest iloczynem Blaschkego mającym n zer, to wymiar przestrzeni K_{B_n} jest równy n. Z algebry liniowej wiadomo więc, że wszystkie odwzorowania liniowe z K_{B_n} w K_{B_n} tworzą przestrzeń liniową wymiaru n^2. D. Sarason [29] pokazał, że wymiar przestrzeni $\mathscr{T}(K_{B_n})$, czyli przestrzeni wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza na K_{B_n}, wynosi $2n-1$.

Niech teraz B_n będzie skończonym iloczynem Blaschkego, którego zerami są różne liczby $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$, tzn. $B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z}$, $z \in \mathbb{D}$.

Zdefiniujmy

$$k_{a_j}(z) = \frac{1}{1-\overline{a}_j z} \quad \text{oraz} \quad \widetilde{k}_{a_j}(z) = \frac{B_n(z)}{z-a_j}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

gdzie $j = 1, \dots, n$. Wtedy każdy z układów $\{k_{a_1}, \dots, k_{a_n}\}$ i $\{\widetilde{k}_{a_1}, \dots, \widetilde{k}_{a_n}\}$ jest układem wektorów liniowo niezależnych w H^2 oraz stanowi bazę przestrzeni K_{B_n}. W roku 2008 w pracy [9] J. A. Cima, W. T. Ross i W. R. Wogen wykazali, że macierze reprezentujące obcięte operatory Toeplitza względem każdej z tych baz są całkowicie wyznaczone przez elementy pierwszego wiersza i głównej przekątnej, tzn. zadanie pierwszego wiersza i głównej przekątnej wyznacza pozostałe elementy macierzy. Podali oni również podobne charakteryzacje w terminach baz Clarka i zmodyfikowanych baz Clarka. Definicje tych baz zostały omówione w podrozdziale 3.1.

Wyniki autora niniejszej rozprawy prezentowane w rozdziale 3 dotyczą uogólnienia powyżej omówionych charakteryzacji obciętych operatorów Toeplitza na przypadek nieskończenie wymiarowej przestrzeni modelowej K_B, wyznaczonej przez nieskończony iloczyn Blaschkego B, spełniający pewne dodatkowe założenia.

Poniżej omówimy dokładnie charakteryzację operatorów $A \in \mathscr{T}(K_B)$ za pomocą macierzy operatora A w bazie $\{\widetilde{k}_{a_j}\}_{j=1}^{\infty}$.

Niech B będzie nieskończonym iloczynem Blaschkego, którego zera $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ tworzą ciąg jednostajnie odseparowany, tzn.

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \left| \frac{a_j - a_k}{1-\overline{a}_j a_k} \right| \geq \delta$$

dla pewnej stałej $\delta > 0$. Jeśli teraz dla $j = 1, 2 \dots,$ funkcje $\widetilde{k}_{a_j}$ będą określone wzorem $\widetilde{k}_{a_j}(z) = B(z)/(z-a_j)$. Wiadomo, że funkcje te tworzą bazę (nieortogonalną) przestrzeni modelowej K_B. Dokładniej, każdą funkcję $f \in K_B$ możemy zapisać w postaci

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(a_j)}{B'(a_j)} \widetilde{k}_{a_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle f, k_{a_j} \rangle_2}{B'(a_j)} \widetilde{k}_{a_j},$$

gdzie występujące w powyższym wzorze szeregi są zbieżne w normie H^2. Macierze reprezentujące operatory z $\mathscr{T}(K_B)$ w bazie $\{\widetilde{k}_{a_j}\}_{j=1}^{\infty}$ są opisane w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie. *Niech B będzie nieskończonym iloczynem Blaschkego, którego zera $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ tworzą ciąg jednostajnie odseparowany i niech A będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni modelowej K_B. Jeśli $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą operatora A w bazie $\{\widetilde{k}_{a_j}\}_{j=1}^{\infty}$, to $A \in \mathscr{T}(K_B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s \neq p$,*

$$r_{s,p} = \frac{B'(a_1)}{B'(a_s)} \frac{(a_p - a_1)r_{1,p} + (a_1 - a_s)r_{1,s}}{a_p - a_s}.$$

Dodajmy tutaj, że wzory na elementy macierzy operatora występujące w powyższym twierdzeniu są formalnie takie same jak te otrzymane w pracy [9] dla przypadku skończenie wymiarowego. Zwróćmy przy tym uwagę, że podobny wynik można otrzymać zastępując pierwszy wiersz przez dowolny wiersz lub dowolną kolumnę macierzy.

Dowód konieczności warunku z twierdzenia powyższego, jak i warunków koniecznych z twierdzeń opisujących macierze operatorów z $\mathscr{T}(K_B)$ w bazach Clarka, jest modyfikacją dowodu przeprowadzonego w [9] w przypadku skończenie wymiarowym. Dowody dostateczności są znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku skończenie wymiarowym. W dowodach tych wykorzystujemy najpierw ogólną charakteryzację obciętych operatorów Toeplitza, pochodzącą od D. Sarasona [29]. Przy pomocy tej charakteryzacji zagadnienie sprowadzamy do znalezienia pewnych funkcji z przestrzeni K_B, znając ich wartości na zadanym, nieskończonym ciągu punktów z koła $\mathbb{D}$ (w przypadku baz $\{\widetilde{k}_{a_j}\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{k_{a_j}\}_{j=1}^{\infty}$) oraz ciągu punktów z okręgu $\mathbb{T}$ (w przypadku baz Clarka).

Wszystkie rozdziały, oprócz rozdziału pierwszego zawierają wyniki autora tej rozprawy. Część z nich została już opublikowana w pracy [21]. Wszystkie twierdzenia i lematy, których jestem autorem, w niniejszej rozprawie zostały oznaczone gwiazdką.

Bartosz Łanucha

Lublin, październik 2014 r.

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

1.1 Przestrzenie $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$

Niech $\mathscr{H}$ oznacza zespoloną przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$. Przyjmijmy, że $\mathscr{H} = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}})$, gdzie H jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. W niniejszej pracy będziemy rozpatrywać przestrzenie Hilberta $\tilde{\mathscr{H}} = (\tilde{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{\mathscr{H}}})$ związane z przestrzenią $\mathscr{H}$ w ten sposób, że $\tilde{H}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni H. Będziemy wtedy mówić, że $\tilde{\mathscr{H}}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathscr{H}$ i zapisywać $\tilde{\mathscr{H}} \subset \mathscr{H}$. Jeśli iloczyny skalarne $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{\mathscr{H}}}$ pokrywają się, to $\tilde{\mathscr{H}}$ jest zwykłą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$.

Przez $\mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich ograniczonych operatorów liniowych z przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}_1$ w przestrzeń $\mathscr{H}$. Przyjmiemy przy tym, że $\mathscr{L}(\mathscr{H}) = \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$. Ponadto dla $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$ niech $\ker A$ i $\mathcal{R}(A)$ oznaczają odpowiednio jądro i obraz operatora A.

Definicja 1.1. Niech $\mathscr{H}$ i $\tilde{\mathscr{H}}$ będą przestrzeniami Hilberta. Mówimy, że $\tilde{\mathscr{H}}$ jest *zawarta w sposób ograniczony* w $\mathscr{H}$ jeśli

(a) $\tilde{\mathscr{H}}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathscr{H}$ ($\tilde{\mathscr{H}} \subset \mathscr{H}$),

(b) operator włożenia $J\colon \tilde{\mathscr{H}} \hookrightarrow \mathscr{H}$, określony wzorem $Jx = x$, jest ograniczony.

Jeśli J jest kontrakcją, tzn. $\|J\|_{\tilde{\mathscr{H}} \to \mathscr{H}} \le 1$, to mówimy, że $\tilde{\mathscr{H}}$ jest *kontrakcyjnie zawarta* w $\mathscr{H}$.

Warunek (b) powyższej definicji oznacza, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $x \in \tilde{\mathscr{H}}$,

$$\|x\|_{\mathscr{H}} \le C\|x\|_{\tilde{\mathscr{H}}}$$

($C = 1$ dla przestrzeni zawartych kontrakcyjnie).

Oczywiście każda domknięta podprzestrzeń $\tilde{\mathscr{H}}$ przestrzeni $\mathscr{H}$ jest kontrakcyjnie zawarta w $\mathscr{H}$. Wtedy też włożenie J jest izometrią.

Zauważmy, że jeśli $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$, to na przestrzeni liniowej

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax : \ x \in \mathscr{H}_1\}$$

można określić iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)}$ w następujący sposób:

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle x_\perp, y_\perp \rangle_{\mathscr{H}_1}, \tag{1.1}$$

gdzie $x_\perp$, $y_\perp$ oznaczają rzuty ortogonalne odpowiednio elementów $x, y \in \mathscr{H}_1$ na przestrzeń $(\ker A)^\perp$. Łatwo bowiem sprawdzić, że jeśli $Ax = Ax_1$ i $Ay = Ay_1$, to

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle Ax_1, Ay_1 \rangle_{\mathcal{M}(A)}.$$

Z definicji iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)}$ wynika natychmiast, że

$$\|Ax\|_{\mathcal{M}(A)} = \|x\|_{\mathscr{H}_1} \quad \text{dla} \quad x \in (\ker A)^\perp, \tag{1.2}$$

gdzie $\| \cdot \|_{\mathcal{M}(A)}$ jest normą generowaną przez $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)}$. W szczególności oznacza to, że przestrzeń $\mathcal{R}(A)$ z powyżej określoną normą jest przestrzenią zupełną, czyli jest ona przestrzenią Hilberta.

Definicja 1.2. Dla $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$ przestrzeń Hilberta $(\mathcal{R}(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)})$ oznaczamy przez $\mathcal{M}(A)$.

Zauważmy też, że przestrzeń $\mathcal{M}(A)$ jest zawarta w sposób ograniczony w przestrzeni $\mathscr{H}$. Istotnie, z definicji iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)}$ wynika, że dla $x \in \mathscr{H}_1$ mamy

$$\|Ax\|_{\mathscr{H}} = \|Ax_\perp\|_{\mathscr{H}} \leq \|A\| \|x_\perp\|_{\mathscr{H}_1} = \|A\| \|Ax_\perp\|_{\mathcal{M}(A)} = \|A\| \|Ax\|_{\mathcal{M}(A)}.$$

Oczywiście, jeśli $\|A\| \leq 1$, to $\mathcal{M}(A)$ jest kontrakcyjnie zawarta w $\mathscr{H}$.

Prawdziwe jest również stwierdzenie odwrotne do powyższego, tzn. każda przestrzeń $\tilde{\mathscr{H}}$ zawarta w sposób ograniczony w przestrzeni $\mathscr{H}$ może być przedstawiona jako $\mathcal{M}(A)$ dla pewnego $A \in \mathscr{L}(\tilde{\mathscr{H}}, \mathscr{H})$. Wystarczy bowiem przyjąć $A = J$, gdzie J jest operatorem włożenia $J \colon \tilde{\mathscr{H}} \hookrightarrow \mathscr{H}$. Łatwo sprawdzić, że wówczas $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathscr{H}}}$.

Warunek (1.2) oznacza, że odwzorowanie $A : \mathscr{H}_1 \to \mathcal{M}(A)$ zawężone do $(\ker A)^\perp$ jest izometrią. Operator o takiej własności nazywany jest częściową izometrią.

Definicja 1.3. Operator $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$ nazywamy *częściową izometrią* jeśli

$$\|Ax\|_{\mathscr{H}} = \|x\|_{\mathscr{H}_1} \quad \text{dla} \quad x \in (\ker A)^{\perp}.$$

W rozdziale tym będziemy korzystać z równoważnych charakteryzacji częściowych izometrii, zawartych w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.4 ([12], Prop. 4.38)**.** *Niech $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) A jest częściową izometrią,

(ii) A^* jest częściową izometrią,

(iii) AA^* jest rzutem ortogonalnym na $\mathcal{R}(A)$,

(iv) A^*A jest rzutem ortogonalnym na $(\ker A)^{\perp}$.

W szczególności, z powyższego twierdzenia wynika następujący

Wniosek 1.5. *$\mathcal{M}(A)$ jest zwykłą podprzestrzenią przestrzeni $\mathscr{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest częściową izometrią.*

Dowód. Zauważmy, że warunek (iv) twierdzenia 1.4 jest równoważny następującemu warunkowi: dla wszystkich $x, y \in \mathscr{H}_1$ spełniona jest równość

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathscr{H}} = \langle x_{\perp}, y \rangle_{\mathscr{H}_1},$$

gdzie $x_{\perp}$ oznacza rzut ortogonalny elementu x na $(\ker A)^{\perp}$. Porównując tę równość z definicją (1.1) iloczynu skalarnego w przestrzeni $\mathcal{M}(A)$ widzimy, że odwzorowanie $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$ jest częściową izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in \mathscr{H}_1$,

$$\langle x_{\perp}, y \rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle Ax, Ay \rangle_{\mathscr{H}}.$$

□

W niniejszej pracy istotną rolę będą odgrywać również tak zwane operatory dodatnie. Operator $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ nazywamy dodatnim jeśli

$$\langle Ax, x \rangle_{\mathscr{H}} \geq 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in \mathscr{H}.$$

Piszemy wówczas $A \geq 0$. Wiadomo, że jeśli $A \geq 0$, to istnieje dokładnie jeden operator dodatni $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ taki, że $A = B^2$ ([28], tw. 12.33). Operator B nazywamy dodatnim pierwiastkiem kwadratowym z A i oznaczamy $A^{1/2}$.

Jeśli $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, to mówimy, że $B \geq A$ jeśli $B - A \geq 0$. Okazuje się, że relacja $\geq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze wszystkich operatorów samosprzężonych z $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Relacja ta jest również ściśle związana z wprowadzonym wcześniej (definicja 1.1) pojęciem zawierania się przestrzeni Hilberta w sposób ograniczony. Związek ten wynika z następującego twierdzenia, zwanego kryterium Douglasa.

Twierdzenie 1.6 ([13]). *Niech $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_1$ i $\mathscr{H}_2$ będą przestrzeniami Hilberta oraz $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H})$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B)$,

(2) $c^2 BB^* \geq AA^*$ *dla pewnego* $c \geq 0$,

(3) istnieje operator $R \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ *taki, że* $A = BR$ *oraz* $\|R\| \leq c$.

Ponadto, jeśli powyższe warunki są spełnione, to istnieje dokładnie jeden operator R spełniający (3) i taki, że:

(a) $\ker A = \ker R$,

(b) $\mathcal{R}(R) \subset (\ker B)^{\perp}$,

(c) $\|R\| = \inf\{c : cBB^* \geq AA^*\}$.

Korzystając z kryterium Douglasa otrzymujemy następujący

Wniosek 1.7 ([34], I-5). *Przy założeniach twierdzenia 1.6 mamy:*

(i) przestrzeń $\mathcal{M}(A)$ jest kontrakcyjnie zawarta w przestrzeni $\mathcal{M}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $BB^* \geq AA^*$,

(ii) $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(B)$ jako przestrzenie Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $BB^* = AA^*$; w szczególności, $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}((AA^*)^{1/2})$.

Dowód. Załóżmy, że $BB^* \geq AA^*$. Wtedy, na mocy kryterium Douglasa, $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B)$ oraz istnieje operator $R \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ taki, że $A = BR$ oraz $\|R\| \leq 1$. Wystarczy wykazać, że operator włożenia $J : \mathcal{M}(A) \hookrightarrow \mathcal{M}(B)$ jest kontrakcją. Jeśli $y \in \mathcal{R}(A)$ oraz $y = Ax$, $x \in (\ker A)^{\perp}$, to

$$\begin{aligned}\|y\|^2_{\mathcal{M}(B)} &= \|Ax\|^2_{\mathcal{M}(B)} = \|BRx\|^2_{\mathcal{M}(B)} \\ &= \|Rx\|^2_{\mathscr{H}_2} \leq \|x\|^2_{\mathscr{H}_1} = \|Ax\|^2_{\mathcal{M}(A)} = \|y\|^2_{\mathcal{M}(A)},\end{aligned}$$

gdzie trzecia równość wynika z własności (b) operatora R w twierdzeniu 1.6.

Załóżmy, że $\mathcal{M}(A)$ jest kontrakcyjnie zawarta w $\mathcal{M}(B)$. Wtedy, na mocy kryterium Douglasa, istnieje operator $R \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ taki, że $A = BR$ oraz $\mathcal{R}(R) \subset (\mathrm{ker} B)^{\perp}$. Wystarczy wykazać, że $\|R\| \leq 1$. W tym celu zauważmy, że dla $x \in \mathscr{H}_1$,

$$\begin{aligned} \|Rx\|^2_{\mathscr{H}_2} &= \|BRx\|^2_{\mathcal{M}(B)} = \|Ax\|^2_{\mathcal{M}(B)} \\ &\leq \|Ax\|^2_{\mathcal{M}(A)} \leq \|x\|^2_{\mathscr{H}_1}. \end{aligned}$$

□

Jeśli $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$, $\|A\| \leq 1$ oraz I oznacza operator identyczności na przestrzeni $\mathscr{H}$, to $I - AA^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ jest operatorem dodatnim. Mamy bowiem

$$\langle (I - AA^*)x, x\rangle_{\mathscr{H}} = \|x\|^2_{\mathscr{H}} - \|A^*x\|^2_{\mathscr{H}} \geq (1 - \|A\|^2)\|x\|^2_{\mathscr{H}} \geq 0.$$

Podobnie $I - A^*A \geq 0$. Istnieją zatem dodatnie pierwiastki kwadratowe $(I - AA^*)^{1/2}$ i $(I - A^*A)^{1/2}$.

Definicja 1.8. Niech $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$, $\|A\| \leq 1$. Przestrzeń $\mathcal{H}(A)$ definiujemy równością

$$\mathcal{H}(A) = \mathcal{M}((I - AA^*)^{1/2}).$$

Przyjmujemy przy tym oznaczenie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(A)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}((I-AA^*)^{1/2})}$.

Jeśli $\|A\| \leq 1$, to również $\|(I - AA^*)^{1/2}\| \leq 1$. Z naszych wcześniejszych rozważań wynika więc, że, podobnie jak $\mathcal{M}(A)$, przestrzeń $\mathcal{H}(A)$ jest kontrakcyjnie zawarta w $\mathscr{H}$.

Poniższe twierdzenie opisuje istotną zależność pomiędzy przestrzeniami $\mathcal{H}(A)$ i $\mathcal{H}(A^*)$, z której będziemy często korzystać w dalszej części niniejszej pracy.

Twierdzenie 1.9 ([34], I-8)**.** *Niech $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$, $\|A\| \leq 1$. Wówczas $x \in \mathscr{H}$ jest elementem przestrzeni $\mathcal{H}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy A^*x jest elementem przestrzeni $\mathcal{H}(A^*)$. Ponadto, jeśli $x_1, x_2 \in \mathcal{H}(A)$, to*

$$\langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}(A)} = \langle x_1, x_2\rangle_{\mathscr{H}} + \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{\mathcal{H}(A^*)}. \tag{1.3}$$

Dowód tego twierdzenia oparty jest na następującym lemacie.

Lemat 1.10 (Intertwining Relation, [34], I-7)**.** *Jeśli $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$ i $\|A\| \leq 1$, to*

$$A(I - A^*A)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2}A.$$

Dowód twierdzenia 1.9. Niech $x \in \mathscr{H}$. Jeśli $x \in \mathcal{H}(A)$, to $x = (I - AA^*)^{1/2}y$ dla pewnego $y \in \mathscr{H}$. Z lematu 1.10,

$$A^*x = A^*(I - AA^*)^{1/2}y = (I - A^*A)^{1/2}A^*y,$$

co oznacza, że $A^*x \in \mathcal{H}(A^*)$.

Z drugiej strony, jeśli $A^*x \in \mathcal{H}(A^*)$, to $A^*x = (I - A^*A)^{1/2}y$ dla pewnego $y \in \mathscr{H}_1$. Wtedy, stosując lemat 1.10, możemy zapisać

$$\begin{aligned} x &= (I - AA^*)x + AA^*x \\ &= (I - AA^*)x + A(I - A^*A)^{1/2}y \\ &= (I - AA^*)^{1/2}[(I - AA^*)^{1/2}x + Ay]. \end{aligned}$$

A zatem $x \in \mathcal{H}(A)$.

Pozostaje wykazać równość (1.3). W tym celu niech $x_1, x_2 \in \mathcal{H}(A)$, przy czym

$$A^*x_j = (I - A^*A)^{1/2}y_j, \qquad j = 1, 2,$$

gdzie $y_1, y_2 \in (\ker(I - A^*A)^{1/2})^{\perp}$. Jak w poprzedniej części dowodu, możemy zapisać

$$x_j = (I - AA^*)^{1/2}[(I - AA^*)^{1/2}x_j + Ay_j], \qquad j = 1, 2.$$

Zauważmy, że elementy

$$(I - AA^*)^{1/2}x_j + Ay_j, \qquad j = 1, 2,$$

są ortogonalne do $\ker(I - AA^*)^{1/2}$. Rzeczywiście, ponieważ $(I - AA^*)^{1/2}$ jest operatorem samosprzężonym, więc $(I - AA^*)^{1/2}x_j \in (\ker(I - AA^*)^{1/2})^{\perp}$. Ponadto, korzystając z lematu 1.10 łatwo sprawdzić, że jeśli $z \in \ker(I - AA^*)^{1/2}$, to $A^*z \in \ker(I - A^*A)^{1/2}$. Stąd, dla dowolnego $z \in \ker(I - AA^*)^{1/2}$,

$$\langle Ay_j, z\rangle_{\mathscr{H}} = \langle y_j, A^*z\rangle_{\mathscr{H}_1} = 0,$$

gdyż $y_j \in (\ker(I - A^*A)^{1/2})^{\perp}$. Oznacza, że $Ay_j \in (\ker(I - AA^*)^{1/2})^{\perp}$.

Z definicji iloczynu skalarnego $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}(A)}$ otrzymujemy zatem równość

$$\langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}(A)} = \langle (I - AA^*)^{1/2}x_1 + Ay_1, (I - AA^*)^{1/2}x_2 + Ay_2\rangle_{\mathscr{H}}.$$

Ponieważ, z lematu 1.10,

$$\begin{aligned} \langle (I - AA^*)^{1/2}x_1, Ay_2\rangle_{\mathscr{H}} &= \langle A^*(I - AA^*)^{1/2}x_1, y_2\rangle_{\mathscr{H}_1} \\ &= \langle (I - A^*A)^{1/2}A^*x_1, y_2\rangle_{\mathscr{H}_1} \\ &= \langle A^*x_1, (I - A^*A)^{1/2}y_2\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{\mathscr{H}_1} \end{aligned}$$

oraz

$$\langle Ay_1, (I - AA^*)^{1/2} x_2 \rangle_{\mathscr{H}} = \langle A^* x_1, A^* x_2 \rangle_{\mathscr{H}_1},$$

więc

$$\begin{aligned}
\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}(A)} &= \langle (I - AA^*) x_1, x_2 \rangle_{\mathscr{H}} + 2\langle A^* x_1, A^* x_2 \rangle_{\mathscr{H}_1} + \langle Ay_1, Ay_2 \rangle_{\mathscr{H}} \\
&= \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathscr{H}} + \langle A^* x_1, A^* x_2 \rangle_{\mathscr{H}_1} + \langle Ay_1, Ay_2 \rangle_{\mathscr{H}} \\
&= \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathscr{H}} + \langle (I - A^*A)^{1/2} y_1, (I - A^*A)^{1/2} y_2 \rangle_{\mathscr{H}_1} + \langle Ay_1, Ay_2 \rangle_{\mathscr{H}} \\
&= \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathscr{H}} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathscr{H}_1} \\
&= \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathscr{H}} + \langle (I - A^*A)^{1/2} y_1, (I - A^*A)^{1/2} y_2 \rangle_{\mathcal{H}(A^*)} \\
&= \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathscr{H}} + \langle A^* x_1, A^* x_2 \rangle_{\mathcal{H}(A^*)}.
\end{aligned}$$

□

Zauważmy, że każdy operator $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$ taki, że $\|A\| \leq 1$, generuje rozkład przestrzeni $\mathscr{H}$,

$$\mathscr{H} = \mathcal{M}(A) + \mathcal{H}(A). \tag{1.4}$$

Istotnie, dla $x \in \mathscr{H}$ mamy

$$x = AA^*x + (I - AA^*)x = Az_1 + (I - AA^*)^{1/2} z_2 = x_1 + x_2,$$

gdzie $z_1 = A^*x \in \mathscr{H}_1$, $z_2 = (I - AA^*)^{1/2} x \in \mathscr{H}$. Ponadto, jako że $z_1 \in (\ker A)^{\perp}$ i $z_2 \in (\ker (I - AA^*)^{1/2})^{\perp}$, mamy

$$\begin{aligned}
\|x_1\|^2_{\mathcal{M}(A)} + \|x_2\|^2_{\mathcal{H}(A)} &= \|Az_1\|^2_{\mathcal{M}(A)} + \|(I - AA^*)^{1/2} z_2\|^2_{\mathcal{H}(A)} = \|z_1\|^2_{\mathscr{H}_1} + \|z_2\|^2_{\mathscr{H}} \\
&= \langle A^*x, A^*x \rangle_{\mathscr{H}_1} + \langle (I - AA^*)^{1/2} x, (I - AA^*)^{1/2} x \rangle_{\mathscr{H}} = \|x\|^2_{\mathscr{H}}.
\end{aligned}$$

Podkreślmy tutaj, że dla dowolnego rozkładu $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{M}(A)$, $x_2 \in \mathcal{H}(A)$ prawdziwa jest jedynie nierówność

$$\|x\|^2_{\mathscr{H}} \leq \|x_1\|^2_{\mathcal{M}(A)} + \|x_2\|^2_{\mathcal{H}(A)}$$

(zobacz [34], I-12). Ze względu na równość (1.4) przestrzeń $\mathcal{H}(A)$ jest nazywana *przestrzenią komplementarną do* $\mathcal{M}(A)$.

W ogólnym przypadku przestrzenie $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$ nie muszą być wzajemnie ortogonalne.

Na mocy wniosku 1.5 wiemy, że $\mathcal{M}(A)$ jest zwykłą podprzestrzenią przestrzeni $\mathscr{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest częściową izometrią. W podobny sposób można sprawdzić, że również $\mathcal{H}(A)$ jest zwykłą podprzestrzenią przestrzeni $\mathscr{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest częściową izometrią. Ponieważ wówczas AA^* i $I - AA^*$ są wzajemnie ortogonalnymi rzutami, więc

$$\mathscr{H} = \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{H}(A).$$

A zatem przestrzenie $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$ są wzajemnie ortogonalnymi podprzestrzeniami przestrzeni $\mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest częściową izometrią.

Na koniec tego podrozdziału opiszemy pewne ograniczone funkcjonały liniowe na przestrzeni $\mathcal{M}(A)$. Niech L będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na $\mathscr{H}$ generowanym przez $y \in \mathscr{H}$, tzn. dla każdego $x \in \mathscr{H}$,

$$Lx = \langle x, y \rangle_{\mathscr{H}}.$$

Ponieważ przestrzeń $\mathcal{M}(A)$ jest zawarta w sposób ograniczony w $\mathscr{H}$, więc funkcjonał L zawężony do $\mathcal{M}(A)$ jest ograniczonym funkcjonałem na tej przestrzeni. Z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonału wynika, że istnieje wtedy dokładnie jeden element $z \in \mathcal{M}(A)$ taki, że dla każdego $x \in \mathscr{H}_1$,

$$L(Ax) = \langle Ax, z \rangle_{\mathcal{M}(A)}.$$

Z równości

$$L(Ax) = \langle Ax, y \rangle_{\mathscr{H}} = \langle x, A^* y \rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle Ax, AA^* y \rangle_{\mathcal{M}(A)}$$

wynika, że $z = AA^* y$. Innymi słowy, zawężenie funkcjonału L generowanego przez element $y \in \mathscr{H}$ do przestrzeni $\mathcal{M}(A)$ jest funkcjonałem generowanym przez element $AA^* y$.

1.2 Przestrzenie Hardy'ego

Niech $\mathbb{D}$ oznacza koło jednostkowe na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, czyli $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Dla funkcji f analitycznej w kole $\mathbb{D}$ średnie całkowe określone są za pomocą wzorów

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty;$$
$$M_\infty(r, f) = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(re^{it})|.$$

Średnie te są funkcjami rosnącymi ze względu na r. Jeśli średnia $M_p(r, f)$ pozostaje ograniczona przy $r \to 1$, to mówimy, że funkcja f należy do *przestrzeni*

Hardy'ego H^p. W szczególności, H^∞ jest klasą wszystkich funkcji analitycznych i ograniczonych w $\mathbb{D}$, a H^2 jest klasą szeregów potęgowych $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ takich, że $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Ponadto, przestrzeń H^p jest przestrzenią Banacha z normą określoną wzorem

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r, f) = \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f).$$

Niech $\mathbb{T}$ oznacza brzeg koła jednostkowego $\mathbb{D}$ i niech $L^p = L^p(\mathbb{T}, dt/2\pi)$ oznacza przestrzeń funkcji zespolonych f na $\mathbb{T}$ takich, że

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 \le p < \infty;$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le 2\pi} |f(e^{it})| < \infty.$$

Wiadomo, że każda funkcja $f \in H^p$ ma granicę niestyczną $f(e^{it})$ dla prawie wszystkich e^{it}. Niech $\mathcal{H}^p$ oznacza zbiór wszystkich funkcji brzegowych $f(e^{it})$, $f \in H^p$. Wtedy $\mathcal{H}^p$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni L^p. Ponadto, dla $1 \le p < \infty$

$$\|f\|_{H^p} = \|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

oraz

$$\|f\|_{H^\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

Okazuje się, że przestrzeń $\mathcal{H}^p \subset L^p$ można scharakteryzować za pomocą współczynników Fouriera. Współczynniki Fouriera c_n funkcji f należącej do L^1 są określone wzorami

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 1.11 ([14], Thm. 3.4)**.** *Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ będzie funkcją klasy H^1 oraz niech c_n będą współczynnikami Fouriera funkcji brzegowej $f(e^{it})$. Wtedy $c_n = a_n$ dla $n \ge 0$ oraz $c_n = 0$ dla $n < 0$. Ponadto, $\mathcal{H}^p$ jest dokładnie przestrzenią składającą się z tych funkcji klasy L^p, dla których wszystkie współczynniki Fouriera c_n, $n < 0$, zerują się.*

Ponadto, harmoniczne przedłużenie (za pomocą całki Poissona) na $\mathbb{D}$ funkcji f klasy $\mathcal{H}^p$ jest klasy H^p, a więc jest funkcją analityczną. Wtedy współczynniki Taylora tego przedłużenia pokrywają się z nieujemnymi współczynnikami Fouriera funkcji f.

W dalszym ciągu przestrzeń $\mathcal{H}^p$ będziemy identyfikować z przestrzenią H^p, a więc również traktować przestrzeń H^p jako domkniętą podprzestrzeń przestrzeni L^p (utożsamiając funkcję $f \in H^p$ z jej wartościami brzegowymi $f(e^{it})$). W szczególności, mówiąc, że funkcja $f \in L^1$ jest analityczna rozumiemy, że współczynniki Fouriera funkcji f o indeksach ujemnych zerują się (tzn. $f \in H^1$).

Ponieważ H^2 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta L^2, więc jest ona również przestrzenią Hilberta. Iloczyn skalarny w H^2 dany jest wzorem

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)},$$

gdzie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ oraz $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) z^n$. Widać stąd, że jednomiany $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ tworzą ciąg ortonormalny w H^2. Z równości

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

wynika, że $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni H^2.

Niech $P : L^2 \to H^2$ oznacza rzut ortogonalny na przestrzeń H^2, zwany *projekcją Szegö*. Ponieważ

$$\begin{aligned} Pf(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{Pf}(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Pf, e^{int} \rangle_2 z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e^{int} \rangle_2 z^n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right) z^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) dt}{1 - z e^{-it}}, \end{aligned}$$

więc projekcja Szegö jest operatorem całkowym. Możemy również zapisać

$$Pf(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) dt}{1 - z e^{-it}} = \langle f, k_z \rangle_2,$$

gdzie $k_z(w) = (1 - \overline{z} w)^{-1} \in H^\infty \subset H^2$.

Zauważmy jeszcze, że jeśli $f \in L^1$, to powyższa całka definiuje funkcję analityczną w $\mathbb{D}$. Operator całkowy P możemy zatem traktować jako odwzorowanie liniowe z przestrzeni L^1 w przestrzeń funkcji analitycznych w kole $\mathbb{D}$.

Omówimy teraz dokładniej strukturę przestrzeni H^p. W charakteryzacji przestrzeni H^p ważną rolę odgrywają *iloczyny Blaschkego* postaci

$$B(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a}_n}{|a_n|} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z},$$

gdzie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczb zespolonych z koła jednostkowego $\mathbb{D}$ takim, że $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots < 1$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$, a $m \geq 0$ oznacza pewną liczbę naturalną.

Okazuje się, że jeśli $f \in H^p$, to ciąg zer $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcji f spełnia warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty,$$

a więc w szczególności odpowiadający mu iloczyn Blaschkego jest zbieżny. Prawdziwe jest również następujące twierdzenie, zwane twierdzeniem Riesza o faktoryzacji.

Twierdzenie 1.12 ([23], 5.3.2)**.** *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zer funkcji $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, oraz niech B będzie odpowiadającym mu iloczynem Blaschkego. Wtedy f/B jest funkcją klasy H^p, nie zerującą się w $\mathbb{D}$ i taką, że $\|f/B\|_p = \|f\|_p$.*

W szczególności oznacza to, że każdą funkcję $f \in H^p$ można zapisać w postaci $f = Bg$, gdzie g jest nie zerującą się w $\mathbb{D}$ funkcją klasy H^p oraz $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Omówimy teraz funkcje wewnętrzne i funkcje zewnętrzne (klasy H^p).

Definicja 1.13. *Funkcją wewnętrzną* nazywamy funkcję $f \in H^{\infty}$ taką, że $|f(e^{it})| = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$.

Przykładem funkcji wewnętrznej jest dowolny iloczyn Blaschkego B, ponieważ $|B(e^{it})| = 1$ p. w. na $\mathbb{T}$. Ponadto, jeśli f jest funkcją wewnętrzną oraz B jest iloczynem Blaschkego mającym zera dokładnie w punktach, które są zerami funkcji f, to funkcja $S(z) = f(z)/B(z)$ ma własności

$$0 < |S(z)| \leq 1; \qquad |S(e^{it})| = 1 \text{ p.w. na } \mathbb{T}.$$

Funkcję S mającą powyższe własności nazywamy *funkcją wewnętrzną osobliwą*. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.14 ([27], 17.15)**.** *Załóżmy, że $\lambda \in \mathbb{T}$ jest stałą, B jest iloczynem Blaschkego, μ jest skończoną, dodatnią miarą borelowską na okręgu $\mathbb{T}$, osobliwą względem miary Lebesgue'a oraz*

$$f(z) = \lambda B(z) \exp\left\{ -\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Wtedy f jest funkcją wewnętrzną oraz każda funkcja wewnętrzna jest tej postaci.

Z powyższego twierdzenia wynika, że każda funkcja wewnętrzna osobliwa jest postaci

$$S(z) = \lambda \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(e^{it})\right\},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{T}$ i μ jest skończoną, dodatnią miarą borelowską na okręgu $\mathbb{T}$, osobliwą względem miary Lebesgue'a.

Definicja 1.15. Jeśli $\lambda \in \mathbb{T}$ oraz φ jest dodatnią funkcją mierzalną na okręgu $\mathbb{T}$ taką, że $\log\varphi \in L^1$ (oraz $\varphi \in L^p$) i jeśli

$$F(z) = \lambda \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\varphi(e^{it})dt\right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

to funkcję F nazywamy *funkcją zewnętrzną (klasy H^p)*.

Następne twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Riesza o faktoryzacji.

Twierdzenie 1.16 ([14], Thm. 2.8)**.** *Każda funkcja $f \in H^p$, która nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{D}$, jest postaci $f = BSF$, gdzie B jest iloczynem Blaschkego, S jest funkcją wewnętrzną osobliwą, a F jest funkcją zewnętrzną klasy H^p. Ponadto, każda funkcja postaci BSF jest funkcją klasy H^p.*

Dodajmy jeszcze, że funkcja zewnętrzna F w powyższym twierdzeniu ma postać

$$F(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f(e^{it})|dt\right\}.$$

Podprzestrzeń $M \subset H^2$ nazywamy niezmienniczą ze względu na mnożenie przez z, gdy z faktu, że $f \in M$ wynika, że $zf(z) \in M$. Przykładem takiej podprzestrzeni jest przestrzeń M funkcji $f \in H^2$ takich, że $f(0) = 0$. Łatwo sprawdzić, że wtedy $M = zH^2$. Okazuje się, że wszystkie domknięte, niezmiennicze ze względu na mnożenie przez z podprzestrzenie przestrzeni H^2 są postaci φH^2, gdzie φ jest pewną funkcją wewnętrzną. Mówi o tym dokładnie następujące twierdzenie Beurlinga.

Twierdzenie 1.17 ([27], 17.21)**.** *Dla każdej funkcji wewnętrznej φ przestrzeń*

$$\varphi H^2 = \{\varphi f \ : \ f \in H^2\}$$

jest domkniętą, niezmienniczą ze względu na mnożenie przez z podprzestrzenią przestrzeni H^2. Ponadto, każda domknięta, niezmiennicza na mnożenie przez z i różna od $\{0\}$ podprzestrzeń M przestrzeni H^2 zawiera pewną funkcję wewnętrzną φ taką, że $M = \varphi H^2$.

1.3 Operatory Toeplitza

Niech $\varphi \in L^2$. Wtedy na przestrzeni H^2 możemy zdefiniować *operator Toeplitza* T_φ wzorem

$$T_\varphi f = P(\varphi f), \quad f \in H^2.$$

Funkcję φ nazywamy symbolem operatora T_φ. Wprost z definicji widać, że jeśli $f \in H^\infty$, to $T_\varphi f \in H^2$. Operator T_φ jest więc gęsto określonym operatorem liniowym na H^2. Co więcej, operator T_φ jest jednoznacznie wyznaczony przez symbol φ, tzn. $T_\varphi = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi = 0$. Oczywiście, jeśli $\varphi = 0$, to $T_\varphi = 0$. Z drugiej strony, jeśli $\varphi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{ikt}$ i $T_\varphi = 0$, to dla dowolnego $n \geq 0$,

$$T_\varphi z^n = P(\varphi z^n) = 0.$$

Oznacza to, że przy ustalonym $n \geq 0$, $\hat{\varphi}(k) = 0$ o ile $k + n \geq 0$. Ponieważ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ można znaleźć $n \geq 0$ takie, że $k + n \geq 0$, więc $\varphi = 0$.

Oczywiście, jeśli $\varphi \in L^\infty$, to

$$\|T_\varphi f\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2,$$

tzn. T_φ jest wówczas operatorem ograniczonym oraz $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Prawdziwe jest też następujące

Twierdzenie 1.18 ([38], Prop. 9.1.2)**.** *Niech $\varphi \in L^2$. Operator T_φ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in L^\infty$. Wówczas $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że jeśli $\varphi \in L^2$ i T_φ jest operatorem ograniczonym, to $\varphi \in L^\infty$. W tym celu zdefiniujmy funkcję $\widetilde{\varphi}$ wzorem

$$\widetilde{\varphi}(z) = \frac{\langle T_\varphi k_z, k_z \rangle_2}{\|k_z\|_2^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

gdzie $k_z(w) = (1 - \overline{z}w)^{-1} \in H^\infty \subset H^2$. Wtedy

$$\widetilde{\varphi}(z) = \frac{\langle \varphi k_z, k_z \rangle_2}{\|k_z\|_2^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt,$$

co oznacza, że $\widetilde{\varphi}$ jest całką Poissona funkcji φ. Ponadto, dla każdego $z \in \mathbb{D}$,

$$|\widetilde{\varphi}(z)| \leq \frac{\|T_\varphi k_z\|_2 \|k_z\|_2}{\|k_z\|_2^2} \leq \|T_\varphi\|.$$

Oznacza to, że $\widetilde{\varphi}$ jest funkcją ograniczoną, a więc

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |\widetilde{\varphi}(z)| \leq \|T_\varphi\|.$$

□

W dalszym ciągu tej pracy, jeżeli nie będzie powiedziane inaczej, to przez operator Toeplitza będziemy rozumieć ograniczony operator Toeplitza, a więc operator wyznaczony przez symbol będący funkcją ograniczoną.

Widać, że dla $\varphi \in L^\infty$ mamy $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$. Istotnie, dla $f, g \in H^2$,

$$\langle T_\varphi f, g\rangle_2 = \langle P(\varphi f), g\rangle_2 = \langle \varphi f, g\rangle_2 = \langle f, \overline{\varphi} g\rangle_2 = \langle f, P(\overline{\varphi} g)\rangle_2 = \langle f, T_{\overline{\varphi}} g\rangle_2.$$

Istotnym przykładem operatora Toeplitza jest tak zwany *operatorem przesunięcia* $S = T_{e^{it}}$. Operator ten jest operatorem mnożenia przez z, czyli

$$Sf(z) = zf(z), \quad f \in H^2.$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli $(\widehat{f}(0), \widehat{f}(1), \ldots)$ jest ciągiem współczynników Taylora funkcji $f \in H^2$, to $(0, \widehat{f}(0), \widehat{f}(1), \ldots)$ jest ciągiem współczynników Taylora funkcji Sf. Dlatego S jest nazywany operatorem (prawostronnego) przesunięcia. Operator $S^* = T_{\overline{e^{it}}}$ dany jest wzorem

$$S^* f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Niech $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Wiadomo, że jeśli $\{e_n\}_{n\geq 0}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$, to odwzorowanie A jest jednoznacznie wyznaczone za pomocą macierzy $M_A = [r_{m,n}]_{m,n\geq 0}$, gdzie

$$r_{m,n} = \langle Ae_n, e_m\rangle_{\mathscr{H}}.$$

Definicja 1.19. Macierz nieskończoną $M = [r_{m,n}]_{m,n\geq 0}$ o tej własności, że $r_{m,n} = c_{m-n}$ dla pewnego ciągu liczb zespolonych $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, nazywamy *macierzą Toeplitza.*

Interesuje nas obecnie macierz M_{T_φ} operatora Toeplitza T_φ w bazie $\{z^n\}_{n\geq 0}$. Niech $\varphi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) e^{ikt}$. Wtedy

$$\langle T_\varphi z^n, z^m\rangle_2 = \langle \varphi e^{int}, e^{imt}\rangle_2 = \langle \varphi, e^{i(m-n)t}\rangle_2 = \hat{\varphi}(m-n).$$

Zatem

$$M_{T_\varphi} = [\hat{\varphi}(m-n)]_{m,n\geq 0}$$

jest macierzą Toeplitza.

Następne twierdzenie podaje warunki równoważne na to, by operator ograniczony T na przestrzeni H^2 był operatorem Toeplitza.

Twierdzenie 1.20 ([6])**.** *Niech $T \in \mathscr{L}(H^2)$ oraz niech M_T będzie macierzą operatora T w bazie $\{z^n\}_{n\geq 0}$ i niech S oznacza operator przesunięcia na H^2. Następujące warunki są równoważne* *(a)* $T = T_\varphi$ *dla pewnej funkcji* $\varphi \in L^\infty$,

(b) M_T *jest macierzą Toeplitza,*

(c) $S^*TS = T$.

Dowód. Niech $T \in \mathscr{L}(H^2)$ oraz niech $M_T = [r_{m,n}]_{m,n\geq 0}$.

Wiemy już, że jeśli $T = T_\varphi$ dla funkcji ograniczonej φ, to M_T jest macierzą Toeplitza. Załóżmy teraz, że M_T jest macierzą Toeplitza. Z definicji istnieje ciąg $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ taki, że $r_{m,n} = c_{m-n}$. Zdefiniujmy $\varphi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$. Korzystając z ograniczoności operatora T, dla dowolnego $n \geq 0$ mamy

$$\sum_{k=-n}^{\infty} |c_k|^2 = \|Tz^n\|_2^2 \leq \|T\|^2 \|z^n\|_2^2 = \|T\|^2.$$

Stąd $\varphi \in L^2$. Ponadto $T = T_\varphi$ na zbiorze gęstym, więc z twierdzenia 1.18 wynika, że $\varphi \in L^\infty$ i $T = T_\varphi$ na całym H^2. Pokazaliśmy więc równoważność warunków (a) i (b).

Jeśli $S^*TS = T$, to

$$\begin{aligned} r_{m+1,n+1} &= \langle Tz^{n+1}, z^{m+1}\rangle_2 = \langle TSz^n, Sz^m\rangle_2 \\ &= \langle S^*TSz^n, z^m\rangle_2 = \langle Tz^n, z^m\rangle_2 = r_{m,n}. \end{aligned}$$

A zatem M_T jest macierzą Toeplitza. Z drugiej strony, jeśli M_T jest macierzą Toeplitza, to $r_{m+1,n+1} = r_{m,n}$. Na podstawie powyższych równości, dla $m, n \geq 0$,

$$\langle S^*TSz^n, z^m\rangle_2 = \langle Tz^n, z^m\rangle_2.$$

Stąd $S^*TS = T$, co kończy dowód równoważności (b) i (c). □

Wniosek 1.21. *Niech* $T \in \mathscr{L}(H^2)$ *i niech* S *oznacza operator przesunięcia na* H^2. *Jeśli* $TS = ST$, *to* $T = T_\varphi$ *dla pewnej funkcji* $\varphi \in H^\infty$.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej funkcji $f \in H^2$, $S^*Sf = f$. Jeśli więc $TS = ST$, to również $S^*TS = T$. Z części (a) twierdzenia 1.20 wiemy, że istnieje wtedy funkcja $\varphi \in L^\infty$ taka, iż $T = T_\varphi$. Ponadto, przy naszych założeniach, dla $k \geq 1$

$$\hat{\varphi}(-k) = \langle Tz^k, 1\rangle_2 = \langle TSz^{k-1}, 1\rangle_2 = \langle Tz^{k-1}, S^*1\rangle_2 = 0.$$

Zatem $\varphi \in H^\infty$. □

W ogólnym przypadku złożenie dwóch operatorów Toeplitza nie musi być operatorem Toeplitza. Na ogół również dwa operatory Toeplitza nie komutują. Następne dwa twierdzenia opisują dokładnie sytuacje, w których tak się dzieje.

Twierdzenie 1.22 ([6], Thm. 8). *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by złożenie $T_\varphi T_\psi$ było operatorem Toeplitza jest, by co najmniej jedna z funkcji $\overline{\varphi}$, ψ była analityczna. Wtedy $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.*

Dowód. Wykażemy najpierw dostateczność warunku. Jeśli ψ jest funkcją analityczną, to dla $f \in H^2$,

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi(\psi f) = P_+(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi} f.$$

Jeśli natomiast $\overline{\varphi}$ jest funkcją analityczną, to

$$T_\varphi T_\psi = (T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}})^* = T^*_{\overline{\psi\varphi}} = T_{\varphi\psi}.$$

Przejdziemy teraz do dowodu konieczności warunku. Załóżmy, że $T = T_\varphi T_\psi$ jest operatorem Toeplitza. Jeśli ciągi $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ i $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ są ciągami współczynników Fouriera odpowiednio funkcji φ i ψ, to

$$M_T = [r_{i,j}]_{i,j\geq 0} = M_{T_\varphi} M_{T_\psi} = [\alpha_{i-j}]_{i,j\geq 0}[\beta_{i-j}]_{i,j\geq 0}.$$

Zatem

$$r_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{i-k}\beta_{k-j}$$

oraz

$$\begin{aligned} r_{i+1,j+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{i+1-k}\beta_{k-j-1} \\ &= \alpha_{i+1}\beta_{-j-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i-(k-1)}\beta_{(k-1)-j} \\ &= \alpha_{i+1}\beta_{-j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{i-k}\beta_{k-j}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$r_{i+1,j+1} = \alpha_{i+1}\beta_{-j-1} + r_{i,j}, \quad i,j \geq 0.$$

Ponieważ M_T jest macierzą Toeplitza, więc z ostatniej równości wynika, że

$$\alpha_{i+1}\beta_{-j-1} = 0 \quad \text{dla wszystkich } i,j \geq 0.$$

Jeśli $\alpha_{i+1} = 0$ dla wszystkich $i \geq 0$, to $\overline{\varphi}$ jest funkcją analityczną. Załóżmy teraz, że $\alpha_{i_0+1} \neq 0$ dla pewnego $i_0 \geq 0$. Zauważmy, że wtedy $\beta_{-j-1} = 0$ dla wszystkich $j \geq 0$, gdyż równość $\alpha_{i_0+1}\beta_{-j-1} = 0$ zachodzi dla wszystkich $j \geq 0$. Zatem funkcja ψ jest analityczna.

Równość $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ wynika z dowodu dostateczności. □

Twierdzenie 1.23 ([6], Thm. 9). *Dwa operatory Toeplitza komutują ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków: oba ich symbole są funkcjami analityczymi, oba ich symbole są sprzężeniami funkcji analitycznych, jeden z symboli jest liniową funkcją drugiego.*

Dowód. Z twierdzenia 1.22 wynika natychmiast, że jeśli jeden z podanych warunków jest spełniony, to operatory Toeplitza komutują.

Pokażemy teraz, że jeśli dwa operatory Toeplitza komutują, to musi być spełniony jeden z wymienionym w twierdzeniu warunków. W tym celu załóżmy, że $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ i $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ są ciągami współczynników Fouriera odpowiednio funkcji φ i ψ oraz, że $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$. Niech ponadto $M = M_{T_\varphi T_\psi} = M_{T_\psi T_\varphi} = [r_{i,j}]_{i,j\geq 0}$. Wtedy z dowodu twierdzenia 1.22 mamy

$$r_{i+1,j+1} = \alpha_{i+1}\beta_{-j-1} + r_{i,j}$$

oraz

$$r_{i+1,j+1} = \beta_{i+1}\alpha_{-j-1} + r_{i,j}.$$

Z powyższych równości wynika, że

$$\alpha_{i+1}\beta_{-j-1} = \beta_{i+1}\alpha_{-j-1} \quad \text{dla wszystkich } i, j \geq 0. \tag{1.5}$$

Mamy do rozpatrzenia następujące dwa przypadki:

(i) dla wszystkich $i, j \geq 0$, $\alpha_{i+1} = 0$ lub $\alpha_{-j-1} = 0$,

(ii) istnieją $i_0, j_0 \geq 0$ takie, że $\alpha_{i_0+1} \neq 0$ oraz $\alpha_{-j_0-1} \neq 0$.

Przypadek (i): Jeśli $\alpha_i = 0$ dla wszystkich $i \neq 0$, to funkcja φ jest funkcją stałą i równość $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ jest oczywista. Jeśli natomiast istnieje $i_0 \geq 0$ takie, że $\alpha_{i_0+1} \neq 0$, to z założenia $\alpha_{-j-1} = 0$ dla wszystkich $j \geq 0$. Ponieważ na podstawie równości (1.5) mamy $\alpha_{i_0+1}\beta_{-j-1} = \beta_{i_0+1}\alpha_{-j-1}$ dla dowolnych $j \geq 0$, więc również $\beta_{-j-1} = 0$ dla wszystkich $j \geq 0$. Oznacza to, że φ i ψ są funkcjami analitycznymi. Podobnie jeśli istnieje $j_0 \geq 0$ takie, że $\alpha_{-j_0-1} \neq 0$, to $\alpha_{i+1} = 0$ oraz $\beta_{i+1} = 0$ dla wszystkich $i \geq 0$, czyli $\overline{\varphi}$ i $\overline{\psi}$ są funkcjami analitycznymi.

Przypadek (ii): Niech

$$\lambda = \frac{\beta_{-j_0-1}}{\alpha_{-j_0-1}} = \frac{\beta_{i_0+1}}{\alpha_{i_0+1}}.$$

Z równości (1.5) wiemy, że $\alpha_{i+1}\beta_{-j_0-1} = \beta_{i+1}\alpha_{-j_0-1}$ dla $i \geq 0$, a więc

$$\beta_{i+1} = \lambda\alpha_{i+1} \quad \text{dla wszystkich } i \geq 0.$$

Podobnie $\alpha_{i_0+1}\beta_{-j-1} = \beta_{i_0+1}\alpha_{-j-1}$, czyli

$$\beta_{-j-1} = \lambda\alpha_{-j-1} \quad \text{dla wszystkich } j \geq 0.$$

Wykazaliśmy więc, że $\beta_k = \lambda\alpha_k$ dla $k \neq 0$. Stąd

$$\begin{aligned}\psi(e^{it}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ikt} = \beta_0 + \sum_{k\neq 0} \lambda\alpha_k e^{ikt} \\ &= \beta_0 - \lambda\alpha_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda\alpha_k e^{ikt} = \beta_0 - \lambda\alpha_0 + \lambda\varphi(e^{it}).\end{aligned}$$

□

Rozdział ten zakończymy dwoma twierdzeniami zawierającymi warunki konieczne i dostateczne na to, by operator Toeplitza był izometrią bądź częściową izometrią. Mamy

Twierdzenie 1.24 ([6], Cor. 3)**.** *Operator Toeplitza T_φ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest funkcją wewnętrzną.*

Twierdzenie 1.25 ([5])**.** *Jedynymi niezerowymi operatorami Toeplitza, które są częściowymi izometriami są operatory postaci T_φ oraz $T_{\overline{\varphi}}$, gdzie φ jest funkcją wewnętrzną.*

Dowód twierdzenia 1.24. Jeśli φ jest funkcją wewnętrzną, to $|\varphi| = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$. Wtedy dla każdej funkcji $f \in H^2$, korzystając z twierdzenia 1.22 mamy

$$\|T_\varphi f\|_2^2 = \langle T_\varphi f, T_\varphi f\rangle_2 = \langle T_{\overline{\varphi}} T_\varphi f, f\rangle_2 = \langle T_{|\varphi|^2} f, f\rangle_2 = \langle f, f\rangle_2 = \|f\|_2.$$

Załóżmy teraz, że dla każdego $f \in H^2$, $\|T_\varphi f\|_2^2 = \|f\|_2^2$. Wtedy

$$\langle T_{\overline{\varphi}} T_\varphi f, f\rangle_2 = \langle f, f\rangle_2, \quad f \in H^2.$$

Zatem $T_{\overline{\varphi}} T_\varphi = I = T_1$. W szczególności oznacza to, że $T_{\overline{\varphi}} T_\varphi$ jest operatorem Toeplitza. Z twierdzenia 1.22 wynika, że φ jest funkcją analityczną, a ponieważ $T_{\overline{\varphi}\varphi} = T_{|\varphi|^2} = T_1$, więc $|\varphi|^2 = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$. □

Dowód twierdzenia 1.25 opiera się na następującym lemacie.

Lemat 1.26 ([5], Lem. 2). *Niezerowy operator Toeplitza T_ϕ osiąga normę wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $T_\phi = \lambda T_{\overline{\varphi}} T_\psi$ dla $\lambda > 0$ oraz pewnych funkcji wewnętrznych φ, ψ.*

Dowód. Załóżmy, że $T_\phi = \lambda T_{\overline{\varphi}} T_\psi$, dla $\lambda > 0$ i funkcji wewnętrznych φ, ψ. Wtedy, z twierdzeń 1.18 i 1.22 wynika, że $\|T_\phi\| = \|\lambda\overline{\varphi}\psi\|_\infty = \lambda$ oraz, że dla $g = \varphi^2 \in H^\infty$,

$$\|T_\phi g\|_2 = \lambda\|T_{\overline{\varphi}} T_\psi T_\varphi \varphi\|_2 = \lambda\|T_\psi \varphi\|_2 = \lambda\|\varphi\|_2 = \lambda\|g\|_2.$$

Oznacza to, że T_ϕ osiąga normę.

Załóżmy teraz, że T_ϕ osiąga normę oraz, że $\|T_\phi\| = 1$ i zdefiniujmy

$$G = \{g \in H^2 \colon \|T_\phi g\|_2 = \|g\|_2\}.$$

Pokażemy, że G jest (domkniętą) podprzestrzenią przestrzeni H^2. W tym celu wystarczy wykazać równoważność

$$g \in G \quad \Leftrightarrow \quad \phi g \in H^2. \tag{1.6}$$

Niech $g \in G$. Ponieważ $\|\phi\|_\infty = \|T_\phi\| = 1$, więc

$$\|g\|_2 = \|T_\phi g\|_2 = \|P(\phi g)\|_2 \leq \|\phi g\|_2 \leq \|g\|_2.$$

Zatem dwie ostatnie nierówności są faktycznie równościami, co z kolei oznacza, że $\|P(\phi g)\|_2 = \|\phi g\|_2 = \|g\|_2$, a więc $\phi g \in H^2$. Wykazaliśmy w ten sposób implikację $g \in G \;\Rightarrow\; \phi g \in H^2$. Ponadto, z powyższych równości wynika, że $|\phi| = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$. Istotnie, jeśli $g \in G$, to

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - |\phi(e^{it})|^2)|g(e^{it})|^2 dt = 0.$$

Ponieważ T_ϕ osiąga normę, więc istnieje funkcja $g \in G$, $g \not\equiv 0$. Z twierdzenia Priwałowa ([20], Privalov's uniqueness theorem, str. 62) wynika, że wartości brzegowe tej funkcji nie mogą zerować się na podzbiorze miary dodatniej. Ostatnia równość implikuje więc, że $|\phi| = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$.

Przejdziemy teraz do dowodu implikacji $\phi g \in H^2 \;\Rightarrow\; g \in G$. Niech $g \in H^2$ będzie takie, że $\phi g \in H^2$. Ponieważ $|\phi| = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$, to

$$\|T_\phi g\|_2 = \|P(\phi g)\|_2 = \|\phi g\|_2 = \|g\|_2,$$

co oznacza, że $g \in G$. Równoważność (1.6) została więc wykazana.

Wykażemy teraz, że podprzestrzeń G jest niezmiennicza ze względu na operator przesunięcia S na H^2, czyli że jeśli $g \in G$, to również $Sg(z) = zg(z) \in G$. Własność ta jest bezpośrednią konsekwencją równoważności (1.6). Z twierdzenia Beurlinga (twierdzenie 1.17) wynika, że istnieje funkcja wewnętrzna φ taka, że

$$G = \varphi H^2 = \mathcal{R}(T_\varphi).$$

W szczególności, $\varphi \in G$ i na mocy (1.6) mamy $\varphi\phi \in H^2$. Zatem $\psi = \varphi\phi$ jest funkcją klasy H^2 o tej własności, że $|\psi(e^{it})| = 1$ p. w. na $\mathbb{T}$, a więc jest funkcją wewnętrzną. Ponadto, z twierdzenia 1.22 wynika, że

$$T_\phi = T_{\overline{\varphi}\psi} = T_{\overline{\varphi}}T_\psi.$$

$\square$

Dowód twierdzenia 1.25. Załóżmy, że T_ϕ jest częściową izometrią. Wtedy T_ϕ osiąga normę i $\|T_\phi\| = 1$. Na podstawie lematu 1.26 wiemy, że istnieją wówczas funkcje wewnętrzne φ i ψ takie, że $\phi = \overline{\varphi}\psi$ oraz

$$T_\phi = T_{\overline{\varphi}}T_\psi.$$

Ponadto z dowodu tego lematu oraz z definicji częściowej izometrii (definicja 1.3) mamy

$$\mathcal{R}(T_\varphi) = \varphi H^2 = G = \{g \in H^2 \colon \|T_\phi g\|_2 = \|g\|_2\} = (\ker T_\phi)^\perp.$$

Oczywiście operatory T_φ i T_ψ komutują. Pokażemy teraz, że również operatory $T_{\overline{\varphi}}$ i T_ψ komutują, czyli, że $T_\psi T_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\varphi}}T_\psi = T_\phi$. Jeśli $g \in G = \mathcal{R}(T_\varphi)$, to $g = T_\varphi h$ dla pewnego $h \in H^2$ oraz

$$T_\phi g = T_{\overline{\varphi}}T_\psi g = T_{\overline{\varphi}}T_\psi T_\varphi h = T_{\overline{\varphi}}T_\varphi T_\psi h = T_\psi h = T_\psi T_{\overline{\varphi}}T_\varphi h = T_\psi T_{\overline{\varphi}} g.$$

Jeśli $g \in G^\perp = \ker T_\phi$, to $T_{\overline{\varphi}}T_\psi g = T_\phi g = 0$, a ponieważ $G^\perp = \ker T_{\overline{\varphi}}$, to również $T_\psi T_{\overline{\varphi}} g = 0$. W ten sposób wykazaliśmy, że $T_{\overline{\varphi}}T_\psi = T_\psi T_{\overline{\varphi}}$ na H^2. Z twierdzenia 1.23 wiemy, że musi być spełniony jeden z poniższych warunków

(i) $\overline{\varphi}$ i ψ są funkcjami analitycznymi,

(ii) φ i $\overline{\psi}$ są funkcjami analitycznymi,

(iii) $\psi = \alpha\overline{\varphi} + \beta$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Jeśli zachodzi warunek (i), to φ jest funkcją stałą. Podobnie, jeśli zachodzi (ii), to ψ jest funkcją stałą. Jeśli natomiast zachodzi warunek (iii), to

$$T_\psi T_\varphi = \alpha T_{\overline{\varphi}} T_\varphi + \beta T_\varphi \quad \text{oraz} \quad T_\varphi T_\psi = \alpha T_\varphi T_{\overline{\varphi}} + \beta T_\varphi.$$

Zatem $T_{\overline{\varphi}} T_\varphi = T_\varphi T_{\overline{\varphi}}$ i z twierdzenia 1.23 wynika, że funkcja φ jest stała.

□

Prezentowany powyżej dowód jest uproszczoną wersją dowodu pochodzącego od Browna i Douglasa. Dowód przedstawiony w [5] opiera się dodatkowo na następującym lemacie.

Lemat 1.27 ([5], Lem. 1)**.** *Niech V będzie izometrią na przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ i niech $T \in \mathscr{L}$ będzie operatorem komutującym z V. Jeśli podprzestrzeń $(\mathcal{R}(V))^\perp$ jest niezmiennicza ze względu na T, to operator T komutuje również z V^*.*

Okazuje się, że rozumowanie podobne to tego, które zastosowaliśmy w dowodzie twierdzenia 1.25 pozwala uprościć również dowód tego lematu.

Dowód lematu 1.27. Niech $T \in \mathscr{L}$ będzie taki, że $TV = VT$ oraz przestrzeń $(\mathcal{R}(V))^\perp$ jest niezmiennicza względem T. Wykażemy, że $TV^* = V^*T$ na zbiorze $\mathcal{R}(V)$ oraz na zbiorze $(\mathcal{R}(V))^\perp$.

Jeśli $g \in \mathcal{R}(V)$, to $g = Vh$ dla pewnego $h \in \mathscr{H}$. Ponieważ V jest izometrią, więc $V^*V = I$ oraz

$$TV^*g = TV^*Vh = Th = V^*VTh = V^*TVh = V^*Tg.$$

Stąd $TV^* = V^*T$ na $\mathcal{R}(V)$.

Z drugiej strony, jeśli $g \in (\mathcal{R}(V))^\perp = \ker V^*$, to $TV^*g = 0$. Ponadto, z założenia również $Tg \in \ker V^*$, a zatem $V^*Tg = 0$. Oznacza to, że $TV^* = V^*T$ na $(\mathcal{R}(V))^\perp$.

□

1.4 Przestrzenie de Branges'a-Rovnyaka

W podrozdziale 1.1 przedstawiliśmy definicję i własności przestrzeni $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$ dla dowolnego operatora $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$, będącego kontrakcją. Obecnie interesować nas będzie przypadek, gdy $A = T_\varphi$ jest operatorem Toeplitza na przestrzeni H^2 takim, że $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, a więc T_φ jest kontrakcją przestrzeni H^2 w siebie.

Przyjmiemy też oznaczenia $\mathcal{M}(T_\varphi) = \mathcal{M}(\varphi)$ oraz $\mathcal{H}(T_\varphi) = \mathcal{H}(\varphi)$. Ponadto, iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathcal{H}(\varphi)$ będziemy oznaczać przez $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$, a odpowiadającą mu normę przez $\| \cdot \|_\varphi$.

Od tej pory, niech b oznacza funkcję z domkniętej kuli jednostkowej przestrzeni H^∞. Innymi słowy, będziemy zawsze zakładać, że $b \in H^\infty$ oraz $\|b\|_\infty \leq 1$. Dla takich b, przestrzenie $\mathcal{H}(b)$ noszą nazwę *przestrzeni de Branges'a-Rovnyaka*. Przypomnijmy, że z definicji przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest obrazem operatora $(I - T_b T_{\overline{b}})^{1/2}$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (I - T_b T_{\overline{b}})^{1/2} f, (I - T_b T_{\overline{b}})^{1/2} g \rangle_b = \langle f, g \rangle_2, \quad f, g \in (\ker(I - T_b T_{\overline{b}})^{1/2})^\perp.$$

Omówimy najpierw pewne trywialne przypadki przestrzeni $\mathcal{H}(b)$

Przykład 1.28. *Jeśli $b(z) = \lambda$, $|\lambda| \leq 1$, to*

$$\mathcal{H}(b) = \begin{cases} H^2 & \text{dla} \quad |\lambda| < 1, \\ \{0\} & \text{dla} \quad |\lambda| = 1. \end{cases}$$

Łatwo bowiem widać, że jeśli $b(z) = \lambda$, to $I - T_b T_{\overline{b}}$ jest operatorem mnożenia przez $1 - |\lambda|^2$. A zatem $(I - T_b T_{\overline{b}})^{1/2}$ jest wtedy operatorem mnożenia przez $(1 - |\lambda|^2)^{1/2}$. Jeśli więc $|\lambda| = 1$, to $\mathcal{H}(b) = \{0\}$. Natomiast gdy $|\lambda| < 1$, to $\mathcal{H}(b) = H^2$ i dla dowolnej funkcji $f \in H^2$,

$$\|f\|_b = \|(1 - |\lambda|^2)^{-1/2} f\|_2 = (1 - |\lambda|^2)^{-1/2} \|f\|_2.$$

Ze względu na powyższy przykład, w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że b nie jest funkcją stałą.

Przykład 1.29. *Jeśli $\|b\|_\infty < 1$, to $\mathcal{H}(b) = H^2$ i normy $\| \cdot \|_b$, $\| \cdot \|_2$ są równoważne.*

Jeśli $\|b\|_\infty < 1$, to $\|T_b T_{\overline{b}}\| < 1$, więc operator $I - T_b T_{\overline{b}}$ jest odwracalny. Wynika stąd, że również $(I - T_b T_{\overline{b}})^{1/2}$ jest operatorem odwracalnym, co z kolei oznacza, że $\mathcal{H}(b) = H^2$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in H^2$,

$$\|f\|_b = \|(I - T_b T_{\overline{b}})^{-1/2} f\|_2.$$

Twierdzenie 1.30. *Załóżmy, że b jest funkcją wewnętrzną. Wtedy $\mathcal{H}(b)$ jest zwykłą podprzestrzenią przestrzeni H^2, która jest dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni $\mathcal{M}(b) = bH^2$, czyli*

$$\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2.$$

Dowód. Jeśli b jest funkcją wewnętrzną, to T_b jest izometrią (twierdzenie 1.24) i teza twierdzenia wynika z ogólnych rozważań dotyczących przestrzeni $\mathcal{M}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$, przeprowadzonych pod koniec podrozdziału 1.1. $\square$

Przykład 1.31. *Jeśli* $b(z) = z^n$, $n \geq 1$, *to*

$$\mathcal{H}(b) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k \colon \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Zauważmy najpierw, że

$$bH^2 = \{f \in H^2 \colon f^{(k)}(0) = 0,\ 0 \leq k < n\}.$$

Zatem $g \in \mathcal{H}(b) = (bH^2)^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle g, z^m \rangle_2 = 0 \quad \text{dla dowolnego } m \geq n.$$

Niech k_w oznacza jądro reprodukujące dla przestrzeni H^2, dane wzorem

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \overline{w}z}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Zatem dla dowolnej funkcji $f \in H^2$ mamy

$$f(w) = \langle f, k_w \rangle_2.$$

Z rozważań dotyczących postaci funkcjonału na przestrzeni $\mathcal{M}(A)$ wynika, że jądro reprodukujące dla przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ jest postaci $k_w^b = (I - T_b T_{\bar{b}})k_w$. Ponieważ

$$T_{\bar{b}} k_w(z) = \langle T_{\bar{b}} k_w, k_z \rangle_2 = \langle k_w, bk_z \rangle_2 = \overline{\langle bk_z, k_w \rangle_2} = \overline{b(w) k_z(w)} = \overline{b(w)} k_w(z),$$

więc

$$k_w^b(z) = (1 - \overline{b(w)} b(z)) k_w(z) = \frac{1 - \overline{b(w)} b(z)}{1 - \overline{w}z}, \quad z, w \in \mathbb{D}. \tag{1.7}$$

Zauważmy, że w szczególności jeśli $b(w) = 0$, to $k_w^b = k_w \in \mathcal{H}(b)$.

Następne twierdzenie jest właściwie twierdzeniem 1.9 wypowiedzianym dla operatora $A = T_b$.

Twierdzenie 1.32 ([34], II-4)**.** *Funkcja* $f \in H^2$ *jest elementem przestrzeni* $\mathcal{H}(b)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $T_{\bar{b}} f$ *jest elementem przestrzeni* $\mathcal{H}(\bar{b})$*. Ponadto, jeśli* $f, g \in \mathcal{H}(b)$*, to*

$$\langle f, g \rangle_b = \langle f, g \rangle_2 + \langle T_{\bar{b}} f, T_{\bar{b}} g \rangle_{\bar{b}}. \tag{1.8}$$

Rozdział ten zakończymy twierdzeniem opisującym istotną własność przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ i $\mathcal{H}(\bar{b})$, a mianowicie ich niezmienniczość ze względu na operator $T_{\overline{\varphi}}$, $\varphi \in H^\infty$.

Twierdzenie 1.33 ([34], II-7)**.** *Jeśli $\varphi \in H^\infty$, to przestrzenie $\mathcal{H}(b)$ i $\mathcal{H}(\bar{b})$ są niezmiennicze ze względu na operator $T_{\overline{\varphi}}$ oraz norma $T_{\overline{\varphi}}$ jako operatora na każdej z tych przestrzeni jest mniejsza lub równa $\|\varphi\|_\infty$.*

Dowód. Załóżmy, że $\varphi \in H^\infty$ oraz $\|\varphi\|_\infty = 1$.

Wykażemy najpierw, że wtedy

$$T_{\overline{\varphi}}(\mathcal{H}(\bar{b})) \subset \mathcal{H}(\bar{b}) \quad \text{and} \quad \|T_{\overline{\varphi}}\|_{\mathcal{H}(\bar{b})\to\mathcal{H}(\bar{b})} \leq 1.$$

Powyższa inkluzja oznacza, że

$$T_{\overline{\varphi}}(I - T_{\bar{b}}T_b)^{1/2}(H^2) \subset (I - T_{\bar{b}}T_b)^{1/2}(H^2).$$

Zatem może być zapisana w postaci $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(B)$, gdzie

$$A = T_{\overline{\varphi}}(I - T_{\bar{b}}T_b)^{1/2} \quad \text{oraz} \quad B = (I - T_{\bar{b}}T_b)^{1/2}.$$

W dowodzie będziemy korzystać z wniosku z kryterium Douglasa (wniosek 1.7(i)), z którego wynika, że $\mathcal{M}(A)$ jest zawarte kontrakcyjnie w $\mathcal{M}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $BB^* \geq AA^*$. W naszym przypadku mamy

$$\begin{aligned} BB^* - AA^* &= I - T_{\bar{b}}T_b - T_{\overline{\varphi}}(I - T_{\bar{b}}T_b)T_\varphi \\ &= I - T_{\bar{b}}T_b - T_{\overline{\varphi}}T_\varphi + T_{\overline{\varphi}}T_{\bar{b}}T_bT_\varphi \\ &= I - T_{|b|^2} - T_{|\varphi|^2} + T_{|\varphi b|^2} = T_{(1-|\varphi|^2)(1-|b|^2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Zatem zapowiedziana inkluzja została wykazana. Ponadto, operator włożenia $J\colon \mathcal{M}(A) \hookrightarrow \mathcal{M}(B)$ jest kontrakcją, co oznacza, że

$$\|T_{\overline{\varphi}}(I - T_{\bar{b}}T_b)^{1/2}f\|^2_{\mathcal{M}(B)} \leq \|T_{\overline{\varphi}}(I - T_{\bar{b}}T_b)^{1/2}f\|^2_{\mathcal{M}(A)}, \quad f \in H^2.$$

Ponieważ $A = T_{\overline{\varphi}}B$, więc

$$\ker B \subset \ker A \quad \text{and} \quad (\ker A)^\perp \subset (\ker B)^\perp.$$

Wykażemy teraz, że $\|T_{\overline{\varphi}}g\|^2_{\bar{b}} \leq \|g\|^2_{\bar{b}}$ dla każdej funkcji $g \in \mathcal{H}(\bar{b})$. Niech $g = Bf = (I - T_{\bar{b}}T_b)^{1/2}f$, gdzie $f \in (\ker B)^\perp$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|g\|^2_{\bar{b}} &= \|Bf\|^2_{\mathcal{M}(B)} = \|f\|^2_2 \geq \|f_\perp\|^2_2 = \|Af_\perp\|^2_{\mathcal{M}(A)} \\ &= \|Af\|^2_{\mathcal{M}(A)} \geq \|Af\|^2_{\mathcal{M}(B)} = \|T_{\overline{\varphi}}Bf\|^2_{\mathcal{M}(B)} = \|T_{\overline{\varphi}}g\|^2_{\bar{b}}, \end{aligned}$$

gdzie w powyższych nierównościach $f_\perp$ oznacza rzut f na $(\ker A)^\perp$.

Wykażemy jeszcze, że

$$T_{\overline{\varphi}}(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b) \quad \text{oraz} \quad \|T_{\overline{\varphi}}\|_{\mathcal{H}(b)\to\mathcal{H}(b)} \leq 1.$$

Z twierdzenia 1.32 wynika, że $f \in \mathcal{H}(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_{\overline{b}}f \in \mathcal{H}(\overline{b})$. Ponieważ $\mathcal{H}(\overline{b})$ jest niezmiennicza ze względu na $T_{\overline{\varphi}}$, więc $T_{\overline{\varphi}}T_{\overline{b}}f \in \mathcal{H}(\overline{b})$ dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{H}(b)$. Ponadto, z równości

$$T_{\overline{\varphi}}T_{\overline{b}}f = T_{\overline{b}}T_{\overline{\varphi}}f,$$

i z twierdzenia 1.32 wynika, że $T_{\overline{\varphi}}f \in \mathcal{H}(b)$. Wykazaliśmy w ten sposób niezmienniczość przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ ze względu na $T_{\overline{\varphi}}$.

Na koniec zauważmy, że z równości (1.8) oraz z udowodnionej już części twierdzenia wynika, że

$$\|T_{\overline{\varphi}}f\|_b^2 = \|T_{\overline{\varphi}}f\|_2^2 + \|T_{\overline{b}}T_{\overline{\varphi}}f\|_{\overline{b}}^2 = \|T_{\overline{\varphi}}f\|_2^2 + \|T_{\overline{\varphi}}T_{\overline{b}}f\|_{\overline{b}}^2 \leq \|f\|_2^2 + \|T_{\overline{b}}f\|_{\overline{b}}^2 = \|f\|_b^2.$$

$\square$

Rozdział 2

Przestrzenie $\mathcal{H}(b)$ dla nieekstremalnych b

W rozdziale 1 zostały zdefiniowane przestrzenie de Branges'a Rovnyaka $\mathcal{H}(b)$, zależne od funkcji b z domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni H^∞. Jak wspomnieliśmy we wstępie, ogólna teoria przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ dzieli się na dwa przypadki, w zależności od tego czy b jest, czy nie jest, punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞. Najbardziej znanymi przykładami funkcji będących punktami ekstremalnymi kuli jednostkowej w H^∞ są funkcje wewnętrzne (definicja 1.13). Twierdzenie 1.30 mówi, że jeżeli b jest funkcją wewnętrzną, to $\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2$, czyli jest dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni bH^2. W tym przypadku przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ nazywana jest *przestrzenią modelową wyznaczoną przez funkcję b*. Przestrzenie modelowe badane były jeszcze przed wprowadzeniem ogólnych przestrzeni $\mathcal{H}(b)$.

Rozdział ten będzie poświęcony przede wszystkim przestrzeniom $\mathcal{H}(b)$, gdy b nie jest punktem ekstremalnym oraz ich związkowi z innymi znanymi przestrzeniami funkcji analitycznych w kole $\mathbb{D}$.

2.1 Punkty ekstremalne i nieekstremalne kuli jednostkowej H^∞

Tak jak wspomnieliśmy w rozdziale 1, przestrzeń H^∞ funkcji analitycznych, ograniczonych w kole jednostkowym $\mathbb{D}$, może być traktowana jako podprzestrzeń przestrzeni L^∞. Wiadomo, że jedynymi punktami ekstremalnymi domkniętej kuli jednostkowej w L^∞ są funkcje, których moduł równy jest 1 prawie wszędzie na okręgu

$\mathbb{T}$. Wynika stąd w szczególności, że każda funkcja wewnętrzna jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞. Okazuje się jednak, że poza tymi funkcjami istnieją również inne punkty ekstremalne kuli jednostkowej w H^∞. Punkty te są dokładnie opisane w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.1 ([19], str. 138). *Funkcja f jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy $|f(z)| \leq 1$ oraz*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - |f(e^{it})|^2) dt = -\infty.$$

Oznacza to, że b nie jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy $\log(1 - |b|^2)$ jest funkcją całkowalną na $\mathbb{T}$. Z tego względu z każdą taką funkcją b można powiązać funkcję zewnętrzną a (definicja 1.15), której moduł na okręgu jest równy $(1 - |b|^2)^{1/2}$. Mówi o tym dokładnie następujący

Lemat 2.2. *Jeśli b nie jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞, to istnieje dokładnie jedna funkcja zewnętrzna $a \in H^\infty$ taka, że*

$$|a(e^{it})|^2 + |b(e^{it})|^2 = 1 \quad \text{p.w. na } \mathbb{T},$$

oraz $a(0) > 0$.

Dowód. Ponieważ $\log(1 - |b|^2) \in L^1$, więc funkcja

$$a(z) = \exp\left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log(1 - |b(e^{it})|^2) dt \right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

jest funkcją zewnętrzną taką, że $|a(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$. Ponadto

$$\log |a(e^{it})|^2 = \log(1 - |b(e^{it})|^2) \quad \text{p.w. na } \mathbb{T}.$$

□

W dalszym ciągu tej rozprawy zamiast mówić, że $b \in H^\infty$, $\|b\|_\infty \leq 1$, jest (nie jest) punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞, będziemy mówić, że b jest (nie jest) punktem ekstremalnym. Jeśli b nie jest punktem ekstremalnym, a funkcja zewnętrzna a jest taka jak w powyższym lemacie, to (b, a) będziemy nazywać *parą kanoniczną*.

Poniżej omówimy dobrze znane własności przestrzeni $\mathcal{H}(b)$, gdy b nie jest punktem ekstremalnym. W własnościach tych ważną rolę odgrywa wprowadzona powyżej funkcja zewnętrzna a.

Mamy

Lemat 2.3 ([34], IV-1). *Jeśli (b, a) jest parą kanoniczną, to*

$$\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{M}(\overline{a}) = \mathcal{H}(\overline{b}),$$

przy czym $\mathcal{M}(a)$ zawiera się kontrakcyjnie w $\mathcal{M}(\overline{a})$, a przestrzenie $\mathcal{M}(\overline{a})$ i $\mathcal{H}(\overline{b})$ są równe jako przestrzenie Hilberta.

Dowód. Jeśli (b, a) jest parą kanoniczną, to na mocy twierdzenia 1.22,

$$I - T_{\overline{b}}T_b = T_{1-|b|^2} = T_{|a|^2} = T_{\overline{a}}T_a.$$

Z wniosku z kryterium Douglasa (wniosek 1.7(ii)) wynika, że $\mathcal{M}(\overline{a})$ i $\mathcal{H}(\overline{b})$ są równe jako przestrzenie Hilberta. Ponadto, dla $f \in H^2$,

$$\begin{aligned}\langle (T_{\bar{a}}T_a - T_aT_{\bar{a}})f, f\rangle_2 &= \langle T_af, T_af\rangle_2 - \langle T_{\bar{a}}f, T_{\bar{a}}f\rangle_2 \\ &= \|af\|_2^2 - \|P(\bar{a}f)\|_2^2 \geq \|af\|_2^2 - \|\bar{a}f\|_2^2 \geq 0,\end{aligned}$$

czyli

$$T_{\bar{a}}T_a \geq T_aT_{\bar{a}}. \tag{2.1}$$

Stąd, na podstawie wniosku 1.7(i), $\mathcal{M}(a)$ zawiera się kontrakcyjnie w $\mathcal{M}(\overline{a})$. □

Uwaga 2.4. Zauważmy, że zawsze $\mathcal{H}(\overline{b})$ zawiera się kontrakcyjnie w $\mathcal{H}(b)$. Rzeczywiście, z nierówności (2.1) z b w miejsce a wynika, że

$$I - T_bT_{\bar{b}} \geq I - T_{\bar{b}}T_b.$$

Wspomniane zawieranie otrzymujemy więc stosując wniosek 1.7(i).

Ponadto, z powyższych rozważań wynika, że każda z przestrzeni $\mathcal{M}(a)$ i $\mathcal{M}(\overline{a})$ zawiera się kontrakcyjnie w $\mathcal{H}(b)$.

Następne twierdzenie jest właściwie wnioskiem z twierdzenia 1.32.

Twierdzenie 2.5 ([34], IV-1). *Jeśli (b, a) jest parą kanoniczną, to funkcja $f \in H^2$ jest elementem przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_{\overline{b}}f$ jest elementem przestrzeni $\mathcal{M}(\overline{a})$. Istnieje wtedy dokładnie jedna funkcja $f^+ \in H^2$ taka, że $T_{\overline{b}}f = T_{\overline{a}}f^+$. Ponadto, jeśli $f, g \in \mathcal{H}(b)$, to*

$$\langle f, g\rangle_b = \langle f, g\rangle_2 + \langle f^+, g^+\rangle_2.$$

Dowód. Z twierdzenia 1.32 wiemy, że $f \in \mathcal{H}(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_{\bar{b}}f \in \mathcal{H}(\bar{b}) = \mathcal{M}(\bar{a})$, gdzie ostatnia równość wynika z lematu 2.3. Oznacza to, że istnieje funkcja $f^+ \in H^2$ taka, że $T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}f^+$.

Pokażemy teraz, że jeśli a jest funkcją zewnętrzną, to operator $T_{\bar{a}}$ jest różnowartościowy na H^2. Istotnie, wystarczy wykazać, że

$$T_{\bar{a}}f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0.$$

W tym celu zauważmy, że jeśli $T_{\bar{a}}f = 0$, to dla dowolnej funkcji $g \in H^2$ mamy

$$0 = \langle T_{\bar{a}}f, g\rangle_2 = \langle f, ag\rangle_2.$$

Ponieważ aH^2 jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni H^2 ([18], Cor. 7.3), więc $f = 0$.

Funkcja f^+ jest zatem wyznaczona jednoznacznie. Ponadto, na mocy twierdzenia 1.32 mamy

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_b &= \langle f, g\rangle_2 + \langle T_{\bar{b}}f, T_{\bar{b}}g\rangle_{\bar{b}} \\ &= \langle f, g\rangle_2 + \langle T_{\bar{a}}f^+, T_{\bar{a}}g^+\rangle_{\mathcal{M}(\bar{a})} = \langle f, g\rangle_2 + \langle f^+, g^+\rangle_2.\end{aligned}$$

□

2.2 Nieograniczone operatory Toeplitza

W 2008 roku Donald Sarason wykazał związek pomiędzy przestrzeniami $\mathcal{H}(b)$ dla b nie będących punktami ekstremalnymi, a nieograniczonymi operatorami Toeplitza. Dokładniej, rozpatrywał on operatory Toeplitza T_φ, gdzie φ jest elementem klasy Nevanlinny $\mathcal{N}$.

Niech

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{dla } x > 1 \\ 0, & \text{dla } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Definicja 2.6. Mówimy, że funkcja φ analityczna w kole $\mathbb{D}$, należy do *klasy Nevanlinny* $\mathcal{N}$, gdy

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |\varphi(re^{it})| dt < \infty.$$

Klasa $\mathcal{N}$ nazywana jest również klasą funkcji *o ograniczonej charakterystyce.* Klasę $\mathcal{N}$ charakteryzują następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 2.7 ([14], Thm. 2.1). *Funkcja analityczna w kole $\mathbb{D}$ należy do klasy Nevanlinny $\mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ilorazem dwóch funkcji analitycznych, ograniczonych.*

Twierdzenie 2.8 ([14], Thm. 2.9). *Każda funkcja $\varphi \in \mathcal{N}$, która nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{D}$, jest postaci*

$$\varphi(z) = B(z)[S_1(z)/S_2(z)]F(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.2}$$

gdzie B jest iloczynem Blaschkego, S_1 i S_2 są funkcjami wewnętrznymi osobliwymi, a F jest funkcją zewnętrzną. Ponadto, każda funkcja postaci (2.2) *należy do klasy Nevanlinny $\mathcal{N}$.*

Z powyższych twierdzeń wynika natychmiast, że każda funkcja z klasy $\mathcal{N}$ ma granice niestyczne prawie wszędzie na okręgu $\mathbb{T}$. Jeśli funkcja φ jest dana wzorem (2.2), przy czym $S_2 \equiv 1$, to mówimy że φ należy do *klasy Smirnova $\mathcal{N}^+$*. Każda funkcja $\varphi \in \mathcal{N}^+$ jest więc postaci $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$, gdzie $\varphi_1, \varphi_2 \in H^\infty$ oraz φ_2 jest funkcją zewnętrzną.

Przypomnijmy, że dla funkcji b, która nie jest punktem ekstremalnym, istnieje funkcja zewnętrzna a spełniająca tezę lematu 2.2 i układ (b, a) nazywamy parą kanoniczną. Zatem w tym przypadku funkcja $\varphi = b/a$ należy do klasy Smirnova $\mathcal{N}^+$. Prawdziwe jest stwierdzenie odwrotne. Mamy

Twierdzenie 2.9 ([35], Prop. 3.1). *Funkcja analityczna φ, która nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{D}$, należy do klasy $\mathcal{N}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją jednoznacznie przedstawić w postaci $\varphi = b/a$, gdzie (b, a) jest parą kanoniczną.*

Przedstawienie funkcji $\varphi \in \mathcal{N}^+$ w postaci $\varphi = b/a$ nazywamy *reprezentacją kanoniczną.*

Dla dowolnej funkcji analitycznej φ w kole $\mathbb{D}$ możemy zdefiniować T_φ jako operator mnożenia przez φ z dziedziną $\mathcal{D}(T_\varphi) = \{f \in H^2 \colon \varphi f \in H^2\}$. Zauważmy, że jeśli $\varphi \in H^\infty$, to T_φ jest po prostu ograniczonym operatorem Toeplitza. W pracy [35] Sarason wykazał między innymi następujące fakty.

Lemat 2.10 ([35], Lem. 5.2). *Niech φ będzie funkcją analityczną w kole $\mathbb{D}$. Operator T_φ jest gęsto określony wtedy i tylko wtedy, gdy φ należy do klasy $\mathcal{N}^+$.*

Twierdzenie 2.11 ([35], Prop. 5.3). *Niech $\varphi = b/a$ będzie reprezentacją kanoniczną niezerowej funkcji $\varphi \in \mathcal{N}^+$. Wtedy $\mathcal{D}(T_\varphi) = aH^2$.*

Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{N}^+$. Wtedy operator T_φ jest operatorem liniowym, ale niekoniecznie ograniczonym. Ponieważ jednak T_φ jest w tym przypadku gęsto określony, to istnieje jednoznacznie wyznaczony operator T_φ^*, spełniający równość

$$\langle T_\varphi f, g\rangle_2 = \langle f, T_\varphi^* g\rangle_2, \quad f \in \mathcal{D}(T_\varphi),\ g \in \mathcal{D}(T_\varphi^*).$$

Bezpośrednio z definicji operatora T_φ widać, że jest on operatorem domkniętym, to znaczy jego wykres jest zbiorem domkniętym. Z własności operatorów nieograniczonych ([28], str. 367-373) wynika, że operator T_φ^* jest również gęsto określony i domknięty. W dalszym ciągu dla $\varphi \in \mathcal{N}^+$ przyjmujemy oznaczenie $T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi^*$ (zobacz [35]). Następne twierdzenie mówi między innymi o tym, że jeśli $\varphi = b/a$, to dziedziną operatora T_φ^* jest przestrzeń de Branges'a-Rovnyaka $\mathcal{H}(b)$.

Twierdzenie 2.12 ([35], Prop. 5.4)**.** *Niech $\varphi = b/a$ będzie reprezentacją kanoniczną niezerowej funkcji $\varphi \in \mathcal{N}^+$. Wtedy $\mathcal{D}(T_{\overline{\varphi}}) = \mathcal{H}(b)$ oraz $T_{\overline{\varphi}} f = f^+$ $(f \in \mathcal{H}(b))$. Ponadto, jeśli $f, g \in \mathcal{H}(b)$, to*

$$\langle f, g\rangle_b = \langle f, g\rangle_2 + \langle T_{\overline{\varphi}} f, T_{\overline{\varphi}} g\rangle_2.$$

W szczególności,

$$\|f\|_b^2 = \|f\|_2^2 + \|T_{\overline{\varphi}} f\|_2^2.$$

2.3 Twierdzenie Fejéra-Riesza

Wielomianem trygonometrycznym stopnia n nazywamy funkcję postaci

$$R(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt},$$

gdzie c_j, $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, są ustalonymi liczbami zespolonymi.

Twierdzenie Fejéra-Riesza mówi o tym, że każdy wielomian trygonometryczny, który przyjmuje tylko nieujemne wartości rzeczywiste, jest kwadratem modułu pewnego wielomianu analitycznego.

Twierdzenie 2.13 ([24], str. 118)**.** *Niech $R(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ będzie wielomianem trygonometrycznym, który przyjmuje jedynie wartości nieujemne, tzn. $R(e^{it}) \geq 0$ na całym $\mathbb{T}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian $r(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ taki, że r nie ma zer w $\mathbb{D}$, $r(0) > 0$ oraz*

$$R(e^{it}) = |r(e^{it})|^2.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że z faktu iż R przyjmuje tylko wartości rzeczywiste wynika, że $\overline{c}_j = c_{-j}$. Jeśli zatem przyjmiemy $R(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, $z \neq 0$, to $R(z) = \overline{R(1/\overline{z})}$. Jeśli $c_{-n} \neq 0$, to wielomian $W(z) = z^n R(z)$ jest wielomianem stopnia $2n$ takim, że $W(0) \neq 0$. Ponadto pierwiastki tego wielomianu, które nie leżą na okręgu $\mathbb{T}$ występują w parach postaci α, $1/\overline{\alpha}$, natomiast wszystkie pierwiastki, które leżą na $\mathbb{T}$ są krotności parzystej. Stąd

$$W(z) = c_n \prod_{j=1}^{n} [(z - \alpha_j)(z - 1/\overline{\alpha}_j)]$$

oraz

$$R(z) = c \prod_{j=1}^{n} [(z - \alpha_j)(z^{-1} - \overline{\alpha}_j)]$$

dla α_j, $|\alpha_j| \geq 1$, $j = 1, \ldots, n$, i pewnej stałej c. Ponieważ dla $|z| = 1$ mamy $R(z) \geq 0$, więc $c > 0$. Wystarczy teraz przyjąć

$$r(z) = \sqrt{c} \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j).$$

Wtedy bowiem

$$|r(e^{it})|^2 = c \prod_{j=1}^{n} |z - \alpha_j|^2 = R(e^{it}).$$

□

Stosując twierdzenie Fejéra-Riesza wykażemy, że jeśli funkcja $\varphi \in \mathcal{N}^+$ jest funkcją wymierną, to funkcje b i a występujące w reprezentacji kanonicznej $\varphi = b/a$ również są funkcjami wymiernymi (por. [35]). W tym celu załóżmy, że $\varphi = p/q$, gdzie p i q są wielomianami nie mającymi wspólnych pierwiastków oraz $q(0) > 0$. Wtedy na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$ funkcja $|p|^2 + |q|^2$ jest nieujemnym wielomianem trygonometrycznym. Z twierdzenia Fejéra-Riesza wynika, że istnieje analityczny wielomian r nie mający zer w kole $\mathbb{D}$ taki, że $r(0) > 0$ oraz $|r|^2 = |p|^2 + |q|^2$ na $\mathbb{T}$. Wystarczy teraz przyjąć

$$a = \frac{q}{r} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{p}{r}.$$

Zauważmy jeszcze, że przy naszych założeniach (p i q nie mają wspólnych pierwiastków) wielomian r nie ma faktycznie zer w domknięciu koła jednostkowego. Wobec tego funkcje b i a są funkcjami analitycznymi w domknięciu koła $\mathbb{D}$.

2.4 Wymierne pary kanoniczne

Jak zostało zauważone w poprzednim podrozdziale, z twierdzenia Fejéra-Riesza wynika, że funkcja $\varphi \in \mathcal{N}^+$ jest funkcją wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje b i a występujące w reprezentacji kanonicznej $\varphi = b/a$ są funkcjami wymiernymi. Zauważmy ponadto, że jeśli funkcja wymierna b nie jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w H^∞, to wtedy odpowiadająca jej funkcja zewnętrzna a taka, że (b, a) tworzą parę kanoniczną, jest również funkcją wymierną. W szczególności, funkcja a jest funkcją wymierną nie zerującą się w kole jednostkowym $\mathbb{D}$. Następne twierdzenie, udowodnione przez C. Costarę i T. Ransforda w 2013 roku ([11]), pokazuje, że w tym przypadku przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest faktycznie wyznaczona przez zera funkcji a leżące na okręgu $\mathbb{T}$. Mianowicie, wykazali oni następujące

Twierdzenie 2.14 ([11])**.** *Załóżmy, że (b, a) jest wymierną parą kanoniczną i niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$, wypisanymi z uwzględnieniem ich krotności. Wtedy*

$$\mathcal{H}(b) = \left\{ p + \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j) g : \; p \in P_{n-1}, \; g \in H^2 \right\}, \tag{2.3}$$

gdzie P_{n-1} oznacza zbiór wielomianów stopnia co najwyżej $n-1$.

Wyniki, które zaprezentujemy poniżej będą opisywały strukturę przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ w przypadku, gdy para kanoniczna (b, a) jest parą wymierną i funkcja a ma zera jednokrotne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ na okręgu $\mathbb{T}$. Zauważmy, że ponieważ obie funkcje b i a są funkcjami analitycznymi w domknięciu koła $\mathbb{D}$, więc $|b(\lambda_j)| = 1$ dla wszystkich $1 \leq j \leq n$ oraz funkcja b ma pochodną niestyczną w sensie Caratheodory'ego w każdym z punktów λ_j (zobacz [37], str. 56). Zatem każda funkcja $f \in \mathcal{H}(b)$ ma granicę niestyczną w λ_j, $1 \leq j \leq n$ (patrz [34], str. 48-50). Ponadto,

$$f(\lambda_j) = \langle f, k^b_{\lambda_j} \rangle_b,$$

gdzie

$$k^b_{\lambda_j}(z) = \frac{1 - \overline{b(\lambda_j)} b(z)}{1 - \overline{\lambda}_j z}.$$

Poniższe twierdzenie opisuje dokładnie ortogonalne dopełnienie przestrzeni $\mathcal{M}(a) = aH^2$ w przestrzeni $\mathcal{H}(b)$, przy czym w dowodzie nie korzystamy z twierdzenia 2.14. Dodajmy tutaj, że nasze twierdzenie zostało ostatnio uogólnione przez E. Fricaina, A Hartmanna i W. T. Rossa ([16]).

Twierdzenie* 2.15. *Załóżmy, że* (b,a) *jest wymierną parą kanoniczną i niech* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *będą jednokrotnymi zerami funkcji* a *na okręgu* $\mathbb{T}$. *Wtedy*

$$\mathcal{H}(b)=\mathcal{M}(a)\oplus_{\mathcal{H}(b)}\operatorname{span}\{k^b_{\lambda_1},\dots,k^b_{\lambda_n}\}.$$

Dowód powyższego twierdzenia przeprowadzimy najpierw dla przypadku gdy (b,a) jest parą kanoniczną, dla której

$$\varphi(z)=\frac{b(z)}{a(z)}=\frac{1}{\prod_{j=1}^n(1-\overline{\lambda}_j z)}. \tag{2.4}$$

Wtedy, na mocy twierdzenia Fejéra-Riesza (twierdzenie 2.13) istnieje dokładnie jeden wielomian r stopnia n, nie zerujący się w $\overline{\mathbb{D}}$ taki, że $r(0)>0$ oraz

$$1+|\prod_{j=1}^n(1-\overline{\lambda}_j z)|^2=|r(z)|^2 \quad \text{na } \mathbb{T}.$$

Zatem funkcje pary kanonicznej (b,a), reprezentującej funkcję φ, dane są wzorami

$$a(z)=\frac{\prod_{j=1}^n(1-\overline{\lambda}_j z)}{r(z)},\quad b(z)=\frac{1}{r(z)}.$$

Wykażemy najpierw następujące twierdzenie.

Twierdzenie* 2.16. *Niech* (b,a) *będzie wymierną parą kanoniczną, dla której* $b/a=\varphi$, *gdzie* φ *jest jak w równości* (2.4). *Jeśli* $f\in\mathcal{H}(b)$, *to*

$$T_{\overline{\varphi}}f(z)=f(z)+\sum_{j=1}^n\overline{a}_j\lambda_j\frac{f(\lambda_j)-f(z)}{\lambda_j-z}, \tag{2.5}$$

gdzie $a_j=\left(\prod_{l=1,l\neq j}^n(1-\overline{\lambda}_l\lambda_j)\right)^{-1}$, *a* $f(\lambda_j)$ *oznacza granicę niestyczną funkcji* f *w punkcie* λ_j. *W szczególności, suma po prawej stronie równości* (2.5) *jest funkcją z* H^2.

Dowód. Wykażemy najpierw wzór (2.5) dla funkcji f, analitycznej w domknięciu koła jednostkowego $\mathbb{D}$. Wiadomo, że przestrzeń wszystkich funkcji f analitycznych w domknięciu koła $\mathbb{D}$ zawiera się w przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ ([34], IV-6), czyli w dziedzinie operatora $T_{\overline{\varphi}}$. Ponadto, dla takich f, na mocy lematu 6.1 z [35], mamy

$$T_{\overline{\varphi}}f(z)=\sum_{m=0}^\infty\sum_{l=0}^\infty\overline{\widehat{\varphi}(l)}\hat{f}(l+m)z^m, \tag{2.6}$$

gdzie $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}(k) z^k$ i $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k$. Ponieważ

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{1 - \overline{\lambda}_j z},$$

gdzie a_j są takie jak powyżej, więc

$$T_{\overline{\varphi}} f(z) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j T_{\overline{k}_{\lambda_j}} f(z),$$

gdzie $k_{\lambda_j}(z) = (1 - \overline{\lambda}_j z)^{-1}$. Co więcej, $k_{\lambda_j}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\lambda}_j^l z^l$, zatem ze wzoru (2.6),

$$T_{\overline{k}_{\lambda_j}} f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \lambda_j^l \hat{f}(l+m) \right) z^m = \sum_{m=0}^{\infty} r_m z^m,$$

gdzie $r_m = \hat{f}(m) + \lambda_j \hat{f}(m+1) + \lambda_j^2 \hat{f}(m+2) + \ldots$. Stąd,

$$\begin{aligned}
(\lambda_j - z) T_{\overline{k}_{\lambda_j}} f(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_j r_m z^m - \sum_{m=0}^{\infty} r_m z^{m+1} \\
&= \lambda_j f(\lambda_j) + \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_j r_m - r_{m-1}) z^m \\
&= \lambda_j f(\lambda_j) - \sum_{m=1}^{\infty} \hat{f}(m-1) z^m \\
&= \lambda_j f(\lambda_j) - z \sum_{m=0}^{\infty} \hat{f}(m) z^m \\
&= \lambda_j (f(\lambda_j) - f(z)) + (\lambda_j - z) f(z).
\end{aligned}$$

Zatem

$$T_{\overline{k}_{\lambda_j}} f(z) = f(z) + \lambda_j \frac{f(\lambda_j) - f(z)}{\lambda_j - z}$$

i równość (2.5) wynika z faktu, że $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$.

Niech teraz f będzie dowolną funkcją z przestrzeni $\mathcal{H}(b)$. Wtedy, na mocy twierdzenia 2.12, $T_{\overline{\varphi}} f \in H^2$. Ponieważ wielomiany są gęste w przestrzeni $\mathcal{H}(b)$ (zobacz [34], IV-3), więc istnieje ciąg wielomianów $\{p_m\}$ taki, że $p_m \to f$ w $\mathcal{H}(b)$. Wtedy też $p_m \to f$ oraz $T_{\overline{\varphi}} p_m \to T_{\overline{\varphi}} f$ w H^2. W szczególności, dla każdego $z \in \mathbb{D}$, $p_m(z) \to f(z)$ oraz $T_{\overline{\varphi}} p_m(z) \to T_{\overline{\varphi}} f(z)$. Ponadto, ponieważ funkcjonały $f \mapsto f(\lambda_j)$ są ograniczone na $\mathcal{H}(b)$ ([34], str. 48-49), widzimy, że również $p_m(\lambda_j) \to f(\lambda_j)$ dla każdego $1 \leq j \leq n$. Stąd i z udowodnionej już części twierdzenia wynika, że dla każdego

$z \in \mathbb{D}$ mamy

$$\begin{aligned} T_{\overline{\varphi}} f(z) &= \lim_{m\to\infty} T_{\overline{\varphi}} p_m(z) \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(p_m(z) + \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \lambda_j \frac{p_m(\lambda_j) - p_m(z)}{\lambda_j - z} \right) \\ &= f(z) + \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \lambda_j \frac{f(\lambda_j) - f(z)}{\lambda_j - z}. \end{aligned}$$

□

W dowodzie twierdzenia 2.15 wykorzystamy również następujące twierdzenie z pracy [1].

Twierdzenie 2.17 ([1], [11])**.** *Niech (b_1, a_1) i (b_2, a_2) będą parami kanonicznymi. Wówczas $\mathcal{H}(b_1) \subset \mathcal{H}(b_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:*

(i) istnieją funkcje $g, h \in H^\infty$ takie, że $b_2 = gb_1 + ha_2$,

(ii) istnieje stała $\gamma > 0$ taka, że $|a_1| \le \gamma |a_2|$ p.w. na $\mathbb{T}$.

Dowód twierdzenia 2.15. Wykażemy najpierw twierdzenie w przypadku, gdy funkcja $\varphi = b/a$ jest dana wzorem (2.4). Niech $V = \operatorname{span}\{k^b_{\lambda_1}, \ldots, k^b_{\lambda_n}\} \subset \mathcal{H}(b)$. Ponieważ $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{H}(b)$ (lemat 2.3), więc wystarczy wykazać, że $\mathcal{M}(a) = V^\perp$ w $\mathcal{H}(b)$.

Zauważmy najpierw, że jeśli $f \in \mathcal{M}(a)$, to $f(\lambda_j) = \langle f, k^b_{\lambda_j} \rangle_b = 0$ dla każdego $1 \le j \le n$. Zatem $\mathcal{M}(a) \subset V^\perp$. Z drugiej strony, jeśli $f \in V^\perp$, to $f(\lambda_j) = 0$ dla wszystkich $1 \le j \le n$. Stąd, na mocy twierdzenia 2.16,

$$\begin{aligned} T_{\overline{\varphi}} f(z) &= \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \left(1 - \frac{1}{1 - \overline{\lambda}_j z} \right) f(z) \\ &= - \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \frac{\overline{\lambda}_j z}{1 - \overline{\lambda}_j z} \right) f(z) = g(z) \in H^2. \end{aligned}$$

Ponadto, dla $|z| = 1$ mamy

$$\overline{a}_1 \frac{\overline{\lambda}_1 z}{1 - \overline{\lambda}_1 z} + \ldots + \overline{a}_n \frac{\overline{\lambda}_n z}{1 - \overline{\lambda}_n z} = \frac{-z^n}{\prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j)}.$$

Z dwóch ostatnich równości wynika więc, że

$$z^n f(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j) g(z),$$

co oznacza, że $f \in \mathcal{M}(a)$.

Załóżmy teraz, że (b,a) jest dowolną wymierną parą kanoniczną taką, że $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są jednokrotnymi zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$. Ponadto, niech (b_0, a_0) będzie wymierną parą kanoniczną, dla której $b_0/a_0 = \varphi$ i funkcja φ dana jest wzorem (2.4).

Ponieważ a i a_0 są funkcjami analitycznymi w domknięciu koła $\mathbb{D}$, mającymi te same zera na okręgu $\mathbb{T}$ i nie mającymi zer w $\mathbb{D}$, więc również funkcje a/a_0 i a_0/a są analityczne w domknięciu koła $\mathbb{D}$. Wynika stąd równość zbiorów

$$\mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(a_0).$$

Ponadto, funkcje b i a_0 nie mają wspólnych zer w $\overline{\mathbb{D}}$, zatem dla pewnego $\delta > 0$ spełniony jest warunek

$$|a_0(z)| + |b(z)| \geq \delta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Z twierdzenia o koronie ([14], Tw. 12.1) wynika, że istnieją funkcje $g, h \in H^\infty$ takie, że

$$1 = bg + a_0 h.$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez b_0 dostajemy

$$b_0 = b(b_0 g) + a_0(b_0 h).$$

Ponieważ $b_0 g, b_0 h \in H^\infty$, więc z twierdzenia 2.17 wynika, że

$$\mathcal{H}(b) \subset \mathcal{H}(b_0).$$

Analogicznie można wykazać, że

$$\mathcal{H}(b_0) \subset \mathcal{H}(b).$$

Niech teraz $V = \operatorname{span}\{k^b_{\lambda_1}, \dots, k^b_{\lambda_n}\} \subset \mathcal{H}(b)$. Podobnie jak w pierwszej części dowodu łatwo zobaczyć, że $\mathcal{M}(a) \subset V^\perp$. Z drugiej strony, jeśli $f \in \mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(b_0)$ i $f \in V^\perp$, to $f(\lambda_j) = 0$ dla wszystkich $1 \leq j \leq n$. Korzystając z wykazanego w pierwszej części dowodu rozkładu przestrzeni $\mathcal{H}(b_0)$ otrzymujemy, że $f \in \mathcal{M}(a_0) = \mathcal{M}(a)$. $\square$

Rozdział ten zakończymy kilkoma wnioskami z twierdzenia 2.14.

Twierdzenie* 2.18. *Niech (b,a) będzie wymierną parą kanoniczną oraz niech $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$, wypisanymi z uwzględnieniem ich krotności. Niech ponadto (b_1, a_1) będzie taką wymierną parą kanoniczną, że $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są zerami funkcji a_1 na okręgu $\mathbb{T}$, wypisanymi z uwzględnieniem ich krotności. Wtedy, jeśli $f \in \mathcal{H}(b)$, to*

$$F(z) = \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z} \in \mathcal{H}(b_1).$$

Ponadto, jeśli dla funkcji $f \in H^2$ granica niestyczna $f(\lambda)$ istnieje oraz $F \in \mathcal{H}(b_1)$, to $f \in \mathcal{H}(b)$.

Dowód. Załóżmy, że $f \in \mathcal{H}(b)$. Na podstawie twierdzenia 2.14,

$$f(z) = p(z) + (z - \lambda) \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j) g,$$

gdzie p jest wielomianem stopnia n oraz $g \in H^2$. Zatem

$$F(z) = \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z} = \frac{p(\lambda) - p(z)}{\lambda - z} + \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j) g(z) = p_1(z) + \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j) g(z),$$

gdzie p_1 jest wielomianem stopnia $n-1$, i z twierdzenia 2.14 wynika, że $F \in \mathcal{H}(b_1)$. Reszta dowodu przebiega analogicznie. $\square$

Z twierdzenia 2.14 wynika natychmiast, że jeśli $f \in \mathcal{H}(b)$ i λ jest zerem funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$, to granica niestyczna $f(\lambda)$ istnieje. Istotnie, jeśli $f \in \mathcal{H}(b)$, to na mocy równości (2.3),

$$f(z) = p(z) + (z - \lambda) G(z),$$

gdzie $G \in H^2$, a p jest wielomianem. Ponieważ $|G(z)| \leq C(1 - |z|)^{-1/2}$, więc $f(\lambda) = p(\lambda)$.

W przypadku, gdy λ jest zerem rzędu $k \geq 2$, istnieją granice niestyczne pochodnych wyższego rzędu. Mówi o tym dokładniej następujący

Wniosek* 2.19. *Niech (b,a) będzie wymierną parą kanoniczną i niech λ będzie zerem rzędu $k \geq 2$ funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$. Jeśli $f \in \mathcal{H}(b)$, to istnieje funkcja $h \in H^2$ taka, że*

$$f(z) = f(\lambda) + f'(\lambda)(z - \lambda) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(z - \lambda)^{k-1} + (z - \lambda)^k h(z),$$

gdzie $f(\lambda), \ldots, f^{(k-1)}(\lambda)$ oznaczają odpowiednie granice niestyczne w punkcie λ.

Dowód. Niech $f \in \mathcal{H}(b)$. Z twierdzenia 2.14,

$$f(z) = p_{n+k-1}(z) + (z-\lambda)^k \prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)g(z),$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są pozostałymi zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$ oraz $g \in H^2$. Ponieważ

$$f^{(j)}(\lambda) = p^{(j)}_{n+k-1}(\lambda), \quad j = 0, 1 \ldots, k-1,$$

więc

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(z-\lambda)^j + (z-\lambda)^k \left(p_{n-1}(z) + \prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)g(z) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(z-\lambda)^j + (z-\lambda)^k h(z). \end{aligned}$$

Zauważmy jeszcze, że funkcja h jest elementem przestrzeni $\mathcal{H}(\widetilde{b})$, gdzie funkcja $\widetilde{b}$ tworzy parę kanoniczną z taką funkcją $\widetilde{a}$, której zerami na okręgu $\mathbb{T}$ są $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. □

2.5 Przestrzenie $\mathcal{H}(b)$ jako uogólnione przestrzenie Dirichleta

Rozdział ten rozpoczniemy od zdefiniowania uogólnionych przestrzeni Dirichleta.

Dla $\lambda \in \mathbb{T}$ i funkcji $f \in H^2$ *lokalną całkę Dirichleta* z funkcji f w punkcie λ definiujemy wzorem

$$D_\lambda(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(\lambda) - f(e^{it})}{\lambda - e^{it}} \right|^2 dt.$$

gdzie $f(\lambda)$ oznacza granicę niestyczną funkcji f w punkcie λ. Jeśli $f(\lambda)$ nie istnieje, to przyjmujemy $D_\lambda(f) = \infty$.

Niech μ będzie skończoną, dodatnią miarą borelowską μ na okręgu $\mathbb{T}$. *Uogólnioną przestrzeń Dirichleta* $\mathcal{D}(\mu)$ definiujemy jako przestrzeń funkcji $f \in H^2$, dla których

$$D_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}} D_\lambda(f) d\mu(\lambda) < \infty.$$

Przestrzeń $\mathcal{D}(\mu)$ jest przestrzenią Hilberta z normą określoną wzorem

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}(\mu)} = \|f\|_2^2 + D_\mu(f).$$

W pracy [26] zostało wykazane, że całka $D_\mu(f)$ może być również wyrażona za pomocą następującego wzoru

$$D_\mu(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 P\mu(z) dA(z),$$

gdzie dA oznacza unormowaną, dwuwymiarową miarę Lebesgue's na kole $\mathbb{D}$, a $P\mu$ jest całką Poissona miary μ, tzn.

$$P\mu(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} d\,\mu(e^{it}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Wynika stąd, że jeśli μ jest znormalizowaną miarą długości na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$, to $\mathcal{D}(\mu)$ jest klasyczną przestrzenią Dirichleta $\mathcal{D}$, której elementami są te funkcje f, analityczne w kole jednostkowym $\mathbb{D}$, dla których

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) < \infty.$$

W przypadku, gdy $\mu = \delta_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{T}$, czyli μ jest miarą jednostkową skupioną w punkcie λ, to $D_\mu(f) = D_\lambda(f)$ i przestrzeń $\mathcal{D}(\delta_\lambda)$ nazywamy *lokalną przestrzenią Dirichleta w punkcie* λ. Przestrzeń ta była wprowadzona i badana przez S. Richtera i C. Sundberga w pracach [25] i [26].

Bardziej ogólny przypadek, gdy $\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{\lambda_j}$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są różnymi punktami z okręgu $\mathbb{T}$ oraz $\mu_1, \ldots, \mu_n$ są liczbami dodatnimi, był badany przez Sarasona w pracy [31]. W tym przypadku

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}(\mu)} = \|f\|_2^2 + \sum_{j=1}^n \mu_j \left\| \frac{f(\lambda_j)-f(z)}{\lambda_j - z} \right\|_2^2 .$$

Ponadto, w [31] Sarason wykazał, że dla takich μ,

$$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{M}(\widetilde{a}) \oplus_{\mathcal{D}(\mu)} K_{\tilde{B}}, \tag{2.7}$$

gdzie

$$\widetilde{a}(z) = \prod_{j=1}^n (1 - \overline{\lambda}_j z),$$

natomiast $K_{\tilde{B}} = H^2 \ominus \tilde{B} H^2$ jest przestrzenią modelową odpowiadającą skończonemu iloczynowi Blaschkego $\tilde{B}$, którego zera $w_1, \ldots, w_n$ są jednocześnie zerami funkcji

$$K_\mu(z) = 1 - \sum_{j=1}^n \mu_j \frac{\overline{\lambda}_j z}{(1-\overline{\lambda}_j z)^2}. \tag{2.8}$$

Zwróćmy uwagę, że funkcja K_μ przyjmuje wartości dodatnie na okręgu $\mathbb{T}$ z wyjątkiem punktów λ_j i jeśli punkt w jest zerem funkcji K_μ, to również $1/\overline{w}$ jest zerem tej funkcji.

Związek lokalnych przestrzeni Dirichleta z przestrzeniami de Branges'a-Rovnyaka został zauważony już przez Richtera i Sundberga [26] w roku 1991. Sześć lat później D. Sarason [32] wykazał, że jeśli $\lambda \in \mathbb{T}$ oraz

$$b_\lambda(z) = \frac{(1-\alpha)\overline{\lambda}z}{1-\alpha\overline{\lambda}z}, \quad \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

to przestrzenie $\mathcal{D}(\delta_\lambda)$ i $\mathcal{H}(b_\lambda)$ są równe jako przestrzenie Hilberta. W 2010 N. Chevrot, D. Guillot i T. Ransford [7] wyznaczyli wszystkie funkcje b i miary μ dla których $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{H}(b)$ z równością norm.

Zauważmy, że jeśli dla pewnej miary μ i funkcji b zachodzi równość zbiorów $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{H}(b)$, to normy $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(\mu)}$ i $\|\cdot\|_b$ są równoważne. Rzeczywiście, ponieważ $\mathcal{D}(\mu)$ i $\mathcal{H}(b)$ są kontrakcyjnie zawarte w H^2, więc wspomniana równoważność norm wynika z twierdzenia o domkniętym wykresie.

W opublikowanej w roku 2013 pracy [11] C. Costara i T. Ransford podali przytoczony poniżej warunek konieczny i dostateczny na to, by $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{H}(b)$ bez założenia równości norm, w przypadku gdy b jest nieekstremalną funkcją wymierną. Przypomnijmy, że wtedy, tak jak zostało zauważone w podrozdziale 2.4, odpowiadająca funkcji b funkcja zewnętrzna a (taka, że (b, a) tworzą parę kanoniczną) jest też funkcją wymierną.

Twierdzenie 2.20 ([11], Thm. 4.1)**.** *Niech (b, a) będzie wymierną parą kanoniczną oraz niech μ będzie skończoną miarą dodatnią na okręgu $\mathbb{T}$. Wówczas $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{H}(b)$ (bez założenia równości norm) wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i) funkcja a ma tylko pojedyncze zera na okręgu $\mathbb{T}$, oraz

(ii) miara μ skupiona jest dokładnie w tych zerach.

Podamy teraz inny dowód dostateczności warunków (i), (ii), oparty na udowodnionych w poprzednim podrozdziale twierdzeniach 2.15 i 2.16. W tym celu załóżmy, że (b, a) jest wymierną parą kanoniczną, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są jednokrotnymi zerami funkcji a na okręgu $\mathbb{T}$ oraz, że nośnik miary μ jest zbiorem $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Z dowodu twierdzenia 2.15 wynika, iż możemy przyjąć, że

$$\varphi(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1-\overline{\lambda}_j z)}. \tag{2.9}$$

Inkluzja $\mathcal{D}(\mu) \subset \mathcal{H}(b)$ jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 2.16. Pozostaje więc wykazać zawieranie $\mathcal{H}(b) \subset \mathcal{D}(\mu)$. Na podstawie twierdzenia 2.15,

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}(a) \oplus_{\mathcal{H}(b)} \operatorname{span}\{k^b_{\lambda_1}, \ldots, k^b_{\lambda_n}\}.$$

Łatwo zauważyć, że $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{D}(\mu)$. Pokażemy teraz, że każda z funkcji $k^b_{\lambda_j}$,

$$k^b_{\lambda_j}(z) = \frac{1 - \overline{b(\lambda_j)}b(z)}{1 - \overline{\lambda}_j z},$$

jest analityczna w domknięciu koła jednostkowego $\mathbb{D}$, co z kolei implikuje, że należy ona do przestrzeni $\mathcal{D}(\mu)$. Przypomnijmy, że funkcja b jest analityczna w domknięciu koła jednostkowego oraz, że $|b(\lambda_j)| = 1$. Zatem, stosując regułę de l'Hospitala, dostajemy

$$\lim_{z\to\lambda_j} k^b_{\lambda_j}(z) = \overline{\lambda}_j\overline{b(\lambda_j)}b'(\lambda_j),$$

co oznacza, że funkcja $k^b_{\lambda_j}$ może być przedłużona w sposób analityczny na otoczenie punktu λ_j.

Zauważmy dodatkowo, że z powyższej równości wynika też

$$\|k^b_{\lambda_j}\|^2_b = k^b_{\lambda_j}(\lambda_j) = |b'(\lambda_j)|.$$

Z twierdzenia 2.16 otrzymujemy następujący

Wniosek* 2.21. *Niech* $\mu = \sum_{j=1}^n |a_j|^2\delta_{\lambda_j}$, *gdzie* $a_j = \left(\prod_{l=1,l\neq j}^n (1 - \overline{\lambda}_l\lambda_j)\right)^{-1}$ *oraz niech funkcja* $\varphi = b/a$ *będzie dana wzorem* (2.9). *Wtedy*

$$\|f\|_b \leq \sqrt{n+2}\|f\|_{\mathcal{D}(\mu)}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\|f\|^2_b = \|f\|^2_2 + \|T_{\overline{\varphi}}f\|^2_2 &\leq \|f\|^2_2 + \left(\|f\|_2 + \sum_{j=1}^n |a_j| \left\|\frac{f(\lambda_j) - f(z)}{\lambda_j - z}\right\|_2\right)^2 \\ &\leq \|f\|^2_2 + (n+1)\left(\|f\|^2_2 + \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \left\|\frac{f(\lambda_j) - f(z)}{\lambda_j - z}\right\|^2_2\right) \leq (n+2)\|f\|^2_{\mathcal{D}(\mu)}.\end{aligned}$$

□

Na koniec tego podrozdziału wykażemy rozkład przestrzeni $\mathcal{H}(b)$, analogiczny do rozkładu (2.7) przestrzeni $\mathcal{D}(\mu)$, w przypadku, gdy (b, a) jest wymierną parą kanoniczną, dla której funkcja $\varphi = b/a$ dana jest wzorem (2.9). Z wcześniejszych rozważań wiemy, że

$$a(z) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-\overline{\lambda}_j z)}{r(z)}, \quad b(z) = \frac{1}{r(z)},$$

gdzie r jest wielomianem stopnia n, nie zerującym się w $\overline{\mathbb{D}}$ oraz takim, że $r(0) > 0$.

Niech $w_1^{'}, \dots, w_n^{'} \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$ będą zerami wielomianu $r(z)$.

Twierdzenie* 2.22. *Niech (b, a) będzie wymierną parą kanoniczną taką jak powyżej. Wtedy*

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}(a) \oplus_{\mathcal{H}(b)} K_B,$$

gdzie K_B jest przestrzenią modelową wyznaczoną przez skończony iloczyn Blaschkego, którego zerami są punkty $w_k = 1/\overline{w_k^{'}}$, $k = 1, \dots, n$.

Dowód. Wobec twierdzenia 2.15 wystarczy wykazać równość

$$\operatorname{span}\{k_{\lambda_1}^b, \dots, k_{\lambda_n}^b\} = K_B.$$

W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned} k_{\lambda_j}^b(z) &= \frac{1-\overline{b(\lambda_j)}b(z)}{1-\overline{\lambda_j}z} = \frac{1-\frac{b(z)}{b(\lambda_j)}}{1-\overline{\lambda_j}z} \\ &= \frac{1-\frac{r(\lambda_j)}{r(z)}}{1-\overline{\lambda_j}z} = \frac{r(z)-r(\lambda_j)}{(1-\overline{\lambda_j}z)r(z)} = \frac{r(z)-r(\lambda_j)}{\overline{\lambda_j}(\lambda_j - z)r(z)} = \frac{P(z)}{r(z)}, \end{aligned}$$

gdzie $P(z)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$. Ponieważ istnieją stałe c i c' takie, że

$$r(z) = c\prod_{k=1}^{n}(z - w_k^{'}) = c'\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{w}_k z),$$

więc

$$k_{\lambda_j}^b(z) = \frac{P(z)}{c'\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{w}_k z)} \in K_B.$$

Zatem

$$\operatorname{span}\{k_{\lambda_1}^b, \dots, k_{\lambda_n}^b\} \subset \operatorname{span}\{k_{w_1}, \dots, k_{w_n}\} \subset K_B.$$

Z drugiej strony, z lematu o wymiarze przestrzeni modelowej ([22], str. 33) wynika, że wymiar przestrzeni K_B wynosi n, a więc jest równy wymiarowi $\operatorname{span}\{k_{\lambda_1}^b, \dots, k_{\lambda_n}^b\}$. W konsekwencji, otrzymujemy równość

$$K_B = \operatorname{span}\{k_{\lambda_1}^b, \dots, k_{\lambda_n}^b\}.$$

□

2.5.1 Przypadek szczególny: $\varphi(z) = \frac{1}{1-z^n}$

Załóżmy teraz, że φ jest postaci

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z^n}.$$

Znajdziemy najpierw reprezentację kanoniczną $\varphi = b/a$ dla tej funkcji. Z podrozdziału 2.3 wiadomo, że istnieje wielomian r stopnia n, niezerujący się w domknięciu koła $\mathbb{D}$ taki, że $r(0) > 0$ oraz $|r(e^{it})|^2 = 1 + |1 - e^{int}|^2$. Ponadto,

$$a(z) = \frac{1-z^n}{r(z)} \quad \text{oraz} \quad b(z) = \frac{1}{r(z)}.$$

W celu wyznaczenia wielomianu r zastosujemy konstrukcję wykorzystaną w dowodzie twierdzenia Fejéra-Riesza. Niech

$$R(e^{it}) = |r(e^{it})|^2 = 1 + |1 - e^{int}|^2 = 3 - e^{-int} - e^{int}$$

i rozpatrzmy wielomian

$$\begin{aligned} W(z) &= z^n R(z) = z^n(3 - z^{-n} - z^n) = -z^{2n} + 3z^n - 1 \\ &= -(z^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(z^n - \frac{3+\sqrt{5}}{2}) = -(z^n - \alpha)(z^n - \frac{1}{\alpha}), \end{aligned}$$

gdzie $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Niech $e_k = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$, $k = 1, \ldots, n$, oznaczają różne pierwiastki n-tego stopnia z 1. Oczywiście $W(z)$ ma n różnych zer $w_1, \ldots, w_n$ w kole $\mathbb{D}$,

$$w_k = \sqrt[n]{\alpha} e_k,$$

oraz n różnych zer $w_1^{'}, \ldots, w_n^{'}$ w $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,

$$w_k^{'} = \frac{1}{\overline{w_k}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} e_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Zatem

$$W(z) = -\prod_{k=1}^{n} (z - w_k^{'})(z - w_k) = \alpha z^n \prod_{k=1}^{n} (z - w_k^{'})(\frac{1}{z} - \overline{w_k^{'}}).$$

Zgodnie z konstrukcją wielomianu r, podaną w dowodzie twierdzenia Fejéra-Riesza, przyjmujemy

$$r(z) = -\sqrt{\alpha} \prod_{k=1}^{n} (z - w_k^{'}) = -\sqrt{\alpha}(z^n - \frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1 - \alpha z^n).$$

W konsekwencji, funkcje

$$a(z) = \frac{\sqrt{\alpha}(1-z^n)}{1-\alpha z^n} = \frac{(1-\alpha)(1-z^n)}{1-\alpha z^n}$$

oraz

$$b(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^n}$$

tworzą kanoniczną reprezentację funkcji φ.

Przypomnijmy, że dla takiego b, z twierdzenia 2.22 mamy

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}(a) \oplus_{\mathcal{H}(b)} K_B, \tag{2.10}$$

gdzie K_B jest przestrzenią modelową odpowiadającą skończonemu iloczynowi Blaschkego B, którego zerami są punkty $w_k = \sqrt[n]{\alpha} e_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Z drugiej strony, na podstawie wyniku D. Sarasona [31] wiemy, że jeśli $\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{e_j}$, to

$$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{M}(a) \oplus_{\mathcal{D}(\mu)} K_{\tilde{B}}, \tag{2.11}$$

gdzie $K_{\tilde{B}}$ jest przestrzenią modelową odpowiadającą skończonemu iloczynowi Blaschkego $\tilde{B}$, którego zerami są punkty $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n$, będące równocześnie zerami funkcji K_μ danej wzorem

$$K_\mu(z) = 1 - \sum_{j=1}^n \mu_j \frac{\overline{e}_j z}{(1-\overline{e}_j z)^2}.$$

Okazuje się, że w tym przypadku współczynniki μ_j można dobrać tak, by $B = \tilde{B}$. Wykażemy następujący

Lemat* 2.23. *Jeśli* $\mu = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \delta_{e_j}$ *oraz* B *i* $\tilde{B}$ *są iloczynami Blaschkego występującymi w rozkładach* (2.10) *i* (2.11), *to* $B = \tilde{B}$.

W dowodzie lematu 2.23 wykorzystamy następujące twierdzenie z pracy [36].

Twierdzenie. *Dla dowolnie ustalonego ciągu niezerowych (niekoniecznie różnych) punktów* $w_1, \ldots, w_n$ *z koła jednostkowego* $\mathbb{D}$ *istnieje dokładnie jedna miara* μ *postaci* $\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{\lambda_j}$ *taka, że* $w_1, \ldots, w_n, 1/\overline{w}_1, \ldots, 1/\overline{w}_n$ *są zerami funkcji* $K_\mu(z)$ *danej wzorem* (2.8).

Dowód lematu 2.23. Z dowodu przytoczonego powyżej twierdzenia wynika, że jeśli znajdziemy punkty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ z okręgu $\mathbb{T}$ takie, że

$$\frac{\prod_{l=1}^n \lambda_l}{\prod_{j=1}^n w_j} > 0 \tag{2.12}$$

oraz

$$\sum_{m\neq l}\frac{\overline{\lambda}_l\lambda_m-\lambda_l\overline{\lambda}_m}{|\lambda_l-\lambda_m|^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{\lambda}_l w_j-\lambda_l\overline{w}_j}{|\lambda_l-w_j|^2}\quad (l=1,\ldots,n), \tag{2.13}$$

to współczynniki $\mu_1,\ldots,\mu_n$ będą jednoznacznie wyznaczone za pomocą wzorów

$$\mu_l=\frac{\prod_{j=1}^n|\lambda_l-w_j|^2}{\prod_{j=1}^n|w_j|\prod_{m\neq l}|\lambda_l-\lambda_m|^2}. \tag{2.14}$$

Pokażemy najpierw, że jeśli $w_k=\sqrt[n]{\alpha}e_k$ oraz $\lambda_k=e_k$, $k=1,\ldots,n$, to warunki (2.12) i (2.13) są spełnione. Oczywiście, spełniony jest warunek (2.12), gdyż

$$\prod_{l=1}^n e_l=\frac{1}{\alpha}\prod_{j=1}^n\sqrt[n]{\alpha}e_j=\frac{1}{\alpha}\prod_{j=1}^n w_j.$$

Wystarczy pokazać, że warunek (2.13) zachodzi dla $e_l=e_1=1$. Istotnie, dla $l\neq 1$,

$$\sum_{m\neq l}\frac{\overline{e}_l e_m-e_l\overline{e}_m}{|e_l-e_m|^2}=\sum_{m\neq l}\frac{\overline{e}_l e_m-\overline{(\overline{e}_l e_m)}}{|1-\overline{e}_l e_m|^2}=\sum_{m\neq 1}\frac{e_m-\overline{e}_m}{|1-e_m|^2}.$$

Podobnie

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\frac{\overline{e}_l w_j-e_l\overline{w}_j}{|e_l-w_j|^2}&=\sum_{j=1}^n\frac{\overline{e}_l e_j\sqrt[n]{\alpha}-\overline{(\overline{e}_l e_j)}\sqrt[n]{\alpha}}{|1-\overline{e}_l e_j\sqrt[n]{\alpha}|^2}\\&=\sum_{j=1}^n\frac{e_j\sqrt[n]{\alpha}-\overline{e}_j\sqrt[n]{\alpha}}{|1-e_j\sqrt[n]{\alpha}|^2}=\sum_{j=1}^n\frac{w_j-\overline{w}_j}{|1-w_j|^2}.\end{aligned}$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$\sum_{m=2}^n\frac{e_m-\overline{e}_m}{|1-e_m|^2}=\sum_{j=2}^n\frac{w_j-\overline{w}_j}{|1-w_j|^2}. \tag{2.15}$$

W tym celu zauważmy, że jeśli e_m jest pierwiastkiem z jedynki, to również $\overline{e}_m$ jest pierwiastkiem z jedynki. Zatem

$$\sum_{m=2}^n\frac{e_m}{|1-e_m|^2}=\sum_{m=2}^n\frac{\overline{e}_m}{|1-\overline{e}_m|^2}.$$

Wynika stąd, że obie strony równania (2.15) są równe zeru. Rozumowanie podobne do tego przeprowadzonego powyżej pokazuje, że w tym przypadku, jeśli μ_l jest dane wzorem (2.14), to $\mu_1=\mu_l$ dla $l=2,\ldots,n$. Mamy

$$\mu_1=\frac{\prod_{j=1}^n|1-e_j\sqrt[n]{\alpha}|^2}{\alpha\prod_{m\neq 1}|1-e_m|^2}.$$

W celu obliczenia μ_1 zauważmy najpierw, że

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{m \neq 1} (z - e_m).$$

Przechodząc w powyższej równości do granicy przy z dążącym do 1 dostajemy

$$\prod_{m \neq 1} (1 - e_m) = n.$$

Podobnie

$$z^n - \alpha = \prod_{j=1}^{n} (z - e_j \sqrt[n]{\alpha}),$$

czyli

$$\prod_{j=1}^{n} (1 - e_j \sqrt[n]{\alpha}) = 1 - \alpha = \sqrt{\alpha}.$$

Stąd

$$\mu_1 = \mu_l = \frac{1}{n^2} \quad l = 2, \ldots, n.$$

Oznacza to, że jeśli $\mu = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \delta_{e_j}$, to $B = \tilde{B}$, co kończy dowód. $\square$

Rozdział 3

Obcięte operatory Toeplitza

3.1 Przestrzeń modelowa i jej bazy

Z rozważań w rozdziale 1 wiemy, że jeśli b jest funkcją wewnętrzną, to przestrzeń $\mathcal{H}(b)$ jest zwykłą podprzestrzenią przestrzeni Hardy'ego H^2, będącą dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni bH^2 (twierdzenie 1.30). Zwyczajowo dopełnienie to będziemy oznaczać symbolem K_b, a więc

$$K_b = \mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2.$$

Przestrzeń K_b nazywamy *przestrzenią modelową* wyznaczoną przez funkcję wewnętrzną b.

Ponieważ podprzestrzeń bH^2 jest niezmiennicza ze względu na operator przesunięcia S, więc K_b jest S^*-niezmienniczą podprzestrzenią przestrzeni H^2 (fakt ten wynika również z twierdzenia 1.33). Ponadto, każda nietrywialna, domknięta, S^*-niezmiennicza podprzestrzeń przestrzeni H^2 jest przestrzenią modelową wyznaczoną przez pewną funkcję wewnętrzną. Istotnie, wystarczy zauważyć, że jeśli M jest nietrywialną, domkniętą, S^*-niezmienniczą podprzestrzenią przestrzeni H^2, to jej dopełnienie ortogonalne $M^\perp$ jest podprzestrzenią S-niezmienniczą i na mocy twierdzenia Beurlinga (twierdzenie 1.17), $M^\perp = bH^2$ dla pewnej funkcji wewnętrznej b, a więc $M = (bH^2)^\perp = H^2 \ominus bH^2$.

Ponieważ operator T_b, gdzie symbol b jest funkcją wewnętrzną, jest częściową izometrią, więc na mocy twierdzenia 1.4 operator $T_b T_{\overline{b}}$ jest rzutem ortogonalnym przestrzeni H^2 na przestrzeń bH^2. Operator $I - T_b T_{\overline{b}}$ jest więc rzutem ortogonalnym H^2 na K_b.

Opiszemy teraz operator P_b, będący rzutem ortogonalnym przestrzeni L^2 na przestrzeń modelową K_b. Jak wiadomo z własności ogólnych przestrzeni de Branges'a-Rovnyaka (patrz (1.7)), funkcja

$$k_w^b(z) = \frac{1 - \overline{b(w)}b(z)}{1 - \overline{w}z}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

jest jądrem reprodukującym w przestrzeni K_b, tzn., dla dowolnej funkcji $f \in K_b$,

$$f(z) = \langle f, k_z^b \rangle_b = \langle f, k_z^b \rangle_2.$$

Jeśli więc $f \in L^2$, to

$$P_b f(z) = \langle P_b f, k_z^b \rangle_2 = \langle f, k_z^b \rangle_2.$$

Zatem rzut P_b jest operatorem całkowym danym wzorem

$$P_b f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - \overline{b(e^{it})}b(z)}{1 - e^{-it}z} dt, \tag{3.1}$$

([29], str. 492). Oczywiście, jeśli $f \in H^2$, to $P_b f = (I - T_b T_{\overline{b}})f$.

Zwróćmy uwagę, że dla dowolnego $w \in \mathbb{D}$ funkcja k_w^b jest funkcją ograniczoną zmiennej z (gdyż b jest funkcją ograniczoną). Ponieważ jądra reprodukujące $\{k_w^b \colon w \in \mathbb{D}\}$ są gęstym podzbiorem przestrzeni modelowej K_b, więc również $K_b \cap H^\infty$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni K_b.

Istotną rolę w rozważaniach dotyczących przestrzeni modelowych odgrywa tzw. *operator sprzężenia* $\mathcal{C} \colon K_b \to K_b$, zdefiniowany za pomocą funkcji brzegowych wzorem

$$\mathcal{C}f(z) = b(z)\overline{z}\overline{f(z)}, \quad |z| = 1.$$

Pokażemy, że operator $\mathcal{C}$ istotnie odwzorowuje przestrzeń K_b w siebie. Jeśli bowiem $f \in K_b$, to dla $n \geq 1$,

$$\langle \mathcal{C}f, e^{-int} \rangle_2 = \langle b e^{i(n-1)t}, f \rangle_2 = 0,$$

co oznacza, że współczynniki Fouriera funkcji $\mathcal{C}f$ z ujemnymi wskaźnikami zerują się, czyli jest ona funkcją analityczną. Ponadto, dla dowolnej funkcji $h \in H^2$,

$$\langle \mathcal{C}f, bh \rangle_2 = \langle 1, e^{it} h f \rangle_2 = 0,$$

zatem $\mathcal{C}f \in K_b$.

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{C}$ jest operatorem antyliniowym, tzn. dla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ oraz $f, g \in K_b$, $\mathcal{C}(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\mathcal{C}f + \overline{\beta}\mathcal{C}g$. Ponadto, dla $f \in K_b$ mamy

$$\mathcal{C}^2 f = f \quad \text{oraz} \quad \|\mathcal{C}f\|_2 = \|f\|_2.$$

W dalszym ciągu, dla uproszczenia, zamiast $\mathcal{C}f$ będziemy pisać $\widetilde{f}$.

W dalszej części naszej rozprawy kluczową rolę odegrają funkcje $\widetilde{k}_w^b$. Mamy

$$\begin{aligned}\widetilde{k}_w^b(z) &= \mathcal{C}k_w^b(z) = b(z)\overline{z}\overline{k_w^b(z)} \\ &= b(z)\overline{z}\frac{1-b(w)\overline{b(z)}}{1-w\overline{z}} = \frac{b(z)-b(w)}{z-w}, \quad z, w \in \mathbb{D}.\end{aligned}$$

Funkcję $\widetilde{k}_w^b$ nazywamy *jądrem sprzężonym.*

W rozdziale 1 (przykład 1.31) pokazaliśmy, że jeśli $b(z) = z^n$, to K_b jest zbiorem wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej $n-1$. Oczywiście wtedy jednomiany $\{1, z, \ldots, z^{n-1}\}$ stanowią bazę (ortonormalną) przestrzeni K_b oraz $\dim K_b = n$. Opiszemy teraz dokładnie strukturę przestrzeni K_b, gdy b jest (skończonym lub nieskończonym) iloczynem Blaschkego.

Niech więc B_n będzie skończonym iloczynem Blaschkego, którego zerami są różne liczby $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$, tzn.

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

Mamy

Lemat 3.1.

$$K_{B_n} = \operatorname{span}\{k_{a_j} \colon\ 1 \le j \le n\}.$$

Dowód. Ponieważ $k_{a_j} = k_{a_j}^{B_n} \in K_{B_n}$ dla dowolnego $1 \le j \le n$, więc

$$\operatorname{span}\{k_{a_j} \colon\ 1 \le j \le n\} \subset K_{B_n}.$$

Aby wykazać przedstawioną w lemacie równość wystarczy zauważyć, że jeśli $f \in (\operatorname{span}\{k_{a_j} \colon\ 1 \le j \le n\})^{\perp} \cap K_{B_n}$, to $f = 0$. Jeśli bowiem $f \in K_{B_n}$ oraz $f \in (\operatorname{span}\{k_{a_j} \colon\ 1 \le j \le n\})^{\perp}$, to

$$f(a_j) = 0 \quad \text{dla } j = 1, \ldots, n,$$

i z twierdzenia 1.12 wynika, że $f = B_n g$ dla pewnej funkcji $g \in H^2$. Oznacza to, że $f \in B_n H^2 \cap K_{B_n}$, czyli $f = 0$. Wykazaliśmy więc żądaną równość. $\square$

Pokażemy teraz, że $\{k_{a_j} \colon\ 1 \le j \le n\}$ jest układem wektorów liniowo niezależnych w H^2. Wiadomo, że dla dowolnego $1 \le j \le n$ można znaleźć funkcję $f_i \in H^2$ taką, że

$$f_i(a_j) = \langle f_i, k_{a_j}\rangle_2 = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i, \\ 0 & \text{dla } j \ne i. \end{cases}$$

Za f_i możemy przyjąć funkcję

$$f_i(z) = \frac{\prod_{j\neq i} \frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z}}{\prod_{j\neq i} \frac{a_j - a_i}{1-\overline{a}_j a_i}} = \frac{B_n(z)}{B_n'(a_i)(z-a_i)}$$

$$= \frac{B_n(z) - B_n(a_i)}{B_n'(a_i)(z-a_i)} = \frac{\widetilde{k}_{a_i}(z)}{B_n'(a_i)},$$

gdzie $\widetilde{k}_{a_j}(z) = \widetilde{k}_{a_j}^{B_n}(z) = B_n(z)/(z-a_j)$. W celu wykazania liniowej niezależności układu $\{k_{a_j}:\ 1 \leq j \leq n\}$ załóżmy, że $\sum_{j=1}^n c_j k_{a_j} = 0$. Wtedy

$$c_i = \sum_{j=1}^n c_j \overline{f_i(a_j)} = \langle \sum_{j=1}^n c_j k_{a_j}, f_i \rangle_2 = 0 \quad \text{dla wszystkich } 1 \leq i \leq n.$$

Liniowa niezależność wektorów $\{k_{a_1}, \ldots, k_{a_n}\}$ oznacza w szczególności, że wymiar przestrzeni K_{B_n} jest równy n, a układ $\{k_{a_j}:\ 1 \leq j \leq n\}$ jest bazą przestrzeni K_{B_n}.

Uwaga 3.2. Z lematu 3.1 i własności operatora $\mathcal{C}$ wynika natychmiast, że jeśli B_n jest skończonym iloczynem Blaschkego z różnymi zerami $a_1, \ldots, a_n$, to

$$K_{B_n} = \operatorname{span}\{\widetilde{k}_{a_j}:\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Wykażemy teraz, że każda funkcja $f \in K_{B_n}$ może być przedstawiona w postaci

$$f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\langle f, \widetilde{k}_{a_j}\rangle_2}{\overline{B_n'(a_j)}} k_{a_j}$$

oraz

$$f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\langle f, k_{a_j}\rangle_2}{B_n'(a_j)} \widetilde{k}_{a_j}.$$

W tym celu załóżmy, że $f(z) = \sum_{j=1}^n c_j k_{a_j}$. Wtedy, jeśli f_i jest funkcją zdefiniowaną powyżej, to dla dowolnego $1 \leq i \leq n$,

$$\langle f, f_i\rangle_2 = \langle \sum_{j=1}^n c_j k_{a_j}, f_i\rangle_2 = \sum_{j=1}^n c_j \langle k_{a_j}, f_i\rangle_2 = \sum_{j=1}^n c_j \overline{f_i(a_j)} = c_i,$$

co dowodzi, że

$$f(z) = \sum_{j=1}^n c_j k_{a_j} = \sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle_2 k_{a_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\langle f, \widetilde{k}_{a_j}\rangle_2}{\overline{B_n'(a_j)}} k_{a_j}.$$

Podobnie można wykazać drugi z zapowiedzianych wzorów.

Przedstawimy teraz uogólnienie lematu 3.1 i uwagi 3.2 na przypadek, gdy B jest nieskończonym iloczynem Blaschkego, którego zera $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ tworzą ciąg *jednostajnie odseparowany*, tzn.

$$B(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{a}_m}{|a_m|} \frac{a_m - z}{1 - \overline{a}_m z}$$

oraz

$$\inf_k \prod_{m \neq k} \left| \frac{a_m - a_k}{1 - \overline{a}_m a_k} \right| \geq \delta \tag{3.2}$$

dla pewnej stałej $\delta > 0$.

Ciągi jednostajnie odseparowane są historycznie związane z problemami dotyczącymi interpolacji w przestrzeni H^p. W dalszym ciągu omówimy problem interpolacyjny dla przestrzeni H^2.

Twierdzenie interpolacyjne (patrz [14], Thm. 9.1) mówi, że ciąg $\{a_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ jest ciągiem jednostajnie odseparowanym wtedy i tylko wtedy, gdy operator T, określony wzorem

$$Th = \left\{ h(a_m)\sqrt{1 - |a_m|^2} \right\}_{m=1}^{\infty},$$

odwzorowuje przestrzeń H^2 na przestrzeń l^2 ciągów sumowalnych z kwadratem. Oznacza to, że jeśli ciąg $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ jest jednostajnie odseparowany, to dla dowolnego ciągu $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ takiego, że $\sum_{m=1}^{\infty} |h_m|^2(1 - |a_m|^2) < \infty$, problem interpolacyjny

$$h(a_m) = h_m \tag{3.3}$$

ma rozwiązanie w H^2. Funkcja $h \in H^2$, będąca rozwiązaniem problemu (3.3), dana jest wzorem

$$h = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{B'(a_m)} \widetilde{k}_{a_m} + Bg,$$

gdzie $g \in H^2$. Ponadto, szereg

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{B'(a_m)} \widetilde{k}_{a_m} \tag{3.4}$$

jest zbieżny w normie i funkcja f jest jedynym rozwiązaniem problemu (3.3) należącym do przestrzeni K_B (zobacz np. [15], str. 157-158). Wynika stąd, że jeśli B jest iloczynem Blaschkego z jednostajnie odseparowanym ciągiem zer $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, to jądra sprzężone $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tworzą bazę przestrzeni K_B. Rzeczywiście, jeśli w powyższych rozważaniach przyjmiemy $h_m = f(a_m)$, to

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(a_m)}{B'(a_m)} \widetilde{k}_{a_m} + Bg,$$

gdzie $g \in H^2$. Jeśli ponadto założymy, że $f \in K_B$, to dostaniemy

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(a_m)}{B'(a_m)} \widetilde{k}_{a_m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle f, k_{a_m} \rangle_2}{B'(a_m)} \widetilde{k}_{a_m}. \tag{3.5}$$

Kładąc w powyższym wzorze $\widetilde{f} = \mathcal{C}f$ zamiast f i przekształcając otrzymaną równość za pomocą operatora $\mathcal{C}$ dostajemy

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\left(\frac{\widetilde{f}(a_m)}{B'(a_m)} \right)} k_{a_m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle f, \widetilde{k}_{a_m} \rangle_2}{\overline{B'(a_m)}} k_{a_m}. \tag{3.6}$$

A więc również jądra $\{k_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tworzą bazę przestrzeni K_B. Bazy jąder reprodukujących $\{k_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ oraz jąder sprzężonych $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ są przykładami tzw. baz Riesza. Definicje oraz własności tych baz można znaleźć np. w monografii [22] lub w pracy [17].

Oczywiście zaprezentowane powyżej bazy $\{k_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ i $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ nie są bazami ortogonalnymi.

Na koniec omówimy krótko konstrukcję pewnej bazy ortogonalnej w przestrzeni K_b. Konstrukcja ta związana jest ściśle z tzw. *obciętym operatorem przesunięcia* S_b określonym na przestrzeni K_b. Operator S_b definiujemy wzorem

$$S_b f = P_b(Sf) = P_b(zf), \quad f \in K_b, \tag{3.7}$$

gdzie P_b oznacza rzut ortogonalny przestrzeni L^2 na przestrzeń modelową K_b dany równością (3.1).

W pracy [10] D. N. Clark rozpatrywał operator unitarny U_α, $\alpha \in \mathbb{T}$, postaci

$$U_\alpha = S_b + \frac{b(0) + \alpha}{1 - |b(0)|^2} k_0^b \otimes \widetilde{k}_0^b,$$

gdzie symbol $f \otimes g$ oznacza operator jednowymiarowy $h \mapsto \langle h, g \rangle_2 f$. Clark wykazał, że $\lambda \in \mathbb{T}$ jest wartością własną operatora U_α wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja b ma pochodną niestyczną w sensie Caratheodory'ego w punkcie λ, przy czym granica niestyczna funkcji b w punkcie λ jest równa

$$b(\lambda) = \beta_\alpha = \frac{b(0) + \alpha}{1 + \overline{b(0)}\alpha}$$

(zobacz, [10], Thm. 3.2). Wtedy funkcja

$$k_\lambda^b(z) = \frac{1 - \overline{\beta}_\alpha b(z)}{1 - \overline{\lambda} z}$$

jest wektorem własnym operatora U_α odpowiadającym wartości własnej λ, czyli $U_\alpha k_\lambda^b = \lambda k_\lambda^b$. Przyjmijmy oznaczenie

$$v_\lambda = \frac{k_\lambda^b}{\|k_\lambda^b\|_2}.$$

Przypomnijmy, że $\|k_\lambda^b\|_2 = \sqrt{|b'(\lambda)|}$ (str. 57).

Ponieważ U_α jest operatorem unitarnym, więc zbiór unormowanych wektorów własnych, odpowiadających różnym wartościom własnym operatora U_α, jest zbiorem ortonormalnym. Rzeczywiście, jeśli λ_1 i λ_2 są różnymi wartościami własnymi operatora U_α, to

$$\begin{aligned}\langle v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}\rangle_2 &= \langle v_{\lambda_1}, U_\alpha^* U_\alpha v_{\lambda_2}\rangle_2 \\ &= \langle U_\alpha v_{\lambda_1}, U_\alpha v_{\lambda_2}\rangle_2 = \lambda_1 \overline{\lambda}_2 \langle v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}\rangle_2,\end{aligned}$$

co dla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jest możliwe tylko w przypadku, gdy

$$\langle v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}\rangle_2 = 0.$$

Wynika stąd, że zbiór ten jest również przeliczalny (gdyż przestrzeń K_b jest ośrodkowa).

Niech $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^\infty$ będzie ciągiem unormowanych wektorów własnych, odpowiadających różnym wartościom własnym operatora U_α. Jak udowodniono w pracy [34], przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących operatora U_α zbiór $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^\infty$ stanowi bazę ortonormalną przestrzeni K_b. Dzieje się tak, między innymi, w przypadku gdy b jest iloczynem Blaschkego, którego zera mają co najwyżej przeliczalną liczbę punktów skupienia na okręgu $\mathbb{T}$ ([10], str. 185). Bazę $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^\infty$ nazywamy *bazą Clarka.*

Zauważmy jeszcze, że jeśli przyjmiemy $e_{\lambda_m} = \omega_m v_{\lambda_m}$, gdzie

$$\omega_m = e^{-\frac{i}{2}(\arg\lambda_m - \arg\beta_\alpha)}, \tag{3.8}$$

to $\{e_{\lambda_m}\}_{m=1}^\infty$ jest również bazą ortonormalną przestrzeni modelowej K_b. Ponadto, dla $|z| = 1$ mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}e_{\lambda_m}(z) &= b(z)\overline{z}\overline{e_{\lambda_m}(z)} = \|k_{\lambda_m}^b\|_2^{-1} b(z)\overline{z}\overline{\omega}_m \frac{1-\beta_\alpha\overline{b(z)}}{1-\lambda_m\overline{z}} \\ &= \|k_{\lambda_m}^b\|_2^{-1}\overline{\omega}_m \frac{b(z)-\beta_\alpha}{z-\lambda_m} = \|k_{\lambda_m}^b\|_2^{-1} e^{\frac{i}{2}(\arg\lambda_m - \arg\beta_\alpha)}\beta_\alpha\overline{\lambda}_m \frac{1-\overline{\beta}_\alpha b(z)}{1-\overline{\lambda}_m z} \\ &= \|k_{\lambda_m}^b\|_2^{-1}\omega_m \frac{1-\overline{\beta}_\alpha b(z)}{1-\overline{\lambda}_m z} = e_{\lambda_m}(z).\end{aligned}$$

Tak skonstruowaną bazę $\{e_{\lambda_m}\}_{m=1}^\infty$ nazywamy *zmodyfikowaną bazą Clarka.*

3.2 Obcięte operatory Toeplitza

Dla $\varphi \in L^2$ *obcięty operator Toeplitza* A_φ na przestrzeni modelowej K_b definiujemy wzorem

$$A_\varphi f = P_b(\varphi f), \quad f \in K_b.$$

Funkcję φ nazywamy symbolem operatora A_φ. Oczywiście, jeśli $f \in H^\infty \cap K_b$, to $A_\varphi f \in K_b$. Ponieważ, jak zauważyliśmy w poprzednim podrozdziale, zbiór $H^\infty \cap K_b$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni K_b, więc A_φ jest gęsto określonym operatorem liniowym na K_b.

Zauważmy, że obcięty operator Toeplitza A_φ można traktować jako zawężenie do przestrzeni modelowej klasycznego operatora Toeplitza T_φ określonego na H^2 (definicja na str. 28). Przykładem takiego operatora jest obcięty operator przesunięcia S_b (dany równością (3.7)), będący zawężeniem operatora przesunięcia S do przestrzeni K_b.

Obcięte operatory Toeplitza były znane w literaturze już od dość dawna. Jednak szczegółowe badanie tych operatorów jako klasy zapoczątkował dopiero D. Sarason w swojej pracy [29] z roku 2007. Jak w [29], niech $\mathscr{T}(K_b)$ oznacza zbiór wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza na przestrzeni K_b, tzn.,

$$\mathscr{T}(K_b) = \{A_\varphi\colon\ \varphi \in L^2 \text{ i } A_\varphi \text{ jest ograniczony}\}.$$

Łatwo zobaczyć, że jeśli $A_\varphi \in \mathscr{T}(K_b)$, to również $A_\varphi^* \in \mathscr{T}(K_b)$. Rzeczywiście, wtedy dla dowolnych funkcji $f, g \in H^\infty \cap K_b$,

$$\langle A_\varphi f, g\rangle_2 = \langle P_b(\varphi f), g\rangle_2 = \langle \varphi f, g\rangle_2 = \langle f, \overline{\varphi} g\rangle_2 = \langle f, P_b(\overline{\varphi} g)\rangle_2 = \langle f, A_{\overline{\varphi}} g\rangle_2.$$

Z gęstości zbioru $H^\infty \cap K_b$ wynika więc, że $A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}$.

Mimo podobnych definicji, pod wieloma względami obcięte operatory Toeplitza różnią się znacząco od klasycznych operatorów Toeplitza. Wiemy na przykład, że klasyczny operator Toeplitza jest jednoznacznie wyznaczony przez swój symbol. W przypadku obciętych operatorów Toeplitza prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 3.3 ([29], Thm. 3.1)**.** *Jeśli $\varphi \in L^2$, to $A_\varphi = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in bH^2 + \overline{bH}^2$.*

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika natychmiast, że każdy obcięty operator Toeplitza A_φ można przedstawić w postaci $A_\varphi = A_{\psi + \overline{\chi}}$, gdzie $\psi, \chi \in K_b$.

Jeśli bowiem $\varphi \in L^2$, to możemy zapisać $\varphi = \varphi_1 + \overline{\varphi}_2$, gdzie $\varphi_1 = P\varphi \in H^2$ i $\varphi_2 = \overline{\varphi - P\varphi} \in H^2$. Kładąc $\psi = P_b\varphi_1$ oraz $\chi = P_b\varphi_2$ widzimy, że

$$\varphi - \psi - \overline{\chi} = (\varphi_1 - P_b\varphi_1) + \overline{(\varphi_2 - P_b\varphi_2)} \in bH^2 + \overline{bH}^2.$$

Zatem na mocy twierdzenia 3.3, $A_\varphi = A_{\psi+\overline{\chi}}$.

Jak wspomnieliśmy w rozdziale 1 (twierdzenie 1.18), ograniczoność symbolu φ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym ograniczoności operatora T_φ. Łatwo widać, że również w przypadku obciętych operatorów Topelitza, ograniczoność symbolu jest warunkiem dostatecznym ograniczoności operatora. Z twierdzenia 3.3 wynika jednak, że nieograniczona funkcja φ może generować operator A_φ, który jest ograniczony (a nawet zerowy). W [29] Sarason zapytał czy dla każdego operatora $A_\varphi \in \mathscr{T}(K_b)$ istnieje symbol ograniczony, tzn. funkcja $\varphi_0 \in L^\infty$ taka, że $A_\varphi = A_{\varphi_0}$. Odpowiedź na to pytanie w przypadku, gdy wymiar przestrzeni K_b jest skończony, jest oczywiście twierdząca. Wynika to z faktu, że wówczas b jest skończonym iloczynem Blaschkego ([22], str. 33) i w konsekwencji $K_b \subset H^\infty$. Okazuje się jednak, że w ogólnym przypadku można skonstruować taki operator z $\mathscr{T}(K_b)$, dla którego nie istnieje symbol ograniczony (zobacz np. [2]).

Wiadomo również, że jedynym zwartym operatorem Toeplitza jest operator zerowy ([6], str. 94). Sarason pokazał natomiast, że istnieją niezerowe, skończenie wymiarowe (a więc i zwarte) operatory należące do $\mathscr{T}(K_b)$. Przykładami jednowymiarowych obciętych operatorów Toeplitza są operatory $A_{b/(z-w)}$ i $A_{\overline{b/(z-w)}}$, gdzie w jest dowolnym ustalonym punktem z koła $\mathbb{D}$. W pracy [29] Sarason udowodnił bowiem, że

$$A_{\frac{b}{z-w}} = \widetilde{k}_w^b \otimes k_w^b \quad \text{oraz} \quad A_{\frac{\overline{b}}{\overline{z}-\overline{w}}} = k_w^b \otimes \widetilde{k}_w^b. \tag{3.9}$$

W rozdziale 1 pokazaliśmy, że operator T jest operatorem Toeplitza na przestrzeni H^2 wtedy i tylko wtedy, gdy $S^*TS - T = 0$ (twierdzenie 1.20). Okazuje się, że w podobny sposób, za pomocą operatora S_b, można scharakteryzować operatory należące do $\mathscr{T}(K_b)$. Mianowicie, D. Sarason [29] wykazał, że ograniczony operator A na przestrzeni K_b jest obciętym operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\psi, \chi \in K_b$ takie, że

$$A - S_bAS_b^* = \psi \otimes k_0^b + k_0^b \otimes \chi$$

([29], Thm. 4.1). Praca [29] zawiera również uogólnienie powyższej charakteryzacji, w którym operator S_b został zastąpiony tak zwanym *zmodyfikowanym obciętym* *operatorem przesunięcia* $S_{b,c}$. Dla dowolnej liczby $c \in \mathbb{C}$ operator $S_{b,c}$ definiujemy wzorem

$$S_{b,c} = S_b + c(k_0^b \otimes \widetilde{k}_0^b). \tag{3.10}$$

Wprost z definicji widać, że, jako suma dwóch operatorów z $\mathscr{T}(K_b)$, operator $S_{b,c}$ również należy do $\mathscr{T}(K_b)$.

Wspomniane charakteryzacje odgrywają istotną rolę w dowodach twierdzeń przedstawionych w następnym podrozdziale. Dlatego też, na koniec tego podrozdziału zacytujemy najogólniejszą wersję twierdzenia Sarasona, zawierającą wyżej omówione wyniki.

Twierdzenie 3.4 ([29], Thm. 10.1). *Niech c będzie dowolną liczbą zespoloną. Ograniczony operator liniowy A na przestrzeni K_b należy do $\mathscr{T}(K_b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\psi, \chi \in K_b$ takie, że*

$$A - S_{b,c}AS_{b,c}^* = \psi \otimes k_0^b + k_0^b \otimes \chi.$$

3.3 Charakteryzacja za pomocą macierzy

Wiemy już, że ograniczony operator liniowy na przestrzeni Hardy'ego H^2 jest operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz w bazie $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ jest macierzą Toeplitza (definicja 1.19 i twierdzenie 1.20). Przypomnijmy, że macierz nieskończona $M = [r_{m,n}]_{m,n\geq 0}$ jest macierzą Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg liczb zespolonych $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ taki, że $r_{m,n} = c_{m-n}$. Oznacza to, że macierz nieskończona jest macierzą Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy elementy na jej dowolnej nieskończonej przekątnej tworzą ciąg stały.

Okazuje się, że w wielu przypadkach również obcięte operatory Toeplitza można scharakteryzować za pomocą macierzy w odpowiedniej bazie przestrzeni modelowej. Na przykład, gdy $b(z) = z^n$, to K_b jest zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej $n-1$ (przykład 1.31) i ograniczony operator liniowy A na K_b jest obciętym operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M_A = [r_{k,m}]_{k,m=0}^{n-1}$ tego operatora w bazie $\{z^k\}_{k=0}^{n-1}$ jest macierzą o n wierszach i n kolumnach, która może być traktowana jako obcięcie nieskończonej macierzy Toeplitza. Rzeczywiście, jeśli $A = A_\varphi \in \mathscr{T}(K_b)$, to

$$r_{k,m} = \langle A_\varphi z^k, z^m\rangle_2 = \langle T_\varphi z^k, z^m\rangle_2 = \widehat{\varphi}(m-k) \quad \text{dla } 0 \leq k, m \leq n-1.$$

Z drugiej strony, jeśli istnieje ciąg $\{c_j\}_{j=-n+1}^{n-1}$ taki, że $r_{k,m} = c_{m-k}$, to możemy przyjąć $A = A_\varphi$, gdzie $\varphi(e^{it}) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k e^{ikt}$.

W roku 2008 J. A. Cima, W. T. Ross i W. R. Wogen [9] scharakteryzowali obcięte operatory Toeplitza na skończenie wymiarowych przestrzeniach modelowych, a więc na przestrzeniach K_{B_n}, gdzie B_n jest skończonym iloczynem Blaschkego.

Jeśli B_n jest iloczynem Blaschkego mającym n zer, to wymiar przestrzeni K_{B_n} jest równy n. Z algebry liniowej wiadomo więc, że wszystkie odwzorowania liniowe z K_{B_n} w K_{B_n} tworzą przestrzeń liniową wymiaru n^2. D. Sarason [29] pokazał, że wymiar przestrzeni $\mathscr{T}(K_{B_n})$, czyli przestrzeni wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza na K_{B_n}, wynosi $2n-1$.

Przypomnijmy, że jeśli B_n jest iloczynem Blaschkego mającym n różnych zer $\{a_1,\ldots,a_n\}$, to jądra $\{k_{a_1},\ldots,k_{a_n}\}$, jak również jądra sprzężone $\{\widetilde{k}_{a_1},\ldots,\widetilde{k}_{a_n}\}$, tworzą bazę przestrzeni K_{B_n}. W wyżej wspomnianej pracy [9] autorzy wykazali, że macierze reprezentujące obcięte operatory Toeplitza względem każdej z tych baz są całkowicie wyznaczone przez elementy pierwszego wiersza i głównej przekątnej, tzn. zadanie pierwszego wiersza i głównej przekątnej wyznacza pozostałe elementy macierzy.

Podali oni również podobne charakteryzacje w terminach baz Clarka i zmodyfikowanych baz Clarka. Definicje tych baz omówiliśmy w podrozdziale 3.1.

Jak wykazaliśmy w podrozdziale 3.1, jeśli B jest nieskończonym iloczynem Blaschkego, którego zera $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ tworzą ciąg jednostajnie odseparowany (warunek (3.2)), to jądra $\{k_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$, jak i jądra sprzężone $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$, tworzą bazę dla przestrzeni K_B. Głównym wynikiem tego rozdziału jest charakteryzacja nieskończonych macierzy reprezentujących obcięte operatory Topelitza na takich przestrzeniach K_B względem wyżej wspomnianych baz. Podobnie jak w przypadku skończenie wymiarowym macierze te są wyznaczone przez elementy pierwszego wiersza i głównej przekątnej. Zwróćmy przy tym uwagę, że podobny wynik można otrzymać zastępując pierwszy wiersz przez dowolny wiersz lub dowolną kolumnę macierzy.

Przedstawiamy również uogólnienia wyników z pracy [9] na nieskończenie wymiarowe przestrzenie modelowe K_b mające bazę Clarka lub uogólnioną bazę Clarka.

Podkreślmy jeszcze, że wzory na elementy macierzy operatora występujące w kolejnych trzech twierdzeniach są formalnie takie same jak te otrzymane w pracy [9] dla przypadku skończenie wymiarowego.

Twierdzenie* 3.5 ([21], Thm. 2.2). *Niech B będzie nieskończonym iloczynem Blaschkego, którego zera $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ tworzą ciąg jednostajnie odseparowany i niech A będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni modelowej K_B. Jeśli*

$M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą operatora A w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$, to $A \in \mathscr{T}(K_B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s \neq p$,

$$r_{s,p} = \frac{B'(a_1)}{B'(a_s)} \frac{(a_p - a_1)r_{1,p} + (a_1 - a_s)r_{1,s}}{a_p - a_s}. \tag{3.11}$$

Uwaga 3.6. Jak wspomnieliśmy powyżej, jeśli zera $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ iloczynu Blaschkego B są jednostajnie odseparowane, to również $\{k_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ jest bazą przestrzeni K_B. Korzystając z twierdzenia 3.5 pokażemy teraz, że jeśli $\tilde{M}_A = [t_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą ograniczonego operatora liniowego A w bazie $\{k_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$, to $A \in \mathscr{T}(K_B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s \neq p$,

$$t_{s,p} = \overline{\left(\frac{B'(a_1)}{B'(a_s)}\right)} \left(\frac{\overline{(a_p - a_1)}t_{1,p} + \overline{(a_1 - a_s)}t_{1,s}}{\overline{a_p - a_s}}\right). \tag{3.12}$$

Załóżmy w tym celu, że $M_{A^*} = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą operatora sprzężonego A^* w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}$. Zauważmy, że wtedy

$$r_{s,p} = (B'(a_s))^{-1}\langle A^*\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2.$$

Rzeczywiście, jest to konsekwencją równości

$$A^*\widetilde{k}_{a_p} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\langle A^*\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2}{B'(a_s)} \widetilde{k}_{a_s} = \sum_{s=1}^{\infty} r_{s,p}\widetilde{k}_{a_s},$$

która z kolei wynika z (3.5). W podobny sposób, korzystając z równości (3.6), dostajemy

$$t_{s,p} = (\overline{B'(a_s)})^{-1}\langle Ak_{a_p}, \widetilde{k}_{a_s}\rangle_2.$$

A zatem

$$\begin{aligned} t_{s,p} &= (\overline{B'(a_s)})^{-1}\langle Ak_{a_p}, \widetilde{k}_{a_s}\rangle_2 \\ &= \overline{\left(\frac{B'(a_p)}{B'(a_s)}\right)} \overline{(B'(a_p))^{-1}\langle A^*\widetilde{k}_{a_s}, k_{a_p}\rangle_2} = \overline{\left(\frac{B'(a_p)}{B'(a_s)}\right)} \overline{r}_{p,s}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Załóżmy najpierw, że $A \in \mathscr{T}(K_B)$. Pokażemy, że spełniony jest warunek (3.12). Oczywiście, jeśli $A \in \mathscr{T}(K_B)$, to również $A^* \in \mathscr{T}(K_B)$. Zatem z twierdzenia 3.5 wynika, że macierz M_{A^*} spełnia warunek (3.11). W szczególności,

$$r_{p,s} = \frac{B'(a_s)}{B'(a_p)} r_{s,p},$$

więc z równości (3.13),

$$t_{s,p} = \overline{\left(\frac{B'(a_p)}{B'(a_s)}\right)} \overline{r}_{p,s} = \overline{r}_{s,p}.$$

Stąd i z warunku (3.11) wynika natychmiast, że macierz M_A spełnia warunek (3.12).

Załóżmy teraz, że macierz M_A spełnia warunek (3.12). Aby wykazać, że $A \in \mathscr{T}(K_B)$ wystarczy udowodnić, że $A^* \in \mathscr{T}(K_B)$. W tym celu pokażemy, że A^* spełnia założenia twierdzenia 3.5, tzn., że macierz M_{A^*} spełnia warunek (3.11). Ponieważ M_A spełnia (3.12), więc

$$t_{p,s} = \overline{\left(\frac{B'(a_s)}{B'(a_p)}\right)} t_{s,p}.$$

Korzystając z równości (3.13) dostajemy zatem, że

$$t_{s,p} = \overline{r}_{s,p}.$$

Na podstawie warunku (3.12) stwierdzamy, że macierz M_{A^*} spełnia warunek (3.11).

Kolejne dwa twierdzenia opisują macierz obciętego operatora Toeplitza odpowiednio w bazie Clarka i zmodyfikowanej bazie Clarka.

Twierdzenie* 3.7 ([21], Thm. 3.1). *Niech b będzie funkcją wewnętrzną dla której przestrzeń modelowa K_b ma bazę Clarka $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$ i niech A będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni K_b. Jeśli $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą operatora A w bazie Clarka $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$, to $A \in \mathscr{T}(K_b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s \neq p$,*

$$r_{s,p} = \frac{\sqrt{|b'(\lambda_1)|}}{\lambda_p - \lambda_s}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_s}\frac{\lambda_1 - \lambda_s}{\sqrt{|b'(\lambda_p)|}} r_{1,s} + \frac{\lambda_p - \lambda_1}{\sqrt{|b'(\lambda_s)|}} r_{1,p}\right). \tag{3.14}$$

Twierdzenie* 3.8 ([21], Thm. 3.2). *Niech b będzie funkcją wewnętrzną dla której przestrzeń modelowa K_b ma zmodyfikowaną bazę Clarka $\{e_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$ i niech A będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni K_b. Jeśli $M_A = [t_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą operatora A w bazie Clarka $\{e_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$, to $A \in \mathscr{T}(K_b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s \neq p$,*

$$t_{s,p} = \frac{\sqrt{|b'(\lambda_1)|}}{\overline{\omega}_1(\lambda_p - \lambda_s)}\left(\frac{\overline{\omega}_p}{\sqrt{|b'(\lambda_p)|}}(\lambda_1 - \lambda_s) t_{1,s} + \frac{\overline{\omega}_s}{\sqrt{|b'(\lambda_s)|}}(\lambda_p - \lambda_1) t_{1,p}\right), \tag{3.15}$$

gdzie ω_k dane jest wzorem (3.8).

Dowód. Jeśli $[r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą operatora A w bazie Clarka $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$, to

$$t_{s,p} = \langle Ae_{\lambda_p}, e_{\lambda_s}\rangle_2 = \omega_p \overline{\omega}_s \langle Av_{\lambda_p}, v_{\lambda_s}\rangle_2 = \omega_p \overline{\omega}_s r_{s,p}.$$

Łatwo też sprawdzić, że

$$\overline{\omega}_p^2 \omega_s^2 = \frac{\lambda_p}{\lambda_s}.$$

Korzystając z powyższych równości można wykazać, że warunek (3.15) jest równoważny warunkowi (3.14). □

Zaprezentujemy teraz dowody twierdzeń 3.5 i 3.7.

3.3.1 Dowód twierdzenia 3.5 - konieczność

Dowód konieczności, który przedstawimy poniżej, jest analogiczny do dowodu przeprowadzonego w [9] w przypadku skończenie wymiarowym. Polega on na obliczeniu elementów macierzy reprezentującej obcięty operator Toeplitza w bazie jąder sprzężonych, a następnie pokazaniu, że elementy te spełniają warunki (3.11).

Załóżmy, że $A = A_\varphi$ jest obciętym operatorem Toeplitza z symbolem $\varphi \in L^2$. Znajdziemy najpierw macierz $M_{A_\varphi} = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ operatora A_φ w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^\infty$. W tym celu przedstawmy operator A_φ w postaci

$$A_\varphi = A_{\psi+\overline{\chi}},$$

gdzie $\psi, \chi \in K_B$ (z rozważań po twierdzeniu 3.3 wynika, że takie funkcje $\psi, \chi \in K_B$ istnieją). Niech $\{c_m\}_{m=1}^\infty$ i $\{d_m\}_{m=1}^\infty$ będą ciągami współczynników rozwinięcia odpowiednio funkcji ψ i χ w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^\infty$, czyli

$$\psi = \sum_{m=1}^\infty c_m \widetilde{k}_{a_m}, \quad \chi = \sum_{m=1}^\infty d_m \widetilde{k}_{a_m}.$$

Wyznaczymy teraz elementy $r_{s,p}$ macierzy M_A za pomocą ciągów współczynników $\{c_m\}_{m=1}^\infty$ i $\{d_m\}_{m=1}^\infty$.

Przypomnijmy, że

$$r_{s,p} = (B'(a_s))^{-1} \langle A\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2.$$

Ponieważ funkcja $\widetilde{k}_{a_p} = B(z)/(z-a_p)$ jest funkcją ograniczoną, a szereg $\psi = \sum_{m=1}^\infty c_m \widetilde{k}_{a_m}$ jest zbieżny w normie H^2, więc

$$A_\psi \widetilde{k}_{a_p} = P_b(\sum_{m=1}^\infty c_m \widetilde{k}_{a_m} \widetilde{k}_{a_p}) = \sum_{m=1}^\infty c_m P_b(\widetilde{k}_{a_m} \widetilde{k}_{a_p}) = \sum_{m=1}^\infty c_m A_{\widetilde{k}_{a_m}} \widetilde{k}_{a_p},$$

i ostatni szereg jest również zbieżny w normie H^2. W podobny sposób

$$A_{\overline{\chi}} \widetilde{k}_{a_p} = \sum_{m=1}^\infty \overline{d}_m A_{\overline{\widetilde{k}}_{a_m}} \widetilde{k}_{a_p}.$$

Zatem

$$A\widetilde{k}_{a_p} = A_{\psi+\overline{\chi}}\widetilde{k}_{a_p} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{\widetilde{k}_{a_m}}\widetilde{k}_{a_p} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{d}_m A_{\overline{\widetilde{k}}_{a_m}}\widetilde{k}_{a_p}.$$

Ponadto, ze wzorów 3.9 wynikają równości

$$A_{\widetilde{k}_{a_m}} = \widetilde{k}_{a_m} \otimes k_{a_m} \quad \text{oraz} \quad A_{\overline{\widetilde{k}}_{a_m}} = k_{a_m} \otimes \widetilde{k}_{a_m},$$

które z kolei implikują, że

$$\begin{aligned} A\widetilde{k}_{a_p} &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \widetilde{k}_{a_m} \otimes k_{a_m}(\widetilde{k}_{a_p}) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{d}_m k_{a_m} \otimes \widetilde{k}_{a_m}(\widetilde{k}_{a_p}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle \widetilde{k}_{a_p}, k_{a_m}\rangle_2 \widetilde{k}_{a_m} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{d}_m \langle \widetilde{k}_{a_p}, \widetilde{k}_{a_m}\rangle_2 k_{a_m}. \end{aligned}$$

Korzystając teraz z faktu, że

$$\langle \widetilde{k}_{a_p}, k_{a_m}\rangle_2 = \langle \frac{B(z)}{z-a_p}, k_{a_m}\rangle_2 = B'(a_p)\delta_{m,p} = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq p, \\ B'(a_p) & \text{dla } m = p, \end{cases}$$

oraz z równości

$$\langle \widetilde{k}_{a_p}, \widetilde{k}_{a_m}\rangle_2 = \langle Ck_{a_p}, Ck_{a_m}\rangle_2 = \langle k_{a_m}, k_{a_p}\rangle_2 = k_{a_m}(a_p),$$

dostajemy

$$A\widetilde{k}_{a_p} = c_p B'(a_p)\widetilde{k}_{a_p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{1-\overline{a}_m a_p} k_{a_m}.$$

Zauważmy, że ostatni szereg występujący w powyższym ciągu równości jest zbieżny w normie. Możemy zatem policzyć

$$\begin{aligned} r_{s,p} &= (B'(a_s))^{-1}\langle A\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2 \\ &= (B'(a_s))^{-1} c_p B'(a_p)\langle \widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2 + (B'(a_s))^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{1-\overline{a}_m a_p}\langle k_{a_m}, k_{a_s}\rangle_2 \\ &= c_p B'(a_p)\delta_{s,p} + \frac{1}{B'(a_s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{1-\overline{a}_m a_p}\langle k_{a_m}, k_{a_s}\rangle_2 \\ &= c_p B'(a_p)\delta_{s,p} + \frac{1}{B'(a_s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{(1-\overline{a}_m a_p)(1-\overline{a}_m a_s)}. \end{aligned}$$

W szczególności, jeśli $s \neq p$, to

$$r_{s,p} = \frac{1}{B'(a_s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{(1-\overline{a}_m a_p)(1-\overline{a}_m a_s)}. \tag{3.16}$$

Pozostaje wykazać, że elementy $r_{s,p}$ macierzy M_{A_φ}, dane równością (3.16), spełniają warunki (3.11). Niech więc $s \neq p$. Korzystając dwukrotnie z wzoru (3.16) oraz z równości

$$\frac{a_p - a_s}{(1-\overline{a}_m a_p)(1-\overline{a}_m a_s)} = \frac{a_p}{1-\overline{a}_m a_p} - \frac{a_s}{1-\overline{a}_m a_s},$$

dostajemy

$$\begin{aligned}
r_{s,p} &= \frac{1}{B'(a_s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{(1-\overline{a}_m a_p)(1-\overline{a}_m a_s)} \\
&= \frac{1}{B'(a_s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{a_p - a_s}\left(\frac{a_p}{1-\overline{a}_m a_p} - \frac{a_s}{1-\overline{a}_m a_s}\right) \\
&= \frac{1}{B'(a_s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{a_p - a_s}\left(\frac{a_p}{1-\overline{a}_m a_p} - \frac{a_1}{1-\overline{a}_m a_1} + \frac{a_1}{1-\overline{a}_m a_1} - \frac{a_s}{1-\overline{a}_m a_s}\right) \\
&= \frac{1}{B'(a_s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_m}{a_p - a_s}\left(\frac{a_p - a_1}{(1-\overline{a}_m a_p)(1-\overline{a}_m a_1)} + \frac{a_1 - a_s}{(1-\overline{a}_m a_1)(1-\overline{a}_m a_s)}\right) \\
&= \frac{B'(a_1)}{B'(a_s)} \frac{(a_p - a_1) r_{1,p} + (a_1 - a_s) r_{1,s}}{a_p - a_s}.
\end{aligned}$$

3.3.2 Dowód twierdzenia 3.5 - dostateczność, $B(0) \neq 0$

W dowodzie dostateczności twierdzenia 3.5, w przypadku skończonego iloczynu Blaschkego, autorzy pracy [9] w istotny sposób korzystają z faktu, że przestrzeń modelowa jest wówczas skończenie wymiarowa. Z oczywistych względów, dowód zaprezentowany poniżej będzie oparty na innym rozumowaniu.

Dowód przeprowadzimy najpierw przy założeniu, że $B(0) \neq 0$. Wykorzystamy w tym celu zacytowane wcześniej kryterium Sarasona. Przypomnijmy, że według tego kryterium, ograniczony operator liniowy A na przestrzeni K_B jest obciętym operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\psi, \chi \in K_B$ takie, że

$$A - S_B A S_B^* = \psi \otimes k_0^B + k_0^B \otimes \chi. \tag{3.17}$$

Pokażemy, że jeśli macierz M_A operatora A w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ spełnia warunki (3.11), to takie funkcje $\psi, \chi \in K_B$ istnieją. Funkcje te znajdziemy, formułując i rozwiązując odpowiednie problemy interpolacyjne. Dokładniej, wyznaczymy funkcje ψ i χ za pomocą elementów macierzy M_A. Na koniec pokażemy, że przypadek ogólny można sprowadzić do przypadku $B(0) \neq 0$.

Załóżmy więc, że $B(0) \neq 0$ oraz, że A jest ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni K_B, którego macierz $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ spełnia (3.11).

Pokażemy, że istnieją funkcje $\psi, \chi \in K_B$ dla których spełniona jest równość (3.17). W tym celu zauważmy, że równość operatorów (3.17) możemy wyrazić za pomocą równości ich macierzy w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$, a więc

$$\begin{aligned}(B'(a_s))^{-1}&\langle (A - S_B A S_B^*)\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2 \\ &= (B'(a_s))^{-1}\langle (\psi \otimes k_0^B + k_0^B \otimes \chi)\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2, \quad s, p \geq 1.\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\langle (A - S_B A S_B^*)\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2 &= \langle A\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2 - \langle S_B A S_B^* \widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2 \\ &= r_{s,p} B'(a_s) - \langle A S_B^* \widetilde{k}_{a_p}, S_B^* k_{a_s}\rangle_2\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\langle (\psi \otimes k_0^B + k_0^B \otimes \chi)\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_s}\rangle_2 &= \langle \psi \otimes k_0^B(\widetilde{k}_{a_p}), k_{a_s}\rangle_2 + \langle k_0^B \otimes \chi(\widetilde{k}_{a_p}), k_{a_s}\rangle_2 \\ &= \langle \widetilde{k}_{a_p}, k_0^B\rangle_2 \langle \psi, k_{a_s}\rangle_2 + \langle \widetilde{k}_{a_p}, \chi\rangle_2 \langle k_0^B, k_{a_s}\rangle_2,\end{aligned}$$

więc równość (3.17) możemy sprowadzić do układu równań

$$r_{s,p} B'(a_s) - \langle A S_B^* \widetilde{k}_{a_p}, S_B^* k_{a_s}\rangle_2 = \widetilde{k}_{a_p}(0)\psi_s + \widetilde{\chi}_p, \quad s, p \geq 1, \tag{3.18}$$

gdzie $\psi_s = \langle \psi, k_{a_s}\rangle_2$ i $\widetilde{\chi}_p = \langle \widetilde{k}_{a_p}, \chi\rangle_2 = \langle \widetilde{\chi}, k_{a_p}\rangle_2$. Wystarczy teraz wykazać, że istnieją ciągi $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$ i $\{\widetilde{\chi}_p\}_{p=1}^{\infty}$ będące rozwiązaniem układu (3.18) i takie, że

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\psi_s|^2 (1 - |a_s|^2) < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{p=1}^{\infty} |\widetilde{\chi}_p|^2 (1 - |a_p|^2) < \infty. \tag{3.19}$$

Wtedy bowiem szukane funkcje ψ i χ dane są wzorami

$$\psi = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\psi_s}{B'(a_s)} \widetilde{k}_{a_s}, \qquad \chi = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\overline{\widetilde{\chi}_p}}{\overline{B'(a_p)}} k_{a_p}$$

(patrz (3.4)). Znajdziemy teraz ciągi $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$ i $\{\widetilde{\chi}_p\}_{p=1}^{\infty}$.

Z lematu 2.2 w [29] wiemy, że jeśli $a_p \neq 0$, to

$$S_B^* \widetilde{k}_{a_p} = \frac{1}{a_p} \widetilde{k}_{a_p} - \frac{1}{a_p} \widetilde{k}_0^B.$$

Ponadto, K_B jest przestrzenią S^*-niezmienniczą, więc

$$S_B^* k_{a_s}(z) = P_B(S^* k_{a_s})(z) = S^* k_{a_s}(z) = \frac{k_{a_s}(z) - k_{a_s}(0)}{z} = \overline{a}_s k_{a_s}(z).$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}\langle A S_B^* \widetilde{k}_{a_p}, S_B^* k_{a_s}\rangle_2 &= \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_{a_p} - A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\ &= \frac{a_s}{a_p} r_{s,p} B'(a_s) - \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2.\end{aligned}$$

A zatem, przy założeniu, że $B(0) \neq 0$, układ (3.18) można zapisać w postaci

$$\widetilde{k}_{a_p}(0)\psi_s + \widetilde{\chi}_p = \left(1 - \frac{a_s}{a_p}\right) r_{s,p} B'(a_s) + \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2, \quad s, p \geq 1. \tag{3.20}$$

Pokażemy teraz, że przy założeniu (3.11), układ równań (3.20) jest równoważny układowi

$$\begin{cases} \widetilde{k}_{a_p}(0)\psi_1 + \widetilde{\chi}_p = (1 - \frac{a_1}{a_p}) r_{1,p} B'(a_1) + \frac{a_1}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2, & p \geq 2 \\ \widetilde{k}_{a_p}(0)\psi_p + \widetilde{\chi}_p = \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_p}\rangle_2, & p \geq 1 \end{cases}. \tag{3.21}$$

Oczywiście (3.21) jest podukładem (3.20). Wystarczy więc wykazać, że każde rozwiązanie układu (3.21) jest też rozwiązaniem układu (3.20). W tym celu przyjmijmy, że liczby $\{\psi_p\}_{p=1}^\infty$ i $\{\widetilde{\chi}_p\}_{p=1}^\infty$ są dowolnym rozwiązaniem układu (3.21). Pokażemy, że dla dowolnych $s, p \geq 1$ zachodzi

$$\widetilde{k}_{a_p}(0)\psi_s + \widetilde{\chi}_p = \left(1 - \frac{a_s}{a_p}\right) r_{s,p} B'(a_s) + \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2.$$

Zauważmy, że jeśli $s = 1$ lub $s = p$, to powyższe równanie jest częścią układu (3.21) i jako takie jest spełnione. Możemy więc dodatkowo przyjąć, że $s > 1$ i $s \neq p$. Jeśli $p > 1$, to korzystając z (3.11) oraz z równości

$$\widetilde{k}_{a_p}(0) = -\frac{B(0)}{a_p} = \frac{a_s}{a_p}\widetilde{k}_{a_s}(0),$$

mamy

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{a_s}{a_p}\right) r_{s,p} B'(a_s) + \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\
&= \left(1 - \frac{a_s}{a_p}\right) B'(a_s) \frac{B'(a_1)}{B'(a_s)} \frac{(a_p - a_1) r_{1,p} + (a_1 - a_s) r_{1,s}}{a_p - a_s} + \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\
&= \left(1 - \frac{a_1}{a_p}\right) r_{1,p} B'(a_1) + \frac{a_s}{a_p} \left(\frac{a_1}{a_s} - 1\right) r_{1,s} B'(a_1) + \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\
&= \widetilde{k}_{a_p}(0)\psi_1 + \widetilde{\chi}_p - \frac{a_1}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2 \\
&\qquad - \frac{a_s}{a_p}\widetilde{k}_{a_s}(0)\psi_1 - \frac{a_s}{a_p}\widetilde{\chi}_s + \frac{a_s}{a_p}\frac{a_1}{a_s} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2 + \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\
&= \widetilde{\chi}_p - \frac{a_s}{a_p}\widetilde{\chi}_s + \frac{a_s}{a_p} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\
&= \widetilde{\chi}_p - \frac{a_s}{a_p}\widetilde{\chi}_s + \frac{a_s}{a_p}(\widetilde{k}_{a_s}(0)\psi_s + \widetilde{\chi}_s) = \widetilde{k}_{a_p}(0)\psi_s + \widetilde{\chi}_p.
\end{aligned}$$

Podobnie, jeśli $p = 1$, to

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{a_s}{a_1}\right) r_{s,1} B'(a_s) + \frac{a_s}{a_1} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\
&\quad = -\frac{a_s}{a_1}\left(1 - \frac{a_1}{a_s}\right) \frac{B'(a_1)}{B'(a_s)} r_{1,s} B'(a_s) + \frac{a_s}{a_1} \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_s}\rangle_2 \\
&\quad = -\frac{a_s}{a_1}\left(\widetilde{k}_{a_s}(0)\psi_1 + \widetilde{\chi}_s - \frac{a_1}{a_s}\langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2\right) + \frac{a_s}{a_1}\left(\widetilde{k}_{a_s}(0)\psi_s + \widetilde{\chi}_s\right) \\
&\quad = -\widetilde{k}_{a_1}(0)\psi_1 - \frac{a_s}{a_1}\widetilde{\chi}_s + \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2 + \widetilde{k}_{a_1}(0)\psi_s + \frac{a_s}{a_1}\widetilde{\chi}_s \\
&\quad = -\widetilde{k}_{a_1}(0)\psi_1 + \widetilde{k}_{a_1}(0)\psi_s + \widetilde{k}_{a_1}(0)\psi_1 + \widetilde{\chi}_1 = \widetilde{k}_{a_1}(0)\psi_s + \widetilde{\chi}_1.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że ciągi $\{\psi_p\}_{p=1}^\infty$ i $\{\widetilde{\chi}_p\}_{p=1}^\infty$ są również rozwiązaniem układu (3.20), a więc układy (3.20) i (3.21) są równoważne.

Dla dowolnego ψ_1 rozwiązanie układu (3.21), a więc i układu (3.20), możemy opisać wzorami

$$\begin{cases} \widetilde{\chi}_p = (1 - \frac{a_1}{a_p}) r_{1,p} B'(a_1) + \frac{a_1}{a_p}\langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2 + \frac{B(0)}{a_p}\psi_1, & p \geq 1 \\ \psi_p = \frac{a_p}{B(0)}(\langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_p}\rangle_2 - \widetilde{\chi}_p), & p \geq 2 \end{cases}.$$

Pozostaje sprawdzić, że spełnione są warunki (3.19). Ponieważ z założenia ciąg $\{a_p\}_{p=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ nie zawiera zera oraz $\sum_{p=1}^\infty (1 - |a_p|^2) < \infty$, więc wyrażenie $|1/a_p|$ pozostaje ograniczone i mamy

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^\infty |\widetilde{\chi}_p|^2 (1 - |a_p|^2) \\
&\quad \leq C \sum_{p=1}^\infty \left(|r_{1,p} B'(a_1)| + |a_1 \langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2 + \psi_1 B(0)|\right)^2 (1 - |a_p|^2) \\
&\quad \leq 2C \sum_{p=1}^\infty |\langle A\widetilde{k}_{a_p}, k_{a_1}\rangle|^2 (1 - |a_p|^2) + 2|a_1\langle A\widetilde{k}_0^B, k_{a_1}\rangle_2 + \psi_1 B(0)|^2 \sum_{p=1}^\infty (1 - |a_p|^2) \\
&\quad \leq C' + 4C \sum_{p=1}^\infty |\widetilde{f}_A(a_p)|^2 (1 - |a_p|^2) < \infty
\end{aligned}$$

gdzie $f_A = A^* k_{a_1} \in K_B$. Zbieżność ostatniego szeregu wynika z faktu, że $\{a_p\}_{p=1}^\infty$ jest ciągiem jednostajnie odseparowanym (warunek (3.2)). Podobnie,

$$\sum_{s=1}^\infty |\psi_s|^2 (1 - |a_s|^2) \leq C \sum_{s=1}^\infty |g_A(a_s)|^2 (1 - |a_s|^2) + C \sum_{s=1}^\infty |\widetilde{\chi}_s|^2 (1 - |a_s|^2) < \infty,$$

gdzie $g_A = A\widetilde{k}_0 \in K_B$.

3.3.3 Dowód twierdzenia 3.5 - dostateczność, $B(0) = 0$

Załóżmy teraz, że $B(0) = 0$ i niech A będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni K_B, którego macierz $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$ spełnia (3.11). Pokażemy, że A jest obciętym operatorem Toeplitza.

Ustalmy dowolne $\alpha \in \mathbb{D}$ takie, że $B(\alpha) \neq 0$ i niech $B_\alpha = B \circ \varphi_\alpha$, gdzie φ_α jest automorfizmem koła $\mathbb{D}$, danym wzorem $\varphi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$. Wtedy B_α jest iloczynem Blaschkego, którego zerami są liczby $b_m = \varphi_\alpha(a_m)$. Ponieważ

$$\frac{\varphi_\alpha(a_m) - \varphi_\alpha(a_k)}{1 - \overline{\varphi_\alpha(a_m)}\varphi_\alpha(a_k)} = \frac{a_m - a_k}{1 - \overline{a}_m a_k},$$

więc zera $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ tworzą ciąg jednostajnie odseparowany.

Wiadomo, że operator

$$\mathfrak{U}_\alpha f = \sqrt{\varphi_\alpha'} f \circ \varphi_\alpha$$

jest unitarnym przekształceniem przestrzeni K_B na przestrzeń K_{B_α} (zobacz [8], str. 8). Ponadto z dowodu stwierdzenia 4.1 w [8] wynika, że odwzorowanie

$$A \mapsto \mathfrak{U}_\alpha A \mathfrak{U}_\alpha^*, \quad A \in \mathscr{T}(K_B)$$

jest surjekcją z zbioru $\mathscr{T}(K_B)$ na zbiór $\mathscr{T}(K_{B_\alpha})$. Zatem żeby pokazać, że $A \in \mathscr{T}(K_B)$ wystarczy udowodnić, że $A_\alpha = \mathfrak{U}_\alpha A \mathfrak{U}_\alpha^* \in \mathscr{T}(K_{B_\alpha})$.

Pokażemy teraz, że A_α jest obciętym operatorem Toeplitza na przestrzeni modelowej K_{B_α}. Ponieważ $B_\alpha(0) \neq 0$, więc wystarczy wykazać, że macierz $M_{A_\alpha} = [t_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ operatora A_α w bazie $\{\widetilde{k}_{b_m}\}_{m=1}^{\infty}$, gdzie $b_m = \varphi_\alpha(a_m)$, spełnia

$$t_{s,p} = \frac{B_\alpha'(b_1)}{B_\alpha'(b_s)} \frac{(b_p - b_1)t_{1,p} + (b_1 - b_s)t_{1,s}}{b_p - b_s}, \quad s \neq p.$$

Wynika to łatwo z następującego lematu.

Lemat* 3.9 ([21], Lem. 2.1)**.** *Niech A ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni modelowej K_B i niech $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ będzie macierzą operatora A w bazie $\{\widetilde{k}_{a_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Jeśli $A_\alpha = \mathfrak{U}_\alpha A \mathfrak{U}_\alpha^*$ i $M_{A_\alpha} = [t_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ jest macierzą operatora A_α w bazie $\{\widetilde{k}_{b_m}\}_{m=1}^{\infty}$, gdzie $b_m = \varphi_\alpha(a_m)$, to dla wszystkich $s, p \geq 1$,*

$$t_{s,p} = \frac{1 - \overline{\alpha} a_p}{1 - \overline{\alpha} a_s} r_{s,p}. \tag{3.22}$$

Rzeczywiście, korzystając z równości (3.22) i faktu, że $r_{s,p}$ spełnia (3.11) dostajemy

$$\begin{aligned}
&\frac{B'_\alpha(b_1)}{B'_\alpha(b_s)}\frac{(b_p-b_1)t_{1,p}+(b_1-b_s)t_{1,s}}{b_p-b_s}\\
&\quad=\frac{\varphi'_\alpha(a_s)}{\varphi'_\alpha(a_1)}\frac{B'(a_1)}{B'(a_s)}\frac{(\varphi_\alpha(a_p)-\varphi_\alpha(a_1))\frac{1-\overline{\alpha}a_p}{1-\overline{\alpha}a_1}r_{1,p}+(\varphi_\alpha(a_1)-\varphi_\alpha(a_s))\frac{1-\overline{\alpha}a_s}{1-\overline{\alpha}a_1}r_{1,s}}{\varphi_\alpha(a_p)-\varphi_\alpha(a_s)}\\
&\quad=\frac{\varphi'_\alpha(a_s)}{\varphi'_\alpha(a_1)}\frac{B'(a_1)}{B'(a_s)}\frac{(1-\overline{\alpha}a_p)(1-\overline{\alpha}a_s)}{(1-\overline{\alpha}a_1)^2}\frac{(a_1-a_p)r_{1,p}+(a_s-a_1)r_{1,s}}{a_s-a_p}\\
&\quad=\frac{|\alpha|^2-1}{(1-\overline{\alpha}a_s)^2}\frac{(1-\overline{\alpha}a_1)^2}{|\alpha|^2-1}\frac{(1-\overline{\alpha}a_p)(1-\overline{\alpha}a_s)}{(1-\overline{\alpha}a_1)^2}r_{s,p}\\
&\quad=\frac{1-\overline{\alpha}a_p}{1-\overline{\alpha}a_s}r_{s,p}=t_{s,p},
\end{aligned}$$

co oznacza, że $A_\alpha\in\mathscr{T}(K_{B_\alpha})$. Z zatem również $A\in\mathscr{T}(K_B)$, co kończy dowód twierdzenia 3.5.

Dowód lematu 3.9. Oczywiście

$$r_{s,p}=(B'(a_s))^{-1}\langle A\widetilde{k}_{a_p},k_{a_s}\rangle_2$$

oraz

$$t_{s,p}=(B'_\alpha(b_s))^{-1}\langle A_\alpha\widetilde{k}_{b_p},k_{b_s}\rangle_2.$$

Stąd

$$t_{s,p}=\frac{\varphi'_\alpha(a_s)}{B'(a_s)}\langle A\mathfrak{U}^*_\alpha\widetilde{k}_{b_p},\mathfrak{U}^*_\alpha k_{b_s}\rangle_2.$$

Ponadto, korzystając z definicji i własności operatora $\mathfrak{U}_\alpha$, dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}^*_\alpha k_{b_s}(z)=\mathfrak{U}_\alpha k_{b_s}(z)&=\sqrt{\varphi'_\alpha(z)}k_{\varphi_\alpha(a_s)}(\varphi_\alpha(z))\\
&=i\frac{1}{1-\overline{\varphi_\alpha(a_s)}\varphi_\alpha(z)}\frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-\overline{\alpha}z}\\
&=i\frac{1-\alpha\overline{a}_s}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}k_{a_s}(z).
\end{aligned}$$

W podobny sposób

$$\mathfrak{U}^*_\alpha\widetilde{k}_{b_p}(z)=-i\frac{1-\overline{\alpha}a_p}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}\widetilde{k}_{a_p}(z),$$

a więc

$$\begin{aligned}
t_{s,p}&=-\frac{\varphi'_\alpha(a_s)}{B'(a_s)}\frac{(1-\overline{\alpha}a_p)(1-\overline{\alpha}a_s)}{1-|\alpha|^2}\langle A\widetilde{k}_{a_p},k_{a_s}\rangle_2\\
&=-\frac{|\alpha|^2-1}{(1-\overline{\alpha}a_s)^2}\frac{(1-\overline{\alpha}a_p)(1-\overline{\alpha}a_s)}{1-|\alpha|^2}r_{s,p}=\frac{1-\overline{\alpha}a_p}{1-\overline{\alpha}a_s}r_{s,p}.
\end{aligned}$$

□

3.3.4 Dowód twierdzenia 3.7

Dowód twierdzenia 3.7 będzie przebiegał analogicznie do dowodu twierdzenia 3.5 i będzie w całości oparty na uogólnionym kryterium Sarasona zacytowanym w twierdzeniu 3.4.

Niech $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$ będzie bazą Clarka przestrzeni K_b. Przypomnijmy, że baza $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$ składa się z unormowanych wektorów własnych $v_{\lambda_m} = \|k_{\lambda_m}^b\|_2^{-1} k_{\lambda_m}^b$ odpowiadających różnym wartościom własnym λ_m operatora unitarnego U_α, gdzie α jest pewną ustaloną liczbą z okręgu $\mathbb{T}$ oraz

$$U_\alpha = S_b + \frac{b(0)+\alpha}{1-|b(0)|^2} k_0^b \otimes \widetilde{k}_0^b.$$

Zauważmy, że jeśli

$$c_\alpha = \frac{u(0)+\alpha}{1-|b(0)|^2},$$

to operator U_α jest zmodyfikowanym, obciętym operatorem przesunięcia, $U_\alpha = S_{b,c_\alpha}$ (patrz (3.10)). Zatem, na mocy twierdzenia 3.4, ograniczony operator liniowy A na przestrzeni modelowej K_b jest obciętym operatorem Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\psi, \chi \in K_b$ takie, że

$$A - U_\alpha A U_\alpha^* = \psi \otimes k_0^b + k_0^b \otimes \chi. \tag{3.23}$$

Założmy najpierw, że $A = A_\varphi$ jest obciętym operatorem Toeplitza z symbolem $\varphi \in L^2$ oraz, że $\psi, \chi \in K_b$ są funkcjami spełniającymi równanie (3.23). Ponadto, niech $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ będzie macierzą operatora A w bazie Clarka $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$,

$$r_{s,p} = \langle A v_{\lambda_p}, v_{\lambda_s}\rangle_2.$$

Pokażemy, że macierz M_A spełnia warunki (3.14). W tym celu zauważmy, że równość operatorów (3.23) implikuje równość ich macierzy w bazie $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Zatem, dla dowolnych $s, p \geq 1$,

$$\langle A v_{\lambda_p}, v_{\lambda_s}\rangle_2 - \langle A U_\alpha^* v_{\lambda_p}, U_\alpha^* v_{\lambda_s}\rangle_2 = \langle v_{\lambda_p}, k_0^b\rangle_2 \langle \psi, v_{\lambda_s}\rangle_2 + \langle v_{\lambda_p}, \chi\rangle_2 \langle k_0^b, v_{\lambda_s}\rangle_2.$$

Równość powyższą można również zapisać w postaci

$$r_{s,p}(1-\overline{\lambda}_p\lambda_s) = v_{\lambda_p}(0)\psi(\lambda_s)\|k_{\lambda_s}^b\|_2^{-1} + \overline{v_{\lambda_s}(0)\chi(\lambda_p)}\|k_{\lambda_p}^b\|_2^{-1}. \tag{3.24}$$

Rzeczywiście, ponieważ v_{λ_p} jest wektorem własnym operatora unitarnego U_α odpowiadającym wartości własnej λ_p, tzn.

$$U_\alpha v_{\lambda_p} = \lambda_p v_{\lambda_p},$$

więc

$$U_\alpha^* v_{\lambda_p} = U_\alpha^*(U_\alpha(\overline{\lambda}_p v_{\lambda_p})) = \overline{\lambda}_p v_{\lambda_p}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\langle Av_{\lambda_p}, v_{\lambda_s}\rangle_2 - \langle AU_\alpha^* v_{\lambda_p}, U_\alpha^* v_{\lambda_s}\rangle_2 &= \langle Av_{\lambda_p}, v_{\lambda_s}\rangle_2 - \langle A(\overline{\lambda}_p v_{\lambda_p}), \overline{\lambda}_s v_{\lambda_s}\rangle_2 \\ &= \langle Av_{\lambda_p}, v_{\lambda_s}\rangle_2(1 - \overline{\lambda}_p\lambda_s) = r_{s,p}(1 - \overline{\lambda}_p\lambda_s).\end{aligned}$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned}&\langle v_{\lambda_p}, k_0^b\rangle\langle\psi, v_{\lambda_s}\rangle_2 + \langle v_{\lambda_p}, \chi\rangle_2\langle k_0^b, v_{\lambda_s}\rangle_2 \\ &\qquad =\langle v_{\lambda_p}, k_0^b\rangle_2\langle\psi, k_{\lambda_s}^b\rangle_2\|k_{\lambda_s}^b\|_2^{-1} + \langle k_{\lambda_p}^b, \chi\rangle_2\langle k_0^b, v_{\lambda_s}\rangle_2\|k_{\lambda_p}^b\|_2^{-1} \\ &\qquad =v_{\lambda_p}(0)\psi(\lambda_s)\|k_{\lambda_s}^b\|_2^{-1} + \overline{v_{\lambda_s}(0)\chi(\lambda_p)}\|k_{\lambda_p}^b\|_2^{-1}.\end{aligned}$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że z równości (3.23) wynika, iż dla dowolnych $s, p \geq 1$ spełniona jest równość (3.24). Stąd, jeśli $s \neq p$, to

$$r_{s,p} = \frac{k_{\lambda_p}^b(0)\psi(\lambda_s) + \overline{k_{\lambda_s}^b(0)}\overline{\chi(\lambda_p)}}{\|k_{\lambda_p}^b\|_2\|k_{\lambda_s}^b\|_2(1 - \overline{\lambda}_p\lambda_s)}, \tag{3.25}$$

a jeśli $s = p$, to

$$\overline{k_{\lambda_s}^b(0)}\overline{\chi(\lambda_s)} = -k_{\lambda_s}^b(0)\psi(\lambda_s).$$

Ponieważ jednak

$$k_{\lambda_p}^b(0) = 1 - \overline{\beta}_\alpha b(0) = k_{\lambda_s}^b(0),$$

więc

$$\overline{k_{\lambda_1}^b(0)}\overline{\chi(\lambda_s)} = -k_{\lambda_p}^b(0)\psi(\lambda_s). \tag{3.26}$$

Korzystając z równości (3.25) i (3.26) mamy

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{|b'(\lambda_1)|}}{\lambda_p - \lambda_s}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_s}\frac{\lambda_1 - \lambda_s}{\sqrt{|b'(\lambda_p)|}}r_{1,s} + \frac{\lambda_p - \lambda_1}{\sqrt{|b'(\lambda_s)|}}r_{1,p}\right) \\ &\qquad \frac{\|k_{\lambda_1}^b\|_2}{1 - \overline{\lambda}_p\lambda_s}\left(\frac{1 - \overline{\lambda}_p\lambda_1}{\|k_{\lambda_s}^b\|_2}r_{1,p} - \frac{1 - \overline{\lambda}_s\lambda_1}{\|k_{\lambda_p}^b\|_2}r_{1,s}\right) \\ &\qquad = \frac{k_{\lambda_p}^b(0)\psi(\lambda_1) + \overline{k_{\lambda_1}^b(0)}\overline{\chi(\lambda_p)} - k_{\lambda_1}^b(0)\psi(\lambda_1) - \overline{k_{\lambda_1}^b(0)}\overline{\chi(\lambda_s)}}{\|k_{\lambda_p}^b\|_2\|k_{\lambda_s}^b\|_2(1 - \overline{\lambda}_p\lambda_s)} \\ &\qquad = \frac{k_{\lambda_p}^b(0)\psi(\lambda_s) + \overline{k_{\lambda_s}^b(0)}\overline{\chi(\lambda_p)}}{\|k_{\lambda_p}^u\|_2\|k_{\lambda_s}^b\|_2(1 - \overline{\lambda}_p\lambda_s)} = r_{s,p}.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że macierz $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ spełnia warunki (3.14).

Uwaga 3.10. Zauważmy, że analogiczne rozumowanie można by również zastosować w pierwszej części dowodu twierdzenia 3.5.

Załóżmy teraz, że A jest ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni K_b, którego macierz $M_A = [r_{s,p}]_{s,p\geq 1}$ w bazie $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$ spełnia (3.14). Aby pokazać, że A jest obciętym operatorem Toeplitza znajdziemy funkcje $\psi, \chi \in K_b$, dla których zachodzi równość (3.23).

Jak w dowodzie twierdzenia 3.5, równość operatorów (3.23) możemy wyrazić za pomocą równości ich macierzy, tym razem w bazie $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Z rozumowania zaprezentowanego powyżej (porównaj równość (3.24)) wynika, iż wystarczy znaleźć ciągi $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\chi_p\}_{p=1}^{\infty}$ takie, że dla wszystkich $s, p \geq 1$,

$$r_{s,p}(1 - \overline{\zeta}_p \zeta_s) = v_{\zeta_p}(0)\psi_s + \overline{v_{\zeta_s}(0)}\,\overline{\chi_p}, \tag{3.27}$$

oraz

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\psi_s|^2 < \infty, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} |\chi_p|^2 < \infty. \tag{3.28}$$

Wówczas bowiem szukane funkcje ψ i χ dane są wzorami

$$\psi = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s v_{\zeta_s}, \qquad \chi = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{\chi}_p v_{\zeta_p}.$$

Znajdziemy teraz ciągi $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\chi_p\}_{p=1}^{\infty}$. W tym celu zauważmy, że postępując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.5 można pokazać, że przy założeniu (3.14) układ równań (3.27) jest równoważny układowi

$$\begin{cases} v_{\zeta_p}(0)\psi_1 + \overline{v_{\zeta_1}(0)}\,\overline{\chi}_p = (1 - \overline{\zeta}_p \zeta_1) r_{1,p}, & p \geq 2 \\ v_{\zeta_p}(0)\psi_p + \overline{v_{\zeta_p}(0)}\,\overline{\chi}_p = 0, & p \geq 1 \end{cases}.$$

Dla ustalonego ψ_1 rozwiązaniem powyższego układu są liczby

$$\begin{cases} \chi_p = \frac{(1-\zeta_p\overline{\zeta}_1)\overline{r}_{1,p} - \overline{v_{\zeta_p}(0)}\,\overline{\psi}_1}{v_{\zeta_1}(0)}, & p \geq 1 \\ \psi_p = -\frac{\overline{v_{\zeta_p}(0)}}{v_{\zeta_p}(0)}\overline{\chi}_p, & p \geq 2 \end{cases}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{\infty} |\chi_p|^2 &\leq C \sum_{p=1}^{\infty} |(1 - \zeta_p \overline{\zeta}_1) \overline{r}_{1,p} - \overline{v_{\zeta_p}(0)} \overline{\psi}_1|^2 \\
&\leq 2C \sum_{p=1}^{\infty} |(1 - \zeta_p \overline{\zeta}_1) \overline{r}_{1,p}|^2 + 2C \sum_{p=1}^{\infty} |\overline{v_{\zeta_p}(0)} \overline{\psi}_1|^2 \\
&\leq 8C \sum_{p=1}^{\infty} |\langle A v_{\lambda_p}, v_{\lambda_1} \rangle_2|^2 + 2C |\psi_1|^2 \sum_{p=1}^{\infty} |\langle k_0^b, v_{\lambda_p} \rangle_2|^2 \\
&\leq C' + 8C \sum_{p=1}^{\infty} |\langle A^* v_{\lambda_1}, v_{\lambda_p} \rangle_2|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

gdzie zbieżność szeregów wynika z faktu, że $\{v_{\lambda_m}\}_{m=1}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni K_b. Ponieważ $|\psi_p| = |\chi_p|$, więc wykazaliśmy, że zachodzi (3.28).

Bibliografia

[1] J. A. Ball, T. L. Kriete, *Operator valued Nevanlinna-Pick kernels and the functional models for contraction operators,* Integral Equations Operator Theory 10 (1987), 17-61.

[2] A. Baranov, I. Chalendar, E. Fricain, J. E. Mashreghi and D. Timotin, *Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators,* J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 10, 2673–2701

[3] L. de Branges, J. Rovnyak, *Square Summable Power Series,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[4] L. de Branges, J. Rovnyak, Appendix on square summable power series in *Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics,* John Wiley and Sons, New York, 1966, 347–392.

[5] A. Brown, R. G. Douglas, *Partially isometric Toeplitz operators,* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 681-682.

[6] A. Brown, P. R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators,* J. Reine Angew. Math. 213 (1963/1964), 89-102.

[7] N. Chevrot, D. Guillot, T. Ransford, *De Branges-Rovnyak spaces and Dirichlet spaces,* Journal of functional Analysis 259 (2010), 2366-2383.

[8] J. A. Cima, S. R. Garcia, W. T. Ross, W. R. Wogen, *Truncated Toeplitz operators: spatial isomorphism, unitary equivalence, and similarity,* Indiana Univ. Math. J. 59 (2010), no. 2, 595–620.

[9] J. A. Cima, W. T. Ross, W. R. Wogen, *Truncated Toeplitz operators on finite dimensional spaces,* Operators and Matrices 2 (2008), no. 3, 357–369.

[10] D. N. Clark, *One dimensional perturabations of restricted shifts,* J. Anal. Math. 25 (1972), 169–191.

[11] C. Costara, T. Ransford, *Which de Branges-Rovnyak spaces are Dirichlet spaces (and vice versa)?* J. Funct. Anal. 265 (2013), no. 12, 3204-3218.

[12] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory,* Academic Press, New York 1972.

[13] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 413-415.

[14] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces,* Pure Appl. Math., vol. 38, Academic Press, New York, 1970.

[15] P. L. Duren, A. Schuster, *Bergman Spaces,* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 100, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[16] E. Fricain, A. Hartmann, W. T. Ross, *Concrete examples of $\mathcal{H}(b)$ spaces,* arXiv:1405.2323.

[17] S. R. Garcia, M. Putinar, *Complex symmetric operators and applications,* Trans. Am. Math. Soc. 358 (2006), no. 3, 1285–1315.

[18] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions,* Springer, New York, 2010.

[19] K. Hoffman, *Banach Spaces Of Analytic Functions,* Dover, New York, 1988.

[20] P. Koosis, *Introduction to H^p Spaces,* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[21] B. Łanucha, *Matrix representations of truncated Toeplitz operators,* J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 430-437.

[22] N. K. Nikolski, *Treatise on the Shift Operator,* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[23] M. Pavlović, *Introduction to Function Spaces on the Disk,* Matematički institut SANU, Beograd, 2004.

[24] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis.* Translated from the second French edition by Leo F. Boron. Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[25] S. Richter, *A representation theorem for cyclic analytic two-isometries,* Trans. Amer. Math. Soc. 328 (1991), no. 1, 325–349.

[26] S. Richter, C. Sundberg, *A formula for the local Dirichlet integral,* Michigan Math. J. 38 (1991), 355-379.

[27] W. Rudin, *Analiza Rzeczywista i Zespolona,* PWN, Warszawa 1998.

[28] W. Rudin, *Analiza Funkcjonalna,* PWN, Warszawa 2001.

[29] D. Sarason, *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators,* Operators and Matrices 1 (2007), no. 4, 491–526.

[30] D. Sarason, *Doubly shift-invariant spaces in H^2,* J. Operator Theory 16 (1986), 75-97.

[31] D. Sarason, *Harmonically weighted Dirichlet spaces associated with finitely atomic measures,* Integral Equations Operator Theory 31 (1998), no. 2, 186-213.

[32] D. Sarason, *Local Dirichlet spaces as de Branges-Rovnyak spaces,* Proc. Amer. Math. Soc 125 (1997), 2133-2139.

[33] D. Sarason, *Shift invariant spaces from the Brangesian point of view,* The Bieberbach Conjecture - Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof, American Mathematical Society, Providence, 1986, pp. 153-186.

[34] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disc,* John Wiley and Sons Inc., New York, 1994.

[35] D. Sarason, *Unbounded Toeplitz operators,* Integral Equations Operator Theory 61 (2008), 281-298.

[36] D. Sarason, D. Suarez, *Inverse problem for zeros of certain Koebe-related functions,* J. Anal. Math. 71 (1997), 149-158.

[37] J. H. Shapiro *Composition Operators and Classical Function Theory,* Springer-Verlag, New York, 1993.

[38] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces,* Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.