Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Grzegorz Zborowski

Nowe rezultaty dotyczące $\mathcal{A}$- i $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości

Some new results concerning $\mathcal{A}$- and $\mathcal{AC}^{\perp}$-manifolds

Rozprawa doktorska pod kierunkiem
dr hab. Włodzimierza Jelonka

Lublin 2015

Spis treści

Pracę tę dedykuję swojej żonie, Natalii.

Wstęp

Wśród rozmaitości riemannowskich jednymi z najintensywniej badanych są rozmaitości Einstein'a. Rozmaitość Riemann'a (M, g) nazywamy rozmaitością Einstein'a, jeżeli tensor krzywizny Ricci'ego jest stałą wielokrotnością tensora metrycznego. Dobrym źródłem wiedzy na temat tych rozmaitości jest książka [Be]. Ponieważ tensor metryczny jest równoległy względem koneksji Levi'ego-Civity, to każda rozmaitość Einstein'a ma równoległy tensor Ricci'ego. Co więcej, każda rozmaitość, której tensor Ricci'ego jest równoległy względem tej koneksji ma stałą krzywiznę skalarną. W swojej pracy [Gra] A. Gray podał definicje dwóch klas rozmaitości, uogólniając warunek równoległości tensora Ricci'ego w tym sensie, że obie klasy mają stałą krzywiznę skalarną, a ich przecięcie daje rozmaitości z równoległym tensorem Ricci'ego.

Ściśle mówiąc, Gray zdefiniował tzw. $\mathcal{A}$-*rozmaitości* jako takie rozmaitości Riemann'a (M, g), których tensor Ricci'ego Ric jest cyklicznie równoległy, czyli spełnia

$$\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z) + \nabla_Y \operatorname{Ric}(Z, X) + \nabla_Z \operatorname{Ric}(X, Y) = 0,$$

gdzie ∇ jest koneksją Levi-Civity metryki g, a X, Y, Z są dowolnymi polami wektorowymi na M. Drugi warunek, definiujący $\mathcal{B}$-*rozmaitości* mówi, że tensor Ricci'ego Ric spełnia

$$\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z) = \nabla_Y \operatorname{Ric}(X, Z).$$

Co więcej, w swojej pracy Gray wykazał, że istnieją rozmaitości zarówno w klasie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, które nie mają równoległego tensora Ricci'ego.

Dodatkowo, w jego pracy pojawia się pojęcie $\mathcal{AC}^{\perp}$-*rozmaitości.* Tensor Ricci'ego takiej rozmaitości musi spełniać

$$\begin{aligned} &\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z) + \nabla_Y \operatorname{Ric}(Z, X) + \nabla_Z \operatorname{Ric}(X, Y) \\ &= \frac{2}{n+2} \left(d\tau(X) g(Y, Z) + d\tau(Y) g(X, Z) + d\tau(Z) g(X, Y) \right), \end{aligned}$$

gdzie τ jest krzywizną skalarną metryki g.

Przedmiotem zainteresowania niniejszej rozprawy będą $\mathcal{A}$-rozmaitości i $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości.

Podziękowania

Chcę podziękować swojej żonie za wsparcie i motywację w czasie pisania pracy. Dziękuję również moim rodzicom i teściom za pomoc w trakcie studiów. Chciałbym też wyrazić podziękowania dla mojego promotora - dr hab. Włodzimierza Jelonka - za rady i sugestie do mojej pracy naukowej.

Abstract

The present thesis' main objective is to give a presentation of recent results concerning the so-called $\mathcal{A}$- and $\mathcal{AC}^{\perp}$-manifolds. In order to present the topic concisely we start with the notion of a conformal Killing tensor on a Riemannian manifold (M,g) with the Levi-Civita connection ∇. A conformal Killing tensor can be thought of as a generalization of a conformal vector field. Let K be a symmetric tensor field of type $(0,2)$. We say that K is a *conformal Killing tensor* if and only if there exists a 1-form P such that the following condition is satisfied

$$\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) = \mathcal{C}_{X,Y,Z}P(X)g(Y,Z), \tag{1}$$

where $\mathcal{C}_{X,Y,Z}$ denotes a cyclic sum over some local vector fields X, Y and Z. When P is identically 0 we say that K is a Killing tensor field. This last notion is a generalization of a Killing vector field. One easily sees that every parallel tensor field T (i.e. ∇T is identically zero) is a Killing tensor field. The first part of this thesis gives a presentation of conformal Killing tensor fields. We bring some known basic results together and give some generalizations, which will be of use in the later part.

At the end of the first chapter we give a definition of the main object of interest - that is of an $\mathcal{AC}^{\perp}$-manifold. We say that a Riemannian manifold (M,g) is an $\mathcal{AC}^{\perp}$-manifold, when its Ricci tensor is a conformal tensor. In the special case, when the Ricci tensor is a Killing tensor we say that (M,g) is an $\mathcal{A}$-manifold. Observe that each Einstein manifold or a product of such manifolds is automatically an $\mathcal{A}$-manifold with parallel Ricci tensor. First examples with non-parallel Ricci tensor are due to A. Gray ([Gra]) and W. Jelonek ([Jel95]). The first is a homogeneous metric on a sphere, and the second is a non-homogeneous metric on a S^1-principal bundle over an Einstein manifold.

The second chapter of this thesis gives a generalization of the above-mentioned example by Jelonek. We construct an $\mathcal{A}$-manifold on a principal bundle with fibre being a r-dimensional torus and basis a product of Einstein manifolds. The result is given in Theorem 2.5. As every Einstein manifold is a special case of an $\mathcal{A}$-manifold, this results also generalize the result of M. Wang and W. Ziller ([W-Z]), where a Einstein metric was constructed on a

r-torus bundle over a product of Einstein manifolds. In fact, we follow this example in our construction as well as Jelonek's.

In chapter 3 we present a link with a very interesting object known as conformal Killing p-form. Let φ be a differential p-form on a Riemannian manifold (M, g). We call it a conformal Killing p-form if it satisfies

$$\nabla_X \varphi = \frac{1}{p+1} X \lrcorner d\varphi - \frac{1}{n-p+1} X \wedge \delta\varphi, \tag{2}$$

for any vector field X, where n is the dimension of M. One can prove (see 1.5) that a tensor field K_φ defined by

$$K_\varphi(X, Y) = g(X \lrcorner \varphi, Y \lrcorner \varphi) \tag{3}$$

is a conformal Killing tensor field, if φ is a conformal Killing p-form. Using this we give new proof of the fact that every weakly self-dual Kähler manifolds and weakly Bochner-flat manifolds is an $\mathcal{AC}^\perp$-manifold. Moreover, some have non-parallel Ricci tensors. Explicit examples are given in [Jel02] and [Jel09]. The rest of the chapter is dedicated to generalization of a construction from chapter 1 to a $\mathcal{A}$-base using conformal Killing forms.

In the last chapter we construct an $\mathcal{AC}^\perp$-manifold on a S^2-bundle over a Kähler-Einstein surface. The motivation for this construction comes from the work of M. Wang and J. Wang in [W-W]. The construction of this example boils down to proving the existence of solutions to differential equations satisfying some boundary values.

Rozdział 1

Informacje wstępne

W tym rozdziale przypomnimy podstawowe pojęcia i konwencje, które są niezbędne do przedstawienia wyników, znajdujących się w dalszych częściach pracy.

1.1. Pojęcia podstawowe i konwencje

Niech M będzie gładką rozmaitością różniczkową. Jeżeli nie jest powiedziane inaczej, to przyjmujemy, że każdy obiekt na M jest gładki. Przez T_xM oraz TM będziemy oznaczać odpowiednio przestrzeń styczną do M w punkcie $x \in M$ oraz wiązkę styczną do M. Co więcej, niech T^*M oznacza przestrzeń dualną do TM. Przez $\mathcal{X}(M)$ oznaczamy przestrzeń lokalnych cięć wiązki TM identyfikowaną z algebrą pól wektorowych na M z nawiasem Lie'go pól X, Y oznaczanym przez $[X, Y]$. Wiązkę tensorów typu (k, l) oznaczamy przez $T^{k,l}M$, ściśle mówiąc

$$T^{k,l}M = TM \otimes \ldots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M,$$

gdzie TM pojawia się k-krotnie, a T^*M – l-krotnie. Wiązkę lokalnych cięć $T^{k,l}M$, czyli pól tensorowych typu (k, l) oznaczamy przez $\mathcal{T}^{k,l}M$. Jeżeli nie będzie to powodowało nieporozumień, będziemy używali słowa tensor zamiennie z polem tensorowym. Przez Λ^pM oraz $\Omega^p(M)$ oznaczamy odpowiednio wiązkę p-form na M oraz przestrzeń lokalnych cięć tej wiązki, które będziemy nazywali różniczkowalnymi p-formami na M. Co więcej, przez L_X oznaczamy różniczkowanie Lie'go wzdłuż pola X. Dodatkowo jeżeli V jest dowolną wiązką nad rozmaitością M to przez $\Gamma(V)$ oznaczamy przestrzeń lokalnych cięć tej wiązki.

Parę (M, g) nazywamy *rozmaitością Riemann'a* wtedy i tylko wtedy, gdy g jest polem tensorowym typu $(0, 2)$, które zawężone do przestrzeni stycznej w punkcie $x \in M$ jest iloczynem skalarnym na T_xM. Pole tensorowe g nazywamy *metryką riemannowską*. Przez ∇^g oznaczamy koneksję Levi'ego-Civit'y metryki g. Gdy nie będzie to prowadzić do nieporozumień, będziemy opuszczać superskrypt. Krzywizną koneksji ∇ nazywamy pole tensorowe R typu $(1,3)$ dane na dowolnych polach wektorowych X, Y oraz Z przez

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{1.1}$$

Z kolei *krzywizną Riemann'a* nazywamy pole tensorowe typu $(0,4)$, również oznaczane przez R, zdefiniowane przez $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ dla dowolnych pól wektorowych X, Y, Z i W. Podobnie dla dowolnego pola tensorowego S typu $(1,1)$ będziemy oznaczać tą samą literą pole tensorowe typu $(0,2)$ zdefiniowane przez $S(X,Y) = g(SX,Y)$.

Warto zauważyć, że tensor metryczny g można przedłużyć na pola tensorowe oraz formy różniczkowe w naturalny sposób.

Niech $\{E_i\}_{i=1}^n$ będzie lokalną bazą ortonormalną TM. Dla dowolnych pól wektorowych X i Y definiujemy *tensor krzywizny Ricci'ego* przez

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^n R(E_i, X, Y, E_i) \tag{1.2}$$

oraz krzywiznę skalarną scal jako ślad tensora Ricci'ego względem metryki g: $\mathrm{scal} = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}$.

Dla dowolnego pola tensorowego K typu $(1,k)$ na (M,g) możemy zdefiniować jego dywergencję $\mathrm{div}K$ względem metryki g jako pole tensorowe typu $(0,k)$ dane przez

$$\mathrm{div}K(X_1,\ldots,X_k) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} K(X_1,\ldots,X_k), E_i),$$

gdzie E_i są elementami pewnej bazy ortonormalnej na (M,g), X_1, …, X_k są dowolnymi polami wektorowymi na M, a n jest wymiarem M. Każdy tensor T spełniający $\mathrm{div}T = 0$ nazywamy *harmonicznym*.

Metryka riemannowska g na rozmaitości M pozwala nam dla każdego pola wektorowego X zdefiniować dualną do niego 1-formę różniczkową $X^\flat$ wzorem $X^\flat(Y) = g(X,Y)$ dla dowolnego pola wektorowego Y na M. W dalszej część nie będziemy rozróżniać między X i dualną 1-formą różniczkową $X^\flat$ i oba obiekty będziemy oznaczać przez X.

Dla form różniczkowych mamy dwie operacje iloczynu: iloczyn zewnętrzny $\wedge$ oraz iloczyn wewnętrzny $\lrcorner$ rozumiany jako kontrakcja z polem wektorowym. Ściśle mówiąc, niech α będzie k-formą różniczkową oraz niech X, X_1, …, X_{k-1} będą polami wektorowymi na (M,g). Definiujemy

$$X \lrcorner \alpha(X_1,\ldots,X_{k-1}) = \alpha(X, X_1,\ldots,X_{k-1}).$$

Dodatkowo zachodzi $g(X \lrcorner \alpha, \beta) = g(\alpha, X \wedge \beta)$, gdzie α jest $k+1$-formą różniczkową, β jest k-formą różniczkową, a g rozumiemy jako rozszerzenie metryki riemannowskiej g na przestrzeń k-form.

Następnie mamy na formach różniczkowych operator różniczkowania zewnętrznego d i ko-różniczkowania δ. Formę różniczkową α taką, że $d\alpha = 0$ nazywamy *zamkniętą*, a jeżeli $\delta\alpha = 0$ to mówimy, że α jest ko-zamknięta. Jeżeli α jest jednocześnie zamknięta i ko-zamknięta, to mówimy, że α jest harmoniczna. Zachodzą następujące związki tych operatorów z pochodną kowariantną, które można przyjąć jako definicję tych operatorów:

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} E_i \wedge \nabla_{E_i}\alpha, \quad \delta\alpha = -\sum_{i=1}^{n} E_i \lrcorner \nabla_{E_i}\alpha,$$

gdzie $\{E_i\}_{i=1}^n$ jest lokalną bazą ortonormalną na rozmaitości (M, g) wymiaru n. Co więcej pokazuje się, że dla dowolnej k-formy różniczkowej α i $k+1$-formy różniczkowej β zachodzi

$$g(d\alpha, \beta) = g(\alpha, \delta\beta).$$

Mówi się, że d i δ są operatorami sprzężonymi do siebie względem rozszerzenia metryki g na k-formy.

Ostatnim ważnym operatorem na formach różniczkowych jest operator Hodge'a. Przypuśćmy, że M jest zorientowana i niech dV oznacza jej formę objętości. Operator Hodge'a $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ definiuje się wzorem

$$\alpha \wedge *\beta = g(\alpha, \beta) dV,$$

dla dowolnych k-form różniczkowych α i β. Operator Hodge'a ma następującą własność

$$**\alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha,$$

gdzie α jest k-formą różniczkową, a n jest wymiarem rozmaitości M.

Pole tensorowe J typu $(1,1)$ na M spełniające $J^2 = -\mathrm{id}_{TM}$ nazywamy *strukturą prawie zespoloną*. Parę (M, J), gdzie M jest rozmaitością różniczkową, a J tensorem struktury prawie zespolonej nazywamy *rozmaitością prawie zespoloną*. Niech (M, g) będzie rozmaitością Riemann'a wyposażoną w strukturę prawie zespoloną J, która spełnia warunek $g(JX, JY) = g(X, Y)$ dla dowolnych pól wektorowych na M. Taką strukturę prawie zespoloną nazywamy *stowarzyszoną* z metryką g. Trójkę (M, g, J), gdzie J jest strukturą prawie zespoloną stowarzyszoną z metryką g, nazywamy *rozmaitością prawie hermitowską*. Na każdej rozmaitości prawie hermitowskiej (M, g, J) możemy wyróżnić pewną specjalną 2-formę ω zdefiniowaną przez $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$. Formę tę nazywamy *formą kählerowską* rozmaitości (M, g, J).

Tensorowi struktury prawie zespolonej J można przypisać tzw. *tensor Nijenhuis'a* zdefiniowany przez

$$N^J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Twierdzenie Newlandera-Nirenberga mówi, że tensor J jest całkowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $N^J = 0$. Jest to równoważne istnieniu struktury zespolonej na rozmaitości M. Jeżeli J jest całkowalny, to w definicjach z poprzedniego paragrafu możemy opuścić słowo „prawie". Mamy w związku z tym *rozmaitość zespoloną* i *metrykę hermitowską*.

Wśród rozmaitości hermitowskich możemy wyróżnić pewną szczególną klasę. Jeżeli forma kählerowska ω rozmaitości (M, g, J) jest zamknięta, czyli $d\omega = 0$, to rozmaitość (M, g, J) nazywamy *rozmaitością Kähler'a*. Pokazuje się, że ponadto $\delta\omega = 0$ oraz $\nabla J = 0$.

Na rozmaitości kählerowskiej tensor Ricci'ego Ric jest J-niezmienniczy, czyli $\mathrm{Ric}(JX, JY) = \mathrm{Ric}(X, Y)$. Korzystając z tego, definiuje się tak zwaną *formę Ricci'ego* ρ wzorem $\rho(X, Y) = \mathrm{Ric}(JX, Y)$. Forma ta jest zamknięta oraz ma tę własność, że klasa kohomologii formy $\frac{1}{2\pi}\rho$ jest równa pierwszej klasie Chern'a $c_1(M)$ rozmaitości M.

1.2. Konforemne tensory Killing'a

Przypomnijmy na początek następujące pojęcie. Pole wektorowe X na rozmaitości Riemann'a (M, g) nazywamy *polem konforemnym*, jeżeli istnieje taka funkcja f, że $L_X g = fg$, gdzie L oznacza pochodną Lie'go. Jeżeli f jest tożsamościowo równa zeru, to X nazywamy *polem Killing'a*. Można łatwo pokazać, że powyższa definicja jest równoważna warunkowi $g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = fg(Y, Z)$.

Niech (M, g) będzie rozmaitością Riemann'a wymiaru n i niech ∇ będzie koneksją Levi'ego-Civit'y metryki g. Podamy teraz definicję głównego obiektu zainteresowania niniejszego podrozdziału. Definicja ta jest pewnym uogólnieniem pojęcia pola konforemnego i pojawia się w literaturze fizycznej.

Definicja 1.1. Niech K będzie symetrycznym tensorem typu $(0, 2)$ na M. Mówimy, że K jest *konforemnym tensorem Killing'a* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje 1-forma P na M taka, że

$$\mathcal{C}_{X,Y,Z} \nabla_X K(Y, Z) = \mathcal{C}_{X,Y,Z} P(X) g(Y, Z) \tag{1.3}$$

gdzie X, Y i Z są polami wektorowymi na M, a $\mathcal{C}_{X,Y,Z}$ oznacza sumę cykliczną po polach wektorowych X, Y i Z. W przypadku, gdy P jest tożsamościowo równa zeru, tensor K nazywamy *tensorem Killing'a*. Formę różniczkową P będziemy nazywać *stowarzyszoną 1-formą*.

Co więcej, można wyróżnić dalsze typy konforemnych tensorów Killing'a. I tak, jeżeli forma P jest dualna do pola Killing'a to tensor K nazywamy homotetycznym tensorem Killing'a, a gdy istnieje funkcja f taka, że $P = df$ to K nazywamy gradientowym konforemnym tensorem Killing'a.

Warunek cykliczny (1.3) jest równoważny następującemu warunkowi

$$\nabla_X K(X, X) = P(X) g(X, X) \tag{1.4}$$

dla dowolnego pola wektorowego X. Łatwo można też wykazać poniższy, pojawiający się w literaturze wniosek

Wniosek 1.1. Forma P z (1.3) wyraża się wzorem

$$P(X) = \frac{1}{n+2}\left(2\mathrm{div}K(X) + d\,\mathrm{tr}\,K(X)\right). \tag{1.5}$$

Podamy teraz kilka własności konforemnych tensorów Killing'a za [Jel95] oraz [C-F-S] charakteryzujących je ze względu na wartości własne (lematy 1.1-1.3 i podsumowujące twierdzenie 1.4). Oznaczmy przez $\lambda_i \in C^\infty(M)$ wartości własne tensora K odpowiadające dystrybucjom własnym $\mathcal{D}_i$.

Lemat 1.1. *Niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a jak wyżej. Jeżeli $X \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_j)$ oraz $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_k)$ oraz $i \neq j \neq k$, to zachodzi*

$$\mathcal{C}_{X,Y,Z} K(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) = 0. \tag{1.6}$$

Dowód. Niech X, Y i Z będą jak w hipotezie. Łatwo widać, że wtedy prawa strona warunku cyklicznego (1.3) jest równa zero. Dla lewej strony mamy

$$\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) = \mathcal{C}_{X,Y,Z} X\left(K(Y,Z)\right) - \mathcal{C}_{X,Y,Z} K(X, \nabla_Y Z + \nabla_Z Y).$$

Stąd dostjemy tezę. □

Lemat 1.2. *Niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a. Wtedy*

$$\mathcal{D}_i \subset \ker(P - d\lambda_i). \tag{1.7}$$

Dowód. Niech X, $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ oraz niech $Z \in \Gamma(TM)$. W tej sytuacji mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) &= \mathcal{C}_{X,Y,Z} X(\lambda_i g(Y,Z)) - K(\nabla_X Y, Z) - \lambda_i g(Y, \nabla_X Z)\\ &\quad -\lambda_i g(X, \nabla_Y Z) - S(Z, \nabla_Y X) - \lambda_i g(\nabla_Z X, Y) - \lambda_i g(X, \nabla_Z Y)\\ &= \mathcal{C}_{X,Y,Z} d\lambda_i(X) g(Y,Z) + \lambda_i g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) - S(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z).\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X,Y,Z} P(X) g(Y,Z) = \mathcal{C}_{X,Y,Z} d\lambda_i(X) g(Y,Z) + \lambda_i g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z)\\ -S(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Podstawiając $X = Y = Z \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ w powyższym wzorze otrzymujemy

$$P(X) = d\lambda_i(X)$$

co kończy dowód. □

Następny warunek charakteryzuje dystrybucje i wartości własne konforemnego tensora Killing'a. Zanim go przytoczymy podamy definicję pewnego rodzaju dystrybucji.

Definicja 1.2. Niech $\mathcal{D}$ będzie dystrybucją w wiązce stycznej TM rozmaitości Riemanna (M,g). Mówimy, że $\mathcal{D}$ jest *(totalnie) umbiliczna* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pole wektorowe ξ takie, że

$$(\nabla_X Y + \nabla_Y X)|_{\mathcal{D}^\perp} = 2g(X,Y)\xi,$$

gdzie $\mathcal{D}^\perp$ jest dopełnieniem ortogonalnym dystrybucji $\mathcal{D}$, a $X,Y \in \Gamma(\mathcal{D})$. Pole ξ nazywamy *średnią krzywizną normalną* dystrybucji $\mathcal{D}$. W szczególnym przypadku, gdy ξ jest wszędzie równe zero mówimy, że $\mathcal{D}$ jest *totalnie geodezyjna*.

Udowodnimy teraz

Lemat 1.3. *Niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a. Każda dystrybucja własna $\mathcal{D}_\lambda$ odpowiadająca wartości własnej λ tensora K jest totalnie umbiliczna. Co, więcej dla pola średniej krzywizny normalnej ξ_λ zachodzi*

$$g(\xi_\lambda, Z) = -\frac{1}{2(\mu-\lambda)}(d\mu(Z) - d\lambda(Z)), \tag{1.9}$$

gdzie $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_\mu)$ i μ jest inną od λ wartością własną K.

Dowód. Weźmy X, $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_\lambda)$ oraz $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_\mu)$ korzystając z (1.8) mamy

$$P(Z)g(X,Y) = d\lambda(Z)g(X,Y) + \lambda g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) - \mu g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z).$$

Stąd dostajemy

$$g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) = -g(X,Y)\frac{1}{(\mu-\lambda)}(d\mu(Z) - d\lambda(Z)). \tag{1.10}$$

Przyjmując $\xi_\lambda = -\frac{1}{2(\mu-\lambda)}(\nabla\mu - \nabla\lambda)$ widać, że $\mathcal{D}_\lambda$ jest umbiliczna. □

Okazuje się, że własności z powyższych trzech lematów charakteryzują konforemne tensory Killing'a:

Twierdzenie 1.4. *Niech $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{D}_k$ będzie sumą ortogonalną dystrybucji $\mathcal{D}_i$, $i = 1,\ldots,k$. Zdefiniujmy symetryczne pole tensorowe K typu $(0,2)$ następująco*

$$K(X,Y) = \lambda_i g(X,Y), \quad dla \quad X \in \Gamma(\mathcal{D}_i), Y \in TM.$$

K jest konforemnym tensorem Killing'a wtedy i tylko wtedy, gdy każda z dystrybucji $\mathcal{D}_i$, $i = 1,\ldots k$ jest totalnie umbiliczna oraz spełnione są warunki (1.6), (1.7) oraz (1.9).

Dowód. To, że powyższe warunki są warunkami koniecznymi zostało pokazane w dowodach lematów 1.1, 1.2 i 1.3. Pokażemy teraz, że te warunki sa wystarczające, by K był konforemnym tensorem Killing'a. Musimy sprawdzić, czy spełniony jest warunek (1.3) dla różnego doboru trójek X, Y i Z. Niech najpierw X, Y i Z będą cięciami tej samej dystrybucji własnej $\mathcal{D}_i$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) &= \mathcal{C}_{X,Y,Z}X(K(Y,Z)) - \mathcal{C}_{X,Y,Z}K(X,\nabla_Y Z + \nabla_Z Y)\\ &= \mathcal{C}_{X,Y,Z}d\lambda_i(X)g(Y,Z).\end{aligned}$$

Z kolei dla pól wektorowych będących cięciami różnych dystrybucji własnych mamy prawą stronę równania (1.3) równą zero, natomiast lewa strona jest równa

$$\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) = \mathcal{C}_{X,Y,Z}X(K(Y,Z)) + \mathcal{C}_{X,Y,Z}K(X,\nabla_Y Z + \nabla_Z Y).$$

Ponieważ dla takich pól wektorowych $K(X,Y) = K(X,Z) = K(Y,Z) = 0$, więc na mocy warunku (1.6) powyższa suma cykliczna znika.

Do sprawdzenia została sytuacja, gdy X, $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ oraz $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_j)$, gdzie $i \neq j$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) &= Z(\lambda_i g(Y,Z)) - \mathcal{C}_{X,Y,Z}K(X,\nabla_Y Z + \nabla_Z Y)\\ &= d\lambda_i(Z)g(Y,Z) + \lambda_i g(\nabla_Z X, Y) + \lambda_i g(X,\nabla_X Y)\\ &-\lambda_i g(X,\nabla_Y Z + \nabla_Z Y) - \lambda_i g(Y,\nabla_X Z + \nabla_Z X) - \lambda_j g(Z,\nabla_X Y + \nabla_Y X)\\ &= d\lambda_i(Z)g(X,Y) - 2\lambda_j g(\xi_i, Z)g(X,Y) - \lambda_i g(\nabla_X Z, Y) - \lambda_i g(\nabla_Y Z, X).\end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że pole Z jest ortogonalne do X i Y mamy

$$g(\nabla_X Y, Z) = -g(Y, \nabla_X Z).$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) &= d\lambda_i(Z)g(X,Y) - 2\lambda_j g(\xi_i, Z)g(X,Y)\\ &+\lambda_i g(\nabla_X Y, Z) + \lambda_i g(\nabla_Y X, Z)\\ &= d\lambda_i(Z)g(X,Y) - 2(\lambda_i - \lambda_j)g(\xi_i, Z)g(X,Y),\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości po raz kolejny skorzystaliśmy z faktu, że dystrybucja $\mathcal{D}_i$ jest umbiliczna. Korzystając ze wzoru (1.9) dla wektora średniej krzywizny normalnej ξ_i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X,Y,Z}\nabla_X K(Y,Z) &= d\lambda_i(Z)g(X,Y) - (\lambda_i - \lambda_j)\frac{d\lambda_j(Z) - d\lambda_i(Z)}{\lambda_j - \lambda_i}\\ &= d\lambda_j(Z)g(X,Y).\end{aligned}$$

Jeżeli teraz zdefiniujemy 1-formę P przez

$$P(X) = d\lambda_i(X) \quad \text{jeżeli } X \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$$

to widać, że K spełnia definicję konforemnego tensora Killing'a 1.3. $\square$

1.3. Pewne własności konforemnych tensorów Killing'a

Na początku udowodnimy swego rodzaju uzasadnienie dla nazwy konforemny tensor Killing'a. Wynik jest powszechnie znany.

Stwierdzenie 1.1. *Niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a na rozmaitości Riemanna (M, g) ze stowarzyszoną 1-formą P. Wtedy tensor $\tilde{K} = e^{4f}K$ jest konforemnym tensorem Killing'a dla każdej metryki konforemnej $\tilde{g} = e^{2f}g$ ze stowarzyszoną 1-formą $\tilde{P}(X) = e^{2f}P(X) + \tilde{K}(\tilde{\nabla} f, X)$.*

Następna własność dotyczy dodawania konforemnych tensorów Killing'a i można ją znaleźć w literaturze.

Stwierdzenie 1.2. *Niech (M, g) będzie rozmaitością Riemann'a. Suma n konforemnych tensorów Killing'a ze stałymi współczynnikami jest konforemnym tensorem Killing'a. Co więcej, niech f będzie dowolną funkcją. Wtedy tensor $f \cdot g$ jest konforemnym tensorem Killing'a.*

Kolejny fakt jest związany z dodatkowymi cechami dystrybucji własnych konforemnych tensorów Killing'a. W specjalnym przypadku, tzn. dla tensorów Killing'a, własności te pojawiają się w [Jel95].

Stwierdzenie 1.3. *Niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a na rozmaitości Riemann'a (M, g). Dystrybucja $\mathcal{D}$ odpowiadająca wartości własnej λ jest totalnie geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$d\lambda = P. \tag{1.11}$$

Dystrybucja $\mathcal{D}$ jest natomiast całkowalna, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ mamy

$$\nabla_X K(Y, Z) - \nabla_Y K(X, Z) = P(X)g(Y, Z) - P(Y)g(X, Z) \tag{1.12}$$

dla dowolnego pola wektorowego Z.

Dowód. Niech $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ oraz $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_\mu)$, gdzie μ jest dowolną, różną od λ wartością własną K. Ze wzoru (1.10):

$$g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) = -g(X, Y)\frac{1}{(\mu - \lambda)}(d\mu(Z) - d\lambda(Z))$$

łatwo wynika, że totalna geodezyjność dystrybucji $\mathcal{D}$ jest równoważna temu, że $d\lambda(Z) = d\mu(Z)$ dla Z jak wyżej. Co więcej wiemy, że $d\lambda(X) = P(X)$ oraz $d\mu(Z) = P(Z)$. Stąd widać, że $P = d\lambda$, jeżeli dystrybucja $\mathcal{D}$ jest totalnie geodezyjna. Odwrotnie, jeżeli $P = d\lambda$ to na mocy (1.10) mamy, że $\mathcal{D}$ jest totalnie geodezyjna.

Niech teraz X i Y będą dowolnymi cięciami dystrybucji $\mathcal{D}$, a Z dowolnym polem wektorowym. Druga część jest prostą konsekwencją następującego faktu

$$\begin{gathered}\nabla_X K(Y,Z) - \nabla_Y K(X,Z) = d\lambda(X)g(Y,Z) \\ -d\lambda(Y)g(X,Z) + \lambda g([X,Y],Z) - K([X,Y],Z).\end{gathered}$$

□

Uwaga. Łatwo pokazać, że totalna geodezyjność dystrybucji $\mathcal{D}$ odpowiadającej wartości własnej λ jest równoważna następującemu warunkowi:

$$\nabla_X K(Y,Z) + \nabla_Y K(X,Z) = P(X)g(Y,Z) + P(Y)g(X,Z), \tag{1.13}$$

gdzie X, Y i Z są jak w poprzednim stwierdzeniu.

W dalszej części tego podrozdziału załóżmy, że K jest konforemnym tensorem Killing'a z dokładnie dwiema wartościami własnymi λ i μ. W tej sytuacji można udowodnić kilka ciekawych własności. Pierwsza własność dotyczy konforemnych tensorów Killing'a, których ślad jest związany, w podany niżej sposób, z stowarzyszoną 1-formą P. Jest to uogólnienie podobnego twierdzenia dla tensorów Killing'a ze stałym śladem z [Jel95].

Stwierdzenie 1.4. *Niech K będzie jak wyżej i przypuśćmy, że ślad $\operatorname{tr}_g K$ spełnia warunek $\frac{1}{n} d \operatorname{tr}_g K = P$, gdzie n jest wymiarem rozmaitości M. Wtedy obie dystrybucje własne odpowiadające wartościom własnym λ i μ są totalnie geodezyjne oraz istnieje taka stała c, że $\lambda = \mu + c$. Co więcej, w tej sytuacji dystrybucje własne $\mathcal{D}_\lambda$ i $\mathcal{D}_\mu$ są całkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy tensor K spełnia*

$$\nabla_X K(Y,Z) = P(X)g(Y,Z)$$

dla dowolnych pól wektorowych X, Y i Z na M.

Dowód. Niech p i q oznaczają odpowiednio wymiary dystrybucji własnych $\mathcal{D}_\lambda$ i $\mathcal{D}_\mu$. Zauważmy, że są one stałe oraz mamy $p\lambda + q\mu = \operatorname{tr}_g K$. Z założonej własności śladu tensora K mamy, że

$$p d\lambda + q d\mu = nP. \tag{1.14}$$

Zauważmy, że na dystrybucji $\mathcal{D}_\lambda$ zachodzi $d\lambda|_{\mathcal{D}_\lambda} = P|_{\mathcal{D}_\lambda}$. Niech więc X będzie cięciem $\mathcal{D}_\lambda$. Mamy

$$q d\mu(X) = qP(X),$$

co oznacza, że $d\mu$ jest równe P na $\mathcal{D}_\lambda$. Ponieważ na $\mathcal{D}_\mu$ te dwie formy są sobie równe z własności (1.7) to mamy $d\mu = P$ na całym TM. Na mocy pierwszej części stwierdzenie 1.3 jest to równoważne totalnej geodezyjności dystrybucji $\mathcal{D}_\mu$. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że $\mathcal{D}_\lambda$ również jest totalnie geodezyjna. Ponieważ $d\mu = P = d\lambda$ to widać, że obie wartości własne różnią się o stałą.

Dla dowodu drugiej części stwierdzenia zauważmy, że jeżeli dystrybucje $\mathcal{D}_\lambda$ i $\mathcal{D}_\mu$ są totalnie geodezyjne i całkowalne, to z (1.12) wynika, że dla dowolnych X, Y będących cięciami $\mathcal{D}_\lambda$ lub $\mathcal{D}_\mu$ i dowolnego pola Z mamy

$$\nabla_X K(Y,Z) = \nabla_Y K(X,Z) + P(X)g(Y,Z) - P(Y)g(X,Z).$$

Po wstawienie tego do warunku (1.13) na totalną geodezyjność dystrybucji $\mathcal{D}_\lambda$ lub $\mathcal{D}_\mu$ otrzymujemy

$$2\nabla_Y K(X,Z) + P(X)g(Y,Z) - P(Y)g(X,Z) = P(X)g(Y,Z) + P(Y)g(X,Z),$$

co kończy dowód drugiej części stwierdzenia. □

Niech teraz K będzie konforemnym tensorem Killing'a z dwiema wartościami własnymi λ i μ. Załóżmy dodatkowo, że dystrybucja własna $\mathcal{D}_\lambda$ odpowiadająca wartości własnej λ jest jednowymiarowa. Można wtedy udowodnić następujące dwa stwierdzenia (por. Stwierdzenie 6. z [C-F-S]). Dowód stwierdzeń jest dokonaną przez autora modyfikacją dowodu podobnego stwierdzenia dla tensorów Killing'a z [Jel95].

Stwierdzenie 1.5. *Niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a jak wyżej. Niech ξ będzie cięciem jednowymiarowej dystrybucji $\mathcal{D}_\lambda$, co więcej, załóżmy, że $|\xi| = 1$. Wtedy $\sqrt{|\mu - \lambda|}\xi$ jest konforemnym polem wektorowym.*

Dowód. Dla dowodu, niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a z dwiema wartościami własnymi jak wyżej. Niech ξ będzie jednostkowym cięciem jednowymiarowej dystrybucji $\mathcal{D}_\lambda$ i zdefiniujmy pole wektorowe $\eta = \sqrt{|\mu - \lambda|}\xi$. Chcemy pokazać, że istnieje funkcja f na M taka, że $g(\nabla_X \eta, Y) + g(\nabla_Y \eta, X) = fg(X,Y)$ dla dowolnych pól wektorowych X i Y. Zauważmy, że jeżeli X i Y są cięciami tej samej dystrybucji to wystarczy sprawdzić warunek

$$g(\nabla_X \eta, X) = \frac{1}{2} fg(X,X).$$

Niech X będzie dowolnym polem wektorowym. Mamy $K(X,\xi) = \lambda g(X,\xi)$. Po wzięciu pochodnej kowariantnej wzdłuż pola X otrzymujemy

$$\nabla_X K(X,\xi) + K(X, \nabla_X \xi) = d\lambda(X)g(X,\xi) + \lambda g(X, \nabla_X \xi).$$

Jeżeli weźmiemy $X \in \Gamma(\mathcal{D}_\mu)$, to otrzymujemy

$$\nabla_X K(X,\xi) = (\lambda - \mu)g(\nabla_X \xi, X). \tag{1.15}$$

Z drugiej strony zauważmy, że różniczkując równość $K(X,X) = \mu g(X,X)$ względem ξ otrzymujemy

$$\nabla_\xi K(X,X) + 2K(\nabla_\xi X, X) = d\mu(\xi)g(X,X) + 2\mu g(\nabla_\xi X, X),$$

skąd mamy $\nabla_\xi K(X,X) = d\mu(\xi)g(X,X)$. Ponieważ K jest konforemnym tensorem Killing'a, więc z warunku (1.3) mamy

$$2\nabla_X K(X,\xi) + d\mu(\xi)g(X,X) = P(\xi)g(X,X).$$

Wstawiając to do (1.15) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(d\lambda(\xi) - d\mu(\xi))g(X,X) = (\lambda - \mu)g(\nabla_X\xi, X).$$

Stąd widać, że $g(\nabla_X\xi, X) = \frac{d\lambda(\xi)-d\mu(\xi)}{2(\lambda-\mu)}g(X,X)$. Uwzględniając definicję pola η mamy

$$g(\nabla_X\eta, X) = \epsilon\frac{d\mu(\xi) - d\lambda(\xi)}{2\sqrt{|\mu-\lambda|}}g(X,X),$$

gdzie ϵ jest znakiem różnicy $\mu - \lambda$.

Niech teraz X będzie cięciem $\mathcal{D}_\lambda$. Bez utraty ogólności można założyć, że $X = \eta$. Zauważmy, że $2g(\nabla_\eta\eta, \eta) = \eta(g(\eta,\eta))$. Liczymy

$$\begin{aligned}\xi(g(\eta,\eta)) = \xi\left(|\mu-\lambda|\right) = \epsilon\left(d\mu(\xi) - d\lambda(\xi)\right) = \\ = \epsilon\frac{d\mu(\xi) - d\lambda(\xi)}{|\mu-\lambda|},\end{aligned}$$

gdzie ϵ jest jak wyżej. Stąd już widać, że

$$g(\nabla_\eta\eta, \eta) = \epsilon\frac{d\mu(\xi) - d\lambda(\xi)}{2\sqrt{|\mu-\lambda|}}g(\eta,\eta).$$

Kolejno musimy sprawdzić, że $g(\nabla_\eta\eta, X) + g(\nabla_X\eta, \eta) = 0$ (prawa strona znika, ponieważ X i ξ są ortogonalne). Z jednej strony, na mocy (1.10) mamy

$$g(\nabla_\eta\eta, X) = -\frac{d\mu(X) - d\lambda(X)}{2(\mu-\lambda)}g(\eta,\eta) = -\frac{\epsilon}{2}(d\mu(X) - d\lambda(X)),$$

a z drugiej $2g(\nabla_X\eta, \eta) = X(g(\eta,\eta))$, skąd

$$g(\nabla_X\eta, \eta) = \frac{\epsilon}{2}(d\mu(X) - d\lambda(X)),$$

co kończy dowód. □

Uwaga. Zauważmy, że jeżeli założymy dodatkowo, że dystrybucja $\mathcal{D}_\mu$ jest totalnie geodezyjna, to z powyższego dowodu wynika, że η jest polem Killing'a. Rzeczywiście, mamy wtedy $d\mu(\xi) - d\lambda(\xi) = 0$ na mocy stwierdzenia 1.3 i porównując z powyższym dowodem widać, że η jest Killing'a.

Z kolei zachodzi stwierdzenie odwrotne.

Stwierdzenie 1.6. *Niech ξ będzie konforemnym polem wektorowym na rozmaitości Riemann'a (M,g) i niech K będzie polem tensorowym zdefiniowanym przez*

$$K(\xi,Y)=\lambda g(\xi,Y),\quad K(X,Y)=\mu g(X,Y),$$

gdzie Y jest dowolnym polem wektorowym, $g(X,\xi)=0$, a λ i μ pewnymi funkcjami na M. Jeżeli λ i μ są takie, że $|\mu-\lambda|=\alpha$ dla $\alpha=g(\xi,\xi)$, to K jest konforemnym tensorem Killing'a.

Dowód. Niech $\mathcal{D}_\lambda$ oznacza dystrybucję rozpiętą przez pole wektorowe ξ, a $\mathcal{D}_\mu$ jej dopełnienie ortogonalne. Pokażemy najpierw, że jeżeli pole ξ jest konforemne, to obie dystrybucje są umbiliczne. Zacznijmy od $\mathcal{D}_\lambda$. Przypomnijmy, że należy pokazać, że istnieje takie pole wektorowe ξ_λ, że dla dowolnego $X\in\Gamma(\mathcal{D}_\mu)$ zachodzi $g(\nabla_\xi\xi,X)=g(\xi,\xi)\xi_\lambda$. Ponieważ pole ξ jest konforemne, to mamy

$$g(\nabla_\xi\xi,X)+g(\nabla_X\xi,\xi)=fg(\xi,X)=0.$$

Oznaczmy przez α kwadrat długości pola ξ. Mamy $X(g(\xi,\xi))=2g(\nabla_X\xi,\xi)$, a z drugiej strony $X(g(\xi,\xi)=d\alpha(X)$. Mamy

$$g(\nabla_\xi\xi,X)=-\frac{1}{2}d\alpha(X)=-\frac{1}{2\alpha}d\alpha(X)g(\xi,\xi)$$

co dowodzi umbiliczności dystrybucji $\mathcal{D}_\lambda$, której pole średniej krzywizny normalnej można zdefiniować jako obcięcie $-\frac{1}{\alpha}\nabla\alpha$ do $\mathcal{D}_\mu$.

Pokażemy teraz, że dystrybucja $\mathcal{D}_\mu$ jest umbiliczna, czyli

$$g(\nabla_XY+\nabla_YX,\xi)=g(X,Y)g(\xi_\mu,\xi)$$

dla pewnego pola wektorowego ξ_μ i dowolnych cięć X,Y dystrybucji $\mathcal{D}_\mu$. Zauważmy, że wystarczy udowodnić powyższą tożsamość dla $X=Y$. Ponieważ X i ξ są ortogonalne, to widać od razu, że $g(\nabla_XX,\xi)=-g(\nabla_X\xi,X)$. Z faktu, że ξ jest konforemne wynika $2g(\nabla_X\xi,X)=fg(X,X)$ dla pewnej funkcji f. Stąd dostajemy

$$g(\nabla_XX,\xi)=-\frac{f}{2}g(X,X).$$

Widać więc, że dystrybucja $\mathcal{D}_\mu$ jest umbiliczna, z polem średniej krzywizny normalnej $-\frac{f}{\alpha}\xi$.

Kolejno sprawdzimy, że zachodzą pozostałe warunki twierdzenia 1.4. Zauważmy, że warunek (1.6) jest spełniony automatycznie. Zdefiniujmy teraz 1-formę stowarzyszoną P następująco

$$P(\xi)=d\lambda(\xi)\quad\text{oraz}\quad P(X)=d\mu(X)$$

dla $X\in\Gamma(\mathcal{D}_\mu)$. Widać, że spełniony jest teraz warunek (1.7). Pozostaje sprawdzić warunek (1.9), czyli musi zachodzić

$$g(\xi_\lambda,Z)=-\frac{d\mu(Z)-d\lambda(Z)}{2(\mu-\lambda)}\quad\text{oraz}\quad g(\xi_\mu,\xi)=-\frac{d\lambda(\xi)-d\mu(\xi)}{2(\lambda-\mu)}.\tag{1.16}$$

Przypomnijmy, że zdefiniowaliśmy funkcję α, będącą kwadratem długości pola ξ, jako $\alpha = |\mu - \lambda|$, skąd $d\alpha = \epsilon(d\mu - d\lambda)$, gdzie ϵ jest znakiem różnicy $\mu - \lambda$. Ponieważ, jak sprawdziliśmy powyżej, pole średniej krzywizny normalnej ξ_λ dystrybucji $\mathcal{D}_\lambda$ jest dane przez $-\frac{1}{\alpha}\nabla\alpha|_{\mathcal{D}_\mu}$, to widać, że pierwsza część warunku (1.16) jest spełniona.

Ponieważ pole ξ jest konforemne, to mamy $2g(\nabla_\xi \xi, \xi) = f\alpha$. Z drugiej strony wiemy, że $2g(\nabla_\xi \xi, \xi) = d\alpha(\xi)$, skąd widać, że funkcja f musi być dana przez $f = \frac{d\alpha(\xi)}{\alpha}$. Korzystając z udowodnionego wyżej faktu, że pole średniej krzywizny normalnej ξ_μ dystrybucji $\mathcal{D}_\mu$ jest dane przez $-\frac{f}{\alpha}\xi$ otrzymujemy, że $g(\xi_\mu, \xi) = -\frac{d\alpha(\xi)}{\alpha}$, co kończy dowód. □

1.4. Konforemne formy Killing'a i konforemne tensory Killing'a

Konforemne tensory Killing'a można traktować jako uogólnienie konforemnych pól Killing'a. Innym uogólnieniem są tzw. konforemne formy Killing'a. Definicja została zacytowana z [Sem].

Definicja 1.3. Niech $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p M)$ będzie p-formą różniczkową na (M, g). Mówimy, że α jest *konforemną formą Killing'a* lub *formą twistorową* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nabla_X \alpha = \frac{1}{p+1} X \lrcorner\, d\alpha - \frac{1}{n-p+1} X \wedge \delta\alpha, \tag{1.17}$$

gdzie n jest wymiarem rozmaitości M, a X dowolnym polem wektorowym na M. Jeżeli dodatkowo forma α jest ko-zamknięta, to nazywamy ją *formą Killing'a*, a gdy jest zamknięta – *formą* $*$*-Killing'a*.

Niech ξ będzie polem Killing'a. Wiadomo, że jeżeli zdefiniujemy tensor K_ξ wzorem

$$K_\xi(X, Y) = g(\xi, X) g(\xi, Y)$$

to jest on tensorem Killing'a. Co więcej, jeżeli α jest formą Killing'a to tensor K_α zdefiniowany przez

$$K_\alpha(X, Y) = g(X \lrcorner\, \alpha, Y \lrcorner\, \alpha) \tag{1.18}$$

również jest tensorem Killing'a.

Uogólniając to rozumowanie można udowodnić poniższe twierdzenie. Jego wypowiedź autor odnalazł w literaturze fizycznej, natomiast z braku dowodu autor przedstawia prosty dowód swojego autorstwa.

Twierdzenie 1.5. *Niech α i β będą dwiema konforemnymi p-formami Killing'a. Wtedy tensor $K_{\alpha,\beta}$ zdefiniowany przez*

$$K_{\alpha,\beta}(X, Y) = g(X \lrcorner\, \alpha, Y \lrcorner\, \beta) + g(X \lrcorner\, \beta, Y \lrcorner\, \alpha) \tag{1.19}$$

jest konforemnym tensorem Killing'a, a 1-forma P z definicji 1.3 jest dana przez

$$P(X) = g(\delta\alpha, X \lrcorner \alpha) + g(\delta\beta, X \lrcorner \beta). \tag{1.20}$$

Dowód. Niech X będzie dowolnym polem wektorowym i niech α oraz β będą konforemnymi p-formami Killing'a. Sprawdzimy, że pole tensorowe $K_{\alpha,\beta}$, zdefiniowane jak wyżej, spełnia warunek (1.3).

$$\begin{aligned}
\nabla_X K_{\alpha,\beta}(X,X) &= 2X\left(g(X \lrcorner \alpha, X \lrcorner \beta)\right) - 2g(\nabla_X X \lrcorner \alpha, X \lrcorner \beta) \\
&\quad -2g(\nabla_X X \lrcorner \beta, X \lrcorner \alpha) \\
&= 2g(\nabla_X (X \lrcorner \alpha), X \lrcorner \beta) + 2g(X \lrcorner \alpha, \nabla_X (X \lrcorner \beta)) \\
&\quad -2g(\nabla_X X \lrcorner \alpha, X \lrcorner \beta) - 2g(\nabla_X X \lrcorner \beta, X \lrcorner \alpha) \\
&= 2g(X \lrcorner \nabla_X \alpha, X \lrcorner \beta) + 2g(X \lrcorner \alpha, X \lrcorner \nabla_X \beta).
\end{aligned}$$

Ponieważ α spełnia (1.17) to mamy

$$\begin{aligned}
g(X \lrcorner \nabla_X \alpha, X \lrcorner \beta) &= \frac{1}{p+1} g(X \lrcorner (X \lrcorner d\alpha), X \lrcorner \beta) \\
&\quad - \frac{1}{n-p+1} g(X \lrcorner (X \wedge \delta\alpha), X \lrcorner \beta) \\
&= -\frac{1}{n-p+1}\left(g(X,X)g(\delta\alpha, X \lrcorner \beta) - g(X \wedge (X \lrcorner \delta\alpha), X \lrcorner \beta)\right) \\
&= -\frac{1}{n-p+1} g(X,X) g(\delta\alpha, X \lrcorner \beta).
\end{aligned}$$

Analogiczny wzór zachodzi dla β, przy czym

$$g(X \lrcorner \nabla_X \beta, X \lrcorner \alpha) = -\frac{1}{n-p+1} g(X,X) g(\delta\beta, X \lrcorner \alpha).$$

Stąd mamy

$$\nabla_X K_{\alpha,\beta}(X,X) = -\frac{2}{n-p+1} g(X,X)\left(g(\delta\alpha, X \lrcorner \beta) + g(\delta\beta, X \lrcorner \alpha)\right).$$

□

1.4.1. Przypadek rozmaitości Kähler'a

Niech (M, g, J) będzie rozmaitością Kähler'a, gdzie J jest tensorem całkowalnej struktury zespolonej, a metryka g jest stowarzyszona z J, czyli spełnia warunek $g(JX, JY) = g(X,Y)$ dla dowolnych pól wektorowych X, Y. Niech φ będzie 2-formą różniczkową typu $(1,1)$, czyli $\varphi(JX, JY) = \varphi(X,Y)$ dla dowolnych pól wektorowych X i Y. Zachodzi wtedy następujący fakt ([ACG01], Appendix A):

Lemat 1.6. *Jeżeli φ jest 2-formą twistorową typu $(1,1)$ na rozmaitości Kähler'a (M,g,J) wymiaru $2m$, to symetryczny tensor S zdefiniowany przez $S(X,Y) = -\varphi(JX,Y)$ jest konforemnym tensorem Killing'a.*

Dowód. Mamy $\nabla_X S(X,X) = -\nabla_X \varphi(JX,X)$. Korzystając z definicji formy twistorowej otrzymujemy

$$\begin{aligned}\nabla_X S(X,X) &= -\frac{1}{3}d\varphi(X,JX,X) + \frac{1}{2m-1}\left(X(JX)\delta\varphi(X) - X(X)\delta\varphi(JX)\right)\\ &= -\frac{1}{2m-1}\delta\varphi(JX)|X|^2.\end{aligned}$$

□

1.5. $\mathcal{A}$- i $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitości

Na początku tego podrozdziału podamy definicję głównego obiektu zainteresowania niniejszej pracy.

Definicja 1.4. Niech (M,g) będzie rozmaitością Riemann'a. Oznaczmy przez Ric tensor Ricci'ego metryki g. Rozmaitość (M,g) nazywamy $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy tensor Ricci'ego jest konforemnym tensorem Killing'a. Jeżeli natomiast Ric jest tensorem Killing'a, to (M,g) nazywamy $\mathcal{A}$-rozmaitością.

$\mathcal{A}$-rozmaitość nazywamy *właściwą* jeżeli tensor Ricci'ego nie jest równoległy.

Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitość ma stałą krzywiznę skalarną, to jest $\mathcal{A}$-rozmaitością. Z drugiej strony można pokazać ([Gra])

Stwierdzenie 1.7. *Każda $\mathcal{A}$-rozmaitość ma stałą krzywiznę skalarną.*

Pierwszy przykład właściwej $\mathcal{A}$-rozmaitości pojawił się w [Gra]. Jest to pewna jednorodna metryka skonstruowana na S^3. Następnie w [Be] sformułowano problem podania przykładów, które nie są jednorodne. Pierwszy taki przykład został podany w [Jel95].

W pracy [S-V] autorzy udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.7. *Jeżeli (M,g,J) jest kählerowską $\mathcal{A}$-rozmaitością, to jej tensor Ricci'ego musi być równoległy.*

W przypadku, gdy opuścimy założenie całkowalności struktury zespolonej J, sutacja jest zupełnie inna. Okazuje się, że można skonstruować przykłady właściwych $\mathcal{A}$-rozmaitości prawie hermitowskich, których forma Kähler'a ω spełnia $d\omega = 0$ ([Jel99]). Rozmaitość prawie hermitowską, której forma Kähler'a jest zamknięta, nazywamy *prawie kählerowską.*

Inna jest jeszcze sytuacja, jeżeli chodzi o kählerowskie $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitości. Tutaj pierwszy przykład został skonstruowany przez Jelonka w [Jel02]. Co więcej podano tam poniższą charakteryzację kählerowskich $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitości.

Stwierdzenie 1.8. *Niech (M, g, J) będzie kählerowską $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością. Wtedy zachodzi następujący wzór*

$$\begin{aligned}\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z) = \frac{1}{2n+4} & ((g(X, Y) d \operatorname{scal} Z + g(X, Z) d \operatorname{scal}(Y) + \\ & + 2g(Y, Z) d \operatorname{scal}(X) - g(JX, Y) d \operatorname{scal}(JZ) \\ & - g(JX, Z) d \operatorname{scal}(JY)) ,\end{aligned} \tag{1.21}$$

gdzie n oznacza rzeczywisty wymiar rozmaitości M.

Dowód. Na początek udowodnimy pewną znaną własność tensora Ricci'ego rozmaitości kählerowskiej, wynikającą z faktu, że forma Ricci'ego ρ takiej rozmaitości jest zamknięta. Dla dowolnych pól wektorowych X, Y i Z mamy

$$0 = d\rho(X, Y, Z) = \nabla_X \rho(Y, Z) - \nabla_Y \rho(X, Z) + \nabla_Z \rho(X, Y).$$

Ponieważ formę Ricci'ego ρ definiuje się jako $\rho(X, Y) = \operatorname{Ric}(JX, Y)$ to łatwo pokazać, że $\nabla_X \rho(Y, Z) = \nabla_X \operatorname{Ric}(JY, Z)$. Stąd mamy

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_X \operatorname{Ric}(JY, Z) - \nabla_Y \operatorname{Ric}(JX, Z) + \nabla_Z \operatorname{Ric}(JX, Y) = \\ &= -\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, JZ) + \nabla_Y \operatorname{Ric}(X, JZ) + \nabla_Z \operatorname{Ric}(JX, Y).\end{aligned}$$

Biorąc $JZ = W$ otrzymujemy

$$\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, W) - \nabla_Y \operatorname{Ric}(X, W) = -\nabla_{JW} \operatorname{Ric}(JX, Y).$$

Analogicznie rozpisując $d\rho(JX, JY, Z)$ dostajemy

$$\begin{aligned}0 &= -\nabla_{JX} \operatorname{Ric}(Y, Z) + \nabla_{JY} \operatorname{Ric}(X, Z) + \nabla_Z \operatorname{Ric}(JX, Y) = \\ &= -\nabla_{JX} \operatorname{Ric}(JY, JZ) + \nabla_{JY} \operatorname{Ric}(JX, JZ) + \nabla_Z \operatorname{Ric}(JX, Y).\end{aligned}$$

Wstawiając ponownie $JZ = W$ mamy

$$\nabla_{JX} \operatorname{Ric}(JY, W) - \nabla_{JY} \operatorname{Ric}(JX, W) = -\nabla_{JW} \operatorname{Ric}(JX, Y).$$

Podsumowując otrzymujemy znany wzór

$$\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, W) - \nabla_Y \operatorname{Ric}(X, W) = \nabla_{JX} \operatorname{Ric}(JY, W) - \nabla_{JY} \operatorname{Ric}(JX, W). \tag{1.22}$$

Z drugiej strony, ponieważ (M, g, J) jest $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością, to mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X,Y,Z} \nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z) &= \frac{2}{n+2} \mathcal{C}_{X,Y,Z} d \operatorname{scal}(X) g(Y, Z), \\ \mathcal{C}_{JX,JY,Z} \nabla_{JX} \operatorname{Ric}(JY, Z) &= \frac{2}{n+2} \mathcal{C}_{JX,JY,Z} d \operatorname{scal}(JX) g(JY, Z).\end{aligned}$$

Odejmując stronami $2\nabla_Y \operatorname{Ric}(Z, X)$ w pierwszym wzorze i $2\nabla_{JY} \operatorname{Ric}(Z, JX)$ w drugim, możemy powyższe równości zapisać jako

$$\begin{aligned}
\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z) - \nabla_Y \operatorname{Ric}(Z, X) &= \nabla_Z \operatorname{Ric}(X, Y) - 2\nabla_Y \operatorname{Ric}(Z, X) + \\
&\quad + \frac{2}{n+2} \mathcal{C}_{X,Y,Z}\, d\operatorname{scal}(X) g(Y, Z), \\
\nabla_{JX} \operatorname{Ric}(JY, Z) - \nabla_{JY} \operatorname{Ric}(Z, JX) &= \nabla_Z \operatorname{Ric}(X, Y) - 2\nabla_{JY} \operatorname{Ric}(Z, JX) + \\
&\quad + \frac{2}{n+2} \mathcal{C}_{JX,JY,Z}\, d\operatorname{scal}(JX) g(JY, Z).
\end{aligned}$$

Na mocy (1.22) lewe strony powyższych równości są takie same. Po wstawieniu $Z = X$ otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned}
\nabla_Y \operatorname{Ric}(X, X) = \frac{1}{n+2} \big(& d\operatorname{scal}(X) g(Y, X) + d\operatorname{scal}(Y) g(X, X) \\
& - d\operatorname{scal}(JX) g(JY, X) \big).
\end{aligned}$$

Ponieważ $\nabla_X \operatorname{Ric}(Y, Z)$ jest symetryczny w Y i Z, to powyższy wzór implikuje tezę stwierdzenia. $\square$

Rozdział 2

Konstrukcja $\mathcal{A}$-rozmaitości na wiązce głównej o włóknie będącym torusem

W tym rozdziale podamy konstrukcję $\mathcal{A}$-rozmaitości na przestrzeni totalnej wiązki głównej o włóknie będącym r-wymiarowym torusem. Wyniki tego rozdziału autor opublikował w [Zbo]. Idea konstrukcji została zaczerpnięta z pracy [W-Z], a większość obliczeń jest uogólnieniem konstrukcji S^1-wiązki głównej z metryką dającą przestrzeni totalnej strukturę $\mathcal{A}$-rozmaitości z [Jel95].

W pierwszej części rozdziału udowodnimy twierdzenie, które podaje warunki wystarczające na to by rozmaitość Riemann'a była A-rozmaitością. Następnie podamy kilka potrzebnych nam w dalszej części własności pewnej metryki g na przestrzeni totalnej P wiązki głównej o włóknie torus nad dowolną rozmaitością Riemanna (B, h). W kolejnej części opiszemy tensory O'Neilla charakteryzujące submersję riemannowską, zadaną przez strukturę wiązki głównej i podamy warunki by przestrzeń totalna (P, g) była $\mathcal{A}$-rozmaitością. Na koniec podamy konkretny przykład tej konstrukcji na wiązce głównej nad rozmaitością Kähler'a-Einstein'a charakteryzowaną przez konkretną klasę kohomologii na B.

2.1. Twierdzenie strukturalne

Niech (M, g) będzie rozmaitością Riemanna, a $\mathfrak{t}^* = \{\xi^1, \ldots, \xi^k\}$ zbiorem liniowo niezależnych pól Killing'a na M takich, że $g(\xi^i, \xi^j) = const$, $[\xi^i, \xi^j] = 0$ i TM jest sumą ortogonalną $\mathfrak{t}^*$ i jego dopełnienia ortogonalnego. Zdefiniujmy tensor T_i, dla każdego $i = 1, \ldots, k$ przez $T_i X = \nabla_X \xi^i$.

Lemat 2.1. *Tensor T_i spełnia, dla $i, j = 1, \dots, k$,*

$$T_i \xi^j = 0,$$
$$L_{\xi^i} T_j = 0.$$

Dowód. Dla dowolnych $\xi^i, \xi^j \in \mathfrak{t}^*$ mamy $g(\xi^i, \xi^j) = const$, więc dla każdego pola $X \in \mathcal{X}(M)$ zachodzi $X(g(\xi^i, \xi^j)) = 0$ oraz

$$0 = g(\nabla_X \xi^i, \xi^j) + g(\xi^i, \nabla_X \xi^j) = -g(X, \nabla_{\xi^j} \xi^i) - g(\nabla_{\xi^i} \xi^j, X).$$

Ponieważ $[\xi^i, \xi^j] = 0$, to $\nabla_{\xi^i} \xi^j = \nabla_{\xi^j} \xi^i$. To kończy dowód pierwszej równości.

By udowodnić drugą przypomnijmy, że dla dowolnego pola Killing'a X na M i dowolnych pól wektorowych Y, Z zachodzi

$$L_X(\nabla_Y Z) = \nabla_{L_X Y} Z + \nabla_Y (L_X Z).$$

Niech X będzie dowolnym polem wektorowym. Wobec powyższego mamy

$$(L_{\xi^i} T_j) X = L_{\xi^i}(T_j X) - T_j(L_{\xi^i} X) = \nabla_{(L_{\xi^i} X)} \xi^j + \nabla_X([\xi^i, \xi^j]) - T_j(L_{\xi^i} X) = 0.$$

□

Poniżej udowodnimy lemat i wniosek z niego, który okaże się przydatny w dalszej części pracy.

Lemat 2.2. *Niech ξ_i i T_j będą jak wyżej dla $i, j = 1, \dots, k$. Mamy*

$$R(X, \xi^i) Y = \nabla T_i(X, Y), \quad \nabla T_i(X, \xi^j) = -T_i(T_j X),$$

gdzie R oznacza tensor krzywizny riemannowskiej (M, g), a X, Y są dowolnymi polami wektorowymi.

Dowód. Dowód jest modyfikacją przypadku z [Jel95] dla k pól Killing'a. Przypomnijmy, że dla dowolnego pola Killing'a ξ mamy

$$R(X, \xi) = \nabla_X (\nabla \xi).$$

Korzystając z definicji tensora T_i mamy od razu

$$R(X, \xi^i) Y = \nabla_X T_i(Y).$$

Ponieważ $T_i \xi^j = 0$ dla $i, j = 1, \dots, k$, mamy $\nabla_X T_i(\xi^j) + T_i(\nabla_X \xi^j) = 0$ i natychmiast otrzymujemy drugą równość. □

Z powyższego lematu otrzymujemy następujący wniosek

Wniosek 2.1. Zachodzi

$$\mathrm{Ric}(\xi^i, X) = -g(X, \mathrm{tr}_g \nabla T_i),$$

gdzie ξ^i jest jak powyżej, a X jest dowolnym polem wektorowym.

Podamy teraz warunki, których spełnienie zapewnia, że pewne rozmaitości Riemann'a są $\mathcal{A}$-rozmaitościami. Stosujemy powyższe oznaczenia.

Twierdzenie 2.3. *Niech (M, g) będzie jak w lemacie 2.1 oraz niech* Ric *oznacza endomorfizm Ricci'ego. Przypuśćmy, że $\mu \in \mathbb{R}$ jest wartością własną* Ric *i zdefiniujmy dystrybucję $\mathcal{H} = \ker(\mathrm{Ric} - \mu \mathrm{Id})$. Dodatkowo przypuśćmy, że dopełnienie ortogonalne $\mathcal{H}^\perp$ dystrybucji $\mathcal{H}$ jest rozpinane w każdym punkcie $x \in M$ przez $\mathfrak{k}_x^*$ oraz dla dowolnych $i, j = 1, \ldots, k$ zachodzi $\mathrm{Ric}(\xi^i, \xi^j) = const.$ Wtedy (M, g) jest $\mathcal{A}$-rozmaitością.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego pola wektorowego X, $Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ i $\xi^i \in \mathfrak{k}^*$ mamy

$$\mathrm{Ric}\, Y = \mu Y, \quad \nabla \mathrm{Ric}(X, Y) = -(\mathrm{Ric} - \mu \mathrm{Id})(\nabla_X Y),$$
$$\mathrm{Ric}\, \xi^i = \sum_{j=1}^{k} c_j^i \xi^j,$$

dla pewnych stałych c_j^i, $i, j = 1, \ldots, k$.

Pokażemy teraz, że Ric jest tensorem Killing'a. Dowód polega na sprawdzeniu, że zachodzi (1.3) dla różnych trójek pól wektorowych. Weźmy najpierw $X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{H})$. Wtedy

$$g(\nabla \mathrm{Ric}(X, Y), Z) = g(-(\mathrm{Ric} - \mu \mathrm{Id})(\nabla_X Y), Z) = 0,$$

gdzie korzystamy z tego, że $Z \in \Gamma(\mathcal{H})$.

Przypuśćmy teraz, że $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ oraz $Z \in \Gamma(\mathcal{H}^\perp)$. Bez utraty ogólności można założyć, że $Z = \xi^i \in \mathfrak{k}^*$ jest polem Killing'a. Mamy $g(\nabla \mathrm{Ric}(Y, Z), X) = g(\nabla \mathrm{Ric}(Y, X), Z)$ oraz

$$g(\nabla \mathrm{Ric}(Z, X), Y) = g(-(\mathrm{Ric} - \mu \mathrm{Id})(\nabla_Z X), Y) = 0,$$

więc pozostałe składniki sumy cyklicznej z definicji tensora Killing'a to

$$\begin{aligned} &g(\nabla \mathrm{Ric}(X, Y), Z) + g(\nabla \mathrm{Ric}(Y, X), Z) \\ &= g(-(\mathrm{Ric} - \mu \mathrm{Id})(\nabla_X Y), Z) + g(-(\mathrm{Ric} - \mu \mathrm{Id})(\nabla_Y X), Z) \\ &= \mu\,(g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z)) - \left(g(\nabla_X Y, \sum_{j=1}^{k} c_j^i \xi^j) + g(\nabla_Y X, \sum_{j=1}^{k} c_j^i \xi^j) \right) \\ &= -\mu\,(g(Y, \nabla_X Z) + g(X, \nabla_Y Z)) + \sum_{j=1}^{k} c_j^i \left(g(Y, \nabla_X \xi^j) + g(X, \nabla_Y \xi^j) \right) = 0. \end{aligned}$$

Ostatnia równość zachodzi, ponieważ X, Y są prostopadłe do ξ^j oraz ξ^j są Killing'a, dla $j = 1, \ldots, k$.

Weźmy teraz $X = \xi^i, Y = \xi^j$ oraz $Z \in \mathcal{X}(M)$. Mamy

$$
\begin{aligned}
g(\nabla \operatorname{Ric}(X,Y),Z) &= g(\nabla_X(\operatorname{Ric} Y),Z) - g(\operatorname{Ric}(\nabla_X Y),Z)\\
&= \sum_{l=1}^{k} c_l^j g(T_l X, Z) - \sum_{l=1}^{k} c_l^j g(T_l X, \operatorname{Ric} Z) = 0,
\end{aligned}
$$

co wynika z lematu 2.1. Ponieważ $\nabla \operatorname{Ric}$ jest symetryczny, to analogiczny wynik uzyskujemy dla $g(\nabla \operatorname{Ric}(Y,Z),X)$. Dla ostatniego składnika sumy cyklicznej mamy

$$
\begin{aligned}
g(\nabla \operatorname{Ric}(Z,X),Y) &= g(\nabla_Z(\operatorname{Ric} X),Y) - g(\operatorname{Ric}(\nabla_Z X),Y)\\
&= \sum_{l=1}^{k} c_l^i g(\nabla_Z \xi^l, Y) - \sum_{l=1}^{k} c_l^j g(\nabla_Z X, \xi^l)\\
&= -\sum_{l=1}^{k} c_l^i g(Z, T_l Y) + \sum_{l=1}^{k} c_l^j g(Z, T_i \xi^l) = 0
\end{aligned}
$$

ponownie korzystając z lematu 2.1. To dowodzi znikania sumy cyklicznej dla $Z \in \Gamma(\mathcal{H})$ oraz $Z \in \mathfrak{t}^*$ co kończy dowód. □

2.2. Własności pewnej metryki na T^r-wiązce głównej

Niech (B,h) będzie rozmaitością Kähler'a-Einstein'a rzeczywistego wymiaru n. Na początek przypomnimy kilka istotnych faktów związanych z S^1-wiązkami głównymi, gdzie S^1 jest okręgiem jednostkowym. Dla S^1-wiązki głównej $p: S \to B$ oznaczamy przez $\theta \in A^1(S)$ jej formę koneksji, a przez ξ fundamentalne pole wektorowe tej koneksji, czyli pole spełniające $\theta(\xi) = 1$. Dzięki temu, że algebra Lie'go grupy S^1 jest izomorficzna z $\mathbb{R}$, to forma koneksji θ jest zwykła formą różniczkową na S. Przez $\Omega = d\theta$ oznaczamy formę krzywizny koneksji θ wiązki S. Ponieważ Ω jest rzutowalna, to istnieje zamknięta 2-forma ω na B taka, że $\Omega = p^*\omega$.

Niech f będzie dowolną dodatnią funkcją na B. Dla każdej takiej funkcji można zdefiniować metrykę na S wzorem

$$g_f(X,Y) = f^2\theta(X)\theta(Y) + p^*h(X,Y).$$

Można sprawdzić, że z tą metryką odwzorowanie $p:(S,g_f) \to (B,h)$ jest submersją riemannowską z totalnie geodezyjnym włóknem. Co więcej, jeżeli f jest stała, a $\omega = -\frac{\tau}{n}\eta$, gdzie τ jest krzywizną skalarną (B,h), a η jest cofnięciem formy kählerowskiej na (B,h), to (S,g_f) jest $\mathcal{A}$-rozmaitością ([Jel95]).

Niech teraz $p: P \to B$ będzie sumą Whitney'a S^1-wiązek głównych $P_1, \ldots, P_r$. Wtedy P jest T^r-wiązką główną, gdzie przez T^r oznaczamy r-wymiarowy torus. Forma koneksji P jest 1-formą różniczkową o wartościach w algebrze Lie'ego $\mathcal{L}(T^r)$ grupy T^r, która jest izomorficzna z $\mathbb{R}^r$. Składowe $\theta^1, \ldots, \theta^r$ tej formy koneksji są cofnięciami form koneksji odpowiednio z $P_1, \ldots, P_r$. Co więcej możemy wtedy zdefiniować r pól wektorowych $\xi^1, \ldots, \xi^r$ na P, które są cofnięciami fundamentalnych pól wektorowych koneksji $\theta_1, \ldots, \theta_r$.

Podobnie forma krzywizny Ω wiązki P daje się zapisać jako suma $\Omega_1 e_1 + \ldots + \Omega_r e_r \in \mathcal{L}(T^r)$, gdzie Ω_i jest formą krzywizny S^1-wiązki P_i a $e_1, \ldots, e_r$ są bazowymi wektorami $\mathbb{R}^r$. Stąd, istnieje r zamkniętych 2-form ω_i na B takich, że $\Omega_i = p_i^* \omega_i$. Cofając $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ przez odwzorowanie diagonalne, otrzymujemy pojedynczą 2-formę ω na B taką, że $\Omega = p^* \omega$.

Zdefiniujmy teraz na P metrykę g wzorem

$$g(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{r} b_{ij} \theta^i(X) \theta^j(Y) + p^* h(X,Y), \tag{2.1}$$

gdzie $[b_{ij}]_{i,j=1}^r$ dodatnio określoną macierzą symetryczną, a c jest dodatnią stałą. Zauważmy, że macierz $[b_{ij}]_{i,j=1}^r$ indukuje lewo-niezmienniczą metrykę na T^r. Można pokazać, że odwzorowanie $p : (P,g) \to (B,h)$ jest submersją riemannowską.

Stwierdzenie 2.1. *W powyższej sytuacji $\xi^1, \ldots, \xi^r$ są polami Killing'a dla metryki g.*

Dowód. Niech ξ^k będzie zdefiniowane jak wyżej jako cofnięcie pola fundamentalnego formy koneksji na P_k. Zauważmy najpierw, że pochodna Lie'go $L_{\xi^k} g$ zależy tylko od pochodnej Lie'go θ^l względem ξ^k

$$L_{\xi^k} g = \sum_{i,j=1}^{r} b_{ij} \left(L_{\xi^k}(\theta^j) \otimes \theta^i) + \theta^j \otimes L_{\xi^k}(\theta^i) \right).$$

Ponieważ $L_{\xi^k} \theta^k = 0$ to jedyne nieznikające składniki powyższej pochodnej to

$$L_{\xi^k} \theta^l = d(i_{\xi^k} \theta^l) + i_{\xi^k} d\theta^l, \quad l \neq k.$$

Jako że $\theta^l(\xi^k) = 0$, pozostaje obliczyć $d\theta^l(\xi^k, X)$ dla dowolnego $X \in \mathcal{X}(M)$. Mamy

$$d\theta^l(\xi^k, X) = \xi^k(\theta^l(X)) - X(\theta^l(\xi^k)) - \theta^l([\xi^k, X]),$$

gdzie drugi składnik się zeruje.

Przypuśćmy teraz, że X jest cięciem horyzontalnej dystrybucji koneksji w wiązce P. Wtedy mamy $\theta^l(X) = 0$, a $[\xi^k, X]$ jest horyzontalnym polem wektorowym, ponieważ ξ^k jest polem fundamentalnym. Stąd prawa strona znika.

Następnie niech X będzie polem wertykalnym. Jako że $d\theta^l$ jest $C^\infty(P)$-wieloliniowe, możemy założyć, że X jest po prostu liniową kombinacją pól $\xi^1, \ldots, \xi^r$. W związku z tym $\theta^l(X)$ ma stałą wartość, a jego pochodna znika. Nawias Poisson'a $[\xi^k, X]$ również znika, jako że T^r jest grupą abelową. To kończy dowód. $\square$

Jako wniosek z lematu 2.1 otrzymujemy teraz następującą własność tensorów T_i, $i = 1, \ldots, r$.

Wniosek 2.2. Tensor T_i jest horyzontalny, czyli istnieje tensor $\tilde{T}_i$ na B taki, że $\tilde{T}_i \circ p_* = p_* \circ T_i$.

2.3. Fundamentalne tensory O'Neill'a submersji p

W tej części obliczymy fundamentalne tensory O'Neill'a ([ON]) submersji riemannowskiej $p : (P, g) \to (B, h)$. Na początek zauważmy, że włókna submersji są totalnie geodezyjne, więc tensor O'Neill'a T znika.

Stwierdzenie 2.2. *Wertykalna dystrybucja submersji $p : (P, g) \to (B, h)$ jest totalnie geodezyjna.*

Dowód. Musimy sprawdzić, że $g(\nabla_U V, X) = 0$ dla dowolnych pól wertykalnych U, V i horyzontalnego pola X. Ponieważ interesuje nas tylko horyzontalna część pola $\nabla_U V$ możemy założyć, że $U = \xi^j$, $V = \xi^i$ dla pewnych $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Jest tak, gdyż $\nabla_U V$ jest tensorialna w pierwszej zmiennej oraz

$$\nabla_U (fV) = df(U)V + \nabla_U V$$

dla dowolnej gładkiej funkcji f.

Z faktu, że $T_j \xi^i = 0$ dla dowolnego horyzontalnego pola X dostajemy, że

$$2g(\nabla_{\xi^i} \xi^j, X) = 0,$$

co wynika z faktu, że nawias Poisson'a pola wertykalnego i fundamentalnego jest polem horyzontalnym. □

Obliczymy teraz tensor A O'Neill'a.

Lemat 2.4. *Dla dowolnych pól wektorowych E, F na P mamy*

$$A_E F = \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} \big(g(E, T_i F)\xi^j + g(\xi^i, F) T_j E \big),$$

gdzie b^{ij} są współczynnikami macierzy odwrotnej do $[b_{ij}]_{i,j=1}^{r}$.

Dowód. Przypomnijmy, za [ON], definicję tensora O'Neill'a A

$$A_E F = \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{H}E} \mathcal{H}F + \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{H}E} \mathcal{V}F,$$

gdzie $\mathcal{V}$ i $\mathcal{H}$ oznaczają tym razem rzutowania odpowiednio na wertykalną i horyzontalną dystrybucję submersji.

Niech X i Y będą polami horyzontalnymi. Mamy

$$g(\nabla_X Y, \xi^i) = Xg(Y, \xi^i) - g(Y, \nabla_X \xi^i) = g(X, T_i Y),$$

gdzie $i = 1, \dots, r$.

Wertykalna część pola wektorowego $F \in \mathcal{X}(P)$ wyraża się przez

$$\mathcal{V}F = \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(\xi^i, F)\xi^j.$$

Stąd

$$\begin{aligned} g(\mathcal{H}E, T_k\mathcal{H}F) &= g\left(E - \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(\xi^i, E)\xi^j, T_k\left(F - \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(\xi^i, F)\xi^j\right)\right) \\ &= g(E, T_k F). \end{aligned}$$

Podsumowując dostajemy

$$\mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{H}F = \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(E, T_i F)\xi^j.$$

W celu obliczenia drugiego składnika w definicji tensora A zauważmy najpierw, że dla dowolnej funkcji f i pola $E \in \mathcal{X}(P)$ zachodzi $\mathcal{H}\nabla_E f\xi^i = \mathcal{H}f\nabla_E\xi^i$, gdzie $i = 1, \dots, r$. Stąd

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{V}F &= \mathcal{H}\nabla_{E - \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(\xi^i, F)\xi^j} \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(\xi^i, F)\xi^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(\xi^i, F) T_j E. \end{aligned}$$

□

2.4. Kiedy P jest $\mathcal{A}$-rozmaitością?

Poniżej wyprowadzimy warunki, które musi spełniać metryka g na przestrzeni totalnej wiązki P by (P, g) była $\mathcal{A}$-rozmaitością. Ściślej mówiąc, powiemy kiedy (P, g) spełnia warunki twierdzenia 2.3.

Zacznijmy od uzgodnienia oznaczeń. Dystrybucja $\mathcal{H}$ z twierdzenia 2.3 pokrywa się z dystrybucją horyzontalną submersji $p : P \to B$. Zbiór $\mathcal{V} = \mathfrak{t}^*$ składa się z fundamentalnych pól ξ^i, $i = 1, \dots, r$ oraz rozpina przestrzeń wertykalną submersji. Zauważmy również, że $g(\xi^i, \xi^j) = b_{ij}$ jest stałą dla dowolnych $i, j = 1, \dots, r$ oraz pola ξ^i komutują parami ze sobą. Spełniony jest też warunek $TP = \mathfrak{t}^* \oplus \mathcal{H}$, gdzie $\oplus$ oznacza sumę ortogonalną.

Na początku wyprowadzimy warunek równoważny na to, by $\mathrm{Ric}(\mathcal{H}, \mathcal{V}) = 0$. Z wniosku 2.1 mamy

$$0 = \mathrm{Ric}(\xi^i, X) = -g(X, \mathrm{tr}_g \nabla T_i), \quad i = 1, \dots, r.$$

W dalszym ciągu dokonamy reinterpretacji tego warunku, korzystając z definicji tensorów T_i.

Przypomnijmy, że dla $i = 1, \dots, r$ zachodzi $\Omega^i = p^*\omega^i$, gdzie ω^i jest pewną 2-formą na B, a $\Omega^i = d\theta^i$. Podamy teraz wzór na θ^i. Dla $X \in \mathcal{X}(P)$ mamy

$$g(\xi^k, X) = \sum_{j=1}^{r} b_{kj}\theta^j(X), \quad k = 1, \dots, r.$$

Można stąd wyliczyć θ^j korzystając z faktu, że $\theta_j(\xi^i) = \delta_i^j$, gdzie δ_i^j jest symbolem Kronecker'a.

$$\theta^j(X) = \sum_{i=1}^{r} b^{ji} g(\xi^i, X), \quad j = 1, \dots, r,$$

gdzie b^{ji} są współczynnikami macierzy odwrotnej do $[b_{ji}]_{i,j=1}^r$. Różniczkując otrzymujemy

$$\Omega^i(X, Y) = d\theta^i(X, Y) = 2\sum_{j=1}^{r} b^{ij} g(T_j X, Y), \tag{2.2}$$

gdzie $X, Y \in \mathcal{X}(P)$.

Ponieważ T_i są horyzontalne dla $i = 1, \dots, r$, to

$$\omega^i(p_*X, p_*Y) = 2\sum_{j=1}^{r} b^{ij} h(\tilde{T}_j(p_*X), p_*Y), \tag{2.3}$$

gdzie $\tilde{T}_i$ jest „rzutem" T_i zdefiniowanym w lemacie 2.1. Zauważmy, że koróżniczka ω^i jest dana przez

$$(\delta\omega^i)(p_*X) = -\sum_{k=1}^{m} (\nabla^h_{E_k}\omega^i)(E_k, p_*X),$$

gdzie $\{E_k\}_{k=1}^m$ jest lokalną bazą ortonormalną B. Dalej, mamy

$$(\delta\omega^i)(p_*X) = -2\sum_{j=1}^{r} b^{ij} h(\mathrm{tr}_h \nabla^h \tilde{T}_j, p_*X), \quad i = 1, \dots, r.$$

Kontynuując obliczenia otrzymujemy dla $i = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} h(p_*X, \mathrm{tr}_h \nabla^h \tilde{T}_i) &= \sum_{k=1}^{m} \Big(h(p_*X, \nabla^h_{E_k}(\tilde{T}_i E_k)) - h(p_*X, \tilde{T}_i(\nabla^h_{E_k} E_k)) \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (g(X, \nabla_{X_k}(T_i X_k)) - g(X, T_i(\nabla_{X_k} X_k)) \\ &= g(X, \mathrm{tr}_g \nabla T_i). \end{aligned}$$

Widać teraz, że jeżeli warunek $\mathrm{Ric}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) = 0$ jest spełniony, to formy ω^i są harmoniczne dla $i = 1, \dots, r$. Co więcej, ze wzorów na $\delta\omega^i$ widzimy, że jeżeli wszystkie ω^i, $i = 1, \dots, r$, są harmoniczne, to $h(\mathrm{tr}_h \nabla^h \tilde{T}_1, p_*X) = \dots =$

$h(\operatorname{tr}_h \nabla^h \tilde{T}_r, p_* X) = 0$, gdyż macierz $[b_{ij}]$ jest nieosobliwa. Oznacza to, że $g(X, \operatorname{tr}_g \nabla T_i) = 0$, $i = 1, \ldots, r$. Stąd dostajemy, że warunek $\operatorname{Ric}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) = 0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\omega^i \text{ są harmoniczne dla } i \in \{1, \ldots, r\}. \tag{2.4}$$

Uwaga. Zauważmy, że powyższy warunek to warunek Yang'a-Mills'a dla koneksji θ w wiązce głównej P.

Następny warunek z twierdzenia to $\operatorname{Ric}(\xi^i, \xi^j) = const$ dla ξ^i jak na początku tej sekcji. Stosując lemat 2.1 mamy $\operatorname{Ric}(\xi^i, \xi^j) = -g(\xi^j, \operatorname{tr}_g \nabla T_i), i, j \in \{1, \ldots, r\}$. W takim razie nasz warunek daje się zapisać jako

$$-g(\xi^j, \operatorname{tr}_g \nabla T_i) = const. \tag{2.5}$$

Niech $\{X_k\}_{k=1}^m$ będzie lokalną bazą ortonormalną dystrybucji $\mathcal{H}$ i $i \in \{1, \ldots, r\}$ taką, że $p_* X_k = \frac{1}{c} E_k$. Mamy wtedy $\operatorname{tr}_g \nabla T_i = \sum_{k=1}^m (\nabla T_i)(X_k, X_k)$, więc dla $j = 1, \ldots, r$ zachodzi

$$g(\xi^j, \operatorname{tr}_g \nabla T_i) = -\sum_{k=1}^m g(\nabla T_i(X_k, \xi^j), X_k).$$

Jako że $\nabla T_i(X_k, \xi^j) = -T_i T_j X_k$, to (2.5) przyjmuje postać

$$\sum_{k=1}^m g(T_j X_k, T_i X_k) = const, \quad i, j \in \{1, \ldots, r\},$$

a ponieważ T_i są horyzontalne dla $i = 1, \ldots, r$ to możemy powyższy wzór zapisać jako

$$\sum_{k=1}^m h(\tilde{T}_j E_k, \tilde{T}_i E_k) = const, \quad i, j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{2.6}$$

Jeżeli ten warunek jest spełniony to istnieje lokalna baza $\{\zeta^1, \ldots, \zeta^r\}$ dystrybucji wertykalnej taka, że $\operatorname{Ric} \zeta^i = \lambda_i \zeta^i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, \ldots, r$, czyli ζ^i są wektorami własnymi endomorfizmu Ric odpowiadającymi wartościom własnym λ_i.

Pokażemy teraz jak w naszej sytuacji przeformułować warunek

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \mu g(X, Y)$$

gdzie X i Y są cięciami $\mathcal{H}$.

Przypomnijmy na początek, że tensor O'Neill'a A dla dwóch pól horyzontalnych X i Y wyraża się wzorem

$$A_X Y = \sum_{i,j=1}^r b^{ij} g(X, T_i Y) \xi^j.$$

Skorzystamy z formuły na tensor Ricci'ego submersji riemannowskiej, którą można znaleźć w [Be], rozdział 9:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \check{\mathrm{Ric}}(X,Y) - 2\sum_{k=1}^{m} g(A_X X_k, A_Y X_k),$$

gdzie $\check{\mathrm{Ric}}$ symetrycznym tensorem danym przez

$$\check{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \mathrm{Ric}_B(p_* X, p_* Y),$$

a Ric_B jest z kolei tensorem Ricci'ego (B,h). Dalej, mamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \check{\mathrm{Ric}}(X,Y) - 2\sum_{k=1}^{m} g\Big(\sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(X, T_i X_k)\xi^j, \sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g(Y, T_s X_k)\xi^t\Big)\\
&= \check{\mathrm{Ric}}(X,Y) - 2\sum_{k=1}^{m} g\Big(\sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(T_i X, X_k)\xi^j, \sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g(T_s Y, X_k)\xi^t\Big)\\
&= \check{\mathrm{Ric}}(X,Y) - 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} \sum_{s,t=1}^{r} b^{st} b_{jt} g(T_i X, X_k) g(T_s Y, X_k)\\
&= \check{\mathrm{Ric}}(X,Y) - 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(T_i X, g(T_j Y, X_k) X_k)\\
&= \check{\mathrm{Ric}}(X,Y) - 2\sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(T_i X, T_j Y).
\end{aligned}$$

Ponieważ Ric jest symetryczny, to jego wartości na dowolnych polach wektorowych są jednoznacznie określone przez wartość

$$\mathrm{Ric}(X,X) = \check{\mathrm{Ric}}(X,X) - 2\sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} g(T_i X, T_j X). \tag{2.7}$$

Dzięki faktowi, że $\check{\mathrm{Ric}}$ i T_i, $i = 1,\ldots,r$, są horyzontalne możemy warunek $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mu g(X,Y)$ wyrazić za pomocą metryki na bazie (B,h).

2.5. Konstrukcja przykładu

W tej części zajmiemy się konstrukcją przykładu $\mathcal{A}$-rozmaitości na przestrzeni totalnej T^r-wiązki głównej nad produktem dowolnej ilości rozmaitości Kähler'a-Einstein'a.

Niech (B, g_B) będzie zwartą rozmaitością Kähler'a z dodatnio określonym tensorem Ricci'ego. Na podstawie twierdzenia Kobayashi'ego ([Ko61], Theorem A) taka rozmaitość jest jedno-spójna. Co więcej, z tej samej pracy wiemy, że jeżeli pierwsza klasa Chern'a (B, g_B) jest dodatnia to $H_1(B;\mathbb{Z}) = 0$ ([Ko61], Theorem B). Zauważmy, że każda rozmaitość Kähler'a-Einstein'a z dodatnią krzywizną skalarną ma powyższe własności. Na podstawie Twierdzenia o Uniwersalnych Współczynnikach dla Kohomologii otrzymujemy, że

$H^2(B;\mathbb{Z})$ jest beztorsyjna. Stąd pierwszą klasę Chern'a $c_1(B)$ można zapisać jako całkowitą wielokrotność pewnej nierozkładalnej klasy $\alpha \in H^2(B;\mathbb{Z})$, powiedzmy $c_1(B) = q\alpha$, $q \in \mathbb{Z}_+ \smallsetminus \{0\}$. Dla uproszczenia zapisu unormujemy metrykę Kähler'a g_B tak, by klasa kohomologii formy kählerowskiej ω_B była taka sama jak klasa formy $2\pi\alpha$. Normalizacja ta jest równoważna dobraniu stałej Einstein'a metryki g_B równej q.

Korzystając z kolejnej pracy Kobayashi'ego ([Ko56]) wiemy, że każda S^1-wiązka główna S nad rozmaitością Riemann'a (B, g_B) jest klasyfikowana przez pewną klasę kohomologii z $H^2(B;\mathbb{Z})$. Ściśle mówiąc jest to klasa Euler'a $e(S)$ wiązki S. Wynika stąd, że każda T^r-wiązka główna $p : P \to B$ jest klasyfikowana przez r klas kohomologii $\beta_1, \dots, \beta_r$ z $H^2(B;\mathbb{Z})$. Klasy te można opisać jako klasy Euler'a ilorazowych S^1-wiązek głównych P/S_i nad B, gdzie S_i jest $r-1$-wymiarowym torusem powstałym z T^r poprzez usunięcie i-tego okręgu S^1 z kanonicznego rozkładu $T^r = S^1 \times \dots \times S^1$. Co więcej, mamy ([Ko56])

$$d\theta_i = 2\pi p^* \beta_i. \tag{2.8}$$

Twierdzenie 2.5. *Niech (B_j, g_j) będą zwartymi rozmaitościami Kähler'a-Einstein'a z dodatnimi klasami Chern'a $c_1(B_j) > 0$ dla $j = 1, \dots, m$. Zdefiniujmy rozmaitość produktową B jako $B = B_1 \times \dots \times B_m$ z metryką $h = \sum_{j=1}^m x_j g_j$ gdzie x_j są pewnymi stałymi dodatnimi, które dobierzemy w trakcie dowodu. Niech $p : P \to B$ będzie T^r-wiązką główną charakteryzowaną przez klasy $\beta_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} pr_j^* \alpha_j$ dla $i = 1, \dots, r$, gdzie dla każdego $j \in \{1, \dots, m\}$ odwzorowanie $pr_j : B \to B_j$ jest rzutowaniem na j-ty składnik, α_j jest nierozkładalną klasą w $H^2(B_j;\mathbb{Z})$ taką, że $c_1(B_j) = q_j \alpha_j$ dla $q_j \in \mathbb{Z}_+ \smallsetminus \{0\}$, a $[a_{ij}]$ jest macierzą $r \times m$ ze współczynnikami całkowitymi. Wtedy P z metryką g zdefiniowaną przez*

$$g(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{r} b_{ij} \theta^i(X) \theta^j(Y) + p^* h(X,Y),$$

jest $\mathcal{A}$-rozmaitością, gdzie θ^i są zdefiniowane jak w podrozdziale 2.2, a $[b_{ij}]$ jest dowolną, symetryczną i nieosobliwą macierzą wymiaru $r \times r$.

Dowód. W dowodzie przyjmujemy, że wskaźnik i zmienia się od 1 do r, a j od 1 do m. Co więcej, normalizujemy każdą z metryk g_j tak, by ich formy Kähler'a η_j należały do tej samej klasy kohomologii co $2\pi\alpha_j$, czyli przyjmujemy, że stała Einstein'a każdej metryki g_j jest równa q_j.

Niech P_i będzie S^1-wiązką główną nad B charakteryzowaną klasą β_i. Wobec (2.8) mamy

$$d\theta_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} p^* \eta_k^*,$$

gdzie $\eta_j^* = pr_j^* \eta_j$. Ponieważ forma Kähler'a na rozmaitości kählerowskiej jest harmoniczna to warunek (2.4) jest automatycznie spełniony.

Niech teraz P będzie T^r-wiązką główną zdefiniowaną jako suma Whitney'a wiązek $P_1, \dots, P_r$. Przyjmijmy, że $\theta_1, \dots, \theta_r$ są składowymi formy koneksji w wiązce P, a $\Omega_i = d\theta_i$ jest i-tą składową formy krzywizny na P. Przypomnijmy, że istnieją 2-formy ω_i na B takie, że $\Omega_i = p^*\omega_i$. Porównując z (2.3) dla każdego i otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\eta_k^*(X,Y) = 2\sum_{l=1}^{r} b^{il} h(\tilde{T}_l(X), Y),$$

gdzie $X, Y \in \mathcal{X}(B)$. Tensor J_j struktury zespolonej na B_j można traktować jak endomorfizm TB_j, a ponieważ $TB = TB_1 \oplus \ldots \oplus TB_m$ i h jest metryką produktową, to tensor $J_j^* = p^* J_j$ zachowuje TB_j. Możemy wobec tego napisać, że $\eta_j^*(X,Y) = \frac{1}{x_j} h(J_j^* X, Y)$. Zdefiniujmy $\tilde{T}_i$ następującym wzorem

$$\tilde{T}_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} b_{ik}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{x_l} a_{kl} J_l^*\right),$$

Zauważmy, że $\sum_{k=1}^{r} b_{ik}a_{kl}$ są współczynnikami iloczynu macierzy $[b_{ik}]$ i $[a_{ij}]$, które dla skrócenia zapisu oznaczymy przez c_{il}. Mamy więc

$$\tilde{T}_i = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{x_l} c_{il} J_l^*.$$

W dalszej części znajdziemy takie współczynniki x_j metryki produktowej h, by (P, g) spełniało warunki twierdzenia 2.3. Oznaczmy przez $\{X_j\}$ pewną bazę ortogonalną na B taką, że $\{X_l^j\}_{l=1}^{n_j}$ jest ortogonalną bazą dla B_j, gdzie n_j jest rzeczywistym wymiarem rozmaitości B_j. Dla dowolnych $i, l \in \{1, \dots, r\}$ zachodzi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} h(\tilde{T}_i X_k, \tilde{T}_l X_k) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m} h\left(\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{x_p} c_{ip} J_p^* X_k, \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{x_s} c_{ls} J_s^* X_k\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\frac{c_{ip}c_{lp}}{x_p^2} h\left(J_p^* X_k, J_p^* X_k\right),\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z wyżej omówionych własności tensora J_j. Możemy wyrazić poprzedni wzór używając metryki na B_j:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} h(\tilde{T}_i X_k, \tilde{T}_l X_k) &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{c_{ip}c_{lp}}{x_p} g_j(J_p X_k, J_p X_k)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\frac{c_{ip}c_{lp}}{x_p^2} n_j.\end{aligned}$$

Widać teraz, że warunek (2.6) jest spełniony.

Przyjrzyjmy się teraz równaniu (2.7) definiującemu drugą wartość własną.

$$\begin{aligned}\rho(X^*, X^*) &= \check{\rho}(X^*, X^*) - 2\sum_{i,k=1}^{r} b^{ik} g(T_i X^*, T_k X^*)\\ &= \rho_B(X, X) - 2\sum_{i,k=1}^{r} b^{ik} h(\tilde{T}_i X, \tilde{T}_k X)\\ &= \rho_B(X, X) - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{r} b^{ik}\left(\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{x_p^2} c_{ip} c_{kp} h(J_p^* X, J_p^* X)\right).\end{aligned}$$

Możemy przypuścić, że X jest elementem lokalnej bazy ortonormalnej na B_j. Otrzymujemy wtedy m równań

$$\mu = \frac{q_j}{x_j} - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{r}\frac{b^{ik} c_{ij} c_{kj}}{x_j^2}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.9}$$

Widać teraz, że możemy tak dobrać współczynniki x_j, że powyższe równania są spełnione dla dowolnych a_{ik}, $k \in \{1, \dots, m\}$, oraz b_{ip}, $p \in \{1, \dots, r\}$. Przykładowe rozwiązanie można uzyskać podstawiając $x_s = \alpha_s x_1$ dla pewnych stałych $\alpha_s > 0$, przy czym $s \in \{2, \dots, m\}$. W tym wypadku otrzymujemy $m-1$ równań na α_s

$$\frac{\alpha_s q_1 - q_s}{\alpha_s x_1} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{r}\frac{\alpha_s^2 b^{ik} c_{k1} c_{i1} - b^{ik} c_{ks} c_{is}}{\alpha_s^2 x_1^2}, \tag{2.10}$$

lub

$$\frac{q_s}{\alpha_s} = q_1 \tag{2.11}$$

jeżeli suma po prawej stronie (2.9) jest równa zeru. W tym drugim przypadku wystarczy wziąć $\alpha_s = \frac{q_s}{q_1}$ dla $s = 2, \dots, m$. Z kolei równania (2.10) są równoważne następującym

$$\alpha_s x_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{r}\frac{\alpha_s^2 b^{ik} c_{k1} c_{i1} - b^{ik} c_{ks} c_{is}}{\alpha_s q_1 - q_s},$$

gdzie $s = 2, \dots, m$. Przekształcając, otrzymujemy

$$\left(2q_1 x_1 - \sum_{i,k=1}^{r} b^{ik} c_{k1} c_{i1}\right)\alpha_s^2 - 2\alpha_s q_s x_1 + \sum_{i,k=1}^{r} b^{ik} c_{ks} c_{is} = 0. \tag{2.12}$$

Każde z tych równań, dla $s = 2, \dots, m$, ma dokładnie dwa rozwiązania α_s' i α_s'' dokładnie wtedy, gdy

$$q_s^2 x_1^2 - \left(2q_1 x_1 - \sum_{i,k=1}^{r} b^{ik} c_{k1} c_{i1}\right)\left(\sum_{i,k=1}^{r} b^{ik} c_{ks} c_{is}\right) > 0.$$

Widać, że dla dostatecznie dużego x_1 powyższa nierówność jest spełniona. Co więcej, ze wzorów Viete'a, dwa rozwiązania α_s' i α_s'' równania (2.12) spełniają

$$\alpha_s' + \alpha_s'' = \frac{2q_s x_1}{2q_1 x_1 - \sum_{i,k=1}^r b^{ik} c_{k1} c_{i1}}.$$

Ponownie, dla dostatecznie dużego x_1 powyższa suma jest dodatnia, co mówi nam, że przynajmniej jedno z rozwiązań równania (2.12) jest dodatnie. Podsumowując, dla dostatecznie dużego x_1 układ (2.10) ma dodatnie rozwiązanie.

W powyższej sytuacji założenia twierdzenia 2.3 są spełnione, więc dla $x_1, \ldots, x_s$ jak wyżej (P, g) jest $\mathcal{A}$-rozmaitością. $\square$

Uwaga. Pokażemy, że przynajmniej niektóre ze skonstruowanych w powyższym twierdzeniu $\mathcal{A}$-rozmaitości są właściwe. Rozważmy powyższą konstrukcję dla macierzy $[a_{ij}]$ rzędu r i załóżmy, że przynajmniej jedno λ_i jest różne od μ. Zauważmy, że $\nabla \operatorname{Ric} = 0$ implikuje $\nabla \eta_i = 0$, dla η_i będącego wektorem własnym tensora Ricci'ego odpowiadającym wartości własnej λ_i. W rzeczy samej, niech X będzie cięciem dystrybucji horyzontalnej. Mamy

$$0 = \nabla_X \operatorname{Ric}(\eta_i) = -(\operatorname{Ric} - \lambda_i)\nabla_X \eta_i,$$

co oznacza, że $\nabla_X \eta_i$ jest cięciem dystrybucji wertykalnej, ściśle mówiąc – dystrybucji własnej odpowiadającej wartości własnej λ_i. Ponieważ η_i jest liniową kombinacją wektorów ξ^j, $j = 1, \ldots, r$, ze stałymi współczynnikami, to $\nabla_X \eta_i$ jest również horyzontalne. Wobec tego musi się zerować.

Korzystając z faktu, że $\eta_i = \sum_{p=1}^r e_p^i \xi^p$, gdzie e_p^i są stałe widać, że $\nabla_X \eta_i = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{p=1}^r e_p^i \nabla_X \xi^p = 0$. Pokażemy, że dla $p = 1, \ldots, r$ i dowolnego pola horyzontalnego X, pola $\nabla_X \xi^p$ są liniowo niezależne, co stoi w sprzeczności z faktem, że η_i są niezerowe.

Przypuśćmy, że istnieją funkcje gładkie $b_1, \ldots, b_r$ i horyzontalne pole wektorowe X takie, że

$$b_1 \nabla_X \xi^1 + \ldots + b_r \nabla_X \xi^r = 0. \tag{2.13}$$

Przypomnijmy, że

$$\nabla_X \xi^p = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \frac{c_{pl}}{x_l} \tilde{J}_l^* X,$$

przy czym wszystkie oznaczenia są jak w twierdzeniu powyżej. Z (2.13) otrzymujemy

$$\sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^r \left(b_p \frac{c_{pl}}{x_l} \right) \tilde{J}_l^* X = 0.$$

Jeżeli teraz X będzie podniesieniem do P elementu E_l bazy ortonormalnej rozmaitości B_l, to dla każdego $l = 1, \ldots, m$ mamy

$$\sum_{p=1}^r b_p \frac{c_{pl}}{x_l} \tilde{J}_l^* E_l = 0,$$

co jest równoważne temu, że $\sum_{p=1}^{r} b_p c_{pl} = 0$ dla każdego l. W postaci macierzowej możemy to zapisać jako $C^T b = 0$, gdzie C^T jest transpozycją macierzy $C = [c_{ij}]$, a b jest wektorem kolumnowym o współrzędnych $b_1, \ldots, b_r$. Przypomnijmy, że $C = BA$, gdzie B jest macierzą metryki na torusie T^r, a $A = [a_{ij}]$, jest rzędu r. Stąd C musi mieć rząd r. Widzimy teraz, że $C^T b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 0$ co pociąga za sobą fakt, że $\nabla\xi^1, \ldots, \nabla\xi^r$ są liniowo niezależne. Otrzymaliśmy w takim razie sprzeczność z $\nabla\eta_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, r$.

Rozdział 3

$\mathcal{A}$ i $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości a konforemne formy Killing'a

W tym rozdziale przedstawimy znane autorowi związki między konforemnymi formami Killing'a i $\mathcal{A}$- oraz $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitościami.

3.1. Słabo-samodualne powierzchnie kählerowskie i prawie kählerowskie

Ta część pracy opiera się na [Jel02] oraz [ACG03]. Rozmaitość kählerowską (M, g, J) rzeczywistego wymiaru 4 nazywamy *powierzchnią kählerowską*. Na każdej rozmaitości czterowymiarowej operator Hodge'a $*$ przeprowadza przestrzeń 2-form różniczkowych w siebie oraz zachodzi $*^2 = \mathrm{id}_{\Omega^2(M)}$. Można pokazać, że $*$ ma dwie wartości własne 1 i -1. Przestrzenie własne odpowiadające tym wartościom własnym oznaczamy odpowiednio przez $\Omega^+(M)$ i $\Omega^-(M)$.

Niech $\mathcal{R}$ oznacza *operator krzywizny* na 2-formach różniczkowych zdefiniowany przez $g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge W) = R(X, Y, W, Z)$ dla dowolnych pól wektorowych X, Y, W i Z. Następnie zdefiniujmy operator $B = \frac{1}{2}(\mathcal{R} - *\mathcal{R}*)$ oraz $W = \frac{1}{2}(\mathcal{R} + *\mathcal{R}*) - \frac{\mathrm{scal}}{12}\mathrm{id}_{\Omega^2(M)}$, który jest bezśladową częścią B. Operator W nazywamy *tensorem Weyl'a* rozmaitości kählerowskiej (M, g, J). Dla tensora Weyl'a W możemy zdefiniować tak zwaną cześć samo-dualną W^+ i część anty-samo-dualną W^- następująco

$$W^{\pm} = \frac{1}{2}(W \pm *W). \tag{3.1}$$

Pokazuje się, że wtedy operator krzywizny $\mathcal{R}$ wyraża się przez

$$\mathcal{R} = \frac{\mathrm{scal}}{12}\mathrm{id}_{\Omega^2(M)} + B + W^+ + W^-.$$

Można pokazać, że rozkład dywergencji $\mathrm{div}W$ tensora Weyl'a na część samo-dualną i anty-samo-dualną jest dany następująco

$$\mathrm{div}W = \mathrm{div}W^{+} + \mathrm{div}W^{-}.$$

Mówimy, że powierzchnia kählerowska (M, g, J) jest *słabo samo-dualna*, jeżeli zachodzi $\mathrm{div}W^{-} = 0$, czyli anty-samo-dualna część tensora Weyl'a jest harmoniczna. Klasyfikacja takich rozmaitości została przeprowadzona w [ACG03] (wcześniejsza, ale mniej ogólna klasyfikacja została uzyskana w [Jel02]). Co więcej, autorzy [ACG03] udowodnili następujący ciekawy związek ([ACG03], Lemat 1 i Lemat 11).

Lemat 3.1. *Powierzchnia prawie-kählerowska (M, g, J) z J-niezmienniczym tensorem Ricci'ego ma harmoniczną anty samo-dualną część tensora Weyl'a wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następująca równość, zwana* równością Matsumoto-Tanno*:*

$$\nabla_X \rho_0 = -\frac{1}{12} d\,\mathrm{scal}(X)\omega + \frac{1}{12}\left(d\,\mathrm{scal} \wedge JX - Jd\,\mathrm{scal} \wedge X\right), \tag{3.2}$$

gdzie $\rho_0 = \rho - \frac{1}{4}\,\mathrm{scal}\,\omega$ jest bezśladową częścią formy Ricci'ego ρ.

Na mocy Lematu 3.11 z pracy [M-S] warunek (3.2) na rozmaitości kählerowskiej jest równoważny temu, że ρ_0 jest formą twistorową. Dla rozmaitości prawie kählerowskiej przenosi się dowód faktu, że ze spełnienia warunku (3.2) wynika to, że ρ_0 jest formą twistorową.

W tym kontekście autor udowodnił następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.1. *Niech (M, g, J) będzie rozmaitością prawie kählerowską dowolnego wymiaru i przypuśćmy, że tensor Ricci'ego metryki g jest J-niezmienniczy. Jeżeli bezśladowa część ρ_0 formy Ricci'ego ρ jest formą twistorową, to (M, g, J) jest $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością.*

Dowód. Skorzystamy tutaj z ciekawej własności rozmaitości prawie kählerowskich z J-niezmienniczym tensorem Ricci'ego. Mianowicie forma Ricci'ego ρ takiej rozmaitości jest zamknięta, podobnie jak ma to miejsce na rozmaitości Kähler'a.

Związek między bezśladową częścią formy Ricci'ego a formą Ricci'ego jest dany przez $\rho_0 = \rho - \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\,\omega$, gdzie ω jest formą Kähler'a. Ponieważ ρ_0 jest 2-formą twistorową, to spełnia warunek (1.17) definicji formy twistorowej, czyli

$$\nabla_X \rho_0 = \frac{1}{3} X \lrcorner\, d\rho_0 - \frac{1}{n-1} X \wedge \delta\rho_0.$$

Z zamkniętości formy Ricci'ego i formy Kähler'a mamy $d\rho_0 = -\frac{1}{n} d\,\mathrm{scal} \wedge \omega$. Dla ko-różniczki zachodzi $\delta\rho_0 = \delta\rho + \frac{1}{n} Jd\,\mathrm{scal}$, a pochodna kowariantna spełnia

$$\nabla_X \rho_0 = \nabla_X \rho - \frac{1}{n} d\,\mathrm{scal}(X)\omega - \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\,\nabla_X \omega.$$

Stąd dla formy Ricci'ego ρ dostajemy

$$\begin{aligned}\nabla_X \rho = \frac{2}{3n} d\,\mathrm{scal}(X)\omega - \frac{1}{n-1} X \wedge \delta\rho + \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\,\nabla_X \omega + \\ + \frac{1}{3n} d\,\mathrm{scal} \wedge JX - \frac{1}{n(n-1)} X \wedge Jd\,\mathrm{scal}\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Zauważmy, że na rozmaitości prawie kählerowskiej

$$\nabla_X \operatorname{Ric}(X,X) = -\nabla_X \rho(JX,X),$$

ponieważ $\nabla_X J$ jest skośnie-symetryczny. Korzystając ze wzoru (3.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\nabla_X \operatorname{Ric}(X,X) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\delta\rho(JX) - \frac{n-2}{n} d\,\mathrm{scal}(X)\right) g(X,X) + \\ + \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\,\nabla_X\omega(JX,X).\end{aligned}$$

Pokażemy, że na rozmaitości prawie kählerowskiej $\nabla_X\omega(JX,X) = 0$. Na początek zauważmy, że jeżeli forma kählerowska ω jest zamknięta to zachodzi ([K-N], Stwierdzenie 4.2)

$$2g((\nabla_X J)Y,Z) = g(N^J(Y,Z),JX),$$

przy czym różnice w stałej po lewej stronie wynikają z innej definicji tensora Nijenhuis'a. Wystarczy teraz zauważyć, że $N^J(JX,X) = 0$. □

W przypadku słabo-samodualnych powierzchni kählerwoskich mamy następujące twierdzenie klasyfikacyjne ([ACG03], Twierdzenie 5):

Twierdzenie 3.2. *Załóżmy, że (M,g,J) jest zwartą, słabo samo-dualną powierzchnią kählerowską. Wtedy (M,g,J) jest*

- *rozmaitością Kähler'a-Einstein'a, albo*
- *lokalnie izomorficzna z produktem dwu powierzchni Riemanna o stałej krzywiźnie Gauss'a, albo*
- *z dokładnością do mnożenia przez stałą, jest izomorficzne z pierwszą powierzchnią Hirzebruch'a F_1 ze słabo samo-dualną kählerowską metryką Calabi'ego.*

Jako, że w pierwszych dwóch przypadkach tensor Ricci'ego jest równoległy, to z naszego punktu widzenia interesujący jest tylko przypadek trzeci. Otrzymujemy więc następujący wniosek (patrz też [Jel02]).

Wniosek 3.1. Każda powierzchnia kählerowska będąca przeskalowaną powierzchnią Hirzebruch'a F_1 z metryką Calabi'ego jest $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością.

W przypadku 4-wymiarowych słabo samo-dualnych rozmaitości prawie kählerowskich w pracy [ACG03] autorzy uzyskali lokalną klasyfikację. Podali również przykłady takich rozmaitości. Autorzy nie byli niestety w stanie podać przykładów słabo samo-dualnych rozmaitości prawie kählerowskich o niestałej krzywiźnie skalarnej, które automatycznie są $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitościami. Podali natomiast następujące twierdzenie ([ACG03], twierdzenie 6).

Twierdzenie 3.3. *Przypuśćmy, że istnieje zwarta, słabo samo-dualna,* 4*-wymiarowa rozmaitość prawie kählerowska* (M, g, J)*, której tensor Ricci'ego jest* J*-niezmienniczy, a tensor struktury prawie zespolonej* J *nie jest całkowalny. Wtedy zachodzi jedna z dwu możliwości:*

- *krzywizna skalarna metryki* g *jest stała i ujemna; na* M *istnieje wtedy niecałkowalna struktura zespolona stowarzyszona z pewną metryką Einstein'a,*
- *krzywizna skalarna metryki* g *nie jest stała; na* M *istnieje niecałkowalna struktura zespolona stowarzyszona z pewną metryką Kähler'a; ta ostatnia metryka jest ekstremalną (w sensie Calabi'ego) metryką Kähler'a, na minimalnej powierzchni prostokreślnej nad powierzchnią Riemann'a o genusie większym od* 1*.*

3.2. Rozmaitości słabo bochnerowsko-płaskie

Niech B oznacza tensor Bochner'a rozmaitości kählerowskiej (M, g, J) z formą kählerowską ω. Mówimy, że (M, g, J) jest *słabo bochnerowsko-płaska* (*weakly Bochner-flat*), w skrócie WBF, jeżeli tensor Bochner'a B spełnia $\mathrm{div} B = 0$. W szczególności każda rozmaitość *bochnerowsko-płaska* (*Bochner-flat*), czyli spełniająca warunek $B = 0$, jest WBF.

Zanim przejdziemy dalej postawimy następującą definicję. Niech φ będzie J-niezmienniczą 2-formą różniczkową na (M, g, J). Mówimy, że φ jest *formą hamiltonowską* ([ACG04]) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nabla_X \varphi = \frac{1}{2}\left(d\sigma \wedge JX - Jd\sigma \wedge X\right), \tag{3.4}$$

przy czym bez utraty ogólności można przyjąć, że σ jest śladem formy φ względem ω. Formy hamiltonowskie zostały opisane w pracy [ACG04], co więcej praca ta zwiera też lokalny opis metryk kählerowskich dopuszczających takie obiekty. W naszym kontekście istotne jest następujące stwierdzenie ([M-S])

Stwierdzenie 3.2. *Niech* (M, g, J) *będzie rozmaitością Kähler'a z hamiltonowską* 2*-formą* φ*. Wtedy* $\psi = \varphi - \frac{\mathrm{tr}_\omega \varphi}{2}\omega$ *jest* 2*-formą twistorową. Odwrotnie, jeżeli* ψ *jest* 2*-formą twistorową oraz wymiar rozmaitości* M *jest większy od* 4*, to* $\varphi = \psi - 2\frac{\mathrm{tr}_\omega \psi}{n-4}\omega$ *jest* 2*-formą hamiltonowską.*

W [ACG04] pokazano, że rozmaitość Kähler'a (M, g, J) jest WBF wtedy i tylko wtedy, gdy tak zwana unormowana forma Ricci'ego $\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{n+2}\operatorname{scal}\omega$ jest formą hamiltonowską. Korzystając z poprzedniego stwierdzenia mamy, że

$$\psi = \tilde{\rho} - \frac{1}{2(n+2)}\operatorname{scal}\omega = \rho - \frac{3}{2(n+2)}\operatorname{scal}\omega$$

jest 2-formą twistorową. Na mocy stwierdzenia 1.6 widać, że tensor

$$S(X,Y) = -\psi(JX,Y)$$

jest konforemnym tensorem Killing'a. Korzystając z definicji formy ψ mamy

$$S(X,Y) = \operatorname{Ric}(X,Y) + \frac{3}{2(n+2)}\operatorname{scal} g(X,Y).$$

Biorąc pod uwagę stwierdzenie 1.2 dostajemy w takim razie, że Ric też jest konforemnym tensorem Killing'a. W ten sposób udowodniliśmy znane stwierdzenie

Stwierdzenie 3.3. *Niech (M, g, J) będzie rozmaitością słabo bochnerowsko-płaską. Wtedy (M, g) jest $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością.*

Zauważmy, że ponieważ w rzeczywistym wymiarze 4 tensor Bochner'a pokrywa się z anty-samo-dualną częścią tensora Weyl'a W^-, to powyższe stwierdzenie jest uogólnieniem Stwierdzenia (3.1).

Konstrukcję przykładu $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości WBF można znaleźć w [Jel09].

3.3. Inna konstrukcja na T^r-wiązce głównej

W tej części przedstawimy, dokonane przez autora niniejszej pracy, uogólnienie konstrukcji z rozdziału 2. Uogólnienie polega na zastosowaniu w konstrukcji innej rozmaitości będącej bazą T^r-wiązki głównej.

3.3.1. Warunki na tensor Ricci'ego

Niech $p : P \to B$ będzie T^r-wiązką główną nad pewną rozmaitością riemannowską (B, h). Na P wprowadzamy metrykę g wzorem

$$g(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{r} b_{ij}\theta^i(X)\theta^j(Y) + p^*h(X,Y), \tag{3.5}$$

gdzie θ^i są składowymi formy koneksji wiązki P, $i = 1, \dots r$, a X i Y są dowolnymi polami wektorowymi na P. Metryka ta czyni z submersji p submersję riemannowską. Korzystając z rodziału 9. w [Be] możemy wyrazić tensor Ricci'ego metryki g przy pomocy tensorów O'Neill'a A i T. Pamiętamy, że ponieważ włókna submersji p są totalnie geodezyjne, to tensor T znika, natomiast tensor A obliczyliśmy w lemacie 2.4 i wyraża się on wzorem

$$A_X Y = \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} \left(g(X, T_i Y)\xi^j + g(\xi^i, X) T_j Y \right),$$

gdzie X i Y są dowolnymi polami wektorowymi na P, natomiast ξ^i jest jak poprzednio fundamentalnym polem wektorowym dla θ^i, oraz $T_i = \nabla \xi^i$, $i = 1, \ldots, r$.

Ponieważ włókno submersji, czyli torus T^r jest Ricci-płaski to z wyżej wspomnianych wzorów z [Be] mamy

$$\mathrm{Ric}(U,V) = \sum_{i=1}^{m} g(A_{E_i} U, A_{E_i} V), \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Ric}(X,U) = -\sum_{i=1}^{m} g\left((\nabla_{E_i} A)_{E_i} X, U\right), \tag{3.7}$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}_B(X,Y) - 2\sum_{i=1}^{m} g(A_X E_i, A_Y E_i). \tag{3.8}$$

Przyjmujemy, że E_i jest elementem ortonormalnej bazy dystrybucji horyzontalnej $\mathcal{H}$, Ric_B jest podniesieniem tensora Ricci'ego bazy (B,h), X, Y są polami horyzontalnymi, a U iV wertykalnymi. Korzystając ze wzoru (2.4) na tensor O'Neill'a A można obliczyć wszystkie składniki tensora Ricci'ego Ric rozmaitości (P,g). Mamy

$$\mathrm{Ric}(U,V) = \sum_{i=1}^{m} g\left(\sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g(\xi^s, U) T_t E_i, \sum_{k,l=1}^{r} b^{kl} g(\xi^k, V) T_l E_i \right), \tag{3.9}$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}_B(X,Y) - \frac{1}{2} \sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g(T_s X, T_t Y). \tag{3.10}$$

By obliczyć $\mathrm{Ric}(X,U)$ musimy najpierw znaleźć wzór na pochodną kowariantną tensora A:

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_i} A)_{E_i} X &= \nabla_{E_i} \left(\sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g\left(E_i, T_s X\right) \xi^t \right) - \sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g\left(\nabla_{E_i} E_i, T_s X\right) \xi^t \\ &\quad - \sum_{s,t=1}^{r} b^{st} \left(g\left(E_i, T_s \nabla_{E_i} X\right) \xi^t + g\left(\xi^s, \nabla_{E_i} X\right) T_t E_i \right) \\ &= \sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g\left(E_i, \left(\nabla_{E_i} T_s\right) X\right) \xi^t,\end{aligned}$$

gdzie stosujemy własność $g(\xi^s, \nabla_{E_i} X) = -g(T_s E_i, X)$, która wynika z faktu, że A_X jest anty-symetryczny względem metryki g dla dowolnego pola horyzontalnego X. Ponieważ tensory T_s są również anty-symetryczne względem

g to również $\nabla_X T_s$ jest taki, więc

$$(\nabla_{E_i} A)_{E_i} X = -\sum_{s,t=1}^{r} b^{st} g\left((\nabla_{E_i} T_s) E_i, X\right) \xi^t = \sum_{t=1}^{r} \delta d\theta_t(X) \xi^t.$$

Dostajemy stąd, że

$$\mathrm{Ric}(X, U) = \sum_{t=1}^{r} \delta d\theta_t(X) g(\xi^t, U).$$

3.3.2. Konstrukcja przykładu na T^r-wiązce nad rozmaitością prawie Hodge'a

Niech (B, h, J) będzie rozmaitością prawie hermitowską. Oznaczmy przez ω formę Kähler'a metryki h. Jeżeli ω jest zamknięta to mówimy, że (B, h, J) jest rozmaitością prawie kählerowską. Pokazuje się również, że w tej sytuacji ω jest ko-zamknięta.

Motywacją dla przykładu jest praca [Jel98], w której W. Jelonek konstruuje przykłady właściwych $\mathcal{A}$-rozmaitości na przestrzeni totalnej S^1-wiązki nad pewną specjalną rozmaitością prawie kählerowską. Mianowicie forma kählerowska bazy jest całkowitą wielokrotnością pewnej 2-formy należącej do całkowito-liczbowej klasy kohomologii. Rozmaitość prawie kählerowską o tej własności nazywamy rozmaitością prawie Hodge'a. Jak udowodnimy później, rozmaitość bazowa musi być dodatkowo $\mathcal{A}$-rozmaitością. Przykłady $\mathcal{A}$-rozmaitości prawie Hodge'a zostały skonstruowane przez W. Jelonka w [Jel99].

Przypuśćmy, że (B_i, g_i, J_i), $i = 1, \ldots, n$ są rozmaitościami prawie Hodge'a z formami Kähler'a ω_i takimi, że istnieją 2-formy α_i, należące do pewnej całkowito-liczbowej klasy kohomologii w $H^2(B_i; \mathbb{Z})$, spełniające $\omega_i = c_i \alpha_i$, $c_i \in \mathbb{Z}$. Przez (B, h, J) oznaczmy hermitowską rozmaitość produktową z metryką produktową g i prawie zespoloną strukturą produktową J. Co więcej, niech pr_i oznaczają rzutowania na i-ty składnik. Z rozdziału 2. wiemy, że nad B istnieje T^r-wiązka główna klasyfikowana formami $\beta_1, \ldots, \beta_r$ danymi przez

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} pr_i^* \alpha_i,$$

gdzie $[a_{ji}]$ jest pewną macierzą wymiaru $r \times n$ ze współczynnikami całkowitymi. Z drugiej strony z (2.8) wiemy, że pochodna zewnętrzna formy składowej θ_j formy koneksji spełnia

$$d\theta_j = 2\pi p^* \beta_j = 2\pi \sum_{i=1}^{n} a_{ji} p^* \left(pr_i^* \alpha_i\right)$$

dla każdego $j = 1, \ldots, r$. Ponieważ formy α_i oraz formy Kähler'a ω_i rozmaitości (B_i, g_i, J_i) są związane przez $\omega_i = c_i \alpha_i$ dla pewnych stałych c_i, $i = 1, \ldots, n$, to dostajemy

$$d\theta_j = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ji}}{c_i} \omega_i^*, \tag{3.11}$$

gdzie przez ω_i^* oznaczamy 2-formę powstałą poprzez podniesienie formy ω_i do P. Porównując z (2.2) dostajemy wzór na każdy z tensorów $\tilde{T}_i$

$$\tilde{T}_i X = \pi \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} b_{ij} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{jk}}{c_k} J_k^* X \tag{3.12}$$

gdzie J_k^* jest tensorem struktury prawie zespolonej (B_k, g_k, J_k) podniesionym do rozmaitości produktowej B.

Wyliczymy teraz tensor Ricci'ego rozmaitości (P, g) używając wzorów (3.6)-(3.8) i powyższych obliczeń. Na początek mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(U, V) &= \pi^2 \sum_{i=1}^{m} h\left(\sum_{s=1}^{r} g(\xi^s, U) \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{sk}}{c_k} J_k^* E_i, \sum_{l=1}^{r} g(\xi^l, U) \sum_{h=1}^{n} \frac{a_{lh}}{c_h} J_h^* E_i \right) \\ &= \pi^2 \sum_{s,l=1}^{r} g(\xi^s, U) g(\xi^l, V) \sum_{i=1}^{m} h\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{sk}}{c_k} J_k^* E_i, \sum_{h=1}^{n} \frac{a_{lh}}{c_h} J_h^* E_i \right) \\ &= \pi^2 \sum_{s,l=1}^{r} g(\xi^s, U) g(\xi^l, V) \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} g_k \left(\frac{a_{sk}}{c_k} J_k(E_i)_*, \frac{a_{lk}}{c_k} J_k(E_i)_* \right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Użyliśmy tutaj faktu, że dla różnych wskaźników k i h $J_k(E_i)_*$ i $J_h(E_i)_*$ są prostopadłe. Łatwo zauważyć, że

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} g_k \left(\frac{a_{sk}}{c_k} J_k(E_i)_*, \frac{a_{lk}}{c_k} J_k(E_i)_* \right)$$

są stałymi dla $s, l = 1, \ldots, r$. Stąd tensor Ricci'ego rozmaitości (P, g) na wertykalnych polach wektorowych jest zsymetryzowanym produktem pól Killing'a.

Ponieważ forma Kähler'a każdej z rozmaitości (B_k, g_k, J_k) jest harmoniczna, to z (3.11) widać od razu, że

$$\mathrm{Ric}(X, U) = 0 \tag{3.14}$$

dla dowolnego pola horyzontalnego X i wertykalnego U.

Zajmiemy się teraz horyzontalną częścią tensora Ricci'ego rozmaitości (P, g). Tensor Ric_B jest tensorem Ricci'ego metryki produktowej $h = g_1 + \ldots + g_n$. Przypuśćmy, że tensory Ric_k metryk g_k są J_k-niezmienniczymi tensorami Killing'a dla $k = 1, \ldots, n$. Ogólniej, mamy

Twierdzenie 3.4. *Niech K_i będą tensorami Killing'a na (B_i, g_i, J_i), gdzie $i = 1, \ldots, n$. Tensor K^* zdefiniowany jako cofnięcie tensora $K = K_1 + \ldots + K_n$ do P jest Killing'a wtedy i tylko wtedy, gdy każdy K_i jest J_i-niezmienniczy.*

Dowód. Sprawdzimy, że zachodzi warunek (1.3) z prawą stroną równą zero. Ponieważ K^* znika na polach wertykalnych, to od razu widać, że dla trzech takich pól definicja tensora Killing'a jest spełniona. Z kolei gdy tylko dwa pola są wertykalne, to dzięki temu, że $\nabla_{\xi^i}\xi^j = 0$ warunek (1.3) jest spełniony. Dla 3 pól horyzontalnych łatwo zauważyć, że pochodna kowariantna K^* względem g pokrywa się z pochodną K względem h. Natomiast na mocy stwierdzenia 1.2 tensor K jest tensorem Killing'a na (B, h). Pozostaje nam sprawdzić sytuację, gdy tylko jedno pole jest wertykalne. Załóżmy, że $Z = \xi^i$, a X, Y są podstawowymi polami wektorowymi submersji $p : P \to B$ ([ON]). Liczymy

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi^i}K^*(X,Y) &= -K^*(\nabla_{\xi^i}X, Y) - K^*(X, \nabla_{\xi^i}Y)\\ &= -K^*(A_X\xi^i, Y) - K^*(X, A_Y\xi^i) = -K^*(\nabla_X\xi^i, Y) - K^*(X, \nabla_Y\xi^i),\end{aligned}$$

gdzie w przedostatniej równości wykorzystujemy fakt, że X i Y są polami podstawowymi submersji p, a ostatnia równość wynika z własności tensora O'Neill'a A. Następnie, mamy

$$\nabla_X K^*(\xi^i, Y) = -K^*(\nabla_X\xi^i, Y).$$

Podsumowując

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\xi^i,X,Y}\nabla_{\xi^i}K^*(X,Y) &= -2\left(K^*(\nabla_X\xi^i, Y) + K^*(X, \nabla_Y\xi^i)\right)\\ &= -2\left(K(\tilde{T}_iX, Y) + K(X, \tilde{T}_iY)\right).\end{aligned}$$

Skorzystamy teraz ze wzoru (3.12) na tensory $\tilde{T}_i$, $i = 1, \ldots, r$,

$$\mathcal{C}_{\xi^i,X,Y}\nabla_{\xi^i}K^*(X,Y) = -2\pi\sum_{j=1}^{r} b_{ij}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{c_k}\left(K(J_k^*X, Y) + K(X, J_k^*Y)\right).$$

Korzystając z faktu, że obraz J_k leży w TB_k oraz z definicji tensora K mamy

$$K(J_k^*X, Y) + K(X, J_k^*Y) = K_k(J_kX, Y) + K_k(X, J_kY).$$

Z założenia J_k-niezmienniczości K_k dla $k = 1, \ldots, n$ widzimy, że dowód twierdzenia został zakończony. □

Korzystając z powyższego twierdzenia można pokazać, nie da się podnieść konforemnego tensora Killing'a z niezerowym P.

Stwierdzenie 3.4. *Niech K będzie konforemnym tensorem Killing'a na (B, h) ze stowarzyszoną, nieznikającą 1-formą P. Nie istnieje taka 1-forma P^*, by podniesienie K^* tensora K było konforemnym tensorem Killing'a.*

Dowód. Z dowodu poprzedniego twierdzenia wiemy, że jeżeli U i V są dwoma polami wertykalnymi, a X polem horyzontalnym to lewa strona sumy cyklicznej (1.3) dla tensora K^* znika. Stąd, gdyby istniała 1-forma P^* taka, że (1.3) jest spełnione, to P^* musiałby znikać na dystrybucji horyzontalnej, ponieważ prawa strona jest wtedy równa $P^*(X)g(U,V)$. Z drugiej strony wiemy, że pochodna kowariantna $\nabla_X K^*(Y,Z)$ dla horyzontalnych pól wektorowych X,Y,Z pokrywa się z $\nabla^h_{X_*}K(Y_*,Z_*)$, czyli P i P^* pokrywając na polach horyzontalnych. Sprzeczność. □

Wniosek 3.2. Przy pomocy powyższej konstrukcji nie da się uzyskać $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitości. W szczególności nie istnieją $\mathcal{AC}^\perp$-struktury na rozmaitościach k-kontaktowych.

Wracając do głównego wątku, pokażemy, że horyzontalna część tensora Ricci'ego (3.10) rozmaitości (P,g) jest sumą podniesień tensorów metrycznych g_k, gdzie $k=1,\ldots,n$.

$$\sum_{s,t=1}^{r} b^{st}g(T_sX,T_tY)=\pi^2\sum_{s,t=1}^{r} h\left(\sum_{j=1}^{r} b_{sj}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{c_k}J_k^*X,\sum_{i=1}^{r} b_{ti}\sum_{l=1}^{n}\frac{a_{il}}{c_l}J_l^*Y\right).$$

Ponieważ J_k oraz J_l sa prostopadłe dla różnych $k,l=1,\ldots,n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{s,t=1}^{r} b^{st}g(T_sX,T_tY)&=\pi^2\sum_{s,t=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} h\left(\sum_{j=1}^{r} b_{sj}\frac{a_{jk}}{c_k}J_k^*X,\sum_{i=1}^{r} b_{ti}\frac{a_{ik}}{c_k}J_k^*Y\right)\\&=\pi^2\sum_{j,l=1}^{r} b_{jl}\sum_{k=1}^{r}\frac{a_{jk}a_{lk}}{c_k^2}g_k(X,Y).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Korzystając z twierdzenia 3.4 powyżej dla tensorów g_k, które są w oczywisty sposób J_k-niezmienniczymi tensorami Killing'a na (B_k,g_k) otrzymujemy, że tensor $K(X,Y)=\sum_{s,t=1}^{r} b^{st}g(T_sX,T_tY)$ jest Killing'a.

Możemy teraz wykazać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.5. *Niech* (B,h) *będzie produktem riemannowskim rozmaitości* (B_i,g_i,J_i)*,* $i=1,\ldots,n$*, przy czym każda rozmaitość* (B_i,g_i,J_i) *jest* $\mathcal{A}$*-rozmaitością prawie Hodge'a. Niech* P *będzie* T^r*-wiązką główną nad* (M,h) *z metryką* g *zdefiniowaną przez* (3.5)*. Wtedy* (P,g) *jest* $\mathcal{A}$*-rozmaitością.*

Dowód. Ponieważ dystrybucje $\mathcal{H}$ i $\mathcal{V}$ są prostopadłe względem tensora Ricci'ego Ric rozmaitości (P,g) ((3.14)), to korzystając z (3.15) i (3.13) dla dowolnych pól wektorowych E i F na P mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E,F)&=\pi^2\sum_{s,l=1}^{r} g(\xi^s,E)g(\xi^l,F)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{a_{sk}}{c_k}J_kE_i,\frac{a_{lk}}{c_k}J_kE_i\right)\\&+\mathrm{Ric}_M(E,F)-\pi^2\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{r} b_{jl}\sum_{k=1}^{r}\frac{a_{jk}a_{lk}}{c_k^2}g_k(E,F).\end{aligned}$$

Pierwszy składnik, jako zsymetryzowany produkt pól Killing'a jest tensorem Killing'a na mocy twierdzenia 1.5. Drugi i trzeci składnik są tensorami Killing'a na mocy twierdzenia 3.4. Ponieważ suma tensorów Killing'a jest też tensorem Killing'a, to udowodniliśmy twierdzenie. □

Uwaga. Zauważmy, że jeżeli przynajmniej jedna z rozmaitości (B_k, g_k) ma nierównoległy tensor Ricci'ego, to tensor Ricci'ego Ric rozmaitości (P, g) jest również nierównoległy względem g. W pracy [Jel99] W. Jelonek skonstruował przykłady $\mathcal{A}$-rozmaitości prawie Hodge'a z nierównoległym tensorem Ricci'ego. Biorąc produkt n takich rozmaitości jako bazę w powyższej konstrukcji otrzymujemy nowe przykłady właściwych $\mathcal{A}$-rozmaitości ze stałymi wartościami własnymi.

Rozdział 4

$\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitość z 3 wartościami własnymi tensora Ricci'ego

W tym rozdziale przeprowadzimy konstrukcję rodziny $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości na S^2-wiązkach nad rozmaitościami Kähler'a-Einstein'a. Pewną nowością jest posiadanie przez te rozmaitości trzech wartości własnych tensora Ricci'ego. Do tej pory znana jest jedna konstrukcja $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości o tej własności przedstawiona w [JelXX]. W tej pracy autor wprowadza tak zwaną *warped product metric* g na rozmaitości produktowej $M = \mathbb{R} \times M_1 \times M_2$, gdzie M_i są zwartymi rozmaitościami Einstein'a dla $i = 1, 2$. Metrykę g definiuje jako

$$g = dt^2 + f g_1 + \frac{1}{f} g_2,$$

gdzie f jest pewną dodatnią funkcją okresową na $\mathbb{R}$, a g_i są metrykami Einstein'a na M_i, $i = 1, 2$. Taka rozmaitość jest oczywiście niezwarta. Niech A_i będą izometriami M_i, $i = 1, 2$, a T okresem odwzorowania f. Wtedy

$$A(t, x_1, x_2) = (t + T, A_1(x_1), A_2(x_2))$$

jest izometrią na M, natomiast rozmaitość ilorazowa $M/\mathbb{Z}A$ jest zwartą $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością, której tensor Ricci'ego ma 3 wartości własne.

W przeciwieństwie do $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości z dwiema wartościami własnymi, przedstawiona niżej sytuacja jest słabo poznana. W szczególności mało wiadomo na temat własności konforemnych tensorów Killing'a z więcej niż dwiema wartościami własnymi.

Niniejsza konstrukcja inspirowana jest pracą M. Y. Wang'a i J. Wang'a w [W-W], w której autorzy podają warunki na to, by przestrzeń totalna S^2-wiązki głównej nad rozmaitością Kählera-Einstein'a była rozmaitością Einstein'a. Podają również kilka przykładów rozmaitości spełniających te warunki.

Opiszemy pokrótce na czym polega konstrukcja naszego przykładu. Niech (P, g_P) będzie S^1-wiązką główną nad rozmaitością (N, h, J), o której zakładamy, że jest Kähler'a-Einstein'a jak w podrozdziale 2.2 z metryką g_P daną wzorem

$$g_P = f^2 d\theta^2 + c^2 p^* h, \tag{4.1}$$

gdzie f i c są pewnymi dodatnimi stałymi. Niech $M = I \times P$, gdzie I jest otwartym odcinkiem (a, b). Na M wprowadzamy metrykę g przez

$$g = dt^2 + f^2(t) d\theta^2 + c^2(t) p^* h, \tag{4.2}$$

gdzie f i c są dodatnimi funkcjami zmiennej $t \in (a, b)$. Wiadomo, że jeżeli f i c spełniają pewne warunki brzegowe, to (M, g) jest zwartą rozmaitością riemannowską. Wyprowadzimy warunki na to, by rozmaitość (M, g) była $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitością, a następnie podamy przykłady rozmaitości spełniających te warunki, co będzie równoważne dobraniu odpowiednich funkcji f i c.

4.1. Tensor krzywizny riemannowskiej S^1-wiązki P

Naszym pierwszym celem jest wyliczenie tensora krzywizny riemannowskiej S^1-wiązki głównej P. W tym celu będziemy się posiłkować wyliczeniami z sekcji 2.2.

Niech (N, h, J) będzie zwartą rozmaitością Kähler'a-Einstein'a. Ponieważ w dalszej części będziemy ograniczać się do dwu-wymiarowej bazy, możemy od razu przyjąć, że $\dim_{\mathbb{R}} N = 2$. Mamy wtedy $H^2(N; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ i pierwsza klasa Chern'a $c_1(N)$ jest całkowitą wielokrotnością pewnej nierozkładalnej klasy α, dla ustalenia uwagi niech $c_1(N) = q\alpha$ dla $q \in \mathbb{Z}$. Unormujmy metrykę h tak, by jej stała Einstein'a była równa q, co jest równoważne temu, że klasa kohomologii formy Kähler'a ω_h metryki h jest równa $2\pi\alpha$.

Niech $p : P \to N$ będzie S^1-wiązką główną charakteryzowaną przez $k\alpha$ dla pewnej całkowitej stałej k. Oznaczmy przez θ jej formę koneksji. Wiadomo, że wtedy $d\theta = kp^*\omega_h$.

Zdefiniujmy na P metrykę g_P wzorem

$$g_P = f^2 \theta^2 + c^2 p^* h, \tag{4.3}$$

gdzie f i c są pewnymi stałymi dodatnimi. Koneksję Levi-Civity metryki g_P oraz tensory krzywizny będziemy wyróżniać przez supersktrypt P, na przykład ∇^P będzie oznaczało operator koneksji. Pokazuje się, że $p : (P, g_P) \to (N, c^2 h)$ jest submersją riemannowską o totalnie geodezyjnym włóknie.

Traktując P jako szczególny przypadek T^r-wiązki głównej z podrozdziału 2.2 wiemy, że fundamentalne pole wektorowe ξ koneksji θ jest polem Killing'a metryki g_P, a pole tensorowe Ξ zdefiniowane przez $\Xi X = \nabla^P_X \xi$ jest horyzontalne, $\Xi\xi = 0$ oraz $L_\xi \Xi = 0$. Oznaczmy przez $\tilde{\Xi}$ pole tensorowe na N takie, że $p_* \circ \Xi = \tilde{\Xi} \circ p_*$.

Jako szczególny przypadek lematu 2.2 mamy

Lemat 4.1. *Dla tensora krzywizny koneksji ∇^P mamy*

$$R^P(X,\xi)Y = -\left(\nabla^P_X \Xi\right)Y, \quad R^P(X,\xi)\xi = -\Xi^2 X,$$

gdzie X i Y są dowolnymi polami wektorowymi na P.

Następnie lekko modyfikując dowód lematu 2.4 otrzymujemy

Lemat 4.2. *Tensor O'Neill'a A^P submersji riemannowskiej $p:(P,g_P)\to(N,c^2h)$ jest dany wzorem*

$$A^P_X Y = f^{-2}\left(g_P(X,\Xi Y)\xi + g_P(\xi,Y)\Xi X\right) \tag{4.4}$$

dla dowolnych pól wektorowych X i Y na P.

Korzystając z kählerowskości (N,c^2h,J) można pokazać

Lemat 4.3. *Tensor $\tilde{\Xi}$ jest dany przez*

$$\tilde{\Xi} = \frac{sf^2}{c^2}J \tag{4.5}$$

gdzie $s=\frac{k}{2}$.

Dowód. Niech X i Y będą dowolnymi polami horyzontalnymi na P. Zauważmy, że $d\theta(X,Y) = 2f^{-2}g(\nabla_X\xi, Y)$. Korzystając z faktu, że $d\theta = kp^*\omega_h$ i tego, że Ξ jest horyzontalne, mamy

$$2f^{-2}c^2h(\tilde{\Xi}X_*,Y_*) = kh(JX_*,Y_*).$$

□

Ostatecznie możemy przejść do wyliczenia tych składników krzywizny riemannowskiej metryki g_P, które będą nam dalej potrzebne.

Stwierdzenie 4.1. *Tensor krzywizny riemannowskiej R_P metryki g_P jest dany przez*

$$R^P(E_i,\xi,\xi,E_i) = \frac{s^2f^4}{c^2}, \tag{4.6}$$

$$R^P(Z,\xi,X,Y) = 0, \tag{4.7}$$

przy czym X, Y i Z są dowolnymi polami horyzontalnymi, a $\{E_i\}_{i=1}^n$ jest zbiorem wektorów ortogonalnych będących podniesieniem pewnej bazy ortonormalnej na (N,h).

Dowód. Użyjemy wzorów na tensor krzywizny z [ON]. Mamy

$$R^P(E_i,\xi,\xi,E_i) = -g_P((\nabla^P_\xi A^P)_{E_i}E_i,\xi) - g_P(A^P_{E_i}\xi, A^P_{E_i}\xi).$$

Korzystając ze wzoru (4.4) na tensor O'Neill'a A^P mamy $A^P_{E_i}\xi = \Xi E_i$, skąd

$$g_P(A^P_{E_i}\xi, A^P_{E_i}\xi) = c^2 h(\tilde{\Xi}(E_i)_*, \tilde{\Xi}(E_i)_*) = \frac{s^2 f^4}{c^4} c^2 h((E_i)_*, (E_i)_*) = \frac{s^2 f^4}{c^2}.$$

Obliczymy teraz pochodną kowariantną tensora A^P występującą w powyższym wzorze

$$(\nabla^P_\xi A^P)_{E_i}E_i = \nabla^P_\xi(A^P_{E_i}E_i) - A^P_{\nabla^P_\xi E_i}E_i - A^P_\xi \nabla^P_{E_i}E_i.$$

Ponieważ A^P jest skośnie symetryczny, to pierwszy składnik znika. Możemy teraz napisać

$$\begin{aligned} g_P((\nabla^P_\xi A^P)_{E_i}E_i,\xi) &= -g_P(A^P_{\nabla^P_\xi E_i}E_i,\xi) - g_P(A^P_{E_i}\nabla^P_\xi E_i,\xi) \\ &= -g_P(A^P_{\Xi E_i}E_i,\xi) + g_P(\Xi E_i,\Xi E_i) = g_P(A^P_{E_i}\Xi E_i,\xi) + g_P(\Xi E_i,\Xi E_i), \end{aligned}$$

gdzie korzystamy z faktu, że E_i są podstawowe. Dalej, mamy $\nabla^P_\xi E_i = A^P_{E_i}\xi = \Xi E_i$ oraz $A^P_X Y = -A^P_Y X$ na polach horyzontalnych X i Y. Widać teraz, że $g((\nabla^P_\xi A^P)_{E_i}E_i,\xi) = 0$.

By udowodnić wzór (4.7) przypomnijmy, że dla horyzontalnych pól wektorowych X,Y,Z mamy $R_P(X,Y,Z,\xi) = g_P((\nabla^P_Z A^P)_X Y,\xi)$ ([ON]). Na takich polach wektorowych mamy dla A^P

$$\begin{aligned} (\nabla^P_Z A^P)_X Y &= \nabla^P_Z(A^P_X Y) - A^P_{\nabla^P_Z X}Y - A^P_X \nabla^P_Z Y \\ &= \nabla^P_Z\left(f^{-2}g_P(X,\Xi Y)\xi\right) - f^{-2}g_P(\nabla^P_Z X,\Xi Y)\xi - f^{-2}g_P(X,\Xi\nabla^P_Z Y)\xi \\ &= f^{-2}g_P(\nabla^P_Z X,\Xi Y)\xi + f^{-2}g_P(X,\nabla^P_Z \Xi Y)\xi + f^{-2}g_P(X,\Xi Y)\Xi Z - \\ &\quad f^{-2}g_p(\nabla^P_Z X,\Xi Y)\xi - f^{-2}g_P(X,\Xi\nabla^P_Z Y) \\ &= f^{-2}g_P(X,\Xi Y)\Xi Z. \end{aligned}$$

Widać stąd, że $R_P(X,Y,Z,V) = 0$ dla X,Y,Z jak wyżej oraz dowolnego wertykalnego pola V, co kończy dowód. □

4.2. Metryka na iloczynie $I \times P$

Niech $M = P \times I$, gdzie P jest S^1-wiązką główną nad rozmaitością Kähler'a-Einstein'a $(N, c^2 h, J)$ z poprzedniej sekcji, a $I = (a,b)$ jest otwartym przedziałem prostej rzeczywistej. Na M wprowadzamy metrykę riemannowską g wzorem

$$g = dt^2 + f^2(t)d\theta^2 + c^2(t)p^* h, \tag{4.8}$$

przy czym θ jest formą koneksji wiązki P a dt euklidesową metryką na $\mathbb{R}$. Dla każdego $t \in I$ oznaczamy przez (M_t, g_t) hiperpowierzchnię $P \times \{t\}$ z metryką g_t daną wzorem

$$g_t = f^2(t)d\theta^2 + c^2(t)p^*h.$$

Zauważmy, że każda z hiperpowierzchni M_t z metryką g_t jest przestrzenią totalną S^1-wiązki głównej nad N jak w poprzedniej części. Niech dodatkowo $\{E_i\}_{i=1}^n$ będzie zbiorem wektorów ortogonalnych powstałych przez podniesienie pewnej bazy ortonormalnej na (N, h).

Zauważmy, że rzutowanie na drugi składnik $(P \times I, g) \to (I, dt)$ definiuje submersję riemannowską, której przestrzenią horyzontalną jest przestrzeń styczna do I, a przestrzeń wertykalna w każdym punkcie jest izomorficzna z TM_t. Można też pokazać, że przestrzeń wertykalna jest całkowalna, a przestrzeń horyzontalna jest totalnie geodezyjna.

Obliczymy drugą formę fundamentalną hiperpowierzchni (M_t, g_t). Niech $H = \frac{d}{dt}$.

Lemat 4.4. *Niech S_t oznacza drugą formę fundamentalną M_t. Dla dowolnych $X, Y \in TM_t$ mamy*

$$g(S_t X, Y) = \frac{1}{2} H g_t(X, Y).$$

W szczególności zachodzi

$$S_t\xi = \frac{f'}{f}\xi, \quad S_t E_i = \frac{c'}{c} E_i,$$

gdzie f' i c' oznaczają pochodne funkcji f i c względem pola H.

Dowód. Możemy założyć, że $X, Y \in TM_t$ są niezależne od t, więc $[X, H] = [Y, H] = 0$. Korzystając ze wzoru Koszul'a oraz tego, że dystrybucja wertykalna jest całkowalna mamy

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X H, Y) =& Hg(X,Y) + Xg(Y,H) - Yg(H,X) \\ & - g([H,X],Y) - g([X,Y],H) + g([Y,H],X) \\ =& Hg(X,Y). \end{aligned}$$

Dwa ostatnie wzory otrzymuje się przez proste przeliczenie. □

Przejdziemy teraz do obliczania składowych tensora Ricci'ego (M, g). Z definicji tensora Ricci'ego (1.2), mamy dla dowolnych pól wektorowych X i Y na M

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = R(H,X,Y,H) + f^{-2}R(\xi,X,Y,\xi) + c^{-2}\sum_{i=1}^{n} R(E_i,X,Y,E_i), \quad (4.9)$$

gdzie R oznacza tensor krzywizny riemannowskiej (M, g).

Na początek pokażamy, że dystrybucje rozpinane przez pole ξ, H oraz $\{E_i\}_{i=1}^n$ są parami ortogonalne względem tensora Ricci'ego.

Lemat 4.5. *Mamy* $\mathrm{Ric}(\xi, H) = 0$.

Dowód. Z (4.9) dostajemy

$$\mathrm{Ric}(\xi, H) = R(H, \xi, H, H) + f^{-2} R(\xi, \xi, H, \xi) + c^{-2} \sum_{i=1}^{n} R(E_i, \xi, H, E_i).$$

Pierwszy i drugi składnik jest oczywiście równy zero. Jeżeli chodzi o trzeci, to

$$\begin{aligned} R(E_i, \xi, H, E_i) =& g(\nabla_{E_i} S_t \xi - \nabla_\xi S_t E_i - S_t[E_i, \xi], E_i) \\ =& g_t(\nabla^t_{E_i} S_t \xi - \nabla^t_\xi S_t E_i - S_t[E_i, \xi], E_i). \end{aligned}$$

Skorzystamy teraz z własności tensora O'Neill'a A hiperpowierzchni M_t, który oznaczymy przez A^t. Najpierw użyjemy faktu, że A^t jest alternujący, czyli $A^t_X Y = -A^t_Y X$:

$$g_t(\nabla^t_{E_i} S_t \xi, E_i) = g_t(A^t_{E_i} S_t \xi, E_i) = -g_t(S_t \xi, A^t_{E_i} E_i) = 0.$$

Następnie, uwzględniając że $\mathcal{H} \nabla^t_V X = A^t_X V$ dla horyzontalnego pola X i wertykalnego V, dostajemy

$$g_t(\nabla^t_\xi S_t E_i, E_i) = g_t(A^t_{S_t E_i} \xi, E_i) = 0,$$

gdzie do otrzymania ostatniej równości użyliśmy wzoru na $S_t E_i$ oraz faktu, że $A^t_{E_i}$ jest skośnie symetryczny względem metryki g_t.

Na koniec trzeba pokazać, że $g_t(S_t[E_i, \xi], E_i) = 0$. Zauważmy, że dla submersji riemannowskiej $\pi : P \to N$ pole $[E_i, \xi]$ jest wertykalne. Korzystając z symetrii drugiej formy fundamentalnej S_t otrzymujemy żądaną równość. □

Lemat 4.6. *Dla* $k = 1, \ldots, n$ *zachodzi* $\mathrm{Ric}(E_k, H) = 0$.

Dowód. Ponownie korzystając z (4.9) otrzymujemy

$$\mathrm{Ric}(E_k, H) = R(H, E_k, H, H) + f^{-2} R(\xi, E_k, H, \xi) + c^{-2} \sum_{i=1}^{n} R(E_i, E_k, H, E_i)$$

i znowu pierwszy składnik się zeruje. Drugi składnik możemy rozpisać jako

$$R(\xi, E_k, H, \xi) = g_t(\nabla^t_\xi S_t E_k - \nabla^t_{E_k} S_t \xi - S_t[E_k, \xi], \xi).$$

Widać, że $g_t(\nabla^t_\xi S_t E_k, \xi)$ znika, jako że część wertykalna $\nabla^t_\xi S_t E_k$ wyraża się przez tensor O'Neill'a T submersji $M_t \to N$. Kolejno, znika $g_t(\nabla^t_{E_k} S_t \xi, \xi)$, ponieważ z poprzedniej części rozdziału wiemy, że $\nabla^t_X \xi$ jest horyzontalne dla pól horyzontalnych submersji $M_t \to N$. Z kolei zerowanie się $g_t(S_t[E_k, \xi], \xi)$ jest ponownie konsekwencją faktu, że tensor O'Neill'a T submersji $M_t \to N$ jest równy zero, oraz wzorów O'Neill'a na pochodną kowariantą.

Na koniec rozważmy składnik $R(E_i, E_k, H, E_i)$. Ze wzoru $S_t E_k = \frac{c'}{c} E_k$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
R(E_i, E_k, H, E_i) =& g_t(\nabla^t_{E_i} S_t E_k - \nabla^t_{E_k} S_t E_i - S_t[E_i, E_k], E_i) \\
=& \frac{c'}{c} g_t(\nabla^t_{E_i} E_k - \nabla^t_{E_k} E_i - [E_i, E_k], E_i) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

□

Lemat 4.7. *Mamy* $\mathrm{Ric}(\xi, E_k) = 0$*, dla* $k = 1, \ldots, n$.

Dowód. Wzór (4.9) przyjmuje teraz postać

$$\mathrm{Ric}(\xi, E_k) = R(H, \xi, E_k, H) + f^{-2} R(\xi, \xi, E_k, \xi) + c^{-2} \sum_{i=1}^{n} R(E_i, \xi, E_k, E_i).$$

Tym razem to drugi składnik znika od razu. Przyjrzyjmy się pierwszemu

$$R(H, \xi, E_k, H) = R(\xi, H, H, E_k) = g(\nabla_\xi S_t H - \nabla_H S_t \xi - S_t[\xi, H], E_k).$$

Pierwszy element różnicy po prawej jest równy zero, jako że H jest zerowym wektorem własnym S_t. Trzeci składnik znika, ponieważ E_k i ξ są niezależne od t. By pokazać, że środowy element jest równy zero korzystamy z tego, że nie zależy on od t, i zw wzoru Koszul'a.

Ostatni składnik wzoru na tensor Ricci'ego można zapisać jako

$$\begin{aligned}
R(E_i, \xi, E_k, E_i) = & R_t(E_i, \xi, E_k, E_i) - g(S_t \xi, E_k) g(S_t E_i, E_i) + \\
& + g(S_t E_i, E_k) g(S_t \xi, E_i).
\end{aligned}$$

Z lematu 4.4 widać, że dwa ostatnie składniki się zerują, a z (4.7) wiemy, że $R_t(E_i, \xi, E_k, E_i)$ jest równy zero, co kończy dowód. □

Teraz obliczymy nieznikające składniki tensora Ricci'ego Ric.

Lemat 4.8. *Tensor Ricci'ego rozmaitosci* (M, g) *spełnia*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}(H, H) = -\frac{f''}{f} - n\frac{c''}{c}, \\
&\mathrm{Ric}(\xi, \xi) = -f'' f + n\left(\frac{s^2 f^4}{c^4} - \frac{f' f c'}{c}\right), \\
&\mathrm{Ric}(E_k, E_k) = -c'' c - \frac{f' c' c}{f} + \mathrm{Ric}^h(E_k, E_k) - 2\frac{s^2 f^2}{c^2} - (n-1) c'^2,
\end{aligned}$$

gdzie Ric^h *jest tensorem Ricci'ego metryki* h *na* N.

Dowód. Dowód polega na obliczaniu składników (4.9) przy użyciu lematu 4.4. Na początek, mamy

$$\mathrm{Ric}(H,H) = R(H,H,H,H) + f^{-2}R(\xi,H,H,\xi) + c^{-2}\sum_{i=1}^{n} R(E_i,H,H,E_i)$$

i od razu widać, że pierwszy składnik jest równy zero. Dalej, dla drugiego składnika sumy mamy

$$\begin{aligned} R(\xi,H,H,\xi) &= g(\nabla_\xi S_t H - \nabla_H S_t \xi - S_t[\xi,H],\xi) \\ &= -g_t(\nabla^t_H S_t\xi - S_t\nabla^t_\xi H + S_t\nabla^t_H\xi,\xi) \\ &= -g_t(\frac{f''f-(f')^2}{f^2}\xi + \frac{f'}{f}\nabla^t_H\xi + \frac{f'^2}{f}\xi - S_t\nabla^t_H\xi,\xi) \\ &= -f''f. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} R(E_i,H,H,E_i) &= g(\nabla_{E_i}S_tH - \nabla_H S_t E_i - S_t[E_i,H],E_i) \\ &= g(-\nabla_H \frac{c'}{c}E_i - S_t^2E_i + S_t\nabla_H E_i, E_i) \\ &= -g(\frac{c''c-(c')^2}{c^2}E_i + \frac{c'}{c}\nabla_H E_i + \frac{c'^2}{c}E_i - S_t\nabla_H E_i, E_i) \\ &= -c''c, \end{aligned}$$

gdzie by dostać ostatnią równość korzystamy z symetrii drugiej formy fundamentalnej S_t.

Kolejno, obliczymy $\mathrm{Ric}(\xi,\xi)$. Na początek zauważmy, że już policzyliśmy pierwszy składnik $R(H,\xi,\xi,H) = -f''f$ wzoru (4.9). Drugi oczywiście znika. Jeżeli chodzi o trzeci, to z równania na krzywiznę styczną (*tangential curvature equation*, [Pe], rozdział 2, twierdzenie 3) mamy

$$\begin{gathered} R(E_i,\xi,\xi,E_i) = R_t(E_i,\xi,\xi,E_i) - g_t(S_t\xi,\xi)g_t(S_tE_i,E_i) + \\ + g_t(S_tE_i,\xi)g_t(S_t\xi,E_i) = R_t(E_i,\xi,\xi,E_i) - f'fc'c. \end{gathered}$$

Pierwszy składnik powyższego równania obliczyliśmy w (4.6), więc mamy

$$\mathrm{Ric}(\xi,\xi) = -f''f + n(\frac{s^2f^4}{c^4} - \frac{f'fc'}{c}).$$

Na koniec wyprowadzimy trzecie równanie. Biorąc pod uwagę powyższe obliczenia, musimy znaleźć wyrażenie na $R(E_i,E_k,E_k,E_i)$. Ponownie używając równania na krzywiznę styczną mamy

$$\begin{aligned} R(E_i,E_k,E_k,E_i) &= R_t(E_i,E_k,E_k,E_i) - g_t(S_tE_k,E_k)g_t(S_tE_i,E_i) \\ &\quad + g_t(S_tE_i,E_k)g_t(S_tE_k,E_i) \\ &= R_t(E_i,E_k,E_k,E_i) - (c'c)^2 + (c'c)^2\delta_i^k, \end{aligned}$$

gdzie δ_i^k oznacza symbol Kronecker'a. Dla tensora R_t używamy wzorów O'Neill'a z [ON]. Korzystając ze wzoru na tensor A O'Neill'a submersji $M_t \to N$ oznaczany przez A^t, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
R_t(E_i, E_k, E_k, E_i) &= R_N(E_i, E_k, E_k, E_i) - 2g_t(A^t_{E_k} E_i, A^t_{E_i} E_k) \\
&+ g_t(A^t_{E_i} E_i, A^t_{E_k} E_k) + g_t(A^t_{E_i} E_k, A^t_{E_i} E_k) \\
&= R_N(E_i, E_k, E_k, E_i) - \frac{2}{f^2} g_t(E_k, \Xi E_i) g_t(E_i, \Xi E_k) \\
&+ \frac{1}{f^2} g_t(E_i, \Xi E_k) g_t(E_i, \Xi E_k) \\
&= R_N(E_i, E_k, E_k, E_i) + \frac{3}{f^2} g_t(E_i, \Xi E_k)^2 \\
&= R_N(E_i, E_k, E_k, E_i) + \frac{3s^2 f^6}{c^4} g_t(E_i, \tilde{J} E_k)^2.
\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że tensor R_N jest zdefiniowany przez

$$R_N(X, Y, Z, W) = g(\hat{R}_N(X, Y)Z, W),$$

a $\hat{R}_N$ spełnia $p_*(\hat{R}_N(X, Y)Z) = R^h(X_*, Y_*)Z_*$, gdzie R^h jest tensorem krzywizny koneksji Levi'ego-Civit'y metryki h na N. Stąd R_N jest związany z tensorem krzywizny Riemanna R^h rozmaitości (N, h) przez

$$R_N(X, Y, Z, W) = c^2 h(R^h(X_*, Y_*)Z_*, W_*) = c^2 R^h(X_*, Y_*, Z_*, W_*).$$

Podsumowując, mamy

$$\mathrm{Ric}(E_k, E_k) = -c''c + \frac{s^2 f^2}{c^2} - \frac{f'c'c}{f} + \mathrm{Ric}^h(E_k, E_k) - \frac{3s^2 f^2}{c^2} - (n-1)c'^2.$$

□

Używając powyższych wzorów na składniki tensora Ricci'ego, otrzymujemy następujące równania na jego wartości własne:

$$\lambda_0 = -\frac{f''}{f} - n\frac{c''}{c}, \tag{4.10}$$

$$\lambda_1 = -\frac{f''}{f} + n(\frac{s^2 f^2}{c^4} - \frac{f'c'}{fc}), \tag{4.11}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c''}{c} - \frac{f'c'}{fc} + \frac{\mu}{c^2} - 2\frac{s^2 f^2}{c^4} - (n-1)(\frac{c'}{c})^2, \tag{4.12}$$

gdzie μ jest stałą Einstein'a rozmaitości (N, h).

4.3. Własności metryki hermitowskiej na iloczynie $I \times P$

Na iloczynie $M = I \times P$ wprowadzamy strukturę prawie zespoloną $\bar{J}$ następująco (za [Jel09]). Oznaczmy przez $\mathcal{D}$ dystrybucję wiązki TM rozpiętą przez pola ξ oraz H, a przez $\mathcal{D}^{\perp}$ jej ortogonalne dopełnienie. Zauważmy, że $\mathcal{D}^{\perp}$ jest obrazem naturalnego rzutowania $TM \to TN$. Na $\mathcal{D}^{\perp}$ definiujemy $\bar{J}$ w taki sposób, by dla X będącego cięciem $\mathcal{D}^{\perp}$ zachodziło $\bar{J}X = JX_*$, gdzie X_* oznacza obraz X przez rzutowanie $TM \to TN$. Natomiast na $\mathcal{D}$ definiujemy $\bar{J}H = \frac{1}{f}\xi$. Można pokazać, że taka struktura prawie zespolona jest całkowalna i spełnia $g(\bar{J}X, \bar{J}Y) = g(X,Y)$ dla metryki g na M zdefiniowanej w poprzednim podrozdziale ([Jel09], paragraf 5).

Oznaczmy przez $\bar{\omega}$ formę kählerowską metryki hermitowskiej g. Jest ona dana przez

$$\bar{\omega} = -f\,dt \wedge \theta + c^2(\omega_h)^*, \tag{4.13}$$

gdzie θ jest formą koneksji na S^1-wiązce głównej P, a $(\omega_h)^*$ jest cofnięciem formy kählerowskiej ω_h metryki h na N.

Ponieważ f i c są funkcjami zmiennej t oraz $d\theta = kp^*\omega_h$ to mamy

$$d\bar{\omega} = (kf + (c^2)')dt \wedge (\omega_h)^* \tag{4.14}$$

i łatwo zauważyć, że $\bar{\omega}$ jest zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f\,dt \wedge d\theta = -(c^2)'dt \wedge (\omega_h)^*.$$

Ponieważ $d\theta = kp^*\omega_h$, to powyższy warunek jest równoważny temu, że

$$kf = -(c^2)'.$$

Jak zostało zauważone w [W-W], ten warunek jest szczególnym rozwiązaniem równania $\lambda_0 = \lambda_1$, które w naszym przypadku nie może być spełnione ponieważ chcemy, by konstruowana przez nas rozmaitość miała trzy różne wartości własne.

Zauważmy natomiast, że nasza rozmaitość jest zawsze lokalnie konforemnie kählerowska. Przypomnijmy, że rozmaitość hermitowska (M,g,J) jest *lokalnie konforemnie kählerowska* („locally conformal Kähler", „lcK") wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie otwarte $\{U_j\}$, że dla każdego jego elementu U_j istnieje funkcja f_j taka, że $(U_j, e^{-f_j} g|_{U_j})$ jest kählerowska. Mamy następujące twierdzenie charakteryzujące rozmaitości lcK (Twierdzenie 1.1 w [D-O])

Twierdzenie 4.9. *Niech (M,g,J) będzie rozmaitością hermitowską. Rozmaitość (M,g,J) jest lokalnie konforemnie kählerowska wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka globalnie zdefiniowana i zamknięta* 1*-forma θ_L, że*

$$d\omega = \theta_L \wedge \omega,$$

gdzie ω jest formą kählerowską metryki g stowarzyszonej z J. Formę tę nazywamy formą Lee.

Z równania (4.14) i powyższego twierdzenia widzimy, że ponieważ

$$d\bar{\omega} = (kf + (c^2)')dt \wedge (\omega_h)^* = \frac{1}{c^2}(kf + (c^2)')dt \wedge \bar{\omega},$$

to metryka g jest lokalnie konforemnie kählerowska wtedy i tylko wtedy, gdy 1-forma θ_L dana przez

$$\theta_L = \frac{kf + (c^2)'}{c^2}dt$$

jest zamknięta. Ponieważ f i c zależą tylko od t to θ_L jest zawsze zamknięta. Udowodniliśmy ([W-W])

Lemat 4.10. *Rozmaitość $(M, g, \bar{J})$, gdzie $M = I \times P$, g jest zdefiniowana wzorem (4.8), a $\bar{J}$ jest jak na początku tego podrozdziału, jest lokalnie konforemnie kählerowska.*

4.4. Twierdzenie strukturalne

W tej części podamy stwierdzenie, które charakteryzuje $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości z trzema wartościami własnymi tensora Ricci'ego, spełniające pewne dodatkowe warunki. Jest to nieopublikowana obserwacja poczyniona przez W. Jelonka.

Stwierdzenie 4.2. *Niech (M, g) będzie rozmaitością Riemann'a taką, że $TM = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ jest rozkładem ortogonalnym przestrzeni stycznej M. Co więcej przypuśćmy, że $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}\xi$, $\nabla_\xi \xi = 0$ oraz $\mathcal{D}_1$,$\mathcal{D}_2$ są umbiliczne z wektorami średniej krzywizny normalnej $\xi_1 = -\nabla \log f_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$ i $\xi_2 = -\nabla \log f_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$ dla pewnych gładkich funkcji dodatnich f_1,f_2 na M. Dodatkowo, niech $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ będzie dystrybucją całkowalną. Wtedy tensor $S : TM \to TM$ zdefiniowany przez*

$$\begin{aligned} S\xi &= \lambda_0 \xi, \\ S|_{\mathcal{D}_1} &= \lambda_1 \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_1}, \\ S|_{\mathcal{D}_2} &= \lambda_2 \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_2} \end{aligned}$$

jest tensorem Killing'a wtedy i tylko wtedy, gdy λ_0 jest stałą, $\lambda_1 = \lambda_0 + C_1 f_1^2$ oraz $\lambda_2 = \lambda_0 + C_2 f_2^2$ dla pewnych stałych C_1,C_2. Przypuśćmy dodatkowo, że tensor Ricci'ego Ric *rozmaitości (M, g) jest postaci* $\mathrm{Ric} = S + a\mathrm{Id}$, *gdzie S jest jak powyżej z $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = C_1 f_1^2$ i $\lambda_2 = C_2 f_2^2$. Wtedy*

$$\frac{1}{2}(\dim \mathcal{D}_1 + \dim \mathcal{D}_2 - 1)\, a = E - \dim \mathcal{D}_1 C_1 f_1^2 - \dim \mathcal{D}_2 C_2 f_2^2$$

dla pewnej stałej $E \in \mathbb{R}$.

Dowód. Na początek przypuśćmy, że S jest tensorem Killing'a. Z lematu 1.3 i założenia, że $\nabla_\xi \xi = 0$ otrzymujemy

$$0 = g(\nabla_\xi \xi, Y) = -\frac{d\lambda_0(Y)}{2(\lambda_0 - \lambda_i)} g(\xi, \xi)$$

dla dowolnego pola wektorowego $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$, gdzie $i \neq 0$. Ponieważ $\mathcal{D}_0 \subset \ker d\lambda_0$ to widzimy, że λ_0 musi być stałe.

Niech teraz $X \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ dla $i \in \{1,2\}$ oraz $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_j)$, gdzie $j \neq i$. Przypomnijmy, że z umbiliczności $\mathcal{D}_i$, $i \in \{1,2\}$, dostajemy $\nabla_X X|_{\mathcal{D}_i^\perp} = g(X,X)\xi_i$, gdzie ξ_i jest wektorem średniej krzywizny normalnej dystrybucji $\mathcal{D}_i$. Z lematu 1.3 mamy

$$g(X,X)g(\xi_i, Y) = g(\nabla_X X, Y) = -\frac{d\lambda_i(Y)}{2(\lambda_i - \lambda_j)} g(X,X)$$

dla dowolnych $X \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ i $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_j)$ takich, że $i \neq j$. Korzystając z tego, że $\xi_i \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$ otrzymujemy $\xi_i = -\frac{\nabla \lambda_i}{2(\lambda_i - \lambda_0)} = -\nabla \log f_i$. To daje nam $\lambda_i = \lambda_0 + C_i f_i^2$ dla $i \in \{1,2\}$.

Na potrzeby drugiej części dowodu załóżmy, że $\lambda_i = \lambda_0 + C_i f_i^2$ dla $i = 1,2$. Pokażemy, że tensor S jak w hipotezie stwierdzenia jest tensorem Killing'a. Musimy sprawdzić, że zachodzi

$$\nabla_X S(Y,Z) + \nabla_Y S(Z,X) + \nabla_Z S(X,Y) = 0. \tag{4.15}$$

Wystarczy sprawdzić, że powyższy warunek zachodzi dla $X \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_j)$ oraz $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_k)$ where $i,j,k \in \{0,1,2\}$.

Na początek przypuśćmy, że $X,Y,Z \notin \Gamma(\mathcal{D}_0)$ oraz $j = i$, czyli $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$. Zachodzi wtedy $SX = \lambda_i X$ i $\nabla_Y S(X) = -(S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})\nabla_Y X$. Z symetrii S dostajemy, że $\nabla_X S(Y,Z) = \nabla_X S(Z,Y)$. W związku z tym, równanie (4.15) można zapisać jako

$$\begin{gathered} -g\left((S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})\nabla_X Y, Z\right) - g\left((S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})\nabla_Y X, Z\right) \\ -g\left((S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})\nabla_Z X, Y\right) = 0. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Z definicji 1.2 dystrybucji totalnie umbilicznej oraz tego, że $\xi_i \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} (S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})(\nabla_X Y + \nabla_Y X) &= (S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})(2g(X,Y)\xi_i) = \\ &= 2(\lambda_0 - \lambda_i) g(X,Y)\xi_i, \end{aligned}$$

co oznacza, że pierwsze dwa składniki w (4.16) znikają. Jeżeli chodzi o trzeci składnik, to mamy

$$g\left((S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})\nabla_Z X, Y\right) = g\left(\nabla_Z X, (S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i})Y\right) = 0,$$

co dowodzi znikania sumy cyklicznej (4.15) w przypadku, gdy $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$, $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_j)$, $i, j \neq 0$.

Przypuśćmy teraz, że $i = j \neq 0$, czyli $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ oraz $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$. Podobnie jak powyżej, mamy

$$\nabla_X S(Y) + \nabla_Y S(X) = -2(\lambda_0 - \lambda_i) g(X, Y) \xi_i.$$

Ponieważ $\xi_i = -\nabla \log f_i \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$, to

$$g(\nabla_X S(Y) + \nabla_Y S(X), Z) = -2(\lambda_i - \lambda_0) g(X, Y) g(\nabla \log f_i, Z).$$

Następnie,

$$\begin{aligned} \nabla_Z S(X) &= -\left(S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i}\right) \nabla_Z X + g(\nabla \lambda_i, Z) X \\ &= -\left(S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i}\right) \nabla_Z X - 2(\lambda_i - \lambda_0) g(\xi_i, Z) X = \\ &= -\left(S - \lambda_i \mathrm{Id}|_{\mathcal{D}_i}\right) \nabla_Z X - 2(\lambda_i - \lambda_0) g(-\nabla \log f_i, Z) \end{aligned}$$

co daje nam

$$g(\nabla_Z S(X), Y) = 2(\lambda_i - \lambda_0) g(\nabla \log f_i, Z) g(X, Y).$$

Ostatecznie widać, że warunek (4.15) jest spełniony również dla $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ i $Z \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$.

Pozostaje nam sprawdzić co się dzieje, gdy każde z pól X, Y, Z jest cięciem innej dystrybucji, na przykład $Z = \xi \in \Gamma(\mathcal{D}_0)$, $X \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$ oraz $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$. Ponieważ zarówno $\mathcal{D}_0$ jak $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ są całkowalne, to możemy założyć, że $[X, \xi] = [Y, \xi] = 0$. Łatwo teraz pokazać, że wszystkie składniki sumy cyklicznej (4.15) znikają. Mamy na przykład

$$g(\nabla_X S(Y), \xi) = -(\lambda_0 - \lambda_2) g(\nabla_X Y, \xi) = 0,$$

gdzie ostatnia równość jest natychmiastową konsekwencją wzoru Koszul'a

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, \xi) = &X g(Y, \xi) + Y g(\xi, X) - \xi g(X, Y) + \\ &+ g([X, Y], \xi) - g([X, \xi], Y) - g([Y, \xi], X). \end{aligned}$$

Udowodnimy teraz ostatnią część stwierdzenia. Niech $\{E_1, \ldots, E_k\}$ oraz $\{F_1, \ldots, F_s\}$ będą lokalnymi bazami ortonormalnymi dystrybucji $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ odpowiednio. Dla pochodnej kowariantnej $\nabla \operatorname{Ric}$ mamy

$$\operatorname{tr} \nabla \operatorname{Ric} = \operatorname{tr} \nabla S + \nabla a. \tag{4.17}$$

Przypomnijmy, że $\operatorname{tr} \nabla \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{scal}$. Dla $\operatorname{tr} \nabla S$ mamy, uwzględniając $\lambda_1 = C_1 f_1^2$,

$$\nabla_{E_i} S(E_i) = -\frac{1}{2} \nabla \lambda_1 = -\frac{1}{2} C_1 \nabla f_1^2,$$

gdzie ostatnia równość wynika ze wzoru (1.9). Podobnie otrzymujemy

$$\nabla_{F_j} S(F_j) = -\frac{1}{2} C_2 \nabla f_2^2.$$

Biorąc pod uwagę, że wartości własne tensora Ricci'ego Ric to $\lambda_i + a$, gdzie $i = 0, 1, 2$, mamy

$$\nabla \operatorname{scal} = kC_1 \nabla f_1^2 + sC_2 \nabla f_2^2 + (k + s + 1)\nabla a.$$

Stąd oraz z (4.17) dostajemy

$$(k + s - 1)\nabla a = -kC_1 \nabla f_1^2 - sC_2 \nabla f_2^2.$$

□

Rozmaitość $M = P \times I$ z poprzedniej sekcji można uzwarcić dwupunktowo, otrzymując S^2-wiązkę nad rozmaitością bazową N wiązki głównej $p : P \to N$. Uzwarcenia dokonuje się doklejając dwie zdegenerowane do punktu S^1-wiązki w punktach $\{a\}$ i $\{b\}$ odcinka I. Co ciekawsze, na tak uzwarconą rozmaitość M da się również przedłużyć metrykę g, o czym mówi następne twierdzenie ([Be], rozdział 9., dowód twierdzenia 9.125 i odniesienia).

Twierdzenie 4.11. *Niech (M, g) będzie zwartą rozmaitością Riemann'a, lokalnie ko-jednorodności 1 względem grupy wszystkich lokalnych izometrii (M, g). Niech $U \subset M$ będzie otwartym podzbiorem M takim, że (U, g) jest izometryczne z $P \times I$, gdzie $I = (a, b)$ jest przedziałem otwartym, a P S^1-wiązką główną $p : P \to N$ nad pewną powierzchnią riemannowską (N, h, J) o stałej krzywiźnie sekcyjnej $K \in \{-2, 0, 2\}$ jak w podrozdziale 4.1. Niech metryka g będzie dana na U przez*

$$g = dt^2 + f^2(t)\theta^2 + c^2(t)p^*h,$$

dla pewnych dodatnich funkcji f i c na I. Załóżmy dodatkowo, że metryka g_k na P dana przez $g_k = \theta^2 + p^*h$ daje P strukturę $\mathcal{A}$-rozmaitości. Metryka g rozszerza się do gładkiej metryki na całym M, które powstaje z U jako uzwarcenie dwupunktowe, jeżeli funkcje f i c spełniają następujące warunki

- $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = -f'(b) = 1$, $f^{(2k)}(a) = f^{(2k)}(b) = 0$,
- $c(a) \neq 0 \neq c(b)$, $c^{(2k+1)}(a) = 0 = c^{(2k+1)}(b)$,

gdzie k jest dowolną całkowitą liczbą nieujemną, $f^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną i przyjmujemy, że $f^{(0)} = f$.

W dalszej części będziemy mówić, że funkcja f, spełniająca powyższe warunki, jest *nieparzysta* w a i b, a funkcja c jest *parzysta* w a i b.

4.5. Układ równań różniczkowych związanych z istnieniem $\mathcal{AC}^{\perp}$-metryki na M

W tym podrozdziale zajmiemy się przeformułowaniem warunków ze stwierdzenia 4.2 oraz wprowadzimy zamianę zmiennych, która w dalszej części pozwoli nam znaleźć funkcje f i c spełniające warunki z tego stwierdzenia oraz pokazać, że istnieją rozwiązania spełniające warunki brzegowe z twierdzenia 4.11.

Na początek zauważmy, że przestrzeń styczną TM rozmaitości $M = I \times P$ można zapisać jako $\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$, gdzie $\mathcal{D}_0$ jest dystrybucją rozpiętą przez pole H, które spełnia warunek $\nabla_H H = 0$. Ostatni fakt wynika z tego, że $\nabla_H H = S_t H$, gdzie S_t jest drugą formą fundamentalną hiperpowierzchni M_t w M. Niech dystrybucja $\mathcal{D}_1$ będzie rozpięta przez podniesienie pola fundamentalnego ξ z S^1-wiązki głównej P, a $\mathcal{D}_2$ będzie podniesieniem dystrybucji horyzontalnej wiązki P. Korzystając z lematu 4.4 łatwo pokazać, że obie te dystrybucje są umbiliczne z wektorami średniej krzywizny normalnej równymi odpowiednio $-\nabla \log f$ oraz $-\nabla \log c$. Ponieważ $I \times P \to I$ jest submersją riemannowską, to $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ musi być całkowalne.

Przypomnijmy, że (M, g) jest $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy tensor S zdefiniowany przez $S = \mathrm{Ric} - a\mathrm{id}_{TM}$ dla pewnego $a \in C^{\infty}(M)$ jest tensorem Killing'a. W naszej sytuacji, na mocy stwierdzenia 4.2, S jest tensorem Killing'a wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne μ_0, μ_1 i μ_2 tensora S spełniają $\mu_1 = \mu_0 + C_1 f^2$, $\mu_2 = \mu_0 + C_2 h^2$, gdzie μ_0, C_1 i C_2 są stałymi. Zauważmy, że wartości własne λ_0, λ_1 i λ_2 tensora Ricci'ego Ric spełniają $\lambda_i = \mu_i + a$ dla $i = 0, 1, 2$. Ponieważ $\mu_i - \mu_0 = \lambda_i - \lambda_0$ to widać, że (M, g) jest $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lambda_1 - \lambda_0 = C_1 f^2, \tag{4.18}$$

$$\lambda_2 - \lambda_0 = C_2 c^2. \tag{4.19}$$

Wstawiając wzory (4.10)-(4.12) na wartości własne tensora Ricci'ego i dzieląc pierwsze równanie przez wymiar n rozmaitości bazowej N otrzymujemy z pierwszego równania

$$\frac{c''}{c} - \frac{f'c'}{fc} + s^2 \frac{f^2}{c^4} = \frac{C_1}{n} f^2. \tag{4.20}$$

Dla skrócenia zapisu zamiast $\frac{C_1}{n}$ będziemy pisać po prostu C_1. Mnożąc obie strony powyższego równania przez $2\frac{c'c}{f^2}$ mamy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(c')^2}{f^2} - \frac{s^2}{c^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(C_1 c^2\right),$$

skąd po scałkowaniu dostajemy

$$\frac{(c')^2}{f^2} - \frac{s^2}{c^2} = C_1 c^2 + A,$$

gdzie A jest stałą całkowania. Po przeniesieniu wszystkiego na jedną stroną i pomnożeniu przez $\frac{f^2}{c^2}$ otrzymujemy

$$\left(\frac{c'}{c}\right)^2 - f^2\left(\frac{s^2}{c^4} + C_1 + \frac{A}{c^2}\right) = 0. \tag{4.21}$$

4.5.1. Zamiana zmiennych

W pracy [W-W] M. Y. Wang i J. Wang rozwiązali problem istnienia rozmaitości Einstein'a dla dużej klasy metryk na S^2-wiązkach nad rozmaitościami Kähler'a-Einstein'a. Otrzymali podobne równania różniczkowe, które udało im się rozwiązać wprowadzając pewne podstawienie. Poniżej zobaczymy, że to samo podstawienie działa także w naszym przypadku.

Wprowadźmy nową zmienną u przez $du = f(t)dt$ i oznaczmy $\alpha(u) = f(t)$ oraz $\beta(u) = c^2(t)$. Łatwo wyprowadzić poniższe wzory

$$\dot{\alpha} = \frac{f'}{f}, \quad \frac{f''}{f} = \ddot{\alpha}\alpha + (\dot{\alpha})^2, \quad 2\frac{c'}{c} = \alpha\frac{\dot{\beta}}{\beta},$$
$$2\frac{c''}{c} = \alpha\dot{\alpha}\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \alpha^2\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2.$$

Podstawiając do (4.10)-(4.12) otrzymujemy następujący układ trzech równań różniczkowych

$$\lambda_0 = -\alpha\ddot{\alpha} - (\dot{\alpha})^2 - \frac{n}{2}\alpha^2\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{n}{2}\alpha\dot{\alpha}\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{n}{2}\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2, \tag{4.22}$$

$$\lambda_1 = -\alpha\ddot{\alpha} - (\dot{\alpha})^2 - \frac{n}{2}\alpha\dot{\alpha}\frac{\dot{\beta}}{\beta} + ns^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2, \tag{4.23}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\alpha^2}{2}\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \alpha\dot{\alpha}\frac{\dot{\beta}}{\beta} - 2s^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\mu}{\beta} - \frac{n-2}{4}\alpha^2\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2. \tag{4.24}$$

Co więcej równanie (4.21) jest teraz postaci

$$\alpha^2\left(C_1 + \frac{s^2}{\beta^2} + \frac{A}{\beta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2\right) = 0.$$

Ponieważ α ma być wszędzie różna od zera, to dostajemy

$$C_1 + \frac{s^2}{\beta^2} + \frac{A}{\beta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 = 0,$$

co można zapisać jako

$$\dot{\beta}^2 = 4(s^2 + A\beta + C_1\beta^2). \tag{4.25}$$

4.5.2. Rozwiązanie równania różniczkowego na funkcję β

Dla uproszczenia będziemy rozwiązywać równanie (4.25) dla $C_1 = -1$ oraz $C_1 = 1$. Przypadek $C_1 = 0$ nie jest dla nas interesujący, ponieważ wtedy wartości własne λ_0 i λ_1 tensora Ric byłyby równe.

Przypadek $C_1 = -1$

Zauważmy, że równanie (4.25) jest dobrze określone dla dowolnych A. Można łatwo sprawdzić, że rozwiązanie ogólne (4.25) jest dane przez

$$\beta(u) = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4s^2}\sin(\pm 2u + D) + \frac{A}{2}, \tag{4.26}$$

gdzie D jest stałą całkowania.

Z powyższego wzoru wynika, że β jest ograniczone. Zauważmy, że $\beta > 0$ między innymi na $(0, \frac{1}{2}(\sqrt{A^2 + 4s^2} + A)]$. Dla uproszczenia będziemy rozważać tylko ten przedział dla β. Co więcej można przyjąć, że $D = 0$, ponieważ zmiana D odpowiada przesunięciu wykresu funkcji β w poziomie.

Przypadek $C_1 = 1$

Dla $C_1 = 1$ sytuacja jest bardziej skomplikowana. Najpierw zapiszmy równanie (4.25) jako

$$\dot{\beta} = \pm 2\sqrt{s^2 + A\beta + \beta^2}.$$

Rozwiązania tego równania otrzymujemy całkując równanie

$$\int \frac{d\beta}{\sqrt{s^2 + A\beta + \beta^2}} = \pm 2 \int du. \tag{4.27}$$

Mamy

$$\int \frac{d\beta}{\sqrt{s^2 + A\beta + \beta^2}} = \log\left|A + 2\sqrt{s^2 + A\beta + \beta^2} + 2\beta\right|,$$

więc równanie (4.27) przyjmuje postać

$$A + 2\sqrt{s^2 + A\beta + \beta^2} + 2\beta = D\exp(\pm 2u), \quad D \in \mathbb{R}.$$

Można teraz sprawdzić, że funkcja

$$\beta(u) = \frac{1}{4}\left(De^{\pm 2u} - 2A + \frac{A^2 - 4s^2}{De^{\pm 2u}}\right), \tag{4.28}$$

spełnia równanie (4.25).

Przypuśćmy teraz, że $A^2 - 4s^2 > 0$. W punkcie $u_0 = \pm\frac{1}{4}\log\left(\frac{A^2-4s^2}{D^2}\right)$ powyższa funkcja posiada ekstremum równe

$$\beta(u_0) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn} D\sqrt{A^2 - 4s^2} - A\right).$$

Zauważmy, że rozwiązania (4.28) dla różnych znaków przy u dają funkcje, które są swoimi odbiciami względem prostej $u = 0$, więc będziemy rozważać tylko rozwiązanie ze znakiem „plus". W dalszej części będziemy szukać $A < 0$ tak, by wartość β w ekstremum była dodatnia. Łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy $D > 0$ funkcja β jest zawsze dodatnia dla $A < 0$, a dla $D < 0$ mamy $\beta(u) > 0$ dokładnie wtedy, jeżeli De^{2u} znajduje się pomiędzy wartościami $A + 2|s|$ oraz $A - 2|s|$.

W tej pracy nie będziemy zajmować się przypadkiem, gdy $A^2 - 4s^2 < 0$.

Rozważmy teraz sytuację dla $A^2 = 4s^2$. Rozwiązanie równania (4.25) jest dane wzorem

$$\beta(u) = De^{\pm 2u} - \frac{A}{2}, \quad \text{dla} \quad D \in \mathbb{R}. \tag{4.29}$$

To rozwiązanie nie ma symetrii i jest ściśle rosnące lub malejące w zależności od znaku w wykładniku i znaku stałej D. Rozwiązanie (4.29) jest rosnące, jeżeli znak D i znak przy $\pm 2u$ są takie same, a malejące jeżeli te znaki są różne. Zauważmy jeszcze, że funkcja β jest zawsze ujemna dokładnie wtedy, gdy $D < 0$ oraz $A > 0$.

4.5.3. Zamiana zmiennych

Podstawimy teraz $\Gamma = \alpha^2$ w (4.24) by otrzymać liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu na funkcję Γ. Mamy

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\dot{\Gamma}\frac{\dot{\beta}}{\beta} - \Gamma\left(\frac{1}{2}\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{n-2}{4}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 2\frac{s^2}{\beta^2}\right) + \frac{\mu}{\beta} \tag{4.30}$$

Jeżeli (M, g) jest $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością i spełnia warunki ze stwierdzenia 4.2, to krzywizna skalarna scal jest równa $\mathrm{scal} = (n+2)a + C_1 f^2 + nC_2c^2$. Wtedy $a = E + \frac{2\,\mathrm{scal}}{n+4}$ dla pewnej stałej E, czyli

$$a = -\left(1 + \frac{4}{n}\right)E - \frac{2}{n}C_1 f^2 - 2C_2c^2 = -\left(1 + \frac{4}{n}\right)E - \frac{2}{n}C_1\Gamma - 2C_2\beta.$$

Jak poprzednio zamiast $\frac{C_1}{n}$ piszemy C_1.

Korzystając z faktu, że $\lambda_2 = a + C_2\beta$ można zauważyć, że układ (4.18)-(4.19) ma postać

$$\dot{\beta} = \pm\sqrt{s^2 + A\beta + C_1\beta^2}, \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\beta}}{\beta}\dot{\Gamma} + \left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{n-2}{2}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 4\frac{s^2}{\beta^2} - 4C_1\right)\Gamma & \\ = \left(2 + \frac{8}{n}\right)E + 2C_2\beta + 2\frac{\mu}{\beta}, &\end{aligned} \tag{4.32}$$

natomiast metryka g przyjmuje postać

$$g = \frac{1}{\Gamma(u)} du^2 + \Gamma(u)\theta^2 + \beta(u)p^* h. \tag{4.33}$$

4.5.4. Rozwiązania równania na funkcję Γ

Podstawiając do (4.20) funkcje α i β otrzymujemy

$$C_1\alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + s^2\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{4}\alpha^2\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2,$$

skąd

$$4\frac{s^2}{\beta^2} - 4C_1 = \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 - 2\frac{\ddot{\beta}}{\beta}.$$

Możemy teraz zapisać równanie (4.32) jako

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta}\dot{\Gamma} + \left(-\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{n}{2}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2\right)\Gamma = \left(2 + \frac{8}{n}\right)E + 2C_2\beta + 2\frac{\mu}{\beta}. \tag{4.34}$$

Na początku całkujemy równanie jednorodne stowarzyszone z równaniem (4.34):

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta}\dot{\Gamma} + \left(-\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{n}{2}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2\right)\Gamma = 0.$$

Mamy

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{\dot{\beta}} - \frac{n}{2}\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)du.$$

Całkując, otrzymujemy

$$\Gamma_0 = C\frac{\dot{\beta}}{\beta^{\frac{n}{2}}}$$

dla pewnej stałej dodatniej C.

Stosując metodę uzmienniania stałej mamy

$$\Gamma(u) = C(u)\frac{\dot{\beta}(u)}{\beta^{\frac{n}{2}}(u)} \tag{4.35}$$

dla pewnej funkcji C. Znajdziemy teraz tę funkcję. Z powyższego mamy

$$\dot{\Gamma} = \dot{C}\frac{\dot{\beta}}{\beta^{\frac{n}{2}}} + C\frac{\ddot{\beta}\beta^{\frac{n}{2}} - \dot{\beta}^2\frac{n}{2}\beta^{\frac{n}{2}-1}}{\beta^n}.$$

Z (4.34) dostajemy

$$\dot{C}\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} = 2\left(1 + \frac{4}{n}\right)E + 2C_2\beta + 2\frac{\mu}{\beta}.$$

Powyższe równanie daje się scałkować na przykład dla $n = 2$. Przyjmuje ono wtedy postać

$$\dot{C} = \frac{\beta^2}{\dot{\beta}^2}\left(6E + 2C_2\beta + 2\frac{\mu}{\beta}\right) = 6E\frac{\beta^2}{\dot{\beta}^2} + 2C_2\frac{\beta^3}{\dot{\beta}^2} + 2\mu\frac{\beta}{\dot{\beta}^2}. \tag{4.36}$$

Musimy teraz rozważyć różne warianty rozwiązania w zależności od funkcji β.

Przypadek $C_1 = -1$

Całkując (4.36) dla β danego wzorem

$$\beta(u) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2 - 4s^2}\sin(2u + D) + A\right)$$

dostajemy

$$\begin{aligned} C(u) = &\frac{1}{16\dot{\beta}(u)}\left(8A^2C_2 + 24AE + 8\mu + 8C_2s^2\right) \\ &+\frac{C_2}{8}\dot{\beta}(u) - \frac{1}{8}(3C_2A + 6E)(2u + D) \\ &+\frac{\sin(2u + D)}{\dot{\beta}(u)}\frac{1}{2\sqrt{A^2 + 4s^2}}\left(A^3C_2 + 3A^2E + 6Es^2 + A(\mu + 3C_2s^2)\right) + F, \end{aligned} \tag{4.37}$$

gdzie F jest stałą całkowania.

Otrzymaliśmy jawne rozwiązanie równania (4.34)

$$\begin{aligned} \Gamma(u) = &\frac{1}{16\beta(u)}\left(8A^2C_2 + 24AE + 8\mu + 8C_2s^2\right) \\ &+\frac{C_2}{8}\frac{\dot{\beta}^2(u)}{\beta(u)} - \frac{1}{8}(3C_2A + 6E)(2u + D)\frac{\dot{\beta}(u)}{\beta(u)} \\ &+\frac{\sin(2u + D)}{\beta(u)}\frac{1}{2\sqrt{A^2 + 4s^2}}\left(A^3C_2 + 3A^2E + 6Es^2 + A(\mu + 3C_2s^2)\right) + F\frac{\dot{\beta}(u)}{\beta(u)}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Przypadek $C_1 = 1$

Na początek zajmiemy się rozwiązaniem dla $A^2 - 4s^2 \neq 0$. Całkując równanie (4.36) z funkcją β daną przez

$$\beta(u) = \frac{1}{4}\left(D^2e^{2u} - 2A + \frac{A^2 - 4s^2}{De^{2u}}\right)$$

mamy

$$\begin{aligned} C(u) = &\frac{1}{8}C_2\dot{\beta}(u) + \frac{3}{4}\left(-C_2A + 2E\right)u \\ &+\frac{1}{2De^{2u}\dot{\beta}(u)}\left(A\left(A^2 - 3s^2\right)C_2 - 3\left(A^2 - 2s^2\right)E + A\mu\right) \\ &-\frac{1}{2\dot{\beta}(u)}\left((A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu\right) + F, \end{aligned} \tag{4.39}$$

gdzie F jest stałą całkowania.

Rozwiązanie równania (4.34) jest w tej sytuacji dane przez

$$\Gamma(u) = \frac{1}{8}C_2\frac{\dot{\beta}^2(u)}{\beta(u)} + \frac{3}{4}\frac{\dot{\beta}(u)}{\beta(u)}\left(-C_2A + 2E\right)u \tag{4.40}$$
$$+\frac{1}{2De^{2u}\beta(u)}\left(A\left(A^2 - 3s^2\right)C_2 - 3\left(A^2 - 2s^2\right)E + A\mu\right)$$
$$-\frac{1}{2\beta(u)}\left((A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu\right) + \frac{\dot{\beta}(u)}{\beta(u)}F.$$

Kolejno rozważmy sytuację, gdy $A^2 - 4s^2 = 0$. Funkcja β jest wtedy dana wzorem

$$\beta(u) = De^{2u} - \frac{A}{2}.$$

Dostajemy

$$C(u) = \frac{1}{64D^2}\left(16C_2D^3e^{2u} - 4De^{-2u}\left(3A^2C_2 - 12AE + 4\mu\right) + \right. \tag{4.41}$$
$$\left. +Ae^{-4u}\left(A^2C_2 - 6AE + 4\mu\right)\right) - \frac{3}{4}\left(AC_2 - 2E\right)u + F,$$

gdzie F jest stałą całkowania.

Rozwiązanie równania (4.34) jest teraz dane przez

$$\Gamma(u) = \frac{e^{2u}}{16D(2De^{2u} - A)}\left(16C_2D^3e^{2u}\right. \tag{4.42}$$
$$\left.-4De^{-2u}\left(3A^2C_2 - 12AE + 4\mu\right) + Ae^{-4u}\left(A^2C_2 - 6AE + 4\mu\right)\right)$$
$$-3\frac{De^{2u}}{2De^{2u} - A}\left(AC_2 - 2E\right)u + \frac{4De^{2u}F}{2De^{2u} - A}.$$

W tej sytuacji mamy następujący wniosek z twierdzenia 4.2

Twierdzenie 4.12. *Niech P będzie przestrzenią totalną S^1-wiązki nad powierzchnią Riemann'a (N,h) o krzywiźnie skalarnej $\mu \in \{-2,0,2\}$ oraz niech $\tilde{I} = (\tilde{a},\tilde{b})$ będzie pewnym przedziałem. Załóżmy, że P z metryką $g_k = \theta^2 + p^*h$ jest $\mathcal{A}$-rozmaitością. Wtedy $P \times \tilde{I}$ z metryką zdefiniowaną wzorem*

$$g = \frac{1}{\Gamma(u)}du^2 + \Gamma(u)\theta^2 + \beta(u)p^*h.$$

jest $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitością z trzema wartościami własnymi λ_0, λ_1 i λ_2 tensora Ricci'ego Ric *jeżeli Γ i β są rozwiązaniem układu* (4.31)-(4.32) *danym wzorami* (4.26) *i* (4.38) *albo* (4.28) *i* (4.40) *albo* (4.29) *i* (4.42)*, przy czym Γ i β muszą być dodatnie na $(\tilde{a},\tilde{b})$.*

4.5.5. Warunki brzegowe

Korzystając ze stwierdzenia 4.11, istnienie struktury $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitości na S^2-wiązce powstałej z uzwarcenia dwupunktowego $P \times I$, jak w poprzednich sekcjach, jest równoważne rozwiązaniu układu równań różniczkowych (4.18)-(4.19) dla warunków brzegowych $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = 1$, $f'(b) = -1$, $c(a) \neq 0 \neq c(b)$ oraz $c'(a) = c'(b) = 0$. Po zamianie zmiennych dostajemy następujące warunki brzegowe dla układu (4.31)-(4.32):

$$\Gamma(\tilde{a}) = \Gamma(\tilde{b}) = 0, \dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2, \dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2, \tag{4.43}$$

$$\beta(\tilde{a}) \neq 0 \neq \beta(\tilde{b}), \tag{4.44}$$

gdzie $\tilde{a} = u(a)$ i $\tilde{b} = u(b)$. Zauważmy, że jeżeli powyższe warunki są spełnione to automatycznie jest spełniony warunek $c'(a) = c'(b) = 0$ jako, że $2\frac{c'}{c} = \frac{\dot{\beta}}{\beta}\alpha$.

4.5.6. Regularność rozwiązań

W tym podrozdziale pokażemy, że jeżeli spełnione są warunki (4.43) oraz (4.44) to funkcja f jest parzysta, a funkcja c nieparzysta w punktach a i b opierając się na Dodatku do skryptu do geometrii różniczkowej [JelGR].

Na początek zauważmy, że wprowadzając zamianę zmiennych $\frac{du}{dt} = f(t)$ i podstawienie $\Gamma(u) = f^2(t)$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \Gamma(u)$$

w zmiennej u. Różniczkując obie strony względem t otrzymujemy

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{2}\dot{\Gamma}(u), \tag{4.45}$$

gdzie kropka oznacza, jak poprzednio, różniczkowanie względem u. Co więcej wiemy, że Γ jest funkcją gładką na $\mathbb{R}$ i załóżmy, że spełnia warunki $\Gamma(\tilde{a}) = 0 = \Gamma(\tilde{b})$ oraz $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) \neq 0$ i $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) \neq 0$, gdzie $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ są jak w poprzednich podrozdziałach. Te równości definiują warunki początkowe $u(a) = \tilde{a}$ oraz $u'(a) = f(a) = 0$ dla równania (4.45) w punkcie a.

Równanie (4.45) jest równoważne układowi równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$U' = F(U), \quad U(a) = (\tilde{a}, 0), \tag{4.46}$$

gdzie $U(t) = (u(t), w(t))$ oraz $F(u, w) = (w, f(u))$. Niech $\dot{\Gamma} = -\dot{\Gamma}_1$ dla Γ_1 takiej, że

$$\frac{1}{2}\left(u'(a)\right)^2 + \Gamma_1(\tilde{a}) = E > 0.$$

Zauważmy, że można przyjąć, że $\Gamma_1(u) = -\Gamma(u) + E$ dla pewnej stałej $E > 0$. Mamy wtedy

$$\frac{1}{2}\left(u'(a)\right)^2 + \Gamma_1(\tilde{a}) = \frac{1}{2}\Gamma(\tilde{a}) - \Gamma(\tilde{a}) + E = E$$

ponieważ $\Gamma(u_0) = f^2(a) = 0$. Układ (4.46) ma całkę pierwszą

$$\frac{1}{2}\left(u'(t)\right)^2 + \Gamma_1(u(t)) = E.$$

Stąd dostajemy, że

$$|u'(t)| = \sqrt{2\left(E - \Gamma_1(u(t))\right)} = \sqrt{2\Gamma(u(t))}.$$

Niech K oznacza supremum funkcji $\sqrt{2\Gamma(u(t))}$ po przedziale (a,b). Załóżmy teraz dodatkowo, że funkcja Γ jest różna od zera na $(\tilde{a},\tilde{b})$.

Funkcja U jest ograniczona na $[-K,K]\times[a,b]$, tak samo $\|dU\|$. Stąd rozwiązanie $u(t)$ można przedłużyć do $[a,b]$ lub jest ono zawarte w (a,b). Przy powyższych założeniach pokazuje się ([JelGR]), że funkcja $u(t)$ przedłuża się na całe $\mathbb{R}$ i jest parzysta w a i b. Stąd dostajemy, że f jest nieparzysta w a i b, ponieważ jest pochodną u.

Łatwo teraz zauważyć, że funkcja c^2 jest parzysta, ponieważ $c^2(t) = \beta(u(t))$ i u jest parzysta. Korzystając ze wzorów na n-tą pochodną iloczynu można łatwo pokazać, że jeżeli c spełnia $c(a) \neq 0 \neq c(b)$ oraz $c'(a) = 0 = c'(b)$ dla pewnych punktów a i b, to nieparzyste pochodne dowolnego rzędu się zerują.

4.6. Dodatnie rozwiązania spełniające warunki brzegowe dla $C_1 = -1$

Wyniki tej części pracy można podsumować w następującym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 4.3. *Niech $C_1 = -1$. Niech P będzie przestrzenią totalną S^1-wiązki głównej nad powierzchnią Riemann'a (N,h) o stałej krzywiźnie sekcyjnej $\mu \in \{-2,0,2\}$ klasyfikowaną przez 2-formę $k\omega_h$, gdzie ω_h jest formą Kähler'a metryki h podniesioną do P, a $k = 2s$ będzie dowolną liczbą całkowitą. Załóżmy też, że (P,g_k), z metryką g_k daną wzorem $g_k = \theta^2 + p^*h$ jest $\mathcal{A}$-rozmaitością. Istnieją wtedy takie funkcje Γ i β, że metryka g na produkcie $P \times (\tilde{a},\tilde{b})$ zdefiniowana wzorem*

$$g = \frac{1}{\Gamma(u)}du^2 + \Gamma(u)\theta^2 + \beta(u)p^*h,$$

przedłuża się na cały przedział $[\tilde{a},\tilde{b}]$ w taki sposób, że $P\times[\tilde{a},\tilde{b}]$ jest izomorficzne z wiązką nad N o włóknie S^2. Co więcej, rozmaitość $(P\times[\tilde{a},\tilde{b}],g)$ jest zwartą $\mathcal{AC}^{\perp}$-rozmaitością z trzema wartościami własnymi tensora Ricci'ego.

Do końca tego podrozdziału β oznacza rozwiązanie równania (4.31) dane wzorem (4.26):

$$\beta(u) = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+4s^2}\sin(2u) + \frac{A}{2},$$

przy czym zauważmy, że przyjęliśmy $D = 0$. Nie zmniejsza to ogólności naszych rozważań jako, że D odpowiada przesunięciu wykresu funkcji w prawo lub w lewo.

4.6.1. Rozwiązania spełniające warunki brzegowe

Po pierwsze, musimy wybrać punkt początkowy $\tilde{a}$ tak, by $\beta(\tilde{a}) > 0$. W tym celu niech $\tilde{a}$ będzie dowolnym punktem takim, że

$$\tilde{a} \in \left(-\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + 4s^2}} \right) - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right).$$

Z twierdzenia o istnieniu rozwiązania dla równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu z podanym warunkiem początkowym wynika, że istnieje rozwiązanie (4.34) takie, że $\Gamma(\tilde{a}) = 0$ dla pewnej stałej F. Z równania (4.35) widać, że $\Gamma(\tilde{a}) = 0$ dokładnie wtedy, gdy $C(\tilde{a}) = 0$. Korzystając z (4.37) otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} F = &-\frac{1}{16\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(8A^2C_2 + 24AE + 8\mu + 8C_2s^2\right) \\ &-\frac{C_2}{8}\dot{\beta}(\tilde{a}) + \frac{1}{8}(3C_2A + 6E)(2\tilde{a}) \\ &-\frac{\sin(2\tilde{a})}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\frac{1}{2\sqrt{A^2+4s^2}}\left(A^3C_2 + 3A^2E + 6Es^2 + A(\mu + 3C_2s^2)\right). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Z równania (4.34) widać, że jeżeli istnieje punkt $\tilde{a}$ taki, że $\Gamma(\tilde{a}) = 0$, to $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$2\frac{\dot{\beta}(\tilde{a})}{\beta(\tilde{a})} = 6E + 2C_2\beta(\tilde{a}) + 2\frac{\mu}{\beta(\tilde{a})}. \tag{4.48}$$

Po drugie, musimy wybrać takie $\tilde{b}$, by spełnione były pozostałe warunki. Skorzystamy z faktu, że β jest symetryczna względem pionowej prostej przechodzącej przez $u_0 = \frac{\pi}{4}$. Jeżeli $\tilde{a} = u_0 - \epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$ niech $\tilde{b} = u_0 + \epsilon$. Natychmiast dostajemy, że $\beta(\tilde{a}) = \beta(\tilde{b}) \neq 0$ (ponieważ wybraliśmy $\tilde{a}$ tak, by β była różna od zera w tym punkcie) oraz $\dot{\beta}(\tilde{a}) = -\dot{\beta}(\tilde{b})$.

Zauważmy, że jeżeli $\Gamma(\tilde{b}) = 0$ to ponownie z (4.34) mamy

$$\frac{\dot{\beta}(\tilde{b})}{\beta(\tilde{b})}\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = 6E + 2C_2\beta(\tilde{b}) + \frac{2\mu}{\beta(\tilde{b})}.$$

Korzystając z symetrii β dostajemy

$$\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -\frac{\beta(\tilde{a})}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(6E + 2C_2\beta(\tilde{a}) + \frac{2\mu}{\beta(\tilde{a})}\right) = -\dot{\Gamma}(\tilde{a}).$$

Podsumowując, jeżeli mamy punkt $\tilde{b}$ taki, że $\Gamma(\tilde{b}) = 0$ to automatycznie dostajemy $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$ dzięki symetriom β i jej pochodnej.

W takim razie, musimy wyprowadzić warunek na to, by $\Gamma(\tilde{b}) = 0$. Korzystając ze wzoru (4.35) jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $C(\tilde{b}) = 0$, czyli

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{16\dot{\beta}(\tilde{b})}\left(8A^2C_2 + 24AE + 8\mu + 8C_2s^2\right)\\
&\quad + \frac{C_2}{8}\dot{\beta}(\tilde{b}) - \frac{1}{8}(3C_2A + 6E)(2\tilde{b})\\
&+ \frac{\sin(2\tilde{b})}{\dot{\beta}(\tilde{b})}\frac{1}{2\sqrt{A^2+4s^2}}\left(A^3C_2 + 3A^2E + 6Es^2 + A(\mu + 3C_2s^2)\right)\\
&= \frac{1}{16\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(8A^2C_2 + 24AE + 8\mu + 8C_2s^2\right)\\
&\quad + \frac{C_2}{8}\dot{\beta}(\tilde{a}) - \frac{1}{8}(3C_2A + 6E)(2\tilde{a})\\
&+ \frac{\sin(2\tilde{a})}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\frac{1}{2\sqrt{A^2+4s^2}}\left(A^3C_2 + 3A^2E + 6Es^2 + A(\mu + 3C_2s^2)\right).
\end{aligned}$$

Uwzględniając, że $\tilde{a} - \tilde{b} = -2\epsilon = -2(u_0 - \tilde{a})$ i korzystając z symetrii β, mamy

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(3C_2A + 6E)(u_0 - \tilde{a}) &= \frac{1}{8\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(8A^2C_2 + 24AE + 8\mu + 8C_2s^2\right)\\
+\frac{C_2}{4}\dot{\beta}(\tilde{a}) + \frac{\sin(2\tilde{a})}{\dot{\beta}(\tilde{a})}&\frac{1}{\sqrt{A^2+4s^2}}\left(A^3C_2 + 3A^2E + 6Es^2 + A(\mu + 3C_2s^2)\right).
\end{aligned}$$

Biorąc powyższe równanie oraz (4.48) otrzymujemy układ dwóch równań liniowych ze względu na stałe E i C_2. Zapiszmy go jako

$$\begin{cases} k_1C_2 + k_2E & = -\frac{\mu}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(1 + \frac{A}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})\right),\\ \beta^2(\tilde{a})C_2 + 3\beta(\tilde{a})E & = \dot{\beta}(\tilde{a}) - \mu, \end{cases} \tag{4.49}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A^2 + s^2 + \frac{A(A^2+3s^2)}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})\right) + \frac{\dot{\beta}(\tilde{a})}{4} + \frac{3}{2}A(u_0 - \tilde{a}),\\
k_2 &= \frac{3}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A + \frac{A^2+2s^2}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})\right) + 3(u_0 - \tilde{a}).
\end{aligned}$$

Powyższy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy wyznacznik $\det_{C_2,E}$ tego układu jest niezerowy, czyli

$$\left(3k_1 - k_2\beta(\tilde{a})\right)\beta(\tilde{a}) \neq 0.$$

Można obliczyć, że

$$3k_1 - k_2\beta(\tilde{a}) =$$
$$\frac{3}{4}\left(\frac{3A^2+8s^2}{\sqrt{A^2+4s^2}}\cos 2\tilde{a} + 4(u_0-\tilde{a})\left(A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2+4s^2}\sin 2\tilde{a}\right)\right)$$

Zauważmy teraz, że zwiększając A zwiększamy też $3k_1 - k_2\beta(\tilde{a})$. Widać więc, że można dobrać A tak, by $\det_{C_2,E} > 0$.

Wyniki niniejszego podrozdziału można podsumować w poniższym lemacie.

Lemat 4.13. *Niech $\tilde{a} = u_0 - \epsilon$, dla pewnego $\epsilon > 0$, będzie dowolnym punktem takim, że $\beta(\tilde{a}) > 0$. Istnieje takie rozwiązanie Γ równania (4.32), że $\Gamma(\tilde{a}) = 0$. Co więcej przyjmijmy, że $\tilde{b} = u_0+\epsilon$. Istnieje wtedy takie $A > 0$, że dla pewnych stałych C_2, E, których wartość zależy od A i $\tilde{a}$ mamy $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2$ oraz $\Gamma(\tilde{b}) = 0$. Z symetrii funkcji β otrzymujemy wtedy automatycznie, że $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$.*

4.6.2. Dodatniość

Pokażemy teraz, że Γ jest dodatnia na $(\tilde{a}, \tilde{b})$ dla odpowiednio dobranych A. Korzystając z (4.32) widać, że dla dowolnego punktu u_1 takiego, że $\Gamma(u_1) = 0$ zachodzi

$$\dot{\Gamma}(u_1) = \frac{1}{\dot{\beta}(u_1)}\left(2C_2\beta^2(u_1) + 6E\beta(u_1) + 2\mu\right).$$

Zauważmy, że jeżeli istniałby taki punkt $u_1 \in (\tilde{a}, u_0)$, w którym $\Gamma(u_1) = 0$ oraz $\Gamma(u) > 0$ dla $(\tilde{a}, u_1)$ to musiałoby zachodzić $\dot{\Gamma}(u_1) \leq 0$. Stąd, jeżeli pokażemy, że prawa strona powyższej równości jest zawsze dodatnia na $(\tilde{a}, u_0)$, to pokażemy też, że $\Gamma(u) > 0$ na $(\tilde{a}, u_0)$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla przedziału $(u_0, \tilde{b})$.

Przypomnijmy, że w u_0 mamy

$$-\ddot{\beta}(u_0)\Gamma(u_0) = 2C_2\beta^2(u_0) + 6E\beta(u_0) + 2\mu.$$

Ponieważ u_0 jest maksimum funkcji β to $\ddot{\beta}(u_0) < 0$, czyli $\Gamma(u_0)$ jest dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy prawa strona jest dodatnia.

Oznaczmy przez γ funkcję zdefiniowaną wzorem

$$\gamma(u) = 2C_2\beta^2(u) + 6E\beta(u) + 2\mu.$$

Jeżeli mamy $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2$, to $\gamma(\tilde{a}) > 0$. Ponieważ β jest monotoniczna na przedziale $(\tilde{a}, u_0]$, to możemy myśleć o γ jako o funkcji kwadratowej zmiennej $\beta(u)$ na $[\beta(\tilde{a}), \beta(u_0)]$. Dobierając odpowiednio A tak, by $C_2 < 0$ oraz $\gamma(u_0) > 0$ widać, że $\gamma(\beta(u)) > 0$ na przedziale $[\beta(\tilde{a}), \beta(u_0)]$. Korzystając z symetrii β i γ nasze rozumowanie łatwo przenosi się na przedział $[\beta(u_0), \beta(\tilde{b}))$.

Pokażemy, że dla dużych, dodatnich A zachodzi $C_2 < 0$. Ponieważ C_2 musi być rozwiązaniem układu (4.49) możemy napisać $C_2 = \frac{C(A)}{\det_{C_2,E}}$, gdzie $\det_{C_2,E}$ jest wyznacznikiem głównym układu (4.49), a $C(A)$ jest wyrażeniem zależnym od A danym przez

$$\begin{aligned}C(A) = -3\mu\frac{\beta(\tilde{a})}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(1+\frac{A}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})\right)\\ -3\frac{\dot{\beta}(\tilde{a})-\mu}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A+\frac{A^2+2s^2}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})\right)-3\left(\dot{\beta}(\tilde{a})-\mu\right)(u_0-\tilde{a}).\end{aligned}$$

Możemy to przepisać jako

$$\begin{aligned}C(A) = -\frac{3}{2(A^2+4s^2)}\Big(-\sqrt{A^2+4s^2}\left(A\mu+2(\tilde{a}-u_0)(A^2+4s^2)\right)\cos(2\tilde{a})+\\ +2\left((A^2+4s^2)(A+(\tilde{a}-u_0)\mu)+(A^2+2s^2)\sqrt{A^2+4s^2}\sin(2\tilde{a})\right)\Big)\end{aligned}$$

Zauważmy, że $C(A)$ dąży do $-\infty$ gdy $A \to \infty$ co w połączeniu z faktem, że $\det_{C_2,E}$ jest dodatnie dla dużych A, uzasadnia stwierdzenie, że dla odpowiednio dużych A stała C_2 jest ujemna.

Pozostaje pokazać, że $\gamma(u_0) > 0$. W tym celu wyliczymy wartość stałej E. Z (4.49) mamy, że $E = \frac{E(A)}{\det_{C_2,E}}$, gdzie $E(A)$ jest dane wzorem

$$\begin{aligned}E(A) = \frac{\dot{\beta}(\tilde{a})-\mu}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A^2+s^2+\frac{A(A^2+3s^2)}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})\right)\\ +\frac{1}{4}\dot{\beta}(\tilde{a})\left(\dot{\beta}(\tilde{a})-\mu\right)+\frac{3}{2}A(u_0-\tilde{a})\left(\dot{\beta}(\tilde{a})-\mu\right)\\ +\mu\frac{\beta^2(\tilde{a})}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(1+\frac{A}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})\right).\end{aligned}$$

Przekształcając, otrzymujemy

$$\begin{aligned}E(A) = A^2+s^2+\frac{A(A^2+3s^2)}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a})+\frac{1}{4}(A^2+4s^2)\cos^2(2\tilde{a})\\ +\frac{3}{2}A\sqrt{A^2+4s^2}(u_0-\tilde{a})\cos(2\tilde{a})\\ -\frac{\mu}{4}\left(\left(A\sin(2\tilde{a})+\frac{3A^2+4s^2}{\sqrt{A^2+4s^2}}\right)\cos(2\tilde{a})+\sqrt{A^2+4s^2}\cos(2\tilde{a})+6A(u_0-\tilde{a})\right).\end{aligned}$$

Korzystając z powyższych, mamy $C_2\beta(u_0)+3E = \frac{C(A)\beta(u_0)+3E(A)}{\det_{C_2,E}}$. Dalej,

$$C(A)\beta(u_0) + 3E(A) = -\frac{3}{2}(A + \sqrt{A^2+4s^2})\,(A + (\tilde{a} - u_0)\mu) +$$

$$+\frac{3}{4}\frac{A+\sqrt{A^2+4s^2}}{\sqrt{A^2+4s^2}}A\mu\cos(2\tilde{a}) - \frac{3}{2}(u_0-\tilde{a})\sqrt{A^2+4s^2}(A+\sqrt{A^2+4s^2})\cos(2\tilde{a})$$

$$-\frac{3}{2}\frac{A^2+2s^2}{\sqrt{A^2+4s^2}}(A+\sqrt{A^2+4s^2})\sin(2\tilde{a}) + 3(A^2+s^2) + \frac{9}{2}(\tilde{a}-u_0)A\mu$$

$$-3\frac{A^2+2s^2}{\sqrt{A^2+4s^2}}\mu\cos(2\tilde{a}) + \frac{9}{2}A\sqrt{A^2+4s^2}(u_0-\tilde{a})\cos(2\tilde{a}) +$$

$$\frac{3}{4}(A^2+4s^2)\cos^2(2\tilde{a}) + 3\frac{A(A^2+3s^2)}{\sqrt{A^2+4s^2}}\sin(2\tilde{a}) - \frac{3}{4}A\mu\sin(2\tilde{a})\cos(2\tilde{a}).$$

Pokażemy, że dla dużych i dodatnich wartości A zachodzi $\gamma(u_0) > 0$. Mamy

$$\gamma(u_0) = \frac{C(A)\beta^2(u_0) + 3E(A)\beta(u_0)}{\det_{C_2,E}} + \mu.$$

Zauważmy, że w ułamku licznik jest rzędu 3 jako wielomian w A, a mianownik jest rzędu 2, czyli wartość $\gamma(u_0)$ zależy od współczynnika przy A^3 w liczniku. Jako, że $\det_{C_2,E}$ jest dodatnie dla dużych A to widać, że jeżeli współczynnik przy A^3 jest dodatni, to całe wyrażenie jest dodatnie.

Możemy napisać

$$\begin{aligned}
C(A)\beta^2(u_0) + 3E(A)\beta(u_0) = A^2(A+\sqrt{A^2+4s^2})\Bigg(&-\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{s^2}{A^2}}\right) \\
&-\frac{3}{2}(u_0-\tilde{a})\sqrt{1+4\frac{s^2}{A^2}}\left(1+\sqrt{1+4\frac{s^2}{A^2}}\right)\cos(2\tilde{a}) \\
&-\frac{3}{2}\frac{1+2\frac{s^2}{A^2}}{\sqrt{1+4\frac{s^2}{A^2}}}\left(1+\sqrt{1+4\frac{s^2}{A^2}}\right)\sin(2\tilde{a}) + 3 + \frac{9}{2}\sqrt{1+4\frac{s^2}{A^2}}(u_0-\tilde{a})\cos(2\tilde{a}) + \\
&+\frac{3}{4}\cos^2(2\tilde{a}) + 3\frac{1+3\frac{s^2}{A^2}}{\sqrt{1+4\frac{s^2}{A^2}}}\sin(2\tilde{a})\Bigg) \\
&+ \text{składniki niższego stopnia w } A.
\end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie w dużym nawiasie jest dodatnie dla dużych A, to możemy wywnioskować, że dla dużych dodatnich A mamy $\gamma(u_0) > 0$.

Podsumowując pokazaliśmy, następujący lemat.

Lemat 4.14. *Dla dowolnego $\tilde{a}$ takiego, że $\beta(\tilde{a}) > 0$ oraz wystarczająco dużych dodatnich A rozwiązania Γ równania* (4.34) *spełniające warunki brzegowe* (4.43) *i* (4.44) *są dodatnie na przedziale $(\tilde{a}, \tilde{b})$.*

4.7. Dodatnie rozwiązania spełniające warunki brzegowe dla $C_1 = 1$ oraz $A^2 - 4s^2 > 0$

Niech funkcja β będzie dana wzorem

$$\beta(u) = \frac{1}{4}\left(De^{2u} - 2A + \frac{A^2 - 4s^2}{De^{2u}}\right).$$

Będziemy starać się dobrać D oraz $A < 0$ tak, by poniższe stwierdzenie było prawdziwe.

Stwierdzenie 4.4. *Niech $C_1 = 1$. Niech P będzie przestrzenią totalną S^1-wiązki głównej nad powierzchnią Riemann'a (N, h) o stałej krzywiźnie sekcyjnej $\mu \in \{-2, 0, 2\}$ klasyfikowaną przez 2-formę $k\omega_h$, gdzie ω_h jest formą Kähler'a metryki h podniesioną do P, a $k = 2s$ liczbą całkowitą. Dodatkowo załóżmy, że (P, g_k) jest $\mathcal{A}$-rozmaitością, przy czym metryka g_k jest zdefiniowana wzorem $g_k = f^2\theta^2 + c^2 p^* h$. Dla $\mu \in \{0, 2\}$ oraz k takiego, że $k \neq 0$ albo dla $\mu = -2$ i $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 0, 2\}$ istnieją takie funkcje Γ i β, że metryka g na produkcie $P \times (\tilde{a}, \tilde{b})$ zdefiniowana wzorem*

$$g = \frac{1}{\Gamma(u)} du^2 + \Gamma(u)\theta^2 + \beta(u) p^* h,$$

przedłuża się na cały przedział $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ w taki sposób, że $P \times [\tilde{a}, \tilde{b}]$ jest izomorficzne z wiązką nad N o włóknie S^2. Co więcej, rozmaitość $(P \times [\tilde{a}, \tilde{b}], g)$ jest $\mathcal{AC}^\perp$-rozmaitością z trzema wartościami własnymi tensora Ricci'ego.

Przypomnijmy, że β ma ekstremum w punkcie $u_0 = \frac{1}{4}\log\left(\frac{A^2-4s^2}{D^2}\right)$ i jest to maksimum, jeżeli $D < 0$ lub minimum, gdy $D > 0$. Co więcej, gdy $D > 0$ to β jest zawsze dodatnia natomiast, gdy $D < 0$, to β jest dodatnia tylko wtedy, gdy $De^{2\tilde{u}} \in (A - 2|s|, A + 2|s|)$.

Metoda dowodu jest podobna jak w poprzednim podrozdziale, innymi słowy będziemy wykorzystywać fakt, że również w tym przypadku β jest symetryczna względem pewnej pionowej prostej, co indukuje pewne symetrie funkcji Γ.

4.7.1. Rozwiązania spełniające warunki brzegowe

Na początek wyliczymy stałą F tak, by funkcja Γ dana przez (4.40) spełniała warunek $\Gamma(\tilde{a}) = 0$ dla pewnego $\tilde{a}$. Podobnie jak poprzednio przypuśćmy, że $\beta(\tilde{a}) > 0$, gdzie β jest dana równaniem (4.28).

Warunek $\Gamma(\tilde{a}) = 0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $C(\tilde{a}) = 0$, przy czym $C(u)$ jest dane przez (4.39). Stąd, dla

$$
\begin{aligned}
F = -\frac{1}{8}C_2\dot{\beta}(\tilde{a}) - \frac{3}{4}\left(-C_2A + 2E\right)\tilde{a} \\
-\frac{1}{2De^{2\tilde{a}}\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A\left(A^2 - 3s^2\right)C_2 - 3\left(A^2 - 2s^2\right)E + A\mu\right) \\
+\frac{1}{2\dot{\beta}(\tilde{a})}\left((A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu\right)
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

mamy $\Gamma(\tilde{a}) = 0$.

Zauważmy, że ponownie β jest symetryczna względem pionowej prostej przechodzącej przez punkt jej maksimum. Wybieramy więc $\tilde{b}$ w taki sposób, że jeżeli zapiszemy $\tilde{a} = u_0 - \epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$, to $\tilde{b} = u_0 + \epsilon$. W tej sytuacji od razu dostajemy $\beta(\tilde{a}) = \beta(\tilde{b}) \neq 0$ oraz $\dot{\beta}(\tilde{a}) = -\dot{\beta}(\tilde{b})$, skąd mamy $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = -\dot{\Gamma}(\tilde{b})$ zakładając, że $\Gamma(\tilde{b}) = 0$. Wyprowadzimy teraz warunek na to, by $\Gamma(\tilde{b}) = 0$.

Jako, że $\Gamma(\tilde{b}) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(\tilde{b}) = 0$ to

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8}C_2\dot{\beta}(\tilde{b}) + \frac{3}{4}\left(-C_2A + 2E\right)\tilde{b} \\
+\frac{1}{2De^{2\tilde{b}}\dot{\beta}(\tilde{b})}\left(A\left(A^2 - 3s^2\right)C_2 - 3\left(A^2 - 2s^2\right)E + A\mu\right) \\
-\frac{1}{2\dot{\beta}(\tilde{b})}\left((A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu\right) = \\
\frac{1}{8}C_2\dot{\beta}(\tilde{a}) + \frac{3}{4}\left(-C_2A + 2E\right)\tilde{a} \\
+\frac{1}{2De^{2\tilde{a}}\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A\left(A^2 - 3s^2\right)C_2 - 3\left(A^2 - 2s^2\right)E + A\mu\right) \\
-\frac{1}{2\dot{\beta}(\tilde{a})}\left((A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu\right),
\end{aligned}
$$

co redukuje się do

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}(-C_2A + 2E)(\tilde{b} - \tilde{a}) = \frac{1}{4}C_2\dot{\beta}(\tilde{a}) + \\
+\frac{e^{2\tilde{a}} + e^{2\tilde{b}}}{2De^{2(\tilde{a}+\tilde{b})}\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A(A^2 - 3s^2)C_2 - 3(A^2 - 2s^2)E + A\mu\right) \\
-\frac{1}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left((A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu\right)
\end{aligned}
$$

dzięki symetriom funkcji β.

By sprawdzić, że zachodzi warunek $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2$ musimy rozwiązać równanie (4.48). Jeżeli dodamy do niego warunek, by Γ znikała w $\tilde{b}$ otrzymamy układ dwu równań liniowych na C_2 oraz E:

$$\begin{cases} h_1 C_2 + h_2 E & = \frac{\mu}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(A\frac{e^{2\tilde{a}}+e^{2\tilde{b}}}{2De^{2(\tilde{a}+\tilde{b})}} - 1\right), \\ \beta^2(\tilde{a})C_2 + 3\beta(\tilde{a})E & = \dot{\beta}(\tilde{a}) - \mu, \end{cases} \tag{4.51}$$

przy czym h_1 i h_2 są dane przez

$$h_1 = \frac{1}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left((A^2 - s^2) - \frac{e^{2\tilde{a}} + e^{2\tilde{b}}}{2De^{2(\tilde{a}+\tilde{b})}}A(A^2 - 3s^2)\right) - \frac{3}{4}A(\tilde{b} - \tilde{a}) - \frac{1}{4}\dot{\beta}(\tilde{a}),$$

$$h_2 = \frac{3}{\dot{\beta}(\tilde{a})}\left(\frac{e^{2\tilde{a}} + e^{2\tilde{b}}}{2De^{2(\tilde{a}+\tilde{b})}}(A^2 - 2s^2) - A\right) + \frac{3}{2}(\tilde{b} - \tilde{a}).$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det{}_{C_2,E} = (3h_1 - h_2\beta(\tilde{a}))\,\beta(\tilde{a}) \neq 0, \tag{4.52}$$

dla

$$\begin{aligned} 3h_1 - h_2\beta(\tilde{a}) = \frac{3e^{-2(\tilde{a}+\tilde{b})}}{16D^2\dot{\beta}(\tilde{a})}\Big(&(-1 + \tilde{a} - \tilde{b})D^4 e^{8\tilde{a}+2\tilde{b}} \\ &-4A^3De^{2\tilde{a}}\left(e^{2\tilde{a}} + (\tilde{a} - \tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right) - A^4\left(2e^{2\tilde{a}} + (3 + \tilde{a} - \tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right) + \\ &+4D^2e^{4\tilde{a}}\left(e^{2\tilde{a}} - 5e^{2\tilde{b}}\right)s^2 - 16\left(e^{2\tilde{a}} + (2 + \tilde{a} - \tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)s^4 + \\ &+A^2\left(D^2\left(-2e^{6\tilde{a}} + 8e^{4\tilde{a}+2\tilde{b}}\right) + 4\left(3e^{2\tilde{a}} + (5 + 2\tilde{a} - 2\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)s^2\right) + \\ &+4ADe^{2\tilde{a}}\left((1 + \tilde{a} - \tilde{b})D^2e^{4\tilde{a}+2\tilde{b}}\right) + 4\left(e^{2\tilde{a}} + (\tilde{a} - \tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)s^2\Big) \end{aligned}$$

Ponieważ współrzędne punktu u_0, w którym β osiąga maksimum wyraża się przez $u_0 = \frac{1}{4}\log(\frac{A^2-4s^2}{D^2})$ oraz mamy $\tilde{b} = 2u_0 - \tilde{a}$, to powyższy wzór możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} 3h_1 - h_2\beta(\tilde{a}) = \frac{3e^{-2\tilde{a}}}{16D(A^2 - 4s^2)}\Big(&2\big((3 + 2\tilde{a})A^4 + 8\tilde{a}A^3De^{2\tilde{a}} \\ &-32\tilde{a}ADe^{2\tilde{a}}s^2 + 8s^2\left(-(-1 + \tilde{a})D^2e^{4\tilde{a}} + 4(1 + \tilde{a})s^2\right) + \\ &+A^2\left((-3 + 2\tilde{a})D^2e^{4\tilde{a}} - 4(5 + 4\tilde{a})s^2\right)\big) \\ &-(A^2 - 4s^2)\left(A^2 + 4ADe^{2\tilde{a}} + D^2e^{4\tilde{a}} - 4s^2\right)\log\left(\frac{A^2 - 4s^2}{D^2}\right)\Big). \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że dla prawie wszystkich A powyższa wielkość będzie różna od zera. Ponieważ w dalszej części będziemy dobierać A tak, by było blisko $-2|s|$, więc to stwierdzenie nam wystarczy.

Podsumowując powyższe obliczenia mamy

Lemat 4.15. *Niech $\tilde{a} = u_0 - \epsilon$, dla pewnego $\epsilon > 0$, będzie takim punktem, że $\beta(\tilde{a}) > 0$ oraz $\Gamma(\tilde{a}) = 0$. Przyjmijmy, że $\tilde{b} = u_0 + \epsilon$. Dla prawie wszystkich A można dobrać stałe C_2 i E, których wartość zależy od A i $\tilde{a}$, tak aby $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2$ oraz $\Gamma(\tilde{b}) = 0$. Z symetrii funkcji β otrzymujemy wtedy automatycznie, że $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$.*

4.7.2. Dodatniość

W tym podrozdziale pokażemy, że pewne otrzymane w poprzedniej części tego rozdziału rozwiązania równania (4.32), spełniające warunki brzegowe (4.43), są dodatnie. Niech $\tilde{a}$ będzie dowolnym punktem takim, że $\beta(\tilde{a}) > 0$. Ponownie zaczynamy od rozwiązania (4.32), które znika w $\tilde{a}$ i ma w tym punkcie dodatnią pochodną, musi być więc dodatnie w pewnym prawostronnym otoczeniu punktu $\tilde{a}$. Jeżeli istniałby taki punkt u_1, że $\Gamma(u_1) = 0$ to mielibyśmy $\dot{\Gamma}(u_1) \leq 0$. W celu pokazania, że Γ jest dodatnia na $(\tilde{a}, u_0)$ wystarczy więc pokazać, że prawa strona

$$\dot{\Gamma}(u) = \frac{1}{\dot{\beta}(u)} \left(2C_2\beta^2(u) + 6E\beta(u) + 2\mu\right) \tag{4.53}$$

jest dodatnia w każdym punkcie $(\tilde{a}, u_0)$.

W zależności od tego, czy u_0 jest maksimum czy minimum funkcji β, to $\dot{\beta}(\tilde{a}) > 0$ lub $\dot{\beta}(\tilde{a}) < 0$. Co więcej, mamy wtedy odpowiednio $D > 0$ lub $D < 0$. Prawa strona równania (4.53) jest dodatnia na całym $(\tilde{a}, u_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma(u) = 2C_2\beta^2(u) + 6E\beta(u) + 2\mu$$

jest dodatnia, odpowiednio ujemna na tym przedziale. Możemy myśleć o γ jako o funkcji kwadratowej zmiennej $\beta(u)$ dzięki temu, że β jest monotoniczna na $(\tilde{a}, u_0)$.

W punkcie u_0 mamy

$$-\ddot{\beta}(u_0)\Gamma(u_0) = 2C_2\beta^2(u_0) + 6E\beta(u_0) + 2\mu.$$

W sytuacji, gdy u_0 jest maksimum, dostajemy stąd, że $\Gamma(u_0) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma(u_0) > 0$. Natomiast, gdy u_0 jest minimum, to $\Gamma(u_0) > 0$ dokładnie wtedy, gdy $\gamma(u_0) < 0$. W dalszej części spotkamy się tylko z wartościami $D < 0$, więc ograniczamy nasze rozważania do sytuacji, w której u_0 jest maksimum funkcji β, czyli $D < 0$ i będziemy pokazywać dodatniość γ.

Ponieważ γ jest funkcją kwadratową zmiennej $\beta(u)$, to by pokazać, że γ jest dodatnia na $(\beta(\tilde{a}), \beta(u_0)]$ wystarczy wykazać, że $C_2 < 0$ i $\gamma(\beta(u_0)) > 0$. Ponieważ wiemy, że $\gamma(\beta(\tilde{a})) > 0$, to powyższe fakty są wystarczające, by uzasadnić dodatniość γ.

W dalszej części pokażemy, że dla małych różnic $A^2 - 4s^2$ możemy kontrolować wartości $\Gamma(u_0)$ i C_2. Ponieważ chcemy, by $A < 0$, to warunek

$A^2 - 4s^2 > 0$ jest równoważny $A < -2|s|$. Następnie dla A dostatecznie blisko $-2|s|$ dobierzemy stałą D w taki sposób, by $\Gamma(u_0) > 0$ oraz $C_2 < 0$.

Ponieważ C_2 musi spełniać (4.51), to możemy napisać

$$C_2 = \frac{3e^{-2\tilde{a}}}{8D(A^2 - 4s^2)} \frac{C(A)}{\det_{C_2,E}}$$

gdzie

$$\begin{gathered} C(A) = -2\left(2(1+\tilde{a})A^4 + A^3\left(-4De^{2\tilde{a}} + \mu\right) + \right. \\ 4s^2\left((-1+2\tilde{a})D^2e^{4\tilde{a}} - 4\tilde{a}De^{2\tilde{a}}\mu + 4(1+2\tilde{a})s^2\right) \\ -2A^2\left((-1+\tilde{a})D^2e^{4\tilde{a}} - 2\tilde{a}De^{2\tilde{a}}\mu + 2(3+4\tilde{a})s^2\right) \\ \left. -A\left(D^2e^{4\tilde{a}}\mu - 16De^{2\tilde{a}}s^2 + 4\mu s^2\right)\right) + \\ +(A^2 - 4s^2)\left(A^2 - D^2e^{4\tilde{a}} + 2De^{2\tilde{a}}\mu - 4s^2\right)\log\left(\frac{A^2 - 4s^2}{D^2}\right). \end{gathered}$$

Korzystając z faktu, że granicą wyrażenia

$$(A^2 - 4s^2)\log\left(\frac{A^2 - 4s^2}{D^2}\right)$$

przy $A \to -2|s|^-$ oraz przy $A \to 2|s|^+$ jest zero, łatwo obliczyć, że dla $s > 0$ mamy

$$\lim_{A \to -2s^-} C_2 = \frac{4\mu + 8s}{(De^{2\tilde{a}} + 4s)s},$$

natomiast dla $s < 0$ otrzymujemy

$$\lim_{A \to 2s^-} C_2 = -\frac{4\mu - 8s}{(De^{2\tilde{a}} - 4s)s}.$$

Korzystając ze wzoru (4.40) na funkcję Γ mamy w u_0

$$\Gamma(u_0) = \frac{A(A^2 - 3s^2)C_2 - 3(A^2 - 2s^2)E + A\mu}{2De^{2u_0}\beta(u_0)} - \frac{(A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu}{2\beta(u_0)}. \tag{4.54}$$

Zauważmy, że E jako rozwiązanie układu (4.51) daje się wyrazić wzorem

$$E = \frac{e^{-4\tilde{a}}}{16D^2(A^2 - 4s^2)} \frac{E(A)}{\det_{C_2,E}}$$

przy czym

$$\begin{gathered} E(A) = -(A^2 - 4s^2)^2(A^2 - A\mu - 4s^2) + 6D^2e^{4\tilde{a}}(A^2 - 4s^2)(3A^2 - 4\tilde{a}A\mu - 4s^2) \\ -D^4e^{8\tilde{a}}\left(A(A+\mu) - 4s^2\right) + \\ +4D^3e^{6\tilde{a}}\left(A^2\left((-2+3\tilde{a})A + 2\mu\right) - 2\left((-3+6\tilde{a})A + 2\mu\right)s^2\right) \\ -4De^{2\tilde{a}}(A^2 - 4s^2)\left(A^2\left((2+3\tilde{a})A + 2\mu\right) - 2\left((3+6\tilde{a})A + 2\mu\right)s^2\right) \\ -3ADe^{2\tilde{a}}(A^2 - 4s^2)\left(-A^2 + D^2e^{4\tilde{a}} - 2De^{2\tilde{a}}\mu + 4s^2\right)\log\left(\frac{A^2 - 4s^2}{D^2}\right). \end{gathered}$$

Łatwo teraz zauważyć, że dla $s > 0$

$$\lim_{A\to -2s^-} E = -\frac{De^{2\tilde{a}}\mu + 8s\mu + 8s^2}{3s(De^{2\tilde{a}} + 4s)}$$

oraz dla $s < 0$

$$\lim_{A\to 2s^-} E = \frac{De^{2\tilde{a}}\mu - 8s\mu + 8s^2}{3s(De^{2\tilde{a}} - 4s)}.$$

Można teraz obliczyć, że drugi składnik we wzorze (4.54) ma dla $s > 0$ granicę równą

$$\lim_{A\to -2s^-} \frac{(A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu}{2\beta(u_0)} = \frac{De^{2\tilde{a}}\mu - 8s^2}{2s(De^{2\tilde{a}} + 4s)},$$

a dla $s < 0$

$$\lim_{A\to 2s^-} \frac{(A^2 - s^2)C_2 - 3AE + \mu}{2\beta(u_0)} = \frac{-De^{2\tilde{a}}\mu + 8s^2}{2s(De^{2\tilde{a}} - 4s)}.$$

Zajmiemy się teraz pierwszym składnikiem. Po podstawieniu wzorów na C_2 oraz E otrzymujemy

$$A(A^2 - 3s^2)C_2 - 3(A^2 - 2s^2)E + A\mu = \frac{3G(A)}{64D^2e^{4\tilde{a}}\det_{C_2,E}\beta(\tilde{a})}, \tag{4.55}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
G(A) = 2\Big(2A^6 + A^5\left(\mu + 2\tilde{a}\left(4De^{2\tilde{a}} + \mu\right)\right) +\\
+A^4\left(-4D^2e^{4\tilde{a}} + 2(1+2\tilde{a})De^{2\tilde{a}}\mu - 20s^2\right) +\\
+A\mu\left(D^2e^{4\tilde{a}} - 4s^2\right)\left((-1+2\tilde{a})D^2e^{4\tilde{a}} - 4(1+2\tilde{a})s^2\right)\\
-4s^2\left(D^4e^{8\tilde{a}} - 4D^3e^{6\tilde{a}}\mu + 24D^2e^{4\tilde{a}}s^2 - 16De^{2\tilde{a}}\mu s^2 + 16s^4\right) +\\
+2A^2\left(D^4e^{8\tilde{a}} + (-1+2\tilde{a})D^3e^{6\tilde{a}}\mu + 12D^2e^{4\tilde{a}}s^2 - 4(3+2\tilde{a})De^{2\tilde{a}}\mu s^2 + 32s^4\right)\\
-4A^3\left(2\mu s^2 + \tilde{a}\left(2D^3e^{6\tilde{a}} - D^2e^{4\tilde{a}}\mu + 8De^{2\tilde{a}}s^2 + 4\mu s^2\right)\right)\Big)\\
-A\Big(2A^3De^{2\tilde{a}}\mu + A^4\left(4De^{2\tilde{a}} + \mu\right) +\\
+2ADe^{2\tilde{a}}\mu\left(D^2e^{4\tilde{a}} - 4s^2\right) + \mu\left(D^2e^{4\tilde{a}} - 4s^2\right)^2\\
-2A^2\left(2D^3e^{6\tilde{a}} - D^2e^{4\tilde{a}}\mu + 8De^{2\tilde{a}}s^2 + 4\mu s^2\right)\Big)\log\left(\frac{A^2 - 4s^2}{D^2}\right)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że w tej sytuacji granicą wyrażenia (4.55) przy $A \to -2|s|^-$ jest zero. Stąd dla $s > 0$ mamy

$$\lim_{A\to -2s^-} \Gamma(u_0) = \frac{De^{2\tilde{a}}\mu - 8s^2}{2s(De^{2\tilde{a}} + 4s)}$$

oraz dla $s < 0$

$$\lim_{A\to 2s^-} \Gamma(u_0) = \frac{-De^{2\tilde{a}}\mu + 8s^2}{2s(De^{2\tilde{a}} - 4s)}.$$

Ponieważ zakładamy, że krzywizna skalarna μ rozmaitości bazowej jest stała, to można przyjąć, że $\mu \in \{-2, 0, 2\}$. Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy $\mu = 0$. Przypuśćmy na początek, że $s > 0$, czyli mamy

$$\lim_{A \to -2s^-} \Gamma(u_0) = \frac{-4s}{De^{2\tilde{a}} + 4s} \text{ oraz } \lim_{A \to -2s^-} C_2 = \frac{8}{De^{2\tilde{a}} + 4s}.$$

Widać stąd, że $\lim_{A \to -2s^-} \Gamma(u_0) > 0$ zachodzi tylko wtedy, gdy $De^{2\tilde{a}} + 4s < 0$, czyli $D < -4se^{-2\tilde{a}}$. W szczególności $D < 0$, $\dot{\beta}(\tilde{a}) > 0$ oraz $\ddot{\beta}(u_0) < 0$. Zauważmy, że mamy od razu $\lim_{A \to -2s^-} C_2 < 0$. W takim razie, na mocy rozważań z początku tego podrozdziału widać, że γ jest dodatnia na całym przedziale $(\beta(\tilde{a}), \beta(u_0)]$.

Ponieważ $D < 0$, to funkcja β nie jest wszędzie dodatnia. Pozostaje sprawdzić, czy można wybrać D takie, że $D < -4se^{-2\tilde{a}}$ oraz $De^{2\tilde{a}} \in (A - 2s, A + 2s)$. Niech w takim razie $D = (A - 2s)e^{-2\tilde{a}} + \epsilon$ dla pewnej liczby $\epsilon > 0$ oraz $A = -2s - \delta$ dla pewnego $\delta > 0$ takiego, by $\Gamma(u_0) > 0$ oraz $C_2 < 0$. W takim razie nasz warunek ma postać $D \in (-4se^{-2\tilde{a}} - \delta e^{-2\tilde{a}}, -\delta e^{-2\tilde{a}})$. Biorąc $\epsilon = \frac{\delta}{2} e^{-2\tilde{a}}$ dostajemy D spełniające żądany warunek, ewentualnie zmniejszając δ tak, by $D < -\delta e^{-2\tilde{a}}$ co zawsze możemy zrobić.

Analogicznie postępujemy w przypadku, gdy $s < 0$. W tej sytuacji

$$\lim_{A \to 2s^-} \Gamma(u_0) = \frac{4s}{De^{2\tilde{a}} - 4s} \text{ oraz } \lim_{A \to 2s^-} C_2 = \frac{8}{De^{2\tilde{a}} - 4s}.$$

Nierówność $\lim_{A \to 2|s|^-} \Gamma(u_0) > 0$ jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy $De^{2\tilde{a}} - 4s < 0$, czyli $D < 4se^{-2\tilde{a}}$. W tej sytuacji $D < 0$, $\dot{\beta}(\tilde{a}) > 0$ oraz $\ddot{\beta}(u_0) < 0$. Od razu dostajemy, że $\lim_{A \to 2s^-} C_2 < 0$ i podobnie jak poprzednio wystarcza to, by zauważyć, że γ jest ujemna na całym przedziale $[\beta(u_0), \beta(\tilde{a}))$.

Ponieważ ponownie $D < 0$, to β nie jest zawsze dodatnia. Sprawdzenie, że D spełnia warunek $De^{2\tilde{a}} \in (A + 2s, A - 2s)$ przebiega analogicznie jak poprzednio.

Podsumowując udowodniliśmy poniższy lemat.

Lemat 4.16. *Dla dowolnego $\tilde{a}$ takiego, że $\beta(\tilde{a}) > 0$, $s \neq 0$ oraz $\mu = 0$ można dobrać stałą A blisko $-2|s|$ oraz stałą D tak, by γ było dodatnie na $(\beta(\tilde{a}), \beta(u_0)]$, czyli istnieje taka funkcja Γ, będąca rozwiązaniem równania różniczkowego* (4.34) *i spełniająca warunki brzegowe* (4.43)*, która jest dodatnia na $(\tilde{a}, \tilde{b})$.*

Podobnie wygląda sytuacja, gdy $\mu = 2$. Załóżmy na początku, że $s > 0$, skąd dostajemy

$$\lim_{A \to -2s^-} \Gamma(u_0) = \frac{De^{2\tilde{a}} - 4s^2}{s\left(De^{2\tilde{a}} + 4s\right)} \text{ oraz } \lim_{A \to -2s^-} C_2 = \frac{8 + 8s}{s\left(De^{2\tilde{a}} + 4s\right)}.$$

Granica $\Gamma(u_0)$ jest dodatnia, jeżeli licznik i mianownik mają ten sam znak. Ponieważ chcemy też pokazać, że granica C_2 jest ujemna, to rozważmy sytuację gdy $De^{2\tilde{a}} - 4s^2 < 0$ oraz $s\left(De^{2\tilde{a}} + 4s\right) < 0$. Obie nierówności zachodzą tylko wtedy, gdy $De^{2\tilde{a}} < -4s$ co implikuje, że $D < 0$. Zauważmy teraz, że na to by $\lim A \to -2s^{-} C_2 < 0$ wystarcza, by $s > -1$ co jest prawdą, ponieważ założyliśmy, że $s > 0$. W taki razie dla $De^{2\tilde{a}} < -4s$ można znaleźć A blisko $-2s$ oraz $A < -2s$ takie, że $\Gamma(u_0) > 0$ oraz $C_2 < 0$.

Łatwo sprawdzić, że $De^{2\tilde{a}} \in (A-2s, A+2s)$. Przypuśćmy, że $De^{2\tilde{a}} = -4s-\epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$ oraz niech $A = -2s - \delta$ dla $\delta > 0$. W takim razie, chcemy aby $De^{2\tilde{a}} \in (-4s - \delta, -\delta)$. Widać, że dla $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ ten warunek jest spełniony, ewentualnie należy zmniejszyć δ tak, aby $De^{2\tilde{a}} < -\delta$.

Dla $s < 0$ sprawdzamy zachowanie $\Gamma(u_0)$ i C_2 dla $A \to 2s^{-}$. Mamy wtedy

$$\lim_{A \to 2s^{-}} \Gamma(u_0) = \frac{-De^{2\tilde{a}} + 4s^2}{s\,(De^{2\tilde{a}} + 4s)} \quad \text{oraz} \quad \lim_{A \to 2s^{-}} C_2 = -\frac{8 - 8s}{s\,(De^{2\tilde{a}} + 4s)}.$$

Załóżmy, że D jest takie, że $De^{2\tilde{a}} - 4s^2 < 0$ oraz $s(De^{2\tilde{a}} - 4s) < 0$, co implikuje, że $\lim_{A \to 2s^{-}} \Gamma(u_0) > 0$. Stąd D musi spełniać warunek $De^{2\tilde{a}} < 4s$ i być ujemne. By $\lim_{A \to 2s^{-}} C_2 < 0$ musi zachodzić, że $-(8 - 8s) < 0$, co jest równoważne następującej nierówności: $s < 1$. Ponieważ założyliśmy, że $s < 0$ to ten warunek jest zawsze spełniony w tym przypadku.

Fakt, że można dobrać D tak, by $De^{2\tilde{a}} \in (A + 2s, A - 2s)$ sprawdza się analogicznie jak wyżej.

Mamy więc

Lemat 4.17. *Dla dowolnego $\tilde{a}$ takiego, że $\beta(\tilde{a}) > 0$, $s \neq 0$ oraz $\mu = 2$ można dobrać stałą A blisko $-2|s|$ oraz stałą D tak, by γ było dodatnie na $(\beta(\tilde{a}), \beta(u_0)]$. Innymi słowy, istnieje taka funkcja Γ będąca rozwiązaniem równania różniczkowego* (4.34)*, spełniająca warunki brzegowe* (4.43)*, która jest dodatnia na $(\tilde{a}, \tilde{b})$.*

Na koniec sprawdzimy, że można dobrać A i D dla $\mu = -2$. Przyjmijmy, że $s > 0$. Mamy wtedy

$$\lim_{A \to -2s^{-}} \Gamma(u_0) = \frac{-De^{2\tilde{a}} - 4s^2}{s\,(De^{2\tilde{a}} + 4s)} \quad \text{oraz} \quad \lim_{A \to -2s^{-}} C_2 = \frac{-8 + 8s}{s\,(De^{2\tilde{a}} + 4s)}.$$

W tej sytuacji $\lim_{A \to -2s^{-}} \Gamma(u_0) > 0$ dokładnie wtedy, gdy $-De^{2\tilde{a}} - 4s^2 < 0$ oraz $s\left(De^{2\tilde{a}} - 4s\right) < 0$. Gdyby obie wielkości były dodatnie, to $De^{2\tilde{a}} < -4s^2$ oraz $De^{2\tilde{a}} > -4s$, co daje sprzeczność. W takim razie, by $\Gamma(u_0)$ była dodatnia, wystarczy wybrać A blisko $-2s$ oraz D tak, by $De^{2\tilde{a}} \in (-4s^2, -4s)$ dla $s > 1$ co implikuje, że $D < 0$. Z kolei, by $\lim_{A \to -2s^{-}} C_2 < 0$ wystarcza, że spełniona jest nierówność $-8+8s > 0$, czyli $s > 1$. Widać, że dla $s = 1$ musimy przeprowadzić oddzielne rozumowanie.

Pozostaje sprawdzić, że $De^{2\tilde{a}} \in (A-2s, A+2s)$. Dowód przebiega zupełnie tak samo jak w poprzednich przypadkach i nie będziemy go powtarzać.

Niech teraz $s < 0$. Mamy

$$\lim_{A \to 2s^{-}} \Gamma(u_0) = \frac{-De^{2\tilde{a}} + 4s^2}{s\,(De^{2\tilde{a}} + 4s)} \quad \text{oraz} \quad \lim_{A \to 2s^{-}} C_2 = \frac{8 + 8s}{s\,(De^{2\tilde{a}} - 4s)}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\lim_{A \to 2s^-} \Gamma(u_0) > 0$ tylko wtedy, gdy $De^{2\tilde{a}} \in (-4s^2, 4s)$ dla $s < -1$, co ponownie implikuje, że $D < 0$. Kolejno, mamy $\lim_{A \to 2s^-} C_2 < 0$ tylko wtedy, gdy $8 + 8s < 0$, czyli $s < -1$ co musi zachodzić, aby przedział $(-4s^2, 4s)$ był niepusty.

Ponownie pomijamy dowód na to, że można dobrać D z powyższego przedziału tak, by $De^{2\tilde{a}} \in (A + 2s, A - 2s)$, jako identyczny z poprzednimi.

Ostatecznie mamy

Lemat 4.18. *Dla dowolnego $\tilde{a}$ takiego, że $\beta(\tilde{a}) > 0$, $s \neq -1, 0, 1$ oraz $\mu = -2$ można dobrać stałą A blisko $-2|s|$ oraz stałą D tak, by γ było dodatnie na $(\beta(\tilde{a}), \beta(u_0)]$. Innymi słowy, istnieje taka funkcja Γ będąca rozwiązaniem równania różniczkowego* (4.34) *i spełniająca warunki brzegowe* (4.43)*, która jest dodatnia na $(\tilde{a}, \tilde{b})$.*

4.8. Dodatnie rozwiązania spełniające warunki brzegowe dla $C_1 = 1$ oraz $A^2 - 4s^2 = 0$

W tej części pracy będziemy chcieli podać przykłady rozwiązań równania (4.34), gdy funkcja β jest dana wzorem

$$\beta(u) = De^{2u} - \frac{A}{2},$$

dla odpowiednio dobranych stałych A i D.

Przypadek ten różni się od pozostałych dwóch tym, że funkcja β nie posiada ekstremum, co implikuje brak pewnych symetrii na włóknach przestrzeni totalnej wiązki, którą konstruujemy.

4.8.1. Rozwiązania spełniające warunki brzegowe

Na początek, ustalmy punkt $\tilde{a}$. Pamiętajmy przy tym, że w dalszej części musimy tak dobrać nasze rozwiązanie, by $\beta(\tilde{a}) > 0$, czyli

$$D > \frac{A}{2} e^{2\tilde{a}}.$$

W szczególności nie może zachodzić $D < 0$ i $A > 0$, gdyż jak łatwo zauważyć, β jest wtedy zawsze ujemna. Podobnie jak poprzednio, wyliczamy najpierw wartość stałej F tak, by $\Gamma(\tilde{a}) = 0$ dla danego punktu $\tilde{a}$. Z (4.41) dostajemy

$$F = -\frac{1}{64D^2} \left(16C_2 D^3 e^{2\tilde{a}} - 4De^{-2\tilde{a}} \left(3A^2 C_2 - 12AE + 4\mu \right) + \right.$$
$$\left. + Ae^{-4\tilde{a}} \left(A^2 C_2 - 6AE + 4\mu \right) \right) + \frac{3}{4} \left(AC_2 - 2E \right) \tilde{a}.$$

Kolejno, potrzebujemy warunku na to, by $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2$. Elementarny, ale żmudny rachunek daje nam

$$\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = \frac{e^{-2\tilde{a}}}{4D}\left(A^2C_2 - 2A(2C_2De^{2\tilde{a}} + 3E) + 4(C_2D^2e^{4\tilde{a}} + 3De^{2\tilde{a}}E + \mu)\right).$$

Weźmy dowolny punkt $\tilde{b}$ tak, by $\tilde{b} > \tilde{a}$, przy czym ponownie musimy uważać by w dalszym ciągu został zachowany warunek $\beta(\tilde{b}) > 0$. W zależności od wyboru znaku D wystarczy, by spełniony był tylko jeden z warunków $\beta(\tilde{a}) > 0$ lub $\beta(\tilde{b}) > 0$.

Warunek $\Gamma(\tilde{b}) = 0$ jest równoważny warunkowi $C(\tilde{b}) = 0$, gdzie C jest dane równaniem (4.41). Można to zapisać jako

$$\begin{aligned} &16C_2D^3\left(e^{2\tilde{a}} - e^{2\tilde{b}}\right) - 4D\left(e^{-2\tilde{a}} - e^{-2\tilde{b}}\right)\left(3A^2C_2 - 12AE + 4\mu\right) + \\ &+A\left(e^{-4\tilde{a}} - e^{-4\tilde{b}}\right)\left(A^2C_2 - 6AE + 4\mu\right) - 48D^2\left(AC_2 - 2E\right)\left(\tilde{a} - \tilde{b}\right) = 0. \end{aligned}$$

Widać, że powyższe warunki na $\dot{\Gamma}(\tilde{a}) = 2$ oraz $\Gamma(\tilde{b}) = 0$ tworzą układ równań liniowych ze względu na C_2 i E. Układ ten można zapisać jako

$$\begin{cases} \left(A - 2De^{2\tilde{a}}\right) & C_2 - 6E = \frac{8e^{2\tilde{a}}D - 4\mu}{A - 2De^{2\tilde{a}}}, \\ l_1 & C_2 + l_2E = 4\left(4D\left(e^{-2\tilde{a}} - e^{-2\tilde{b}}\right) - A\left(e^{-4\tilde{a}} - e^{-4\tilde{b}}\right)\right)\mu, \end{cases} \tag{4.56}$$

gdzie

$$\begin{aligned} l_1 = 16D^3&\left(e^{2\tilde{a}} - e^{2\tilde{b}}\right) - 12A^2D\left(e^{-2\tilde{a}} - e^{-2\tilde{b}}\right) + \\ &+A^3\left(e^{-4\tilde{a}} - e^{-4\tilde{b}}\right) - 48AD^2\left(\tilde{a} - \tilde{b}\right) \end{aligned}$$

oraz

$$l_2 = 48AD\left(e^{-2\tilde{a}} - e^{-2\tilde{b}}\right) - 6A^2\left(e^{-4\tilde{a}} - e^{-4\tilde{b}}\right) + 96D^2(\tilde{a} - \tilde{b}).$$

Zauważmy, że wyznacznik główny tego układu $\det_{C_2,E}$ jest dany przez

$$\begin{aligned} \det_{C_2,E} = -12De^{-2(\tilde{a}+2\tilde{b})}&\left(A^2\left(e^{2\tilde{a}} - e^{2\tilde{b}}\right)^2\right. \\ +8D^2e^{2\tilde{a}+4\tilde{b}}&\left((-1 + 2\tilde{a} - 2\tilde{b})e^{2\tilde{a}} + e^{2\tilde{b}}\right) + \\ +8ADe^{2(\tilde{a}+\tilde{b})}&\left.\left(-e^{2\tilde{a}} + (1 + 2\tilde{a} - 2\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.57}$$

W dalszej części przyjmijmy, że $\tilde{a} = 0$. Nie zmniejsza to ogólności naszych rozważań, ponieważ to założenie odpowiada kolejnej „liniowej” zmianie zmiennych $\tilde{u} = u + \tilde{a}$. W tej sytuacji (4.57) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \det_{C_2,E} = -12De^{-4\tilde{b}}&\left(A^2\left(1 - e^{2\tilde{b}}\right)^2 + \right. \\ +8D^2e^{4\tilde{b}}\left((-1 - 2\tilde{b}) + e^{2\tilde{b}}\right) &+ 8ADe^{2\tilde{b}}\left.\left(-1 + (1 - 2\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Zauważmy, że wielkość znajdująca się w najbardziej zewnętrznym nawiasie jest wielomianem kwadratowym $W(D)$ zmiennej D. Pokażemy, że zawsze zachodzi $\det_{C_2,E} \neq 0$. Mamy

$$W(D) = A^2\left(1 - e^{2\tilde{b}}\right)^2 + 8D^2e^{4\tilde{b}}\left((-1-2\tilde{b}) + e^{2\tilde{b}}\right) + \\ +8ADe^{2\tilde{b}}\left(-1 + (1-2\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right).$$

Traktując $W(D)$ jako trójmian kwadratowy zmiennej D mamy, że dla pewnego D zachodzi $W(D) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik tego równania kwadratowego jest większy lub równy od zera. Niech Δ oznacza wyróżnik $W(D)$. Mamy

$$\Delta = 32A^2e^{4\tilde{b}}\left(2\left(-1 + (1-2\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)^2 - \left(1 - e^{2\tilde{b}}\right)^2\left((-1-2\tilde{b}) + e^{2\tilde{b}}\right)\right).$$

Rozważmy wielkość w dużych nawiasach jako funkcję zmiennej $\tilde{b} \in [0,\infty)$ oznaczoną przez δ. Łatwo zauważyć, że $\delta(0) = 0$. Pokażemy, że na $(0,\infty)$ funkcja δ jest malejącą funkcją zmiennej $\tilde{b}$, a co za tym idzie, że $\delta < 0$ dla każdego $\tilde{b} > 0$.

Na początek obliczymy pierwszą pochodną δ względem $\tilde{b}$. Mamy

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta(\tilde{b}) = 2 + 2(-5+4\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + 2(7 - 4\tilde{b} + 16\tilde{b}^2)e^{4\tilde{b}} - 6e^{6\tilde{b}}.$$

Ponownie mamy $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta(0) = 0$. Druga pochodna δ względem $\tilde{b}$ ma postać

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta(\tilde{b}) = -4e^{2\tilde{b}}\left(3 - 4\tilde{b} - (12 + 32\tilde{b}^2 + 8\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + 9e^{4\tilde{b}}\right).$$

Zdefiniujmy teraz funkcję δ_1 wzorem

$$\delta_1(\tilde{b}) = 3 - 4\tilde{b} - (12 + 32\tilde{b}^2 + 8\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + 9e^{4\tilde{b}}.$$

Musimy pokazać, że z kolei ta funkcja jest dodatnia na $(0,\tilde{b})$. Zauważmy, że ponownie mamy $\delta_1(0) = 0$. Wystarczy więc wykazać, że δ_1 jest rosnąca na $(0,\tilde{b})$. Mamy

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_1(\tilde{b}) = 4\left(-1 - 4(2 + 5\tilde{b} + 4\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}} + 9e^{4\tilde{b}}\right)$$

Po raz kolejny zauważamy, że $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_1(0) = 0$. By pokazać, że $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_1$ jest dodatnia, wystarczy pokazać, że jest rosnąca na $(0,\tilde{b})$. Ponownie różniczkujemy i otrzymujemy

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_1(\tilde{b}) = 16e^{\tilde{b}}(-9 - 18\tilde{b} - 8\tilde{b}^2 + 9e^{2\tilde{b}}).$$

Zdefiniujmy funkcję $\delta_2(\tilde{b})$ wzorem

$$\delta_2(\tilde{b}) = -9 - 18\tilde{b} - 8\tilde{b}^2 + 9e^{2\tilde{b}}.$$

Jeżeli pokażemy, że δ_2 jest dodatnia to udowodnimy, że δ_1 jest dodatnia. Znowu mamy $\delta_2(0) = 0$. W związku z tym, musimy tylko pokazać, że δ_2 jest rosnąca. Różniczkując mamy

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_2(\tilde{b}) = -18 - 16\tilde{b} + 18e^{2\tilde{b}}.$$

Ponownie mamy $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_2(0) = 0$ i tak jak poprzednio by pokazać, że δ_2 jest rosnąca wystarczy udowodnić, że jej pochodna jest rosnąca. Ostatni raz różniczkując mamy

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_2(\tilde{b}) = -16 + 36e^{2\tilde{b}}.$$

Natychmiast widać, że $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_2(\tilde{b}) > 0$ dla każdego $\tilde{b} \in (0, \infty)$. Ostatecznie udało nam się pokazać, że $\Delta < 0$ dla dowolnego $\tilde{b} > 0$ czyli, że układ (4.56) ma zawsze rozwiązanie.

Ostatnim warunkiem, który musi być spełniony jest $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$. Korzystając ze wzoru (4.35), gdzie C jest funkcją daną przez (4.41) oraz tego, że $C(\tilde{b}) = 0$ widać, że warunek $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$ jest równoważny temu, że

$$\dot{C}(\tilde{b})\frac{\dot{\beta}(\tilde{b})}{\beta(\tilde{b})} = -2.$$

Poprzednie równanie jest równoważne następującemu

$$\frac{12D^2}{(A-2D)e^{4\tilde{b}}\det_{C2,E}}\left(A^2\left(1 - e^{6\tilde{b}} + (5+8\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + (-5+8\tilde{b})e^{4\tilde{b}}\right) + \right.$$
$$8De^{2\tilde{b}}\left((-1-\tilde{b}) + (1-\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)\left(2De^{2\tilde{b}} + \left(1-e^{2\tilde{b}}\right)\mu\right) +$$
$$\left. + A\left(-1 + e^{4\tilde{b}} - 4\tilde{b}e^{2\tilde{b}}\right)\left(4De^{2\tilde{b}} + \left(1-e^{2\tilde{b}}\right)\mu\right)\right) = 0 \tag{4.59}$$

Zauważmy, że wyrażenie wewnątrz dużych nawiasów jest wielomianem stopnia dwa zmiennej D. Otrzymaliśmy więc warunki na istnienie rozwiązań układu (4.32) spełniające podane wcześniej warunki brzegowe.

Podsumowując powyższe wyniki mamy

Lemat 4.19. *Niech będzie dany przedział $(0, \tilde{b})$ i niech $\beta(u) = De^{2u} - \frac{A}{2}$. Dla dowolnych A i D takich, że $\beta(0) > 0$ oraz $\beta(\tilde{b}) > 0$ istnieją rozwiązania (4.34) takie, że $\Gamma(0) = 0$, $\dot{\Gamma}(0) = 2$ oraz $\Gamma(\tilde{b}) = 0$. Co więcej, jeżeli D spełnia wyżej opisane równanie kwadratowe, to funkcja Γ spełnia też warunek $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$.*

Teraz pokażemy, że dla pewnych par A i μ rozwiązanie równania (4.34) istnieje dla dowolnego $\tilde{b} > 0$. W tym celu przyjrzyjmy się warunkowi (4.59). Zauważmy, że jest on spełniony dokładnie wtedy, gdy równanie kwadratowe

$$\begin{gathered}A^2\left(1 - e^{6\tilde{b}} + (5 + 8\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + (-5 + 8\tilde{b})e^{4\tilde{b}}\right) + \\ 8De^{2\tilde{b}}\left((-1 - \tilde{b}) + (1 - \tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)\left(2De^{2\tilde{b}} + \left(1 - e^{2\tilde{b}}\right)\mu\right) + \\ +A\left(-1 + e^{4\tilde{b}} - 4\tilde{b}e^{2\tilde{b}}\right)\left(4De^{2\tilde{b}} + \left(1 - e^{2\tilde{b}}\right)\mu\right) = 0\end{gathered}$$

ma rozwiązanie rzeczywiste. Wyróżnik tego równania jest dany przez

$$\begin{gathered}\Delta_D = 16e^{4\tilde{b}}\left(A^2\left(16\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}(2 + 5e^{2\tilde{b}} + 2e^{4\tilde{b}}) + (-1 + e^{2\tilde{b}})^2(5 + 26e^{2\tilde{b}} + 5e^{4\tilde{b}})\right.\right. \\ \left.\left.-4\tilde{b}(-1 - 16e^{2\tilde{b}} + 16e^{6\tilde{b}} + e^{8\tilde{b}})\right) + 4(-1 + e^{2\tilde{b}})^2(1 + \tilde{b} - e^{2\tilde{b}} + \tilde{b}e^{2\tilde{b}})^2\mu^2\right).\end{gathered}$$

Chcemy uzyskać informację, kiedy $\Delta_D \geq 0$. W tym celu zdefiniujmy funkcję δ_D^1 zmiennej $\tilde{b} > 0$ wzorem

$$\begin{gathered}\delta_D^1(\tilde{b}) = A^2\left(16\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}(2 + 5e^{2\tilde{b}} + 2e^{4\tilde{b}}) + (-1 + e^{2\tilde{b}})^2(5 + 26e^{2\tilde{b}} + 5e^{4\tilde{b}})\right. \\ \left.-4\tilde{b}(-1 - 16e^{2\tilde{b}} + 16e^{6\tilde{b}} + e^{8\tilde{b}})\right) + 4(-1 + e^{2\tilde{b}})^2(1 + \tilde{b} - e^{2\tilde{b}} + \tilde{b}e^{2\tilde{b}})^2\mu^2\end{gathered}$$

i zauważmy, że znak Δ_D jest określony przez znak δ_D^1. Będziemy badać, kiedy δ_D^1 jest dodatnia. Ponieważ $\delta_D^1(0) = 0$ to wystarczy sprawdzić, kiedy δ_D^1 jest rosnąca. W tym celu liczymy pochodną δ_D^1

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^1(\tilde{b}) = -4\left(A^2\left(-1 - 8(3 + 6\tilde{b} + 2\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}} + (42 - 40\tilde{b} - 80\tilde{b}^2)e^{4\tilde{b}}\right.\right. \\ \left.-8(1 - 10\tilde{b} + 6\tilde{b}^2)e^{6\tilde{b}} + (-9 + 8\tilde{b})e^{8\tilde{b}}\right) - 2(-1 + e^{2\tilde{b}})\left(4\tilde{b}^2e^{4\tilde{b}}(1 + e^{2\tilde{b}}) + \right. \\ \left.\left.+(-1 + e^{2\tilde{b}})^2(-1 + 3e^{2\tilde{b}}) + \tilde{b}\left(-1 + 3e^{2\tilde{b}} + 5e^{4\tilde{b}} - 7e^{6\tilde{b}}\right)\right)\mu^2\right)\end{gathered}$$

i sprawdzamy, że $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^1(0) = 0$. Ponownie, by sprawdzić kiedy pierwsza pochodna jest większa lub równa zeru wystarczy sprawdzić, kiedy jest rosnąca. Ponownie różniczkujemy, by otrzymać

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^1(\tilde{b}) = -8\left(16A^2e^{2\tilde{b}}\left(-(-1 + e^{2\tilde{b}})^2(3 + 2e^{2\tilde{b}}) - \tilde{b}^2(1 + 10e^{2\tilde{b}} + 9e^{4\tilde{b}}) + \right.\right. \\ \left.+2\tilde{b}(-2 - 5e^{2\tilde{b}} + 6e^{4\tilde{b}} + e^{6\tilde{b}})\right) - \left(1 - 8(2 + \tilde{b})e^{2\tilde{b}} - 2(-23 + 8\tilde{b} + 8\tilde{b}^2)e^{4\tilde{b}} + \right. \\ \left.\left.+24(-2 + 3\tilde{b})e^{6\tilde{b}} + (17 - 48\tilde{b} + 32\tilde{b}^2)e^{8\tilde{b}}\right)\mu^2\right).\end{gathered}$$

Ponieważ druga pochodna δ_D^1 zeruje się dla $\tilde{b} = 0$, więc jest większa od zera jeżeli jest rosnąca. Liczymy więc trzecią pochodną

$$\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1(\tilde{b}) = 64e^{2\tilde{b}}\Big(4A^2\Big((-1+e^{2\tilde{b}})^2(5+7e^{2\tilde{b}})+\tilde{b}^2(1+20e^{2\tilde{b}}+27e^{4\tilde{b}})$$
$$-\tilde{b}(-5-30e^{2\tilde{b}}+27e^{4\tilde{b}}+8e^{6\tilde{b}})\Big)+\Big((-1+e^{2\tilde{b}})^2(-5+11e^{2\tilde{b}})+8\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}(-1+4e^{4\tilde{b}})$$
$$-2\tilde{b}(1+6e^{2\tilde{b}}-27e^{4\tilde{b}}+20e^{6\tilde{b}})\Big)\mu^2\Big).$$

Zdefiniujmy nową funkcję δ_D^2 wzorem

$$\delta_D^2(\tilde{b}) = 4A^2\Big((-1+e^{2\tilde{b}})^2(5+7e^{2\tilde{b}})+\tilde{b}^2(1+20e^{2\tilde{b}}+27e^{4\tilde{b}})$$
$$-\tilde{b}(-5-30e^{2\tilde{b}}+27e^{4\tilde{b}}+8e^{6\tilde{b}})\Big)+\Big((-1+e^{2\tilde{b}})^2(-5+11e^{2\tilde{b}})+8\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}(-1+4e^{4\tilde{b}})$$
$$-2\tilde{b}(1+6e^{2\tilde{b}}-27e^{4\tilde{b}}+20e^{6\tilde{b}})\Big)\mu^2$$

i zauważmy, że $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1(\tilde{b}) = 64e^{2\tilde{b}}\delta_D^2(\tilde{b})$. Trzecia pochodna δ^1 jest dodatnia na $(0,\infty)$ dokładnie wtedy, gdy δ_D^2 jest dodatnia na tym przedziale. Ponieważ łatwo sprawdzić, że $\delta_D^2(0) = 0$, to wystarczy pokazać, że δ_D^2 jest rosnąca. Ponownie liczymy pochodną

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^2(\tilde{b}) = -2\Big(2A^2\Big(-4\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}(10+27e^{2\tilde{b}})-(-1+e^{2\tilde{b}})^2(5+34e^{2\tilde{b}})+$$
$$+2\tilde{b}(-1-50e^{2\tilde{b}}+27e^{4\tilde{b}}+24e^{6\tilde{b}})\Big)-\Big(-1+(15-20\tilde{b}-8\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}}+$$
$$+27(-1+4\tilde{b})e^{4\tilde{b}}+(13-88\tilde{b}+96\tilde{b}^2)e^{6\tilde{b}}\Big)\mu^2\Big)$$

i po raz kolejny zauważamy, że $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^2(0) = 0$. Stąd $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^2$ jest dodatnia, jeżeli jest rosnąca. Różniczkujemy

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^2(\tilde{b}) = -4\Big(2A^2\Big(-1-2(37+70\tilde{b}+20\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}}-9(-17+24\tilde{b}^2)e^{4\tilde{b}}+$$
$$+6(-13+24\tilde{b})e^{6\tilde{b}}\Big)-e^{2\tilde{b}}\Big(5-5e^{4\tilde{b}}+8\tilde{b}^2(-1+36e^{4\tilde{b}})$$
$$-4\tilde{b}(7-54e^{2\tilde{b}}+42e^{4\tilde{b}})\Big)\mu^2\Big)$$

i liczymy $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^2(0) = 0$. Stąd jeżeli druga pochodna δ_D^2 jest rosnąca, to jest dodatnia. Liczymy trzecią pochodną δ_D^2

$$\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^2(\tilde{b}) = 8e^{2\tilde{b}}\Big(4A^2\Big(4\tilde{b}^2(5+54e^{2\tilde{b}})+9(8-17e^{2\tilde{b}}+9e^{4\tilde{b}})$$
$$-18\tilde{b}(-5-6e^{2\tilde{b}}+12e^{4\tilde{b}})\Big)+\Big(-9+108e^{2\tilde{b}}-99e^{4\tilde{b}}-36\tilde{b}(1-12e^{2\tilde{b}}+6e^{4\tilde{b}})+$$
$$+\tilde{b}^2(-8+864e^{4\tilde{b}})\Big)\mu^2\Big).$$

Ponownie zachodzi znikanie $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^2(0) = 0$. Stąd by pokazać, że trzecia pochodna jest większa od zera, wystarczy pokazać, że jest rosnąca. Zdefiniujmy funkcję δ_D^3 wzorem

$$\delta_D^3(\tilde{b}) = 4A^2\left(4\tilde{b}^2(5 + 54e^{2\tilde{b}}) + 9(8 - 17e^{2\tilde{b}} + 9e^{4\tilde{b}})\right.$$
$$\left.-18\tilde{b}(-5 - 6e^{2\tilde{b}} + 12e^{4\tilde{b}})\right) + \left(-9 + 108e^{2\tilde{b}} - 99e^{4\tilde{b}} - 36\tilde{b}(1 - 12e^{2\tilde{b}} + 6e^{4\tilde{b}}) + \right.$$
$$\left.+\tilde{b}^2(-8 + 864e^{4\tilde{b}})\right)\mu^2.$$

Jest ona tak zdefiniowana, że $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^2(\tilde{b}) = 8e^{2\tilde{b}}\delta_D^3(\tilde{b})$, czyli mamy też $\delta^3(0) = 0$. Co więcej, $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^2$ jest rosnąca dokładnie wtedy, gdy δ_D^3 jest rosnąca. W świetle powyższego, wystarczy pokazać, że pierwsza pochodna δ_D^3 jest dodatnia. Mamy

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^3(\tilde{b}) = -4\left(2A^2\left(-216\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}} - 9(5 - 11e^{2\tilde{b}} + 6e^{4\tilde{b}}) + 4\tilde{b}(-5 - 81e^{2\tilde{b}} + 108e^{4\tilde{b}})\right)\right.$$
$$\left.-\left(864\tilde{b}^2e^{4\tilde{b}} - 9(1 - 18e^{2\tilde{b}} + 17e^{4\tilde{b}}) + 4\tilde{b}(-1 + 54e^{2\tilde{b}} + 54e^{4\tilde{b}})\right)\mu^2\right).$$

Łatwo sprawdzić, że $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^3(0) = 0$ skąd wniosek, że jeżeli $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^3$ jest rosnąca to jest dodatnia. Liczymy drugą pochodną δ_D^3

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^3(\tilde{b}) = -16\left(A^2\left(-10 - 9(7 + 60\tilde{b} + 24\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}} + 108(1 + 8\tilde{b})e^{4\tilde{b}}\right)\right.$$
$$\left.-\left(-1 + 27(5 + 4\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + 9(-11 + 72\tilde{b} + 96\tilde{b}^2)e^{4\tilde{b}}\right)\mu^2\right).$$

Tym razem druga pochodna nie zeruje się w $\tilde{b} = 0$, ale mamy $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^3(0) = -560A^2 + 560\mu^2$. Załóżmy teraz, że $|\mu| \geq |A|$. Jeżeli w tej sytuacji pokażemy, że $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^3$ jest rosnąca, to udowodnimy też, że jest większa od zera. Liczymy trzecią pochodną δ_D^3

$$\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^3(\tilde{b}) = 288e^{2\tilde{b}}\left(A^2\left(37 + 24\tilde{b}^2 - 72e^{2\tilde{b}} - 12\tilde{b}(-7 + 16e^{2\tilde{b}})\right) + \right.$$
$$\left.+\left(21 + 12\tilde{b} + 14e^{2\tilde{b}} + 240\tilde{b}e^{2\tilde{b}} + 192\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}\right)\mu^2\right).$$

Zdefiniujmy kolejną funkcję δ_D^4 wzorem

$$\delta_D^4(\tilde{b}) = A^2\left(37 + 24\tilde{b}^2 - 72e^{2\tilde{b}} - 12\tilde{b}(-7 + 16e^{2\tilde{b}})\right) +$$
$$+\left(21 + 12\tilde{b} + 14e^{2\tilde{b}} + 240\tilde{b}e^{2\tilde{b}} + 192\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}\right)\mu^2.$$

Widać, że $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^3(\tilde{b}) = 288e^{2\tilde{b}}\delta_D^4(\tilde{b})$ i łatwo sprawdzić, że $\delta_D^4(0) = -35A^2 + 35\mu^2$. Przy założeniu, że $|\mu| \geq |A|$ jeżeli δ_D^4 jest rosnące, to jest też większe od zera. Liczymy pochodną δ_D^4

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^4(\tilde{b}) = -12A^2\left(-7 + 28e^{2\tilde{b}} + 4\tilde{b}(-1 + 8e^{2\tilde{b}})\right) + 4\left(3 + (67 + 216\tilde{b} + 96\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}}\right)\mu^2$$

i jej wartość w zerze $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta^4(0) = -252A^2 + 280\mu^2$. Przy poprzednich założeniach, by pokazać, że pierwsza pochodna δ_D^4 jest dodatnia, wystarczy pokazać, że jest rosnąca. Liczymy więc drugą pochodną

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^4(\tilde{b}) = -48A^2\left(-1 + 2(11 + 8\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right) + 8(175 + 312\tilde{b} + 96\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}}\mu^2$$

i $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^4(0) = -1008A^2 + 1400\mu^2$. Powtarzając powyższą procedurę sprawdzimy, obliczamy trzecią pochodną δ_D^4

$$\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^4(\tilde{b}) = 16e^{2\tilde{b}}\left(-12A^2(15 + 8\tilde{b}) + (331 + 408\tilde{b} + 96\tilde{b}^2)\mu^2\right).$$

Po raz ostatni definiujemy nową funkcję δ_D^5 wzorem

$$\delta_D^5(\tilde{b}) = -12A^2(15 + 8\tilde{b}) + (331 + 408\tilde{b} + 96\tilde{b}^2)\mu^2.$$

Można sprawdzić, że $\delta_D^5(0) = -180A^2 + 331\mu^2$, czyli przy powyższych założeniach trzecia pochodna δ_D^4 jest dodatnia dokładnie wtedy, gdy δ_D^5 jest dodatnia. Ponieważ w naszej sytuacji δ_D^5 w zerze ma wartość dodatnią, to wystarczy pokazać, że jest to funkcja rosnąca. Liczymy pochodną

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^5(\tilde{b}) = 96A^2 + 24(17 + 8\tilde{b})\mu^2.$$

Widać, że dla $\tilde{b} > 0$ ta pochodna jest dodatnia, czyli funkcja δ_D^5 jest rosnąca i, z podanych wcześniej powodów, dodatnia. Z powyższego rozumowania wynika, że jeżeli $|\mu| \geq |A|$, to wyznacznik Δ_D jest nieujemny dla każdego $\tilde{b} > 0$. Stąd z kolei wynika, że w takiej sytuacji zawsze istnieje rozwiązanie Γ równania (4.34) takie, że $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$.

Pokażemy teraz, że w naszej sytuacji nie istnieją przykłady z Ricci-płaską bazą. W tej sytuacji warunek z równania (4.59) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}16D^2e^{4\tilde{b}}\left((-1-\tilde{b}) + (1-\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right) + 4De^{2\tilde{b}}A\left(-1 + e^{4\tilde{b}} - 4\tilde{b}e^{2\tilde{b}}\right) +\\ +A^2\left(1 - e^{6\tilde{b}} + (5 + 8\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + (-5 + 8\tilde{b})e^{4\tilde{b}}\right) = 0.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Wyróżnik tego równania, traktowanego jako równanie kwadratowe zmiennej D wyraża się przez

$$\begin{aligned}\Delta_D = 16e^{4\tilde{b}}A^2\left(-1 + e^{4\tilde{b}} - 4\tilde{b}e^{2\tilde{b}}\right)^2\\ -64e^{4\tilde{b}}A^2\left((-1-\tilde{b}) + (1-\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)\left(1 - e^{6\tilde{b}} + (5 + 8\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + (-5 + 8\tilde{b})e^{4\tilde{b}}\right).\end{aligned}$$

Wystarczy wykazać, że $\Delta_D < 0$ dla dowolnego $\tilde{b} > 0$. Zauważmy przy tym, że znak wyróżnika nie zależy od A. Zdefiniujmy funkcję δ_D zmiennej $\tilde{b}$ następująco

$$\begin{aligned}\delta_D(\tilde{b}) = \left(-1 + e^{4\tilde{b}} - 4\tilde{b}e^{2\tilde{b}}\right)^2\\ -4\left((-1-\tilde{b}) + (1-\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right)\left(1 - e^{6\tilde{b}} + (5 + 8\tilde{b})e^{2\tilde{b}} + (-5 + 8\tilde{b})e^{4\tilde{b}}\right)\end{aligned}$$

i zauważmy od razu, że $\delta_D(0) = 0$. W tej sytuacji, by wykazać, że $\delta_D(\tilde{b}) < 0$ wystarczy udowodnić, że ta funkcja jest malejącą funkcją zmiennej $\tilde{b}$. W tym celu różniczkujemy funkcję δ_D względem $\tilde{b}$:

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D(\tilde{b}) = -4\Big(-1 - 8(3 + 6\tilde{b} + 2\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}} + \\ +(42 - 40\tilde{b} - 80\tilde{b}^2)e^{4\tilde{b}} - 8(1 - 10\tilde{b} + 6\tilde{b}^2)e^{6\tilde{b}} + (-9 + 8\tilde{b})e^{8\tilde{b}}\Big).$$

Łatwo sprawdzić, że $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D(0) = 0$, więc by pokazać, że $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D(\tilde{b}) < 0$ wystarczy udowodnić, że druga pochodna $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D$ jest mniejsza od zera. Mamy

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D(\tilde{b}) = 128e^{2\tilde{b}}\Big((-1 + e^{2\tilde{b}})^2(3 + 2e^{2\tilde{b}}) + \tilde{b}^2(1 + 10e^{2\tilde{b}} + 9e^{4\tilde{b}}) \\ -2\tilde{b}(-2 - 5e^{2\tilde{b}} + 6e^{4\tilde{b}} + e^{6\tilde{b}})\Big).$$

By udowodnić, że druga pochodna δ_D jest mniejsza od zera na $(0, \infty)$, zdefiniujmy nową funkcję δ_D^1 wzorem

$$\delta_D^1(\tilde{b}) = (-1 + e^{2\tilde{b}})^2(3 + 2e^{2\tilde{b}}) + \tilde{b}^2(1 + 10e^{2\tilde{b}} + 9e^{4\tilde{b}}) \\ -2\tilde{b}(-2 - 5e^{2\tilde{b}} + 6e^{4\tilde{b}} + e^{6\tilde{b}}).$$

Ponieważ $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D(\tilde{b}) = 128e^{2\tilde{b}}\delta_D^1(\tilde{b})$ oraz $\delta_D^1(0) = 0$, to by wykazać, że druga pochodna funkcji δ_D jest mniejsza od zera wystarczy pokazać, że δ_D^1 jest malejąca. Różniczkując tę ostatnią funkcję mamy

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^1(\tilde{b}) = 2\Big((-1 + e^{2\tilde{b}})^2(2 + 5e^{2\tilde{b}}) + \\ +2\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}}(5 + 9e^{2\tilde{b}}) + \tilde{b}(1 + 20e^{2\tilde{b}} - 15e^{4\tilde{b}} - 6e^{\tilde{b}})\Big).$$

Ponieważ $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^1(0) = 0$, to możemy powtórzyć powyższą procedurę. Liczymy druga pochodną δ_D^1:

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^1(\tilde{b}) = 2 + 4(11 + 30\tilde{b} + 10\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}} + 2(-47 - 24\tilde{b} + 72\tilde{b}^2)e^{4\tilde{b}} + (48 - 72\tilde{b})e^{6\tilde{b}}.$$

Widać, że druga pochodna δ_D^1 też zeruje się w punkcie $\tilde{b} = 0$, więc wykonujemy kolejny krok:

$$\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1(\tilde{b}) = 8e^{2\tilde{b}}\Big(26 - 53e^{2\tilde{b}} + 27e^{4\tilde{b}} + 2\tilde{b}^2(5 + 36e^{2\tilde{b}}) - 2\tilde{b}(-20 - 6e^{\tilde{b}} + 27e^{4\tilde{b}})\Big).$$

Przypomnijmy, że chcemy udowodnić, że $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1(\tilde{b}) < 0$ dla $\tilde{b} > 0$. Ponieważ trzecia pochodna δ_D^1 zeruje się w punkcie $\tilde{b} = 0$, to wystarczy pokazać, że jest ona funkcją malejącą. W tym celu wprowadźmy funkcję δ_D^2 zdefiniowaną wzorem

$$\delta_D^2(\tilde{b}) = 26 - 53e^{2\tilde{b}} + 27e^{4\tilde{b}} + 2\tilde{b}^2(5 + 36e^{2\tilde{b}}) - 2\tilde{b}(-20 - 6e^{\tilde{b}} + 27e^{4\tilde{b}}).$$

Funkcja δ_D^2 została tak zdefiniowana, że $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1(\tilde{b}) = 8e^{2\tilde{b}}\delta_D^2(\tilde{b})$. Widać więc, że $\delta_D^2(0) = 0$ oraz $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1$ jest malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy δ_D^2 jest malejąca. Różniczkując δ_D^2 otrzymujemy

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^2(\tilde{b}) = 40 - 94e^{2\tilde{b}} + 144\tilde{b}^2e^{2\tilde{b}} + 54e^{4\tilde{b}} - 4\tilde{b}(-5 - 42e^{2\tilde{b}} + 54e^{4\tilde{b}}).$$

Ponownie mamy $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^2(0) = 0$ więc pierwsza pochodna δ_D^2 jest mniejsza od zera, jeżeli jest malejąca. Liczymy drugą pochodną δ_D^2:

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^2(\tilde{b}) = 4\left(5 + (-5 + 156\tilde{b} + 72\tilde{b}^2)e^{2\tilde{b}} - 216\tilde{b}e^{4\tilde{b}}\right).$$

Sprawdzamy, że $\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^2(0) = 0$ skąd wniosek, że druga pochodna jest mniejsza od zera jeżeli jest malejąca. Liczymy trzecią pochodną δ_D^2:

$$\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1(\tilde{b}) = 8e^{2\tilde{b}}\left(73 + 72\tilde{b}^2 - 108e^{2\tilde{b}} - 12\tilde{b}(-19 + 36e^{2\tilde{b}})\right).$$

Znak $\frac{d^3}{d\tilde{b}^3}\delta_D^1$ jest określony przez wartość w nawiasach. Zdefiniujmy więc funkcję δ_D^3 wzorem

$$\delta_D^3(\tilde{b}) = 73 + 72\tilde{b}^2 - 108e^{2\tilde{b}} - 12\tilde{b}(-19 + 36e^{2\tilde{b}}).$$

Tym razem zachodzi $\delta_D^3(0) = -35$. Jeżeli δ_D^3 jest malejąca na $(0, \infty)$, to jest na tym przedziale mniejsza od zera. Różniczkujemy tę funkcję i otrzymujemy

$$\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^3(\tilde{b}) = 12\left(19 - 54e^{2\tilde{b}} - 12\tilde{b}(-1 + 6e^{2\tilde{b}})\right).$$

Mamy $\frac{d}{d\tilde{b}}\delta_D^3(0) = -420$, czyli jeżeli pokażemy, że pierwsza pochodna δ_D^3 jest malejąca, to pokażemy równocześnie, że jest ujemna na interesującym nas przedziale. Liczymy więc kolejną pochodną

$$\frac{d^2}{d\tilde{b}^2}\delta_D^3(\tilde{b}) = 144\left(1 - 3(5 + 4\tilde{b})e^{2\tilde{b}}\right).$$

W tym momencie widać, że druga pochodna δ_D^3 jest ujemna dla $\tilde{b} > 0$ co dowodzi, że pierwsza pochodna δ_D^3 jest malejąca. Stąd już widać, że ujemny jest wyróżnik Δ_D równania kwadratowego (4.60). Z powyższych rozważań widać, że równanie to nie ma rozwiązania, czyli nie istnieją rozwiązania Γ równania różniczkowego (4.34) spełniające warunek brzegowy $\dot{\Gamma}(0) = -2$.

Ostatecznie, udowodniliśmy następujący fakt.

Lemat 4.20. *Niech dany będzie odcinek* $(0,\tilde{b})$ *dla pewnego* $\tilde{b} > 0$ *i niech* $\beta(u) = De^{2u} - \frac{A}{2}$. *Jeżeli* $|\mu| \geq |A|$, *to rozwiązanie* Γ *równania* (4.34) *spełnia warunki brzegowe* (4.43). *Jeżeli* $\mu = 0$ *to nie istnieje rozwiązanie* Γ *równania* (4.34) *spełniające warunek* $\dot{\Gamma}(\tilde{b}) = -2$.

4.9. Przykład dodatniego rozwiązania

Niech $(\mathbb{C}P^1, g_{FS})$ będzie zespoloną przestrzenią rzutową, rzeczywistego wymiaru 2, z metryką Fubini'ego-Study'ego o krzywiźnie sekcyjnej równej 2. Jest to oczywiście rozmaitość Kähler'a-Einstein'a, ze stałą Einstein'a $\mu = 2$. Niech P będzie przestrzenią totalną S^1-wiązki głównej nad $(\mathbb{C}P^1, g_{FS})$ charakteryzowanej przez klasę kohomologii $\frac{k}{2\pi}\omega_{FS}$, gdzie ω_{FS} jest formą Kähler'a metryki g_{FS}. Ponieważ mamy $|A| = 2|s|$, to z powyższego rozumowania widać, że dla każdego $k = 2s$ takiego, że $|k| = |A| \leq \mu = 2$ istnieje rozwiązanie Γ układu (4.34) spełniające zadane warunki brzegowe, jeżeli $\beta(0) > 0$ oraz $\beta(\tilde{b}) > 0$.

Przypuśćmy teraz, że $k = 2$, $A = -2$ oraz, że $\tilde{b} = 1$. Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku istnieją dokładnie dwa rozwiązania równania (4.59), mianowicie

$$D = -\frac{1}{e^2} \quad \text{lub} \quad D = \frac{1 + 8e^2 - e^4}{4e^2},$$

przy czym pierwsze jest ujemne, a drugie dodatnie. Dla $D = \frac{1+8e^2-e^4}{4e^2}$ od razu widać, że dostajemy rozwiązania β i Γ spełniające zadane warunki brzegowe, ponieważ funkcja β jest wszędzie dodatnia. W pierwszym przypadku zachodzi $\beta(1) = 0$, czyli nie jest spełniony jeden z warunków brzegowych.

Pokażemy teraz, że dla tak dobranych stałych, funkcja Γ jest dodatnia na całym przedziale $(0,1)$. Zauważmy, że jest ona w tym wypadku dana wzorem

$$\begin{gathered}\Gamma(u) = \frac{-2e^{-2u}}{(-1+e^2)(-1-12e^2+e^4)(-4e^2-e^{2u}-8e^{2+2u}+e^{4+2u})}\\ \left(8e^6 + 2e^2e^{2u}\left(1+7e^2+19e^4-3e^6\right) - e^{4u}\left(1+18e^2+76e^4+30e^6-5e^8\right) + \right.\\ \left. + e^{6u}\left(1+16e^2+62e^4-16e^6+e^8\right) - e^{4u}\left(1+5e^2-22e^4+26e^6-11e^8+e^{10}\right)u\right)\end{gathered}$$

Można łatwo sprawdzić, że ułamek występujący we wzorze jest ujemny dla każdego $u \in [0,1]$, czyli musimy sprawdzić, czy funkcja w nawiasach jest ujemna na $(0,1)$. Oznaczmy ją jako γ. Zauważmy następnie, że funkcja γ zeruje się dokładnie wtedy, gdy spełnione jest następujące równanie

$$\begin{gathered}e^{-4u}\left(8e^6 + 2e^2e^{2u}\left(1+7e^2+19e^4-3e^6\right) + e^{6u}\left(1+16e^2+62e^4-16e^6+e^8\right)\right) = \\ \left(1+5e^2-22e^4+26e^6-11e^8+e^{10}\right)u + \left(1+18e^2+76e^4+30e^6-5e^8\right).\end{gathered}$$

Po prawej stronie równania mamy funkcję liniową w zmiennej u. Jeżeli pokażemy, że funkcja po lewej ma co najwyżej jedno ekstremum, to powyższe równanie może być spełnione dla co najwyżej dwóch punktów. Ponieważ funkcje Γ i γ zerują się w tych samych punktach to widać, że w takiej sytuacji Γ nie może mieć innych zer poza $u = 0$ i $u = 1$.

Zdefiniujmy funkcję γ_1 wzorem

$$\gamma_1(u) = e^{-4u}\left(8e^6 + 2e^2e^{2u}\left(1 + 7e^2 + 19e^4 - 3e^6\right) + \right.$$
$$\left. +e^{6u}\left(1 + 16e^2 + 62e^4 - 16e^6 + e^8\right)\right).$$

Jej pochodna wyraża się przez

$$\dot{\gamma_1}(u) = 2e^{-4u}\left(-16e^6 - 2e^{2+2u}\left(1 + 7e^2 + 19e^4 - 3e^6\right) + \right.$$
$$\left. +e^{6u}\left(1 + 16e^2 + 62e^4 - 16e^6 + e^8\right)\right).$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasach jest wielomianem stopnia 3 w zmiennej e^{2u}. Wielomian ten ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste co implikuje, że funkcja γ_1 ma tylko jedno ekstremum. Ostatecznie daje nam to tyle, że funkcja γ zdefiniowana wyżej ma co najwyżej dwa miejsca zerowe na $(0, 1)$, co z kolei implikuje dodatniość Γ na $(0, 1)$.

Bibliografia

[ACG01] V. Aposotolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, *Ambikähler geometry, ambikähler surfaces and Einstein 4-orbifolds*, arXiv:math/1010.0992.

[ACG03] V. Aposotolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, *The geometry of weakly selfdual kähler surfaces*, Compositio Math. 135 (2003), 279-322

[ACG04] V. Aposotolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, *Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry, I general theory*, arXiv:math/0202280v2.

[Be] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).

[C-F-S] B. Coll, J.J. Ferrando, J. A. Sáez, *On the geometry of Killing and conformal tensors*, J. Math. Phys. (6) 47 (2006).

[D-O] S. Dragomir, L. Ornea, *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin (1998).

[Gra] A. Gray, *Einstein-like manifolds which are not Einstein*, Geom. Dedicata 7 (1978), 259–280.

[Jel95] W. Jelonek, *On $\mathcal{A}$-tensors in Riemannian geometry*, preprint PAN, 551, 1995.

[JelXX] W. Jelonek, *Killing tensors and warped products*, preprint.

[JelGR] W. Jelonek, *Geometria rĂłĹĽniczkowa*, skrypt.

[Jel99] W. Jelonek, *Almost Kähler $\mathcal{A}$-structures on twistor bundles*, Ann. Glob. Anal. Geom. 17 (1999), 329–339.

[Jel98] W. Jelonek, *K-contact $\mathcal{A}$-manifolds*, Col. Math. (1) 75 (1998), 97–103.

[Jel02] W. Jelonek, *Compact Kähler surfaces with harmonic anti-self-dual Weyl tensor*, Differential Geom. Appl. 16 (2002), 267–276.

[Jel09] W. Jelonek, *Higher-dimensional Gray Hermitian manifolds*, J. Lond. Math. Soc. (2) 80 (2009), no.3, 729–749.

[Ko56] S. Kobayashi, *Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group*, Tohoku Math. J. 8 (1956), 29–45.

[Ko61] S. Kobayashi, *On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor*, Ann. of Math. 74 (1961), 570–574.

[K-N] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry Vol. II*, Interscience Publishers, 1963.

[M-S] A. Moroianu, U. Semmelmann, *Twistor forms on Kähler manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 2 (2003), 823–845.

[ON] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 13 (1966), 459–469.

[Pe] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, 2nd edition, New York: Springer,2006.

[S-V] K. Sekigawa, L. Vanhecke, *Symplectic geodesic symmetries on Kähler manifolds*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 37 (1986), 95–103.

[Sem] U. Semmelmann, *Conformal Killing forms on Riemannian manifolds*, http://www.igt.uni-stuttgart.de/LstGeo/Semmelmann/Publikationen/killing20.pdf.

[W-W] J. Wang, M. Y. Wang, *Einstein metrics on S^2-bundles*, Math. Ann. 310 (1998), 497–526.

[W-Z] M. Y. Wang, W. Ziller, *Einstein metrics on torus bundles*, J. Differential Geom. 31 (1990), 215–248.

[Zbo] G. Zborowski, *Construction of an $\mathcal{A}$-manifold on a principal torus bundle*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 12 (2013), 5–19.