ssdnm
środowiskowe
studia doktoranckie
z nauk matematycznych

Błażej Wróbel

Uniwersytet Wrocławski

Układy falkowe w wagowych i bezwagowych przestrzeniach funkcji całkowalnych

Praca semestralna nr 3

(semestr letni 2011/12)

Opiekun pracy: prof. dr hab. Leszek Skrzypczak

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Układy falkowe w wagowych i bezwagowych przestrzeniach funkcji całkowalnych

Błażej Wróbel

19 czerwca 2012

Streszczenie

W niniejszej pracy semestralnej zajmiemy się zbadaniem rozwinięć falkowych w kontekście wagowych przestrzeni L^p. Podamy warunki przy których baza falkowa jest równocześnie bazą (bezwarunkową lub nie) w tych przestrzeniach. Praca jest opracowaniem wyników zawartych w [1].

1 Wstęp

Na początek zdefiniujmy obiekty naszych badań. Dla $1 < p < \infty$ i miary μ symbolem $L^p(\mu)$ będziemy oznaczać przestrzeń $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$. W przypadku, gdy μ jest miarą z gęstością $w(x)$ wzg. miary Lebesgue'a będziemy pisać $L^p(w)$, zaś gdy $w = 1$ skrótowo L^p. Przez $\|\cdot\|_{p,\mu}$ będziemy oznaczać zwykłą normę w przestrzeni $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ (gdy $d\mu = wdx$, będziemy zamiennie pisali $\|\cdot\|_{L^p(w)}$, zaś gdy $w = 1$, po prostu $\|\cdot\|_p$). Dla operatora liniowego $T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ symbol $\|T\|_{L^p(\mu)\to L^q(\nu)}$ będzie oznaczał jego normę. Gdy $w_1 = w_2 = 1$, będziemy pisać w skrócie $\|T\|_{p\to q}$. Głównym celem pracy jest zaprezentowanie (z dość szczegółowym dowodem) pewnej charakteryzacji specjalnych baz falkowych udowodnionej w [1]. Mówimy, że waga (funkcja) $w \geq 0$ jest w klasie Muckenhoupta A_p, $p \in (1, \infty)$, gdy dla wszystkich kostek Q,

$$\left(\int_Q w\right)^{1/p} \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \leq C|Q|,$$

gdzie $1/p + 1/p' = 1$, zaś $|Q|$ oznacza miarę Lebesgue'a kostki Q. Definicje poniżej wyjaśniają, co rozumiemy przez pojęcie bazy (Schaudera bądź bezwarunkowej) w przestrzeniach L^p.

Definicja 1.1. *Mówimy, że układ funkcji f_n jest bazą (Schaudera) w przestrzeni $L^p(\mu)$, jeśli*

$$\forall f \in L^p(\mu) \exists! \, \alpha_n \qquad f = \sum_n \alpha_n f_n,$$

gdzie szereg jest zbieżny w $L^p(\mu)$.

Definicja 1.2. *Mówimy, że układ funkcji f_n jest bazą bezwarunkową w przestrzeni $L^p(\mu)$, jeśli jest bazą Schaudera oraz dla $f = \sum_n \alpha_n f_n$, i każdego wyboru znaków $\varepsilon_n = \pm 1$, szereg $\sum_n \varepsilon_n \alpha_n f_n$ jest zbieżny w $L^p(\mu)$ i zachodzi oszacowanie*

$$\left\| \sum_n \varepsilon_n \alpha_n f_n \right\|_{p,\mu} \leq C \|f\|_{p,\mu}.$$

Uwaga. Zwykle podawanym jako definicyjny, warunkiem równoważnym temu z Definicji 1.2 jest m.in. następujący. Mówimy, że układ funkcji f_n jest bazą bezwarunkową w przestrzeni $L^p(\mu)$, jeśli jest bazą Schaudera i dla każdej permutacji $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f = \sum_n \alpha_n f_n = \sum_n \alpha_{\sigma(n)} f_{\sigma(n)},$$

gdzie szeregi powyżej są zbieżne w $L^p(\mu)$. Dla dowodu równoważności odsyłamy czytelnika do [2, Tw. 6.4]. Warto przypomnieć, że przestrzeń L^1 nie posiada bazy bezwarunkowej, vide np. [3, II.D.10].

W całej pracy j oznacza liczbę całkowitą, zaś k - wektor z $\mathbb{Z}^n$. Przez $|\cdot|$ oznaczamy zarówno moduł liczby, jak i długość wektora. Zawsze jednak z kontekstu będzie jasne, co mamy na myśli.

2 Wprowadzenie

2.1 Układ trygonometryczny vs falka Haara

Zanim przejdziemy do rozważania układów falkowych zajmijmy się na moment klasycznym układem trygonometrycznym $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Jak wiadomo jest to baza ortonormalna w $L^2([0,1], dx)$. Jest to oczywiście baza bezwarunkowa, jak każda baza przestrzeni Hilberta. W ogólnych przestrzeniach L^p, $1 < p < \infty$ zachodzi natomiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1. *Układ $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ w przestrzeni $L^p([0,1], dx)$ jest*

(i) bazą Schaudera (przy ustawieniu elementów układu w porządku $\{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $1 < p < \infty$

(ii) bazą bezwarunkową wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Mimo prostoty sformułowania dowód powyższego twierdzenia jest daleki od elementarnego. Punkt (i) jest konsewkencją m.in. faktu, że operatory sum częsciowych

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi inx},$$

mają wspólnie ograniczone normy dokładnie wtedy gdy $1 < p < \infty$. Dowód punktu (ii) może być natomiast oparty na Twierdzeniu Orlicza o bezwarunkowej zbieżności szeregów w L^p (vide [2, Theorem 2.37]), które z kolei jest konsekwencją nierówności Chińczyna. Czytelnika zainteresowanego pełnym dowodem Twierdzenia 2.1 odsyłamy do [2, Theorem 4.25].

W przeciwieństwie do układu trygonometrycznego najprostszy układ falkowy , tj. układ Haara jest bazą bezwarunkową we wszystkich przestrzeniach L^p, $1 < p < \infty$.

Twierdzenie 2.2. *Niech* $\psi(x) = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ *będzie falką Haara. Wówczas układ falkowy* $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *jest bazą bezwarunkową przestrzeni* $L^p(\mathbb{R})$ *dla* $1 < p < \infty$.

Dowód Twierdzenia 2.2 (a dokładniej jego ogólniejszej wersji) jest zawarty np. w [4, Rozdział 8].

2.2 Falki i analiza wieloskalowa

Ponieważ chcemy zajmować się badaniem bezwarunkowości baz falkowych podamy teraz definicję falki (na $L^2(\mathbb{R}, dx)$).

Definicja 2.1. *Funkcję* $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ *nazywamy falką, gdy*

$$\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \{2^{j/2}\Psi(2^j x - k)(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

stanowi bazę ortonormalną w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, dx)$*. Układ* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *nazywamy wówczas układem falkowym dla falki* ψ.

Gdy rozważamy wymiary $n > 1$ falki zostają zastąpione przez tzw. zbiory falkowe.

Definicja 2.2. *Zbiór funkcji* $\{\psi^s : s = 1, \ldots 2^n - 1\} \subset L^2(\mathbb{R}^n, dx)$*, nazywamy zbiorem falkowym, gdy*

$$\{\psi^s_{j,k}(x)\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n,s=1,\ldots,2^n-1} = \{2^{nj/2}\Psi^s(2^j x - k)(x)\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n,s=1,\ldots,2^n-1}$$

stanowi bazę ortonormalną w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$*. Układ* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *nazywamy wówczas układem falkowym dla zbioru falkowego* $\{\psi^s\}_{s=1,\ldots,2^n-1}$.

Do tworzenia ogólnych układów falkowych na $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ będziemy stosować tzw. Analizę Wieloskalową (Multiresulotion Analsysi - MRA). Idea ta powstała w końcu lat 80-tych, a pochodzi od Stephane'a Mallata i Yves Meyer'a.

Definicja 2.3. *Analizą wieloskalową na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy ciąg domkniętych podprzestrzeni* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *przestrzeni* $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ *spełniający następujące warunki*

- *(a)* $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$
- *(b)* $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}$ *jest gęste w* $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$
- *(c)* $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} = \{0\}$
- *(d)* $f \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
- *(e) Istnieje funkcja* $\Phi \in V_0$*, zwana funkcją skalującą, taka, że układ* $\{\Phi(t-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbb{Z}^n}$ *jest bazą ortonormalną w* V_0

Wówczas rodzina $\{\phi_{m,k} = 2^{nm/2}\phi(2^m x - k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$ stanowi bazę ortonormalną na V_m, i możemy rozpatrywać rzuty ortogonalne na V_m, dane przez

$$P_m f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \phi_{m,k}\rangle.$$

Dla udowdonienia głównego twierdzenia musimy ograniczyć się do funkcji skalujących z klasy $\mathcal{RB}$, zdefiniowanych poniżej.

Definicja 2.4. *Mówimy, że funkcja $\Psi \in \mathcal{RB}$, jeśli istnieje radialnie malejąca funkcja $\eta \in L^1$, taka, że $|\Phi(x)| \leq \eta(x)$ oraz $\eta(0) < \infty$.*

Przy założeniu, że $\Phi \in \mathcal{RB}$, operatory P_m mogą być zapisane jako

$$P_m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_m(x,y) f(y)\, dy, \tag{2.1}$$

gdzie

$$P_m(x,y) = 2^{nm} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(2^m x - k)\overline{\Phi(2^m y - k)}.$$

Co więcej, operatory $P_m f$ mogą być również zapisane w terminach falek, mianowicie

$$P_m f(x) = \sum_{j \leq m, k, s} \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k}, \tag{2.2}$$

w sensie L^2.

W Definicji 2.3 o funkcji Φ nie zakłada się nic ponad (e). W pracy jednak będziemy się ograniczać do pewnej specjalnej klasy analiz wieloskalowych.

Definicja 2.5. *Mówimy, że analiza wieloskalowa jest r-regularna, jeśli dla wszystkich multiindeksów $|\alpha| \leq r$ funkcja skalująca Φ spełnia*

$$|\partial^\alpha \Phi(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Uwaga. Istnienie r-regularnych funkcji skalujących nie jest oczywiste. Przykłady to funkcje skalujące dla pewnej podklasy falek Meyera, a także funkcje skalujące dla falek Daubechies. Zainteresowanego czytelnika odsylamy do [4, Rozdział 4].

Analiza wieloskalowa jest ściśle związana ze zbiorami falkowymi. Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [4][Twierdzenie 6.10].

Twierdzenie 2.3. *Dla każdej analizy wieloskalowej na $\mathbb{R}^n$ istnieje zbiór falkowy związany z tą analizą wieloskalową, składający się z $2^n - 1$ funkcji $\psi^1, \ldots, \psi^{2^n-1}$. Co więcej, jeśli analiza wieloskalowa jest r-regularna, to zbiór falkowy można wybrać tak, aby*

$$|\partial^\alpha \Psi^s(x)| \leq C_{m,s}(1 + |x|)^{-m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad s = 1, \ldots, 2^n - 1.$$

Czytelnika zainteresowanego sposobem wyboru zbioru falkowego dla zadanej analizy wieloskalowej odsyłamy do [4][Rozdział 6].

3 Główne wyniki i pomocnicze lematy

W poniższej pracy skupimy się na dowodzie następującego twierdzenia z [1] (Tw. 4).

Twierdzenie 3.1. *Niech $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ będzie 1-regularną analizą wieloskalową z funkcją skalującą $\Phi \in \mathcal{RB}$. Niech $\{\psi^s : s = 1, \ldots 2^n - 1\}$ będzie zbiorem falkowym związanym z analizą wieloskalową $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Niech μ będzie dodatnią, skończoną na zbiorach zwartych, miarą Borelowską na $\mathbb{R}^n$. Ustalmy $p \in (1, \infty)$. Wówczas następujące warunki są równoważne*

a) ciąg $\{\psi^s_{j,k}(x) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \lambda = 1, \dots, 2^n - 1\}$ stanowi bazę bezwarunkową w przestrzeni $L^p(\mu)$ i funkcjonały $(\psi^s_{j,k})^*(f) = \langle f, \psi^s_{j,k}\rangle$ są ograniczone na $L^p(\mu)$,

b) μ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a z gęstością $w \in A_p$.

c) dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \lambda = 1, \dots, 2^n - 1$, $\|\psi^s_{j,k}\|_{L^p(\mu)} > 0$ oraz istnieją stałe $C_1 > 0$ i $C_2 > 0$ takie, że

$$C_1\|f\|_{p,\mu} \leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n, s=1,\dots,2^n-1} \left|\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle \psi^s_{j,k}\right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\mu} \leq C_2\|f\|_{p,\mu}.$$

Uwaga. Symbol $\langle f, g\rangle$ będzie dla nas zawsze oznaczał $\int f(x)g(x)\,dx$. Jesteśmy przede wszystkim zainteresowani pokazaniem równoważności $a)$ z $b)$, jednak warunek $c)$ będzie nam potrzebny w dowodzie implikacji $b) \Rightarrow a)$. Warunek $c)$ to właściwie nierówność typu Paleya-Litlewooda dla układu falkowego. Dowód Twierdzenia 3.1 opieramy na wynikach zawartych w [1]. Potrzebujemy jeszcze pewnego pomocniczego twierdzenia, wyrażonego w języku słabo dodatnich jąder całkowych zdefiniowanych poniżej.

Definicja 3.1. *Niech l_j będzie nierosnącym ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takich, że $l_j \to 0$, gdy $j \to \infty$, oraz $l_j \to \infty$, gdy $j \to -\infty$. Mówimy, że rodzina jąder $K_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest słabo dodatnia, gdy istnieje ciąg l_j jak powyżej i dodatnia stała C, taka, że*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x - y| < l_j\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : K_j(x, y) > C(l_{j+1})^{-n}\}.$$

Uwaga. Tak naprawdę będziemy używać tylko $l_j = \delta 2^{jM}$, dla pewych $\delta > 0$ i $M \in \mathbb{N}$. Twierdzenie , które jest kluczowe dla dowodu Twierdzenia 3.1 brzmi następująco.

Twierdzenie 3.2. *Niech $p \in (1, \infty)$. Niech L^∞_c będzie zbiorem ograniczonych funkcji o nośniku zwartym i niech μ będzie dodatnią, skończoną na zbiorach zwartych, miarą Borelowską na $\mathbb{R}^n$. Zdefiniujmy T_j jako operatory całkowe ze słabo dodatnimi jądrami całkowymi K_j, tj.*

$$T_j f(x) = \int K_j(x, y) f(y)\,dy, \qquad f \in L^\infty_c.$$

Załóżmy, że rodzina T_j jest jednostajnie słabego typu (p, p) względem miary μ, tzn. istnieje stała $C > 0$, niezależna od j i taka, że

$$(\mu(\{x : |T_j f(x)| > \lambda\}))^{1/p} \leq C\lambda^{-1} \int |f|^p\,d\mu = C\lambda^{-1}\|f\|_{p,\mu}, \qquad \lambda > 0, \quad f \in L^\infty_c. \tag{3.1}$$

Wówczas miara μ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a z gęstością $w \in A_p$.

Dowód. Postępujemy jak w [1, Theorem 1]. Pokażemy najpierw, że μ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Wykorzystamy w tym celu (3.1) oraz fakt, że słaba dodatniość jąder K_j implikuje, że jeśli x i y są odpowiednio (proporcjonalnie do l_j) blisko, to $K_j(x, y)$ musi być duże (proporcjonalnie do $C(l_{j+1})^{-n}$). Niech $|E| = 0$ i ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ μ jest regularna (bo jest skończona na zbiorach zwartych), to istnieje zbiór otwarty $E \subset U$ taki, że $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$. Zbiór U można zapisać jako przeliczalną sumę rozłącznych kostek diadycznych Q_i o średnicach $\mathrm{diam}(Q_i) = d_i$. Niech l_j będzie odpowiednim ciągiem z Definicji 3.1 stowarzyszonym z jądrami K_j. Z założeń o ciągu l_j, dla każdego i istnieje j_i takie, że $l_{j_i+1} \le d_i \le l_{j_i}$. Wówczas, jeśli $x, y \in Q_i$, to $|x-y| \le l_{j_i}$, a stąd $K_{j_i}(x,y) \ge C(l_{j_i+1})^{-n}$. Zatem, korzystając tego, że $|E| = 0$ (ostatnia nierówność poniżej), dla $x \in Q_i$,

$$|T_{j_i}\chi_{Q_i\setminus E}(x)| = \int_{Q_i} K_{j_i}(x,y)\chi_{Q_i\setminus E}(y)\,dy \ge C(l_{j_i+1})^{-n}|Q_i \setminus E| \ge Cd_i^{-n}|Q_i| = c_n,$$

gdzie c_n jest stałą zależną tylko od wymiaru. Nierówność powyżej wraz z założeniem (3.1) implikuje, że

$$\mu(Q_i) \le \mu(\{x : |T_{j_i}\chi_{Q_i\setminus E}(x)| \ge c_n\}) \le Cc_n^{-p}\|\chi_{Q_i\setminus E}\|_{p,\mu}^p = Cc_n^{-p}\mu(Q_i \setminus E).$$

Stąd już łatwo otrzymujemy

$$\mu(U) = \sum_i \mu(Q_i) \le Cc_n^{-p}\sum_i \mu(Q_i \setminus E) < Cc_n^{-p}\varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy stąd, że $\mu(E) = 0$. Z twierdzenia Radona-Nikodyma wnosimy istnienie lokalnie całkowalnej fukcji w takiej, że $d\mu(x) = w(x)\,dx$.

Pokażemy teraz, że $w \in A_p$. Niech Q będzie dowolną kostką diadyczną i niech j_0 będzie takie, że $l_{j_0+1} \le diam(Q) \le l_{j_0}$. Niech dla $\delta > 0$, $\tilde{w}_\delta = (w+\delta)^{-\frac{1}{p-1}}$. Wówczas ponieważ $x, y \in Q$, to $|x-y| \le l_{j_0}$, mamy

$$|T_{j_0}(\tilde{w}_\delta\chi_Q)(x)| = \left|\int_Q K_{j_0}(x,y)\tilde{w}_\delta(y)\,dy\right| > C(l_{j_0+1})^{-n} \ge c_n|Q|^{-1}\int_Q (w+\delta)^{-\frac{1}{p-1}} \equiv \lambda.$$

Z nierówności (3.1) wynika teraz, że

$$\begin{aligned}\int_Q w &= \mu(Q) \le \mu(\{x : |T_{j_0}(\tilde{w}_\delta\chi_Q)(x)| > \lambda\}) \\ &\le C\lambda^{-p}\int_Q (w+\delta)^{-\frac{p}{p-1}} w \le Cc_n|Q|^p\left(\int_Q (w+\delta)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

Z dowolności $\delta > 0$ i twierdzenia Lebsegue'a o zbieżności monotonicznej dostajemy stąd, że

$$\int_Q w\left(\int_Q (w+\delta)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \le Cc_n|Q|^p.$$

Zatem $w \in A_p$. □

4 Dowód Twierdzenia 3.1

I. Dowód a) ⇒ b). Ponieważ układ falkowy jest ortogonalny, z *a*) wynika, że

$$f = \sum_{j,k,s}\langle f, \psi_{j,k}^s\rangle\psi_{j,k}^s, \qquad f \in L^p(\mu)$$

gdzie szereg powyżej jest zbieżny w $L^p(\mu)$. Istotnie, z a) wiemy, że

$$f = \sum_{j,k,s} \alpha_{j,k,l} \psi^s_{j,k}.$$

Korzystając teraz z ciągłości $\langle \psi^s_{j,k}, \cdot \rangle$ i ortonormalności układu falkowego, $\alpha_{j_0,k_0,l_0} = \langle f, \psi^{s_0}_{j_0,k_0} \rangle$.

Pokażemy teraz, że z a) wynika, że $\mu(E) = 0 \iff |E| = 0$, tzn. μ jest równoważna mierze Lebesgue'a. Istotnie, jeśli $\mu(E) = 0$, to

$$0 = \chi_E = \sum_{j,k,s} \langle \chi_E, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k}, \qquad \mu - \text{p. w.}.$$

Z jednoznaczości przedstawienia w bazie bezwarunkowej $\langle \chi_E, \psi^s_{j,k} \rangle = 0$, dla wszystkich j, k, s. To oznacza, że χ_E jest ortogonalna w $L^2(dx)$ do całego układu falkowego, zatem $\chi_E = 0$ w $L^2(dx)$ i stąd $|E| = 0$. Odwrotnie, załóżmy teraz, że $|E| = 0$. Wówczas

$$\chi_E = \sum_{j,k,s} \langle \chi_E, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k} = 0, \qquad \mu - \text{p. w.}.$$

Zatem $\mu(E) = 0$.

Z a) i Tw. 6.4 z [2] wynika teraz, że operatory sum częściowych

$$S_m f = \sum_{j \le m, k, s} \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k}$$

mają wspólnie ograniczone normy na $L^p(\mu)$. Istotnie, operator S_m można zapisać jako

$$S_m f = \sum_{j,k,s} \chi_{\{(j,k,s)\,:\,j \le m\}} \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k}.$$

Przy założeniu a), $S_m f = P_m f$, dla $f \in L^\infty_c$, gdzie S_m jest zdefiniowane wyżej na $L^p(\mu)$, zaś P_m jest zdefiniowane na L^2 przez (2.2). Istotnie, jeśli $f \in L^\infty_c$, to $f \in L^2 \cap L^p(\mu)$, a stąd ponieważ μ jest równoważne mierze Lebesgue'a, $S_m f(x) = P_m f(x)$, p.w.. A zatem

$$\|P_m f\|_{p,\mu} \le C \|f\|_{p,\mu}, \qquad f \in L^\infty_c$$

ze stałą $C > 0$, niezależną od m.

Z nierówności powyżej i faktu, że słaby typ implikuje mocny widzimy, że P_m spełniają (3.1) z Twierdzenia 3.2. Jeśli więc pokażemy, że ich jądra całkowe $P_m(x, y)$ zdefinowane przez (2.1) są słabo dodatnie, to dowód implikacji a) $\Rightarrow$ b) będzie zakończony. W tym celu wystarczy pokazać, że dla pewnych $\varepsilon, \delta > 0$, rodzina $P_0(x, y)$ spełnia

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \,:\, |x - y| < \delta\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \,:\, P_0(x, y) > \varepsilon\}. \tag{4.1}$$

Istotnie, jeśli (4.1) zachodzi, to po przeskalowaniu widzimy, że $\{P_m(x, y)\}$ jest rodziną słabo dodatnich jąder z $l_m = \delta 2^{-m}$, $C = 2^{-n} \delta^n \varepsilon$.

Skupimy się teraz na pokazaniu (4.1). Ponieważ $\Phi \in \mathcal{RB}$ i Φ jest 1-regularna, to szereg $P_0(x, y)$ jest zbieżny jednostajnie na kostce $K_2 = [-2, 2]^n$ i określa na niej funkcje ciągłą. Funkcja Φ jest 1-regularna, zatem $\Phi \in L^1 \cap L^2$. Z prostego uogólnienia [4][Stwierdzenie 3.17] na $\mathbb{R}^n$ i z ciągłości Φ wynika teraz, że $|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(x-k)| = 1$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Stąd wnosimy, że $P_0(x,x) \geq \alpha_0 > 0$ dla $x \in K_2$. Istotnie, jeśli $x \in K_2$, to dla pewnego $k_0 = k_0(x)$, $|\Phi(x-k_0)| > 0$, zatem $P_0(x,x) > 0$, dla $x \in K_2$. Z ciągłości P_0 wynika stąd, że $P_0(x,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\Phi(x-k)|^2 \geq \alpha_0 > 0$ dla $x \in K_2$. Co więcej, $P_0(x+k, x+k) = P_0(x,x)$, dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}^n$, a stąd $P_0(x,x) \geq \alpha_0 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Weźmy teraz $0 < \delta < \alpha_0$ i niech $E_\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : P_0(x,y) > \delta\}$. Ponieważ P_0 jest ciągła oraz $P_0(x,x) > \alpha_0$, to E_δ jest zbiorem otwartym zawierającym przekątną $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Zachodzi także $(x,y) \in E_\delta \iff (x+k, y+k) \in E_\delta$. Stąd, po krótkim zastanowieniu wnosimy, że odległość ε zbioru Δ od dopełnienia E_δ^c jest większa od zera, co implikuje (4.1). Dowód I. jest więc zakończony. $\square$

I. Dowód b) $\Rightarrow$ c). Aby pokazać te implikacje skorzystamy w standardowy sposób z teorii operatorów Calderóna-Zygmunda oraz nierówności Chińczyna. Udowodnimy mianowicie, że dla każdego ciągu $\varepsilon^s_{j,k} = \pm 1$, i dla każdego $N > 0$, operatory

$$T_{\varepsilon,N} f(x) = \sum_{|j|+|k|\leq N, s=1,\ldots,2^n-1} \varepsilon^s_{j,k} \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k}(x) \tag{4.2}$$

są operatorami Calderóna-Zygmunda stowarzyszonymi z jądrami

$$K_{\varepsilon,N}(x,y) = \sum_{|j|+|k|\leq N, s} \varepsilon^s_{j,k} \psi^s_{j,k}(x) \overline{\psi^s_{j,k}}(y),$$

takimi, że

$$|\nabla K_{\varepsilon,N}(x,y)| \leq C|x-y|^{-d-1}, \tag{4.3}$$

tzn. stała w oszacowaniach standardowych Calderóna-Zygmunda jąder $K_{\varepsilon,N}$ nie zależy od ε, N. Załózmy na moment, że $T_{\varepsilon,N}$ są operatorami Calderóna-Zygmunda, z jądrami spełniającymi (4.3). Wówczas z ograniczoności operatorów Calderóna-Zygmunda na przestrzeniach A_p dostaniemy, że

$$\|T_{\varepsilon,N} f\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}.$$

Z ostatniej nierówności, stosując standardową metodę bazującą na nierówności Chińczyna,

$$\left\| \left(\sum_{|j|+|k|\leq N, s=1,\ldots,2^n-1} \left|\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle \psi^s_{j,k}\right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \leq C_2 \|f\|_{L^p(w)}.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej wnosimy stąd lewą nierówność w c), tj. pokazaliśmy, że, jeśli $w \in A_p$, to

$$\left\| \left(\sum_{j,k,s} \left|\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle\right|^2 |\psi^s_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_p. \tag{4.4}$$

Prawą nierówność w c) możemy otrzymać przez dualność. Istotnie, ponieważ $\psi^s_{j,k}$ jest bazą ortonormalną w L^2, to

$$\left\| \left(\sum_{j,k,s} \left| \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Zatem wyrażenia

$$B_\Psi(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j,k,s} \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k} \right) \left(\sum_{j,k,s} \langle g, \psi^s_{j,k} \rangle \psi^s_{j,k} \right) dx \qquad \text{oraz} \quad \langle f, g \rangle \quad (4.5)$$

zadają iloczyny skalarne na L^2 indukujące te same normy. Z tożsamości polaryzacyjnej $B_\Psi(f,g) = \langle f, g \rangle$. Teraz dopisując $w^{1/p}$ przy pierwszym, i $w^{-1/p}$ przy drugim czynniku pod całką w (4.5), a następnie korzystając z nierówności Höldera z p i p', otrzymujemy dla $f \in L^2 \cap L^p(w)$, $g \in L^2 \cap L^{p'}(w)$,

$$|\langle f, g \rangle| \leq |B_\Psi(f,g)| \leq \left\| \left(\sum_{j,k,s} \left| \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \left\| \left(\sum_{j,k,s} \left| \langle g, \psi^s_{j,k} \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p'}(w^{-p'/p})}.$$

Zauważmy teraz, że $w \in A_p \iff w^{-p'/p} \in A_{p'}$, zatem z udowodnionej wcześniej nierówności (4.4) wynika, że

$$|\langle f, g \rangle| \leq C \left\| \left(\sum_{j,k,s} \left| \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \|g\|_{L^{p'}(w^{-p'/p})}.$$

Z powyższego, biorąc gw w miejsce g łatwo już otrzymać, że

$$\left| \int f g \, w \right| \leq C \left\| \left(\sum_{j,k,s} \left| \langle f, \psi^s_{j,k} \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \|g\|_{L^{p'}(w)}.$$

Jeśli teraz weźmiemy supremum po wszystkich $g \in L^2 \cap L^{p'}(w)$, to otrzymamy prawą nierówność w c).

Pozostaje pokazać (4.3). Ponieważ Ψ^s jest 1-regularna możemy różniczkować szereg w (4.3) wyraz po wyrazie. Pokażemy, że

$$|\partial_{x_1} K_{\varepsilon,N}(x,y)| = \sum_{|j|+|k| \leq N, s=1,\ldots,2^n-1} |\partial_{x_1} \psi^s_{j,k}(x) \psi^s_{j,k}(y)| \leq C|x-y|^{-n-1}. \quad (4.6)$$

Dowód oszacowania pochodnych po innych współrzędnych jest analogiczny. Zbadamy najpierw $I_s(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\partial_{x_1} \Psi^s(x-k) \Psi^s(y-k)|$. Mamy

$$|I_s(x,y)| \leq \sum_X \cdots + \sum_Y \cdots + \sum_R \cdots = I_X + I_Y + I_R,$$

gdzie $X = \{k \in \mathbb{Z}^n : 2|x-k| \leq |x-y|\}$, $Y = \{k \in \mathbb{Z}^n : 2|y-k| \geq |x-y|\}$, $Z = X^c \cap Y^c \cap \mathbb{Z}^n$. Zauwazmy, że jeśli $k \in X$, to $|y-k| \geq |x-y| - |x-k| \geq |x-y|/2$. Zatem z 1-regularności Ψ wynika, że dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$, $l \geq n+2$,

$$I_X \leq C_l(1+|x-y|)^{-l} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|x-k|)^{-l} \leq C_l(1+|x-y|)^{-l}.$$

i analogicznie $I_Y \leq C_l(1+|x-y|)^{-l}$. Dla oszacowania I_Z stosujemy nierówność Schwarza

$$\begin{aligned}
I_Z &\leq \sum_Z (1+|x-k|)^{-l}(1+|y-k|)^{-l} \\
&\leq \left(\sum_{k\,:\,2|x-k|>|x-y|} (1+|x-k|)^{-2l} \right)^{1/2} \times \left(\sum_{k\,:\,2|y-k|>|x-y|} (1+|y-k|)^{-2l} \right)^{1/2} \\
&\leq C \sum_{|k|\geq|x-y|} (1+|k|)^{-2l} \leq C(1+|x-y|)^{-2l+n} \leq C(1+|x-y|)^{-l}.
\end{aligned}$$

pokazaliśmy więc, że dla dowolnego $l \geq n+2$, $I_s(x,y) \leq C(1+|x-y|)^{-l}$. Stąd, poniewaz $\partial_{x_1}\psi^s_{j,k}(x) = 2^{nj/2+j}(\partial_{x_1}\Psi^s)(2^jx-k)$, możemy oszacować

$$\begin{aligned}
|\partial_{x_1}K_{\varepsilon,N}(x,y)| &\leq \sum_{s=1,\dots,2^n-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{nj+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |(\partial_{x_1}\Psi^s)(2^jx-k)\Psi^s(2^jy-k)| \\
&\leq \sum_{s=1,\dots,2^n-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(n+1)j}|I_s(2^jx, 2^jy)| \leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(n+1)j}(1+2^j|x-y|)^{-l}.
\end{aligned}$$

Niech j_0 będzie takie, że $2^{j_0} \leq |x-y|^{-1} \leq 2^{j_0+1}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
&|\partial_{x_1}K_{\varepsilon,N}(x,y)| \leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(n+1)j}(1+2^j|x-y|)^{-l} \\
&= C\sum_{j\leq j_0} 2^{(n+1)j}(1+2^j|x-y|)^{-l} + C\sum_{j>j_0} 2^{(n+1)j}(1+2^j|x-y|)^{-l} \\
&\leq C\sum_{j\leq j_0} 2^{(n+1)j} + C\sum_{j>j_0} 2^{(n+1)j}2^{(-j+j_0+1)l} \leq C(2^{(n+1)j_0} + 2^l2^{j_0l}2^{(n+1-l)j_0}) \\
&= C2^{(n+1)j_0} \leq C|x-y|^{-n-1},
\end{aligned}$$

gdzie dla zsumowania drugiego szeregu w pierwszej równości wykorzystaliśmy fakt, że $l \geq n+2$. Podsumowując, udowodniliśmy (4.3), zatem dowód implikacji $b) \Rightarrow c)$ jest zakończony. $\square$

I. Dowód $c) \Rightarrow a)$. Łatwo zauważyc, że $\psi^s_{j,k} \in L^p(d\mu)$. Istotnie, ponieważ $\{\psi^s_{j,k}\}$ jest bazą ortonormalną w L^2, to istnieje N, że $C_N = \int_{|x|\leq N} |\psi^s_{j,k}(x)|\,dx > 0$. Połóżmy teraz $f = \operatorname{sgn}(\psi^s_{j,k})\chi_{B(0,N)}$, gdzie sgn funkcję znaku. Stosując prawą stronę warunku c) dla pojedynczego składnika sumy, otrzymujemy $C_N\|\psi^s_{j,k}\|_{p,\mu} \leq C\mu(B(0,N))^{1/p}$, a zatem $\|\psi^s_{j,k}\|_{p,\mu} \leq (C'_N)^{-1}\mu(B(0,N))^{1/p}$. Z c) wynika również, że dla każdego j,k,s funkcjonały $f \to \langle f, \psi^s_{j,k}\rangle$ są ograniczone na $L^p(\mu)$. Istotnie, stosując znów prawą stronę warunku c) dla pojedynczego składnika sumy, otrzymujemy $|\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle| \leq \|\psi^s_{j,k}\|^{-1}_{p,\mu}\|f\|_{p,\mu}$.

Stosując nierówność Chińczyna, możemy wywnioskować z c), że operatory $T_{\varepsilon,N}$ zdefiniowane przez (4.2) spełniają

$$\|T_{\varepsilon,N}f\|_{p,\mu} \le C \left\| \sum_{|j|+|k|\le N, s=1,\dots,2^n-1} |\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle|^2 |\psi^s_{j,k}|^2 \right\|_{p,\mu} \le C\|f\|_{p,\mu}, \tag{4.7}$$

oraz

$$\|T_{\varepsilon,N} - T_{\varepsilon,M}f\|_{p,\mu} \le C \left\| \sum_{M\le|j|+|k|\le N, s=1,\dots,2^n-1} |\varepsilon^s_{j,k}\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle|^2 |\psi^s_{j,k}|^2 \right\|_{p,\mu}. \tag{4.8}$$

Nierówność (4.7) oznacza, że dla każdego wyboru znaków $\varepsilon^s_{j,k}$ operatory sum częściowych $T_{\varepsilon,N}$ mają wspólnie ograniczone normy. Z nierówności (4.8), stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (z majorantą $\sum_{j,k,s} |\varepsilon^s_{j,k}| \langle f, \psi^s_{j,k}\rangle|^2 |\psi^s_{j,k}|^2)$ widzimy, że dla każdego wyboru znaków $\varepsilon^s_{j,k}$ szereg definiujący $T_{\varepsilon,N}$ jest zbieżny.

Dla pokazania, że układ falkowy $\{\psi^s_{j,k}\}$ jest bazą bezwarunkową pozostaje nam więc pokazać, że jest bazą Schaudera, tj. $f = \sum_{j,k,s}\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle \psi^s_{j,k}$, gdzie szereg zbiega w $L^p(\mu)$. Niech $T_N = T_{1,N}$, tj. ε jest tu ciągiem stale równym 1. Korzystając z c) (pierwsza nierówność poniżej), ortogonalności układu falkowego i ciągłości w $L^p(\mu)$ funkcjonałów $\langle \cdot, \psi^s_{j,k}\rangle$ (równość poniżej), oraz twierdzenia Lebsegue'a o zbieżności zmajoryzowanej (druga nierówność poniżej) otrzymujemy,

$$\lim_{N\to\infty} \|T_N f - f\|_{p,\mu} \le \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{j,k,s} |\langle T_N f - f, \psi^s_{j,k}\rangle|^2 |\psi^s_{j,k}|^2 \right\|_{p,\mu}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{|j|+|k|>N,s} |\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle|^2 |\psi^s_{j,k}|^2 \right\|_{p,\mu} \le \left\| \lim_{N\to\infty} \sum_{|j|+|k|>N,s} |\langle f, \psi^s_{j,k}\rangle|^2 |\psi^s_{j,k}|^2 \right\|_{p,\mu} = 0$$

□

Podziękowania. Dziękuję prof. dr. hab. Leszkowi Skrzypczakowi za zasugerowania tematu pracy semestralnej i życzliwość okazaną mi podczas odbywania stażu na Uniwersytecie Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Literatura

[1] H. A. Aimar, A. L. Bernardis, and F. J. Martín-Reyes, *Multiresolution approximations and wavelet bases of weighted L_p spaces*, Jour. Four. Anal. App. 9 (2003) 5, 497-510.

[2] C. Heil, *Basis theory primer*, Springer Basel Ag, 2010.

[3] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge studies in Advanced Math. 25, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[4] P. Wojtaszczyk, *Teoria Falek*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000.