

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Karol Gryszka

Trajektorie Asymptotycznie Okresowe
w Ciągłych Układach Dynamicznych

Rozprawa

Opiekun: Prof. dr hab. Klaudiusz Wójcik

Kraków 2015

Podziękowania

W tym miejscu pragnę podziękować mojemu promotorowi, profesorowi Klaudiuszowi Wójcikowi, za opiekę naukową, wszelką pomoc uzyskaną w okresie studiów doktoranckich oraz pomoc, wskazówki i rady udzielone przy tworzeniu niniejszej pracy.

Pragnę również podziękować doktorowi Marcinowi Kulczykiemu, który zaszczerpił we mnie pomysł badawczy na okres studiów doktoranckich. Również wiele jego cennych uwag oraz pomysłów i włożony czas bardzo pomogły mi w rozwoju, a w szczególności w napisaniu jednej publikacji.

Dziękuję ponadto doktorowi Krzysztofowi Ciesielskiemu za wszelką pomoc okazaną na etapie korekty językowej pracy.

Chciałbym również podziękować profesorowi Wacławowi Marzantowiczowi, który był moim opiekunem podczas semestralnego stażu na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, za wsparcie oraz życzliwość okazaną podczas mojego pobytu.

Dziękuję również wszystkim uczestnikom seminarium „Układy Dynamiczne”, przede wszystkim mojemu promotorowi oraz profesorowi Romanowi Srzednickiemu za przewodnictwo w seminarium. Dziękuję również dr. Krzysztofowi Ciesielskiemu, Marcinowi, Dominikowi, Krzysztofowi, Cezaremu oraz Marcie za wspólne uczestnictwo i dyskusje.

Ogromnie dziękuję rodzinie za wsparcie i motywację okazywaną przez cały okres studiów.

W trakcie studiów doktoranckich byłem uczestnikiem międzynarodowego programu studiów doktoranckich „Środowiskowe Studia Doktoranckie z Nauk Matematycznych” dla polskiej nauki, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach europejskiego programu społecznego „Kapitał ludzki – narodowa strategia spójności”. Dziękuję za możliwość uczestniczenia w programie oraz wszelkie wsparcie uzyskane z tytułu uczestnictwa.

Streszczenie

Niniejsza praca poświęcona jest badaniu własności okresu asymptotycznego – nowego podejścia do uogólnienia pojęcia okresu na przypadek orbit nieokresowych. Praca składa się z dwóch zasadniczych części. Część pierwsza stanowi charakter wprowadzający, część druga prezentuje główne wyniki oraz różnorodne własności i zastosowania.

Rozdziały pierwszy i drugi składają się na pierwszą część pracy. Rozdział pierwszy ma charakter preliminaryjny. Ustalona jest w nim podstawowa terminologia oraz oznaczenia z teorii układów dynamicznych oraz topologii, stosowane w dalszej części pracy. Z punktu widzenia kolejnych rozdziałów najważniejszymi pojęciami są okres asymptotyczny oraz właściwe przestrzenie metryczne.

Drugi rozdział opisuje szereg własności pojęcia okresu asymptotycznego. Całość tego rozdziału została podzielona na trzy osobne podrozdziały. Pierwszy z nich charakteryzuje punkty stałe w układach dynamicznych przez wartość okresu asymptotycznego. Podrozdział drugi analizuje różne przypadki, gdy zbiór graniczny orbity zawiera więcej niż jedną orbitę i porównuje je z wartością okresu asymptotycznego. W szczególności wynika z niej, że orbity asymptotycznie nieokresowe nie wykazują przewidywalnych własności. Ostatni podrozdział jest nawiązaniem wprowadzonego pojęcia do innych, wcześniej znanych podejść do uogólnienia pojęcia okresu oraz orbit asymptotycznie okresowych: orbity dodatkowo asymptotycznie okresowe, orbity powracające i orbity prawie okresowe. Brak związków między odpowiednimi pojęciami jest poparty licznymi przykładami konstrukcji odpowiednich układów dynamicznych.

Druga część pracy, w której skład wchodzi rozdziały trzeci i czwarty, stanowi zastosowanie podstawowych wyników uzyskanych w pierwszej części pracy do uzyskania wielu innych wyników, zarówno topologicznych, jak i dynamicznych. Rozdział trzeci skupia uwagę na topologicznych własnościach zbiorów granicznych w kontekście przestrzeni właściwych oraz różnych wartości okresu asymptotycznego. Przypomniane w pierwszym podrozdziale pojęcie stabilności orbity w sensie Lagrange'a okazuje się konsekwencją skończonej wartości okresu asymptotycznego. Własność tę opisuje główny wynik tego rozdziału

– zawarte w drugim podrozdziale Twierdzenie 3.2.7. Konsekwencją powyższego jest pewien wariant twierdzenia Poincarego–Bendixsona oraz powiązania z pojęciem przyciągania. Trzeci podrozdział stanowi nawiązanie do pewnych własności klasycznej topologii algebraicznej. Głównymi łącznikami są tutaj pojęcia słabej własności punktu stałego oraz charakterystyki Eulera.

Rozdział czwarty wykorzystuje pojęcie okresu asymptotycznego i jego własności do uogólnienia wyniku uzyskanego w pracy [SZ]. Wynik ze wspomnianej pracy zakłada, że istnieją zwarte przestrzenie metryczne i zdefiniowane na nich równoważne układy dynamiczne, posiadające punkty stałe, dla których tempa wzrostu orbit okresowych są skrajnie różne. Uogólnienie wyniku zamieszczone w niniejszej pracy uwzględnia również orbity asymptotycznie okresowe. Tym samym wprowadzone zostaje pojęcie tempa wzrostu orbit asymptotycznie okresowych. Omawiany w tym rozdziale wynik można znaleźć w pracy [G1].

Pracę zamyka wykaz cytowanej literatury.

W pracy zamieszczonych zostało kilka nowych wyników oraz przykładów. Część z nich poprawia już istniejące, część pochodzi z nieopublikowanego jeszcze preprintu (lokalizacja zamieszczona została w zasadniczej części pracy). Należą do nich:

- Lemat 2.1.1 – nieznaczące uogólnienie analogicznego lematu z [G1],
- Twierdzenie 2.1.4 oraz Twierdzenie 2.1.5 – precyzyjniejsza charakteryzacja punktów asymptotycznie stałych ([G1]),
- Przykład 2.1.6 – w nawiązaniu do poprzedniego punktu, pokazanie istotności założenia właściwości przestrzeni,
- przykłady z podrozdziału 2.3 – stwierdzenie, że pojęcie okresu asymptotycznego istotnie różni się od innych, znanych pojęć uogólniających ruchy okresowe,
- wyniki rozdziału trzeciego (większość z nich jest treścią [G2]),
- Przykład 4.3.7 oraz Przykład 4.3.8 – jawny opis układów zdefiniowanych w Twierdzeniach 4.3.2 i 4.3.4),
- Twierdzenie 4.3.10 – nieznaczące uogólnienie Twierdzenia 4.3.6.

Praca zawiera również sformułowania kilku pytań i problemów otwartych.

Streszczenie (w języku angielskim)

The following dissertation describes a generalized notion of periodicity in continuous dynamical systems.

This paper is divided into two main parts. Part one consists of Chapter 1 and Chapter 2. Chapter 1 introduces the basic notation and definitions used in the entire paper. It is worth to distinguish the notion of asymptotic periodicity and proper metric spaces. The first term was introduced by the author in [G1].

Chapter 2 describes basic properties of asymptotically periodic orbits. Section 1 of this chapter characterizes fixed points with the use of asymptotic period. Section 2 shows that the system on the omega-limit set of a point with the infinite asymptotic period need not behave in any specific way. The last section compares the introduced notion with already existing approaches, such as positively asymptotically periodic orbits, recurrent or almost periodic ones.

Part two consists of Chapters 3 and 4. Chapter 3 focuses on the topological properties of limits sets from the point of view of asymptotic periodicity. It is shown that the finite value of the period implies the Langrange stability of motion. It is also described a connection with Poincaré–Bendixson theorem and the notion of attraction. Finally, we analyze the connections between the notion of asymptotic periodicity, the Euler characteristic of the space and the weak-fixed point property.

In chapter 4 we generalize a result from [SZ]. The original result described the growth rate of periodic orbits, here we show the analogous result also for asymptotically periodic orbits. Many results from this chapter can be found in [G1].

The dissertation ends with the list of cited papers and books.

Spis treści

Podziękowania	i
Streszczenie	ii
Streszczenie (w języku angielskim)	iv
Spis treści	v
Spis rysunków	vi
Rozdział 1. Preliminaria	1
1.1. Motywacja	1
1.2. Podstawowe definicje i notacja	2
Rozdział 2. Wybrane własności okresu asymptotycznego	10
2.1. Charakteryzacja punktów stałych	10
2.2. Zbiory graniczne zawierające więcej niż jedną orbitę	12
2.3. Trajektorie asymptotycznie okresowe a inne uogólnienia okresu	17
Rozdział 3. Topologiczne własności zbiorów granicznych	25
3.1. Preliminaria i przykład	25
3.2. Własności topologiczne	28
3.3. Elementy topologii algebraicznej	35
Rozdział 4. Ekstremalne własności układów dynamicznych	38
4.1. Wybrane ekstremalne własności	38
4.2. Tempo wzrostu orbit asymptotycznie okresowych	42
4.3. Ekstremalne tempo wzrostu orbit	42
Bibliografia	54

Spis rysunków

Rysunek 1.1 Szkic układu opisanego w Uwadze 1.2.14.	8
Rysunek 2.1 Szkic układu zdefiniowanego w Przykładzie 2.1.6.	12
Rysunek 2.2 Ilustracja przykładowego pokrycia.	15
Rysunek 2.3 Przeskok pomiędzy torusami.	15
Rysunek 2.4 Jeden krok funkcji typu Cantora dla ϑ' .	21
Rysunek 2.5 Szkic układu zdefiniowanego w Przykładzie 2.3.11.	22
Rysunek 3.1 Szkic potoku ϕ z Przykładu 3.1.2.	27
Rysunek 3.2 Definicja ciągów $(q_i)_{i=1}^{+\infty}$, $(r_i)_{i=1}^{+\infty}$ i $(s_i)_{i=1}^{+\infty}$ wykorzystanych w dowodzie Twierdzenia 3.2.8.	30
Rysunek 3.3 Rysunkowy szkic dowodu Twierdzenia 3.2.9.	32
Rysunek 4.1 Szkic układu z dowodu Twierdzenia 4.3.2.	44
Rysunek 4.2 Szkic układu zdefiniowanego w dowodzie Twierdzenia 4.3.4.	46
Rysunek 4.3 Funkcja typu Cantora dla ϑ' .	50

ROZDZIAŁ 1

Preliminaria

1.1. Motywacja

Teoria ciągłych układów dynamicznych jest bogatą teorią, rozwijającą się w wielu kierunkach. Do tych najważniejszych należy zaliczyć niewątpliwie badanie istnienia oraz własności orbit okresowych i punktów stacjonarnych. Ich znaczenie w teorii równań różniczkowych, jakościowej teorii równań różniczkowych czy teorii układów dynamicznych jest znaczące. Mnogość prac (nie tylko matematycznych) poruszających wspomniany problem jest ogromna. Wyniki w nich zawarte są zarówno wynikami teoretycznymi, jak i praktycznymi.

Pojęcie okresu jest mocno ugruntowane w teorii układów dynamicznych (zarówno ciągłych, jak i dyskretnych). Naturalnym krokiem do przodu było postawienie następującego problemu:

Jak opisać zachowanie orbit sąsiadujących z orbitami okresowymi? Jak opisać zachowanie orbit, które wykazują własności bliskie okresowym, ale takimi nie są?

W XX wieku pokazano wiele różnych, bogatych opisów, które odpowiadają na powyższe pytania. Bohr w serii trzech prac ([Bo]) opisał pojęcie prawie okresowości, natomiast Birkhoff niedługo po nim opisał orbity powracające ([Bi]). Pojęcia te weszły w kanon współczesnej teorii układów dynamicznych i są często przywoływane w różnych pracach w pierwotnej lub zmodyfikowanej formie.

Trudno doszukiwać się lepszych bądź gorszych prób uogólnień, gdyż użyteczność zależy przede wszystkim od kontekstu. Pelczar w pracy [P] pokazał, jak dość abstrakcyjne ujęcie okresu może implikować różne własności związane ze stabilnością orbity w danym układzie dynamicznym.

W następnym podrozdziale wprowadzimy pojęcie okresu asymptotycznego dla ciągłych układów dynamicznych. Pojęcie to zostało po raz pierwszy wykorzystane w pracy [G1]. W niniejszej rozprawie pojęcie to zostaje głębiej przebadane, przede wszystkim pod

kątem topologicznych własności zbiorów granicznych oraz stabilności orbity w sesie Lagrange'a. Niektóre wyniki uzyskane w pracy [G1] zostają poprawione bądź uogólnione.

1.2. Podstawowe definicje i notacja

W tej części rozdziału podamy podstawowe pojęcia oraz uczynimy kilka elementarnych obserwacji, istotnych dla dalszej pracy.

Ileokroć będziemy pisać \mathbb{N} , mamy na myśli zbiór liczb naturalnych z zerem włącznie. Przez (X, d) będziemy standardowo oznaczać przestrzeń metryczną. Gdy metryka nie została oznaczona, w domyśle jest nią metryka d . Kule otwarte o środku w punkcie x i promieniu r będziemy oznaczać przez $B(x, r)$, natomiast odpowiadające im kule domknięte przez $\overline{B}(x, r)$. Jeżeli A jest zbiorem, to będziemy pisać $B(A, r) := \bigcup_{a \in A} B(a, r)$. Moc zbioru A będziemy oznaczać przez $\text{card}A$.

Definicja 1.2.1. *Układ dynamiczny (potok)* jest to ciągła funkcja $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ spełniająca następujące warunki:

- dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $\phi(0, x) = x$,
- dla dowolnych $x \in X$ oraz $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\phi(s, (\phi(t, x))) = \phi(s + t, x)$.

Jeżeli w powyższej definicji zastąpimy \mathbb{R} przez $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, to ϕ nazywamy *semi-układem dynamicznym (semi-potokiem)*.

W dalszej części określenia „potok” oraz „układ dynamiczny” będą stosowane zamiennie. Semi-układy dynamiczne są, z punktu widzenia pracy, wystarczającym obiektem badań. Stwierdzenie to staje się zasadne, gdy wprowadzimy pojęcie okresu asymptotycznego. Nim do niego przejdziemy, przypomnimy najważniejsze definicje związane z samymi układami dynamicznymi.

Niech G będzie takim (otwartym) podzbiorem $\mathbb{R} \times X$, że $\{0\} \times X \subset G$. Ustalmy x i zdefiniujmy zbiór

$$I_x := \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in G\}.$$

Definicja 1.2.2. *Lokalny układ dynamiczny (lokalny potok)* jest to ciągła funkcja $\phi: G \rightarrow X$ taka, że następujące warunki są spełnione:

- dla dowolnego $x \in X$ zbiór I_x jest otwartym przedziałem,
- dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $\phi(0, x) = x$,
- jeżeli $x \in X$ oraz $t \in I_x$, to $-t \in I_{\phi(t, x)}$,

- jeżeli $x \in X, t \in I_x$ oraz $s \in I_{\phi(t,x)}$, to $t + s \in I_x$ oraz $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$.

Jeżeli w powyższej definicji (oraz definicji zbioru I_x) zastąpimy \mathbb{R} przez \mathbb{R}_+ oraz opuścimy trzeci punkt definicji, to ϕ nazywamy *lokalnym semi-układem dynamicznym* (*lokalnym semi-potokiem*).

Będziemy czasami pisać ϕ_t mając na myśli odwzorowanie $\phi_t: X \ni x \mapsto \phi(t, x) \in X$. Łatwo sprawdzić, że wszystkie ϕ_t są ciągłymi odwzorowaniami, a gdy ϕ jest układem dynamicznym, to ϕ_t są homeomorfizmami. Co więcej, zbiór $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ tworzy grupę abelową z działaniem składania odwzorowań.

Niech $\phi: G \rightarrow X$ będzie lokalnym układem dynamicznym oraz niech $x \in X$.

Definicja 1.2.3. *Orbita (trajektoria) $o(x)$ punktu x to zbiór*

$$o(x) := \{\phi(t, x) \mid t \in I_x\}.$$

Orbita dodatnia $o^+(x)$ punktu x to zbiór

$$o^+(x) := \{\phi(t, x) \mid t \in [0, +\infty) \cap I_x\}.$$

Orbita ujemna $o^-(x)$ punktu x to zbiór

$$o^-(x) := \{\phi(t, x) \mid t \in (-\infty, 0] \cap I_x\}.$$

Najważniejszymi typami orbit w układach dynamicznych są orbity (punkty) stacjonarne oraz punkty okresowe i związany z tymi ostatnimi okres punktu (orbity).

Definicja 1.2.4. Punkt x nazywamy *punktem stacjonarnym* jeżeli $\phi(t, x) = x$ dla każdego $t \in I_x$.

Punkt x jest *T -okresowy* dla pewnego $T > 0$, jeżeli $\phi(T, x) = x$ oraz x nie jest punktem stacjonarnym.

Wielkość

$$\text{Per}(x) := \inf\{T > 0 \mid \phi(T, x) = x\}$$

nazywamy *okresem (podstawowym) punktu x* .

W dalszej części pracy pisząc, iż punkt x jest T -okresowy, mamy na myśli sytuację, w której $\text{Per}(x) = T$.

Załóżmy teraz, że ϕ jest lokalnym układem dynamicznym.

Definicja 1.2.5. Jeżeli $[0, +\infty) \subset I_x$, to zbiorem ω -granicznym punktu x nazywamy zbiór

$$\omega(x) := \{y \in X \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \phi(t_n, x) \rightarrow y \wedge t_n \nearrow +\infty\}.$$

Jeżeli $(-\infty, 0] \subset I_x$, to zbiorem α -granicznym punktu x nazywamy zbiór

$$\alpha(x) := \{y \in X \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \phi(t_n, x) \rightarrow y \wedge t_n \searrow -\infty\}.$$

Odnotujmy, że pojęcia dodatniej orbity oraz zbioru ω -granicznego możemy określić również dla semi-potoków.

Przy badaniu układów dynamicznych ważna jest możliwość odpowiedzenia na pytanie, kiedy dwa układy są do siebie „podobne” z topologicznego lub dynamicznego punktu widzenia. Jednym z takich kryteriów jest pojęcie równoważności, które pozwala klasyfikować układy ze względu na różne charakterystyki liczbowe lub inne kryteria.

Definicja 1.2.6. Dwa potoki $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ oraz $\psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ są *równoważne*, gdy istnieje homeomorfizm $h: X \rightarrow Y$, który przekształca każdą orbitę układu ϕ na orbitę układu ψ z zachowaniem kierunku przepływu czasu. Innymi słowy, istnieje ciągła reparametryzacja czasu $\alpha: \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\alpha(0, x) = x$ dla wszystkich $x \in X$, funkcja $t \mapsto \alpha(t, x)$ jest rosnącym homeomorfizmem oraz $\psi(\alpha(t, x), h(x)) = h(\phi(t, x))$.

Równoważność układów dynamicznych jest relacją równoważności, wobec tego pozwala wśród wszystkich układów dynamicznych określonych na pewnej przestrzeni metrycznej (X, d) oraz przestrzeni do niej homeomorficznych wyróżnić klasy tych układów, które zachowują wspólne cechy. Z elementarnej teorii wiemy na przykład, że równoważność zachowuje orbity okresowe (ale nie musi zachowywać okresu) oraz punkty stacjonarne. O ile sam kształt układu i orbit pozostaje „mniej więcej” zachowany, o tyle wiele charakterystyk liczbowych być nie musi. Wiele przykładów skrajnego zachowania dwóch różnych układów równoważnych opiszemy w rozdziale czwartym.

Z topologicznego punktu widzenia ważnym pojęciem jest zbiór minimalny. Poniższe definicje nie zakładają, że $I_x = \mathbb{R}$.

Definicja 1.2.7. Zbiór $U \subset X$ jest *niezmienniczy*, gdy $o(x) \subset U$ dla dowolnego $x \in U$.

Zbiór $U \subset X$ jest *dodatnio niezmienniczy*, gdy $o^+(x) \subset U$ dla dowolnego $x \in U$.

Zbiór $U \subset X$ jest *ujemnie niezmienniczy*, gdy $o^-(x) \subset U$ dla dowolnego $x \in U$.

Zbiory niezmiennicze to w istocie sumy mnogościowe pewnej (skończonej lub nieskończonej) ilości orbit. W klasie takich zbiorów wyróżniamy takie, które są minimalne

względem pewnego porządku. W klasie takich zbiorów wyróżniamy takie, które są minimalne względem pewnego porządku.

Definicja 1.2.8. Zbiór $M \subset X$ nazywamy *minimalnym*, jeżeli zbiór ten jest niepusty, domknięty, niezmienniczy i żaden właściwy podzbiór zbioru M nie ma wymienionych własności.

Podstawowe fakty dotyczące ziorów minimalnych przedstawiamy w poniższym twierdzeniu ([BS, NS]).

Twierdzenie 1.2.9. *Załóżmy, że $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ jest układem dynamicznym na przestrzeni metrycznej (X, d) .*

- (1) *Dowolny niepusty i zwarty zbiór niezmienniczy posiada zwarty podzbiór minimalny.*
- (2) *W X jest zawarty jest zwarty zbiór minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $x \in X$, że którykolwiek ze zbiorów $\overline{o^+(x)}$ oraz $\overline{o^-(x)}$ jest zwarty.*
- (3) *Podzbiór $M \subset X$ jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in M$ zachodzi $\overline{o(x)} = M$.*

Konstrukcje wielu (semi-)układów dynamicznych (również lokalnych) można oprzeć na równaniach różniczkowych. Liczne przykłady zaprezentowane w pracy bazują właśnie na tej idei. Przedstawimy teraz metodę, która pozwoli przejść z równania różniczkowego na układ dynamiczny. Niech więc $f: \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie ciągłą funkcją, gdzie U jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n . Załóżmy, że równanie różniczkowe $x' = f(x)$ ma własność jednoznaczności rozwiązań oraz dziedzina każdego rozwiązania wysyconego jest równa \mathbb{R} .

Definicja 1.2.10. Jeżeli $\phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ jest tak zdefiniowane, że dla dowolnego $x_0 \in U$ funkcja $t \mapsto \phi(t, x_0)$ jest rozwiązaniem wysyconym zagadnienia

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

to ϕ nazywamy *układem dynamicznym generowanym przez pole f (generowanym przez równanie różniczkowe $x' = f(x)$)*.

Rozwiązania równania różniczkowego nie muszą być globalne (to jest dziedziną rozwiązania wysyconego nie musi być całe \mathbb{R}). Wtedy równanie $x' = f(x)$ generuje lokalny układ dynamiczny według tego samego schematu, jak powyżej.

Wprowadzimy następnie pojęcie okresu asymptotycznego ([**G1**, **G2**]). Jest ono szeroko rozważane w dalszych rozdziałach. Definicja jest poprzedzona kilkoma technicznymi uwagami oraz wprowadzeniem niezbędnej notacji.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech ϕ będzie semi-potokiem na X . Ustalmy $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$, zdefiniujemy

$$A(x, \varepsilon) := \{t \geq 0 \mid d(\phi(t, x), x) > \varepsilon\}.$$

Powyższy zbiór jest sumą co najwyżej przeliczalnie wielu parami rozłącznym i otwartych przedziałów (q_i, r_i) , gdzie zbiór indeksów jest albo przeliczalny, albo skończony. Ta ostatnia możliwość wynika z tego, że dopuszczalne jest $r_i = +\infty$ dla pewnego i . W rzeczywistości $q_i = q_i(x, \varepsilon)$ oraz $r_i = r_i(x, \varepsilon)$, jednak celem uniknięcia nadmiaru oznaczeń w dalszej części będziemy pomijać zależność końców przedziałów od punktu x oraz liczby ε . Zdefiniujemy

$$w_t(x, \varepsilon) := \begin{cases} 0, & t \notin A(x, \varepsilon), \\ r_i - q_i, & t \in (q_i, r_i). \end{cases}$$

Zbiór $W_{x, \varepsilon} := \{w_t(x, \varepsilon)\}_{t \geq 0}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele różnych, nieujemnych liczb rzeczywistych oraz $+\infty$, gdy jest to konieczne. Zauważmy, że gdy zmniejszamy ε , nie zmniejszamy elementów zbioru $W_{x, \varepsilon}$. Niech

$$W(x, \varepsilon) := \limsup_{t \rightarrow +\infty} w_t(x, \varepsilon).$$

Odnotujmy, że $W(x, \varepsilon) = 0$ jeżeli $o^+(x) \subset \bar{B}(x, \varepsilon)$, oraz $W(x, \varepsilon) = +\infty$ gdy istnieje taki wskaźnik i_0 , że $r_{i_0} = +\infty$.

Definicja 1.2.11. *Okresem asymptotycznym punktu x nazywamy wielkość*

$$\text{AP}(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow +\infty} W(\phi(t, x), \varepsilon).$$

Ta granica jest nieujemną liczbą, albo jest nieskończona. Jeżeli $\text{AP}(x) = 0$, to x nazywamy *asymptotycznie stacjonarnym*. Jeżeli x ma skończony okres asymptotyczny, wtedy nazywamy go *asymptotycznie okresowym*. Jeżeli $\text{AP}(x) = +\infty$, to x nazywamy *asymptotycznie nieokresowym*. Odpowiednie definicje można również sformułować dla orbity punktu x .

Uwaga 1.2.12. Powyżej została wprowadzona definicja okresu asymptotycznego dla punktu oraz orbity w ciągłym układzie dynamicznym. Definicję tę można sformułować dla dowolnej funkcji $f_x : [0, +\infty) \rightarrow X$, gdzie X jest dowolną przestrzenią metryczną, $x \in X$ oraz $f_x(0) = x$.

Główną ideą stojącą za wprowadzonym powyżej pojęciem jest jego niezależność od zbioru granicznego oraz pewna „wrażliwość” na zaburzenia ruchu wzdłuż trajektorii.

Wielkość $AP(x)$ jest zależna wyłącznie od zachowania się orbity punktu x . Dodatkowo $AP(x)$ zawsze istnieje mimo iż zbiór $\omega(x)$ może być pusty (Przykład 2.1.6). Zwróćmy również uwagę na to, że do wyznaczenia $AP(x)$ wystarczy jedynie znajomość dodatniej orbity danego punktu. Uzasadnia to możliwość stosowania tego pojęcia do przypadku wyłącznie semi-układów dynamicznych.

Wprost z definicji możemy wywnioskować, że jeżeli punkt x zachowuje się regularnie, na przykład x jest orbitą okresową lub punktem stacjonarnym, to $AP(x)$ powinno być proste w wyznaczeniu. W istocie tak jest.

Obserwacja 1.2.13. *Jeżeli x jest T -okresowy, to jest również asymptotycznie okresowy oraz $AP(x) = T$. Jeżeli x jest punktem stacjonarnym, to jest punktem asymptotycznie stacjonarnym.*

Dowód. Przypadek punktu stacjonarnego jest oczywisty.

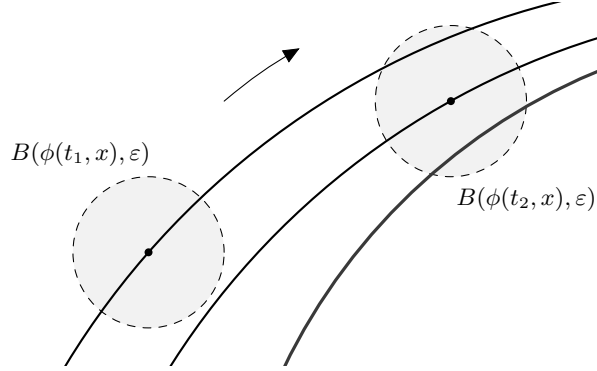
Jeżeli x jest T -okresowy, $t \geq 0$ oraz $\varepsilon > 0$, to $A(\varphi(t, x), \varepsilon)$ zawiera, z dokładnością do przesunięcia czasowego o wielokrotność T , jeden przedział (q, r) . Stąd $W(\phi(t, x), \varepsilon) = r - q$. Z ciągłości wynika ponadto, że $r - q \rightarrow T$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0$, zatem $AP(x) = T$. \square

Z powyższej obserwacji wynika, że wprowadzone pojęcie jest naturalnym uogólnieniem pojęcia punktu okresowego oraz punktu stacjonarnego. Jest to o tyle istotne, że pozwala w szczególności na konstrukcje układów dynamicznych posiadających własności potrzebne w dowodzie twierdzeń z rozdziału czwartego. Oczywiście nie będziemy ograniczać się wyłącznie do prostego przykładu orbit okresowych – w dalszej części pojawi się wiele przykładów orbit, które nie są okresowe lub stacjonarne, ale są asymptotycznie okresowe lub asymptotycznie stacjonarne.

W przypadku bardziej złożonych przykładów obliczenia mogą się zmieniać w sposób istotny wraz ze zmianą punktu odniesienia. Zmiany te mogą mieć charakter lokalny (wynikający bardziej z niewielkich odchyień w położeniu po upływie większego przedziału czasowego) lub globalny (drastyczna zmiana położenia przy pokonaniu większego przedziału czasowego oraz brak perspektyw na jakikolwiek powrót blisko punktu startowego).

Uwaga 1.2.14. W zależności od położenia kul $B(\phi(t, x), \varepsilon)$, zbiory $A(\phi(t, x), \varepsilon)$ oraz $W(\phi(t, x), \varepsilon)$ mogą się całkowicie zmienić. Jako poglądowy przykład rozważmy zadany na płaszczyźnie układ dynamiczny, w którego skład wchodzi pojedyncza orbita w kształcie okręgu oraz orbita „nawijająca się” od zewnątrz na tę orbitę przy czasie zmierzającym do $+\infty$, a zmierzająca do punktu stacjonarnego przy czasie zmierzającym do $-\infty$ (w tym przypadku okrąg jest zbiorem granicznym dla orbity „nawijającej się”). Prędkość ruchu

wzdłuż orbity jest stała na całym potoku, z wyłączeniem pewnego małego otoczenia punktu stacjonarnego. Rysunek 1.1 przedstawia fragment tego układu. Zauważmy, że dla $i = 1$ zbiór $A(\phi(t_i, x), \varepsilon)$ jest złożony z jednego otwartego przedziału $(t_0, +\infty)$ dla pewnego t_0 . Dla $i = 2$ otrzymujemy nieskończenie wiele przedziałów czasowych, których średnice są zbliżone.



RYSUNEK 1.1. Szkic fragmentu układu opisanego w Uwadze 1.2.14. Strzałka wskazuje kierunek ruchu. Krzywa, na której nie leży środek żadnej z kul, jest fragmentem orbity okresowej.

Zauważyliśmy już wcześniej, że każda orbita okresowa jest również orbitą asymptotycznie okresową (Obserwacja 1.2.13). Z tego powodu naturalnym jest odróżnienie orbit okresowych od tych, które nie są okresowe, ale są asymptotycznie okresowe. Wprowadzamy więc pojęcie pozwalające na wyróżnienie tychże.

Definicja 1.2.15. Punkt $x \in X$ (oraz jego orbitę) nazywamy *istotnie asymptotycznie okresowym*, gdy jest on asymptotycznie okresowy oraz nie jest okresowy.

Dzięki powyższemu nie trywializujemy pewnych twierdzeń dotyczących orbit asymptotycznie okresowych, gdy znamy analogiczne twierdzenie dla orbit okresowych. Ponadto możemy poprawić niektóre wyniki uzyskiwane w kontekście ekstremalnych własności układów.

Z topologicznego punktu widzenia często zakłada się jakiś rodzaj zwartości przestrzeni metrycznej. W idealnym przypadku chcielibyśmy wykazać twierdzenie bez zakładania zwartości, jednak odnajdywane czasami kontrprzykłady wymuszają dołożenie dodatkowych założeń. Z drugiej strony nie chcielibyśmy zakładać zwartości całej przestrzeni, gdyż to wymusza od razu wiele „porządnych” własności zarówno orbity, jak i towarzyszącym im niepustym zbiorom granicznym. Kompromisem w niektórych przypadkach jest stosowanie pojęcia właściwej przestrzeni metrycznej.

Definicja 1.2.16. Mówimy, że (X, d) jest *właściwą przestrzenią metryczną*, jeżeli $\overline{B}(x, r)$ są zwarte dla wszelkich $x \in X$ oraz $r > 0$.

Wprost z definicji mamy następującą obserwację.

Obserwacja 1.2.17. *Jeżeli (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną, to zbiory $\partial B(x, r)$ są zwarte dla wszystkich $x \in X$ oraz $r > 0$.*

Dowód. Zachodzi inkluzja $\partial B(x, r) \subset \overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r)$, więc $\partial B(x, r)$ jest zwarty jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. \square

Odwołując się do właściwości przestrzeni, często będziemy w domyśle odwoływać się również do powyższej obserwacji.

Warunek definiujący przestrzenie właściwe jest wzmocnieniem lokalnej zwartości, więc przestrzenie te są bardzo użyteczne i mają naturalne zastosowania. Ponadto opisywane przez nie topologiczne własności kul są związane z pojęciem okresu asymptotycznego, który bazuje na zachowaniu się orbity poza kulą. Ten związek pozwala na uzyskanie wielu rezultatów. Co więcej, często okazuje się, że założenia bycia przestrzenią właściwą nie możemy opuścić przez zastąpienie go słabszym warunkiem, na przykład lokalną zwartością. W wielu przypadkach podamy stosowne przykłady na poparcie tej tezy.

Odnotujmy na koniec rozdziału, że definicja okresu asymptotycznego może być w sposób naturalny rozszerzona na przypadek lokalnych (semi-)układów dynamicznych.

Uwaga 1.2.18. W przypadku lokalnych semi-układów dynamicznych możemy zdefiniować $AP(x)$, o ile tylko zbiór I_x zawiera $[0, +\infty)$. Z tego ostatniego wynika, że zbiór $\omega(x)$ jest dobrze określony (choć może być pusty). Co więcej, zbiór $\omega(x)$ może również zawierać orbity punktów, które są zdefiniowane tylko na skończonych przedziałach czasowych (stosowny przykład podamy później – patrz Przykład 3.1.2).

Wybrane własności okresu asymptotycznego

2.1. Charakteryzacja punktów stałych

W tym podrozdziale podamy warunek konieczny i wystarczający na to, by dla danego punktu $x \in X$ zachodziła równość $AP(x) = 0$. Kryterium to wiąże w sposób jawny pojęcie okresu asymptotycznego z właściwą przestrzenią metryczną – podrozdział zakończony jest przykładem, który pokazuje istotność założenia topologicznego.

Następujący lemat jest prostym i technicznym wprowadzeniem do Twierdzenia 2.1.5 (rezultatem do niego zbliżonym jest również Lemat 3.2.10). Jest to nieco ogólniejsza wersja odpowiedniego lematu z [G1].

Lemat 2.1.1. *Niech (X, d) będzie właściwą przestrzenią metryczną, ϕ semi-potokiem na X oraz niech $\omega(x)$ będzie niepusty i zwarty dla pewnego $x \in X$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $T > 0$, że $d(\phi(t, x), \omega(x)) \leq \varepsilon$ dla $t > T$.*

Dowód. Prowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że dla dowolnych $T > 0$ istnieje taki czas $t > T$, że $d(\phi(t, x), \omega(x)) > \varepsilon$. Wybierzmy teraz $T_2 > 2t_1$ i $t_2 > T_2$ o tej własności, że $2\varepsilon > d(\phi(t_1, x), \omega(x)) > \varepsilon$. Indukcyjnie konstruujemy taki ciąg $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rozbieżny do nieskończoności, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$2\varepsilon > d(\phi(t_n, x), \omega(x)) > \varepsilon.$$

Zbiór $\{z \in X \mid d(\omega(x), z) \leq 2\varepsilon\}$ jest zwarty, zatem istnieją takie $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i $x_s \in X$, że $\phi(t_{n_k}, x) \rightarrow x_s$. Z definicji x_s musi być elementem zbioru $\omega(x)$, ale mamy również $d(x_s, \omega(x)) \geq \varepsilon$, sprzeczność. \square

Powyższy lemat można jeszcze wzmocnić przez osłabienie założenia zwartości zbioru granicznego. Odnotujmy więc poniższą uwagę, do której wrócimy w rozdziale trzecim, przy omawianiu własności topologicznych.

Uwaga 2.1.2. W Lemacie 2.1.1 założenie zwartości zbioru granicznego można zastąpić założeniem, że $\omega(x)$ jest ograniczony.

Okazuje się ponadto, że założenie właściwości przestrzeni X jest w Lemacie 2.1.1 również możliwe do zastąpienia słabszym warunkiem.

Uwaga 2.1.3. W Lemacie 2.1.1 założenie właściwości przestrzeni X można zastąpić warunkiem lokalnej zwartości tej przestrzeni ([BS, NS]).

Następnym krokiem jest powiązanie orbity asymptotycznie stałej z mocą zbioru granicznego. Związek ten przedstawiają Twierdzenie 2.1.4 oraz Twierdzenie 2.1.5, które w pełni charakteryzuje punkty asymptotycznie stałe w właściwych przestrzeniach metrycznych. Wyniki te stanowią techniczne uogólnienie odpowiadającego im twierdzenia z [G1].

Twierdzenie 2.1.4. *Załóżmy, że ϕ jest semi-układem dynamicznym na przestrzeni metrycznej X i niech $x \in X$. Wówczas jeżeli $AP(x) = 0$, to $\text{card}\omega(x) \leq 1$.*

Dowód. Załóżmy, że $y, z \in \omega(x)$ oraz $y \neq z$. Niech $\varepsilon < \frac{1}{5}d(y, z)$ oraz niech $d(\phi(t, x), y) \leq \varepsilon$ dla pewnego $t \geq 0$. Rozważmy wszystkie takie przesunięcia czasowe s , że $\phi(t + s, x) \in B(y, 2\varepsilon)$. Ponieważ $z \in \omega(x)$, istnieje przeliczalnie wiele liczb (czasów) t_n oraz s_n , dla których $\phi(t + t_n, x) \in \partial B(y, 2\varepsilon)$ oraz $\phi(t + s_n, x) \in \partial B(z, \varepsilon)$. Ponadto dla wszystkich n zachodzi nierówność $s_n > t_n$ oraz liczby s_n są wybrane jako najmniejsze możliwe, dla których powyższe własności zachodzą. Z ciągłości wynika ponadto, że istnieje taka liczba $\alpha > 0$, że $s_n - t_n > \alpha > 0$.

Ponieważ $W(\phi(t, x), \varepsilon)$ jest granicą górną ciągu, którego przeliczalnie wiele składników jest ograniczonych od dołu przez α (osiągnięcie brzegu $B(y, 2\varepsilon)$ wymaga dodatniego okresu czasowego), również granica jest ograniczona od dołu przez α . Możemy teraz wziąć dowolnie duży czas początkowy t , dla którego $\phi(t, x) \in B(y, 2\varepsilon)$. Używając tego samego argumentu otrzymujemy to samo dolne ograniczenie α (gdyż wzięliśmy wszystkie przesunięcia czasowe pomiędzy kulami otaczającymi y oraz z). Wniosujemy stąd, że $\limsup_{t \rightarrow +\infty} W(\phi(t, x), \varepsilon) \geq \alpha$ oraz $AP(x) \geq \alpha$. \square

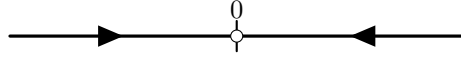
Twierdzenie 2.1.5. *Załóżmy, że ϕ jest semi-układem dynamicznym na właściwej przestrzeni metrycznej (X, d) i niech $x \in X$. Wtedy zbiór $\omega(x)$ jest singletonem wtedy i tylko wtedy, gdy $AP(x) = 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $\omega(x) = \{y\}$. Wtedy na podstawie Lematu 2.1.1 dla dowolnego $\varepsilon > 0$ odnajdujemy takie $T > 0$, że dla wszystkich $t > T$ mamy $\phi(t, x) \in B(\phi(T, x), \varepsilon)$. Stąd wynika, że $AP(x) = 0$.

Jeżeli teraz $AP(x) = 0$, to $o^+(\phi(t, x)) \subset B(\phi(t, x), \varepsilon)$ dla pewnych t oraz $\varepsilon > 0$. Przestrzeń X jest właściwa, zatem $\overline{o^+(x)}$ jest zbiorem zwartym (por. Twierdzenie 3.2.4) i w konsekwencji $\omega(x) \neq \emptyset$. Teza wynika teraz z Twierdzenia 2.1.4. \square

Poniższy przykład pokazuje, że założenie właściwości przestrzeni nie może zostać zastąpione założeniem o lokalnej zwartości przestrzeni (teza Twierdzenia 2.1.5 nie zachodzi).

Przykład 2.1.6. Rozważmy układ dynamiczny na \mathbb{R} generowany przez równanie różniczkowe $x' = -x$ (Rysunek 2.1). Wtedy 0 jest punktem stacjonarnym oraz $AP(x) = 0$, o ile $x \neq 0$. Jeżeli usuniemy punkt 0 z przestrzeni, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nie jest już właściwa (ale jest lokalnie zwarta). Jednakże dla dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nadal mamy $AP(x) = 0$.



RYSUNEK 2.1. Szkic układu zdefiniowanego w Przykładzie 2.1.6. Punkt 0 jest usunięty z prostej.

2.2. Zbiory graniczne zawierające więcej niż jedną orbitę

Podrozdział ten poświęcony jest analizie przypadku, gdy w zbiorze granicznym danego punktu jest więcej niż jedna orbita. W szczególności zbadane zostaną sytuacje, w których w zbiorze granicznym jest istotnie zawarty punkt stały lub są co najmniej dwie różne orbity. Twierdzenia przedstawione poniżej wraz z przykładem pokazują, jak zbyt bogata dynamika zbioru granicznego może negatywnie wpływać na wartość okresu asymptotycznego, a tym samym na przewidywalność zachowania orbity w sąsiedztwie zbioru granicznego.

Twierdzenie 2.2.1 ([G1]). *Załóżmy, że (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną oraz ϕ jest semi-potokiem na X . Dla punktu $x \in X$, jeżeli $\text{card } \omega(x) > 1$ i $\omega(x)$ zawiera punkt stacjonarny, to $AP(x) = +\infty$.*

Dowód. Niech y będzie punktem stacjonarnym. Wystarczy pokazać, że czas potrzebny punktowi x na pokonanie wzdłuż jego orbity dowolnie małego otoczenia punktu y jest nieograniczony.

Przypuśćmy, że jest inaczej. Niech K będzie takim ograniczeniem. Wybierzmy dowolny $z \in \omega(x) \setminus \{y\}$ oraz taką liczbę $\varepsilon > 0$, że $d(y, z) > \varepsilon$. Wybierzmy ponadto ciąg dodatnich liczb $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dla których $\phi(t_n, x) \rightarrow y$ oraz $d(\phi(t_n, x), y) < \varepsilon$.

Niech s_n będzie najmniejszą liczbą dodatnią, dla której $\phi(t_n + s_n, x) \notin B(y, \varepsilon)$ (za s_n możemy wziąć tę chwilę czasową, dla której orbita wychodzi z kuli $B(y, \varepsilon)$ lub jest w zbiorze typu $B(y, 2\varepsilon) \setminus B(y, \varepsilon)$). Ciąg $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony przez K , możemy więc wybrać taki podciąg zbieżny $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, że $s_{n_k} \rightarrow s$ dla pewnego $s \leq K$ oraz

$$\phi(t_{n_k} + s_{n_k}, x) \rightarrow w \notin B(y, \varepsilon).$$

Istnienie tego ostatniego gwarantuje właściwość przestrzeni. Z drugiej strony, z ciągłości potoku mamy

$$\phi(t_{n_k} + s_{n_k}, x) = \phi(s_{n_k}, \phi(t_{n_k}, x)) \rightarrow \phi(s, y) = y,$$

sprzeczność. □

Twierdzenie 2.2.2 ([G1]). *Załóżmy, że ϕ jest semi-potokiem na właściwej przestrzeni metrycznej (X, d) i $\omega(x)$ zawiera dwie różne orbity o dodatniej odległości między nimi dla pewnego $x \in X$. Wtedy $AP(x) = +\infty$.*

Dowód. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $AP(x) = T > 0$ oraz niech y i z będą dwoma punktami należącymi do dwóch orbit o dodatniej odległości. Ponieważ odległość orbit jest dodatnia, możemy wybrać taką liczbę $\varepsilon > 0$, że $d(o(z), o(y)) > \frac{5}{2}\varepsilon$ oraz wybrać takie $\delta > 0$, że $\limsup_{t \rightarrow +\infty} W(\phi(t, x), \varepsilon) < T + \delta$. Wybieramy taki podciąg $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, że $\limsup_{n \rightarrow +\infty} W(\phi(t_n, x), \varepsilon) < T + \delta$. Wtedy dla dostatecznie dużego $N > 0$ oraz $n > N$ mamy $W(\phi(t_n, x), \varepsilon) < T + 2\delta$. Wybierzmy jedno takie $\tilde{n} > N$ i niech $s_0 := t_{\tilde{n}}$. Bez straty ogólności (Lemat 2.1.1) możemy założyć, że $B(\phi(s_0, x), \varepsilon) \cap o(y) \neq \emptyset$. Od tej chwili $\phi(s_0, x)$ jest nowym punktem odniesienia.

Rozważmy takie $(s_n)_{n \geq 1}$ oraz $(r_n)_{n \geq 1}$, że $\phi(s_n, x) \in \partial B(\phi(s_0, x), \varepsilon)$ i $\phi(s_n + r_n, x) \rightarrow z$, oraz orbita punktu $\phi(s_0, x)$ nie znajduje się w kuli $B(\phi(s_0, x), \varepsilon)$ w przedziale czasowym (s_n, r_n) . Odnotujmy, że r_n są ograniczone przez pewne elementy z $W(\phi(s_0, x), \varepsilon)$, skąd wynika, że $\limsup_{n \rightarrow +\infty} r_n < \limsup_{t \geq s_0} w_t$ oraz $\limsup_{t \geq s_0} w_t$ jest skończona. Wybierzmy podciąg zbieżny $(r_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, zbieżny do r . Ze zwartości brzegu kuli można wybrać kolejny podciąg $(s_{n_{k_m}})_{m \in \mathbb{N}}$, dla którego $\phi(s_{n_{k_m}}, x) \rightarrow x_s$ dla pewnego $x_s \in \partial B(\phi(s_0, x), \varepsilon)$. Z ciągłości potoku mamy

$$\phi(s_{n_{k_m}} + r_{n_{k_m}}, x) \rightarrow z,$$

ale z drugiej strony

$$\phi(s_{n_{k_m}} + r_{n_{k_m}}, x) = \phi(r_{n_{k_m}}, \phi(s_{n_{k_m}}, x)) \rightarrow \phi(r, x_s).$$

Jednakże, odległość pomiędzy $o(z)$ oraz x_s jest dodatnia, więc $\phi(r, x_s)$ nie może być elementem zbioru niezmienniczego $o(z)$. Sprzeczność kończy dowód. □

Dowód Twierdzenia 2.2.2 jest nieco bardziej uniwersalny, gdyż można zmodyfikować go tak, aby opisywał on topologiczne własności zbiorów granicznych (Twierdzenie 3.2.9).

Poniższy przykład opisuje sytuację, w której pomimo możliwej radykalnej zmiany dynamiki na zbiorze granicznym okres asymptotyczny może nie ulec zmianie. Wynika z niego, w połączeniu z poprzednimi rezultatami, że nieskończona wartość okresu asymptotycznego, w przeciwieństwie do zerowej, nie implikuje żadnej konkretnej dynamiki na zbiorze granicznym.

Przykład 2.2.3 ([G1]). Niech $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ oraz $I = [0, 1]$. Niech \mathbb{T} będzie torusem I^2 / \sim , gdzie \sim jest relacją sklejącą przeciwne boki kwadratu z zachowaniem orientacji.

Aby skonstruować potok ϕ na \mathbb{T} , najpierw budujemy dodatnią orbitę z punktu $(0, 0)$ przez narysowanie linii prostej z $(0, 0)$ w kierunku górnej krawędzi kwadratu, tworzącej z dolną krawędzią kąt α . Linie przedłużamy w obu kierunkach zgodnie z relacją definiującą torus. W zależności od wymierności kąta α tak skonstruowana orbita może być albo okresowa, albo gęsta na torusie. W obu przypadkach wypełniamy torus \mathbb{T} takimi orbitami w sposób jednorodny. Zakładamy ponadto, że ruch na dowolnej orbicie odbywa się ze stałą prędkością $\eta > 0$.

Wyberzmy taki malejący ciąg liczb dodatnich $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ zbiegający do 0, że $\text{tg}(\alpha + \alpha_n) \notin \mathbb{Q}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Rozważmy rodzinę torusów \mathbb{T}_k utworzonych z kwadratów o bokach $1 + \frac{1}{k}$ dla $k = 1, 2, \dots$. Umieszczamy je w \mathbb{R}^3 tak, aby spełnić następujące warunki:

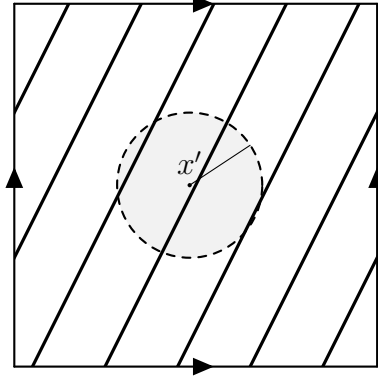
- torusy mają wspólną oś obrotu oraz istnieje płaszczyzna ortogonalna do tej osi, która przecina wewnętrzne oraz zewnętrzne równiki wszystkich torusów,
- \mathbb{T}_{k+1} jest we wnętrzu \mathbb{T}_k dla każdego $k \geq 1$,
- \mathbb{T} jest we wnętrzu wszystkich \mathbb{T}_k .

Konstruujemy teraz orbitę punktu $x \in \mathbb{T}_1$.

Krok 1 (pierwsze pokrycie). Na \mathbb{T}_1 budujemy kawałek orbity $o(x)$ używając tej samej metody, jak dla T . Dodajemy jednak pewne ograniczenia: x nie musi być punktem $(0, 0)$, kąt wykorzystany w konstrukcji to $\alpha + \alpha_1$ oraz orbita dodatnia przebiega \mathbb{T}_1 do momentu, w którym jest on pokryty z dokładnością $\frac{1}{1}$, co oznacza, że dla pewnego t_1 mamy spełniony następujący warunek:

$$\forall x' \in \mathbb{T}_1 \quad d(x', \phi([0, t_1], x)) \leq \frac{1}{1}.$$

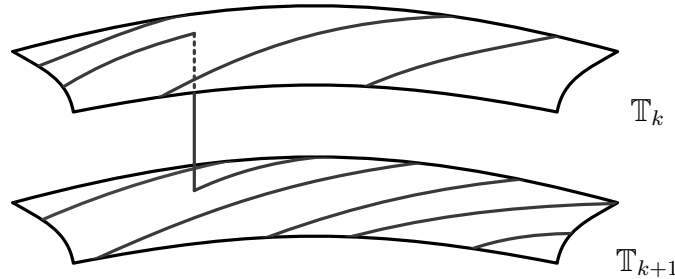
Punkt x porusza się ze stałą prędkością η wzdłuż orbity. Przeszłość punktu x można zdefiniować w dowolny sposób, przy czym nie powinna ona zaburzać dynamiki na dowolnym \mathbb{T}_i oraz na \mathbb{T} (na przykład zbiór α -graniczny punktu x to punkt stacjonarny na zewnątrz \mathbb{T}_1). Nie wypełniamy \mathbb{T}_1 innymi orbitami.



RYSUNEK 2.2. Ilustracja przykładowego pokrycia z dokładnością $\frac{1}{5}$.

Krok 2 (pierwszy skok). Przechodzimy z \mathbb{T}_1 na \mathbb{T}_2 . Jeżeli t_1 jest takie, jak w Kroku 1, to rzutujemy $y_1 := \phi(t_1, x)$ ortogonalnie na \mathbb{T}_2 . Otrzymujemy w ten sposób punkt y'_2 , który teraz będzie ogrywał rolę taką, jak x w Kroku 1. Punkty y_1 oraz y'_2 są połączone linią prostą (Rysunek 2.3), na której x kontynuuje ruch ze stałą prędkością η . Startując z y'_2 pokrywamy \mathbb{T}_2 z dokładnością $\frac{1}{2}$ (ponadto otrzymujemy t_2 i y_2) oraz z kątem $\alpha + \alpha_2$. Utrzymujemy nadal prędkość η .

Krok 3 (indukcja). Mając skonstruowany jeden skok postępujemy teraz indukcyjnie i skaczymy z torusa \mathbb{T}_k na \mathbb{T}_{k+1} , zmieniamy kąt na $\alpha + \alpha_{k+1}$ oraz pokrywamy \mathbb{T}_{k+1} z dokładnością $\frac{1}{k+1}$. Przez cały czas x porusza się ze stałą prędkością η .



RYSUNEK 2.3. Szkic tego, w jaki sposób orbita przełącza się pomiędzy torusami \mathbb{T}_k i \mathbb{T}_{k+1} . Dolny torus ma gęstszą orbitę i inny kąt w stosunku do górnego.

Przestrzeń fazowa jest złożona z \mathbb{T} , zbioru $o(x)$ skonstruowanego powyżej oraz zbioru $\alpha(x)$ (jest więc zwarta). Wprost z konstrukcji mamy $\omega(x) = \mathbb{T}$. W zależności od doboru kąta

α otrzymujemy dwie różne dynamiki na zbiorze ω -granicznym. Co więcej, niewymierność kątów na torusach \mathbb{T}_k otaczających \mathbb{T} implikuje, że $AP(x) = +\infty$. Wynika to z rozumowania, którego ideę nakreślamy poniżej (rozumowanie podobne do poniższego powtórzmy również, podając więcej szczegółów, w Przykładzie 2.3.12).

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dane przez $f(u) = u + \beta \pmod{2\pi}$, gdzie $\beta \notin \mathbb{Q}$ oraz \mathbb{S}^1 jest interpretowane jako przestrzeń ilorazowa przestrzeni $[0, 2\pi]$ przez relację sklejącą końce odcinka. Możemy znaleźć takie N , że orbita $\{f^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ma następującą własność: górna granica liczb kolejnych iteracji, dla których orbita 0 jest poza kulą $B(0, \varepsilon)$ jest nie mniejsza niż N . Mając dane N , rozważmy zbiór $\{f^n(0) : n = 0, \dots, N\}$ oraz zdefiniujmy $\varepsilon_N := \min\{d(0, f^n(0)) : n = 1, \dots, N\}$. Wtedy potrzebujemy co najmniej N iteracji punktu 0 , by trafić w kulę $B(0, \varepsilon)$, o ile tylko $\varepsilon \leq \varepsilon_N$ jest odpowiednio dobrane. Jeżeli weźmiemy teraz granicę górną, możemy dostać ciąg takich liczb naturalnych, który jest rozbieżny do $+\infty$ i którego wyrazy ograniczają od dołu liczbę iteracji niezbędnych do pierwszego powrotu w kulę. Stąd otrzymujemy żadaną własność.

Powyższe rozumowanie można teraz przetłumaczyć na przypadek opisany w przykładzie. Iteracje stają się obrotami (to jest: jeden segment orbity od dolnego do górnego boku odpowiedniego kwadratu) wzdłuż orbity na każdym \mathbb{T}_k , a pierwszy skok do kuli staje się pierwszym ponownym wejściem orbity x do kuli. Dostajemy z tego informację, że im mniejsze ε weźmiemy, tym więcej czasu orbita $o(x)$ potrzebuje na trafienie do kuli $B(\phi(x, t), \varepsilon)$ dla pewnego początkowego $t > 0$, niezależnie od doboru t .

Części pierwsza i druga rozdziału zaprezentowały wyniki dotyczące dwóch skrajnych wartości okresu asymptotycznego. Naturalnym jest pytanie o to, co dzieje się dla wartości skończonych i niezerowych. Odpowiedź nie jest obecnie znana, nawet gdy rozważamy przestrzenie właściwe.

Problem 2.2.4. Czy we właściwych przestrzeniach metrycznych prawdą jest, że jeżeli $0 < AP(x) < +\infty$, to zbiór graniczny $\omega(x)$ jest orbitą T -okresową? Czy prawdziwa jest również implikacja odwrotna?

Do tego problemu częściowo powrócimy w następnym rozdziale pracy.

2.3. Trajektorie asymptotycznie okresowe a inne uogólnienia okresu

W teorii układów dynamicznych można znaleźć inne podejście do definicji punktów asymptotycznie okresowych (i ich orbit). Poza klasycznym powracaniem oraz prawie-okresowością ([Bi, Bo, BS, NS]), Pelczar wprowadził pojęcie orbity dodatnio asymptotycznie okresowej ([P]), które zostało omówione w kilku pracach (między innymi [P, K]). Przytoczmy wspomnianą definicję.

Definicja 2.3.1. Załóżmy, że x nie jest punktem stacjonarnym. Trajektorja $o^+(x)$ jest nazywana *dodatnio asymptotycznie okresową*, gdy istnieje taka niezerowa liczba rzeczywista T , że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $s \geq 0$, że

$$d(\phi(t+T, x), \phi(t, x)) < \varepsilon \quad \text{dla } t \geq s.$$

Bez straty ogólności można zawsze założyć, że $T > 0$. W stosunku do wcześniej wprowadzonego pojęcia orbity asymptotycznie okresowej powyższa również skupia się na zachowaniu orbity w przyszłości oraz nie zakłada istnienia zbioru granicznego dla orbity. Zobaczmy wkrótce, że oba te pojęcia są różne (Przykłady 2.3.7 oraz 2.3.10). Główną obserwowalną różnicą jest uniwersalność synchronizacji orbity z jej przesunięciem czasowym.

Przytoczmy wspomniane przed chwilą definicje punktu prawie okresowego oraz powracającego. Zakładamy dalej, że (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz ϕ jest układem dynamicznym na X .

Definicja 2.3.2. Punkt $x \in X$ (oraz jego trajektorja) jest *powracający*, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $T > 0$, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$o(x) \subset B(\phi([t-T, t+T], x), \varepsilon).$$

Innymi słowy, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $T > 0$, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje takie $t_0 \in \mathbb{R}$, że

$$\alpha - T < t_0 < \alpha + T \quad \text{oraz} \quad d(\phi(t, x), \phi(t_0, x)) < \varepsilon.$$

Wprowadzenie pojęcia powracania przypisuje się Birkhoffowi, który również przedstawił kilka ważnych własności ([Bi]). Zaprezentujemy wybrane z nich ([Bi, BS]).

Twierdzenie 2.3.3. Niech ϕ będzie układem dynamicznym określonym na przestrzeni metrycznej (X, d) oraz niech $x \in X$.

- (1) Każda orbita w zwartym zbiorze minimalnym jest powracająca.

- (2) *Każdy zwarty podzbiór minimalny jest domknięciem orbity powracającej.*
 (3) *Jeżeli x jest powracający oraz $\overline{o(x)}$ jest zwarty, to $\overline{o(x)}$ jest zbiorem minimalnym.*
 (4) *W przestrzeni zupełnej domknięcie dowolnej orbity powracającej jest zwartym zbiorem minimalnym.*

Przechodzimy teraz do prawie okresowości.

Definicja 2.3.4. Podzbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest *względnie gęsty* w \mathbb{R} , gdy istnieje takie $L > 0$, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$D \cap [t - L, t + L] \neq \emptyset.$$

Definicja 2.3.5. Punkt $x \in X$ (oraz jego orbita) jest *prawie okresowy*, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki względnie gęsty podzbiór liczb $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$d(\phi(t, x), \phi(t + \tau_n, x)) < \varepsilon.$$

Definicja prawie okresowości pochodzi od Bohra ([**Bo**]). Liczne związki prawie okresowości z powracaniem podał Markov ([**M**]). W szczególności, dla naszych potrzeb odnotujmy następujący lemat (zobacz również [**BS**, **NS**]).

Lemat 2.3.6. *Jeżeli x jest prawie okresowy, to jest też powracający.*

Zaprezentujemy dalej brak relacji między okresem asymptotycznym oraz innymi wprowadzonymi powyżej pojęciami. Dla uproszczenia zapisu będziemy stosować następujące skróty: P.A.P. (dodatkowo asymptotycznie okresowa), A.P. (asymptotycznie okresowa).

Przykład 2.3.7 (orbita P.A.P., ale nie A.P.). Rozważmy układ dynamiczny na płaszczyźnie bez punktu $(0, 0)$, generowany przez układ równań różniczkowych zadanych we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{r}, & \text{dla } r > 0, \\ \vartheta' = 1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest

$$\begin{cases} r(t) = \ln t + C, \\ \vartheta(t) = t + D. \end{cases}$$

Bez straty ogólności w rozumowaniu, ustalając pewien warunek początkowy możemy przyjąć, że $C = D = 0$. Otrzymujemy, po zamianie współrzędnych

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \ln t, \\ y(t) = \sin t \ln t. \end{cases}$$

Proste obliczenia pokazują, że

$$(d((x(t+2\pi), y(t+2\pi)), (x(t), y(t))))^2 = \ln^2(2\pi + t) - \ln^2(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ruch jest zatem dodatnio asymptotycznie okresowy. Nie jest jednak asymptotycznie okresowy, gdyż $\ln r \rightarrow +\infty$, stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz $t > 0$ mamy $W(\phi(t, x), \varepsilon) = +\infty$

Powyższy przykład pokazuje również coś dość zaskakującego i nieintuicyjnego. Mianowicie orbita może być jednocześnie w pewnym sensie okresowa (dodatnio asymptotycznie okresowa), natomiast sama może być orbitą nieograniczoną.

Zanim przeanalizujemy przeciwną relację, przypomnimy definicję odwzorowania Poincarego ([Z]).

Niech M będzie rozmaitością (dla dalszych potrzeb wystarczy $M = \mathbb{R}^n$), a X polem wektorowym na M . Rozważmy na M układ dynamiczny ϕ oraz punkt T -okresowy p . Oznaczmy $x(t) := \phi(t, p)$. Niech dalej $\Sigma \subset M$ będzie rozmaitością kowymiaru 1, przecinającą transwersalnie rozwiązanie okresowe x w punkcie p , to znaczy $T_u M = T_u \Sigma \oplus \text{span} X(u)$ dla wszystkich u z pewnego otoczenia p w Σ .

Definicja 2.3.8. Rozmaitość Σ zdefiniowaną powyżej nazywamy *lokalną sekcją transwersalną* rozwiązania okresowego x w punkcie p .

Ponieważ p jest T -okresowy, mamy $\phi_T(p) = p \in \Sigma$. Niech teraz $U \subset \Sigma$ będzie otoczeniem punktu p w Σ . Definiujemy $P: U \rightarrow \Sigma$ następująco. Dla $u \in U$, niech $\tau(u) > 0$ będzie pierwszą chwilą czasową, w której orbita $o^+(u) \setminus \{u\}$ przecina Σ . Kładziemy $P(u) := \phi(\tau(u), u) \in \Sigma$ dla wszystkich $u \in U$.

Definicja 2.3.9. Funkcję $P: U \rightarrow \Sigma$ nazywamy *odwzorowaniem Poincarego* dla rozwiązania okresowego x punktu p . Lokalną sekcję transwersalną Σ nazywamy wtedy *sekcją Poincarego* przez punkt p .

Przykład 2.3.10 (orbita A.P., ale nie P.A.P.). Rozważmy chwilowo układ dynamiczny na pierścieniu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 2\}$, zdefiniowany przez układ we współrzędnych

biegunowych:

$$\begin{cases} r' = (r-1)(r-2), \\ \vartheta' = 1. \end{cases}$$

Niech S będzie sekcją Poincarego przez $p = (1, 0)$, która jest odcinkiem linii prostopadłej do wewnętrznego okręgu ograniczającego pierścieni. Niech P będzie odwzorowaniem Poincarego dla pewnego $x \in S$. Ciąg $(P^n(x))_{n=1}^{+\infty}$ jest wtedy zbieżny do p .

Niech $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rzutowaniem na pierwszą zmienną. Zdefiniujemy

$$I_k := \left[\pi_1(P^{k+1}(x)), \pi_1(P^k(x)) \right] \quad \text{dla } k \geq 0.$$

Wtedy rodzina $\{I_k : k \geq 0\}$ jest podziałem przedziału $(1, \pi_1(x))$.

Niech teraz $X := \overline{B}(0, 2) \setminus \overline{B}(0, 1)$ będzie wyposażona w metrykę euklidesową indukowaną z \mathbb{R}^2 . Zdefiniujemy $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ – ciąg wszystkich liczb wymiernych z przedziału $(0, 1)$. Zdefiniujemy nowy ciąg $(b_n)_{n=0}^{+\infty}$ dany przez relację $b_n := 2\pi a_n$ dla dowolnego $n \geq 0$. Dodatkowo, niech $c_0 := b_0$ oraz $c_k := \frac{b_k + b_{k-1}}{2}$. Wprowadzamy teraz następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \ell_k &:= \text{diam} I_k, & \text{dla } k \geq 0, \\ \xi_k &:= \frac{\ell_k}{2^{k+2}}, & \text{dla } k \geq 0, \\ I_k^m &:= \left[\pi_1(P^{k+1}(x) + \xi_k), \pi_1(P^k(x) - \xi_k) \right), & \text{dla } k \geq 0, \\ I_k^l &:= \left[\pi_1(P^{k+1}(x)), \pi_1(P^{k+1}(x) + \xi_k) \right), & \text{dla } k \geq 0, \\ I_k^r &:= \left[\pi_1(P^k(x) - \xi_k), \pi_1(P^k(x)) \right), & \text{dla } k \geq 0. \end{aligned}$$

Mamy $I_k = I_k^m \cup I_k^l \cup I_k^r$. Zdefiniujemy dwie funkcje afiniczne:

$$\begin{aligned} \Theta_k^l: I_k^l \ni r &\mapsto \frac{b_k - c_{k+1}}{\xi_k} \left(r - \pi_1(P^{k+1}(x)) \right) + c_{k+1}, & \text{dla } k \geq 0, \\ \Theta_k^r: I_k^r \ni r &\mapsto \frac{c_k - b_k}{\xi_k} \left(r - \pi_1(P^k(x)) + \xi_k \right) + b_k, & \text{dla } k \geq 0. \end{aligned}$$

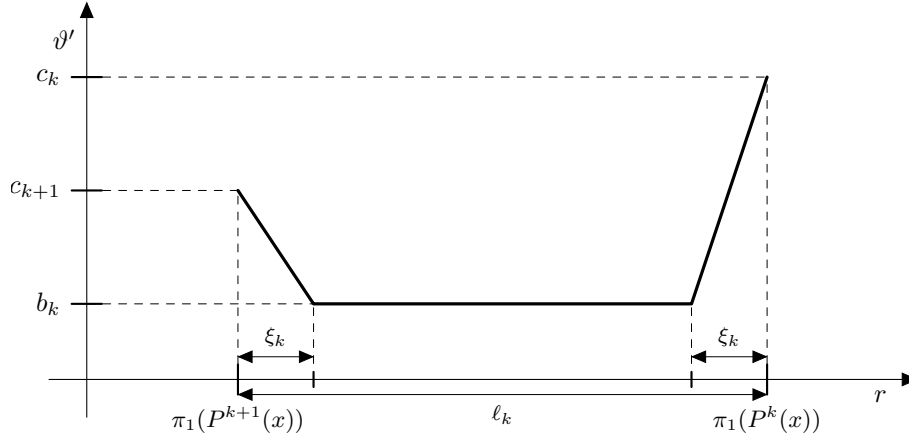
Zdefiniujemy (Rysunek 2.4):

$$\Theta: (1, \pi_1(x)) \ni r \mapsto \begin{cases} b_k, & r \in I_k^m \text{ dla pewnego } k \geq 0, \\ \Theta_k^l(r), & r \in I_k^l \text{ dla pewnego } k \geq 0, \\ \Theta_k^r(r), & r \in I_k^r \text{ dla pewnego } k \geq 0. \end{cases}$$

Jesteśmy przygotowani do zdefiniowania układu dynamicznego na X . Wykorzystujemy ponownie współrzędne biegunowe i wprowadzamy dynamikę przez układ równań

różniczkowych:

$$\begin{cases} r' = (r-1)(r-2), \\ \vartheta' = \Theta(r), \\ \vartheta' = b_0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} r \in (1, \pi_1(x)) \\ r \in [\pi_1(x), 2]. \end{array}$$



RYSUNEK 2.4. Jeden krok funkcji typu Cantora dla ϑ' .

Przyglądając się uważnie konstrukcji widzimy, że AP jest skończone, ale ze względu na „chaotyczne” zachowanie się orbity nie ma synchronizacji ruchu, która jest wymagana w definicji trajektorii dodatnio asymptotycznie okresowej.

Istotnie, niech y będzie dowolnym punktem orbity „nawijającej się” na zbiór $\mathcal{S}^1 := \partial B(0, 1)$ traktowany jako podzbiór \mathbb{R}^2 . Jeżeli $\varepsilon > 0$ oraz t jest tak duże, aby $W(\phi(t, y), \varepsilon) < +\infty$, to z konstrukcji wynika, że $|r_i - q_{i-1}| \in O(\varepsilon)$. W szczególności, z gęstości oraz faktu, że $\xi_k \rightarrow 0$ dla $k \rightarrow +\infty$, istnieje nieskończenie wiele takich indeksów $m \in \mathbb{N}$, że $2\pi + C\varepsilon > |r_m - q_m| > 2\pi - C\varepsilon$ dla pewnej stałej $C > 0$. Stąd po przejściu do granic otrzymujemy $\text{AP}(y) = 2\pi$.

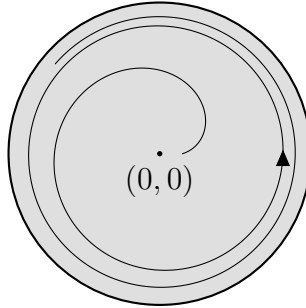
Ustalmy $T \leq 2\pi$. Pokażemy teraz, że takiego orbita punktu $x \in S$ sekcji Poincarého, że $d(y, \mathcal{S}^1) < \varepsilon$ (co możemy bez straty ogólności założyć) nie jest dodatnio asymptotycznie okresowa. Załóżmy, że udało nam się znaleźć takie $s > 0$, że dla wszystkich $t \geq s$ mamy $d(\phi(t+T, y), \phi(t, y)) < \varepsilon$. Rozważmy takie $t_0 > s$, że $y_0 := \phi(t_0, y) \in S$ oraz, że znajdziemy takie i_0 oraz $k > 0$, że $b := b_{i_0} + b_{i_0+1} + \dots + b_{i_0+k} < 9T/10$ oraz $b + b_{i_0+k+1} > 11T/10$, gdzie b_{i_0} odpowiada jest tak dobrane, aby dla pewnego i_0 jednym z końców przedziału I_{i_0} było b_{i_0} . W tym ustawieniu mamy $d(y_0, \phi(T, y_0)) > \varepsilon$. Sprzeczność. Analogiczne rozumowanie prowadzimy dla $T > 2\pi$.

Pokażemy teraz, że orbity asymptotycznie okresowe nie muszą być powracające. Wyniknie stąd również, że nie muszą być prawie okresowe.

Przykład 2.3.11 (orbita A.P., ale nie powracająca). Niech $X := \overline{B}((0, 0), 1)$ będzie wyposażona w metrykę euklidesową indukowaną z \mathbb{R}^2 . Zdefiniujmy układ dynamiczny na X , generowany przez układ równań różniczkowych zapisanych we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \vartheta' = 1, \end{cases}$$

Szkic układu przedstawia Rysunek 2.5.



RYSUNEK 2.5. Szkic układu zdefiniowanego w Przykładzie 2.3.11.

Prędkość kątowna jest stała, skąd łatwo sprawdzamy, że $AP(x) = 2\pi$ dla $0 < |x| \leq 1$. Z drugiej strony, orbita takiego punktu nie może być powracająca, gdyż nie wraca ona do żadnego otoczenia punktów z orbity będących blisko zbioru $\alpha(x) = \{(0, 0)\}$.

Na koniec podamy przykład orbity prawie okresowej, która nie jest asymptotycznie okresowa. Przykład ten czerpie swoją ideę z Przykładu 2.2.3.

Przykład 2.3.12 (orbita prawie okresowa, ale nie A.P.). Niech $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ oraz $I = [0, 1]$. Niech $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$ będzie torusem I^2 / \sim , gdzie \sim jest relacją sklejącą przeciwne boki kwadratu z zachowaniem orientacji.

Dynamika ϕ zadana jest przez układ równań różniczkowych (z punktu widzenia kwadratu)

$$\begin{cases} x' = 1, \\ y' = \alpha, \end{cases}$$

gdzie α jest niewymierne.

Dla tak zdefiniowanego ϕ dowolny punkt $x \in \mathbb{T}$ jest prawie okresowy ([BS, Przykład V 6.16]), ale nie jest asymptotycznie okresowy.

Aby pokazać, że istotnie żadna trajektoria potoku ϕ nie jest asymptotycznie okresowa, wykorzystamy rozumowanie analogiczne jak przedstawione w Przykładzie 2.2.3. Dla ustalenia uwagi niech $\varepsilon_0 := 17$ oraz $N_0 := 5$.

Krok 1. Niech $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, gdzie $\mathbb{S}^1 = I/_{0\sim 1}$ jest dane wzorem $f(x) = x + \alpha \pmod{1}$. Funkcja f jest ciągłą izometrią, obracającą punkty o kąt niewymierny α . Ustalmy teraz $N_1 > N_0$ i niech

$$\varepsilon_{N_1} := \min\{d(0, f^n(0)) \mid n = 1, \dots, N_1\}.$$

Z definicji ε_{N_1} wynika, że wymagane jest więcej niż N_1 iteracji punktu 0 tak, aby wrócić do kuli $B(0, \varepsilon_{N_1})$. Niech $M_1 > N_1$ będzie pierwszą iteracją, po której 0 jest w kuli. Niech $x_1 := f^{M_1}(0)$ oraz niech

$$\eta_1 := \frac{1}{2} \min\{\min\{d(f^i(0), B(0, \varepsilon_{N_1})) \mid i = 1, \dots, M_1 - 1\}, \min\{d(x_1, -\varepsilon_{N_1}), d(x_1, \varepsilon)\}\}.$$

Z tego, że f^{M_1} jest izometrią wynika, że jeżeli $d(x, 0) < \eta_1$, to $d(f^{M_1}(x), x_1) < \eta_1$. W szczególności każde $f^{M_1}(x) \in B(0, \varepsilon_{N_1})$ oraz M_1 jest pierwszą iteracją punktu x , dla której taka iteracja jest w kuli $B(0, \varepsilon_{N_1})$.

Krok 2. Orbita punktu 0 jest gęsta w \mathbb{S}^1 , więc istnieje przeliczalny ciąg $(y_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$ takich elementów \mathbb{S}^1 , że $d(0, y_{n,1}) < \eta_1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz każde $y_{n,1}$ jest pewną iteracją punktu 0. Wynika stąd w szczególności, że dla przeliczalnie wielu elementów orbity punktu 0 potrzebujemy co najmniej N_1 iteracji, po których po raz pierwszy wrócimy do kuli $B(0, \varepsilon_{N_1})$ punktu 0. Stąd, w szczególności, górna granica takiego ciągu iteracji rozważanego dla każdej iteracji zera jest ograniczona od dołu przez N_1 .

Krok 3. Niech teraz $N_2 > 2M_1$ i niech

$$\varepsilon_{N_2} := \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_{N_1}, \min\{d(0, f^n(0)) \mid n = 1, \dots, N_2\}\}.$$

Dla N_2 oraz ε_{N_2} potwarzamy Krok 1 oraz Krok 2. Postępując tak indukcyjnie otrzymujemy dwa takie ciągi $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ oraz $(\varepsilon_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$, że $\varepsilon_{N_k} \rightarrow 0$ oraz $N_k \rightarrow +\infty$, gdy $k \rightarrow +\infty$.

Krok 4. Z jednorodności układu ϕ oraz stałej prędkości, z jaką poruszamy się po orbitach, wystarczy wykazać, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W((0, 0), \varepsilon) = +\infty,$$

(to jest: przyjmujemy $x = (0, 0)$ oraz $t = 0$). Zauważmy, że powyższe w istocie sprawdza się do rozumowania zawartego w Krokach 1–3. Istotnie, iteracje funkcji f są odpowiednikiem dokonania jednego obrotu (jednego segmentu orbity od dolnego do górnego

boku kwadratu) na \mathbb{T} . Pierwsza iteracja wejścia w kulę $B(0, \tilde{\varepsilon})$ jest odpowiednikiem czasu ponownego wejścia do kuli $B((0, 0), \varepsilon)$ (to jest: ciągu $r_{(0,0)}$). Z Kroku 3 wynika, że dla $\varepsilon \rightarrow 0$ mamy $\limsup w_0((0, 0), \varepsilon) > N(\varepsilon)$ oraz $N(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Oznacza to, że $AP(x) = +\infty$.

Topologiczne własności zbiorów granicznych

3.1. Preliminaria i przykład

Zwartość i spójność to jedne z podstawowych własności, których oczekujemy od zbiorów granicznych. Można je badać za pomocą różnych narzędzi, wnioskować o nich na podstawie własności orbit, otoczenia zbioru granicznego lub własności przestrzeni fazowej. Przypadek najbardziej elementarny jest wtedy, gdy przestrzeń fazowa X jest (lokalnie) zwarta (Lemat 3.1.1) – fakt ten podawany jest na większości podstawowych kursów z układów dynamicznych.

Badanie topologicznych własności zbiorów granicznych jest znaczącym wkładem w teorię; można dzięki temu, między innymi, opisać dynamikę układu na zbiorze granicznym i jego otoczeniu. Różne wyniki łączące te fakty zostały zawarte w [BS]. Bacciotti i Kalouptsidis są autorami takich rezultatów łączących dynamikę i topologię, jak przyciąganie czy stabilność w wielosystemach dynamicznych (ang. *dynamical polissystem*) ([BK]). W tym rozdziale podamy kilka innych wyników świadczących o znaczeniu własności topologicznych.

Można odnaleźć wiele przykładów zastępowania zwartości słabszymi założeniami. Jedno z takich podejść jest zaprezentowane w [GR], gdzie zarówno zbiory graniczne jak i pierwsze dodatnie przedłużenia graniczne są badane w kontekście przestrzeni „*c*-first countable”. Bardziej konkretne podejście przedstawione jest w [BK]. W tym rozdziale (podrozdziały drugi i trzeci) pokażemy inne kryteria opisujące dynamiczne własności orbit oraz topologiczne własności przestrzeni, które implikują topologiczne własności zbiorów granicznych.

Przez cały rozdział, jeżeli wprowadzamy biegunowy układ współrzędnych, to r jest promieniem, a ϑ jest kątem liczonym od osi OX w kierunku zgodnym z dodatnią orientacją płaszczyzny.

Jako punkt odniesienia do dalszej analizy zestawimy podstawowe własności zbiorów granicznych ([BS, NS]).

Lemat 3.1.1. *Załóżmy, że (X, d) przestrzenią metryczną, ϕ jest potokiem na X oraz $x \in X$.*

- (i) *Zbiór $\omega(x)$ jest domknięty i niezmienniczy.*
- (ii) *Każda składowa spójna zbioru $\omega(x)$ jest domknięta i niezmiennicza.*
- (iii) *Załóżmy dodatkowo, że (X, d) jest zwarta. Wtedy $\omega(x)$ jest niepusty, zwarty i spójny.*
- (iv) *Załóżmy dodatkowo, że (X, d) jest lokalnie zwarta. Wtedy $\omega(x)$ jest spójny, o ile jest zwarty. Ponadto, jeżeli $\omega(x)$ nie jest zwarty, to żadna składowa spójna tego zbioru nie jest zwarta.*

Lemat 3.1.1 opisuje bardzo prostą i pożądaną sytuację, w której przestrzeń fazowa X jest (lokalnie) zwarta. Naturalnym pytaniem jest, czy zwartość X można zastąpić innym, słabszym warunkiem. Rozważmy następujący przykład.

Przykład 3.1.2. Rozważmy przestrzeń $X := B((0, 0), 1) \cup B((1, 0), 1/2) \cup B((-1, 0), 1/2)$. z metryką euklidesową, indukowaną z płaszczyzny.

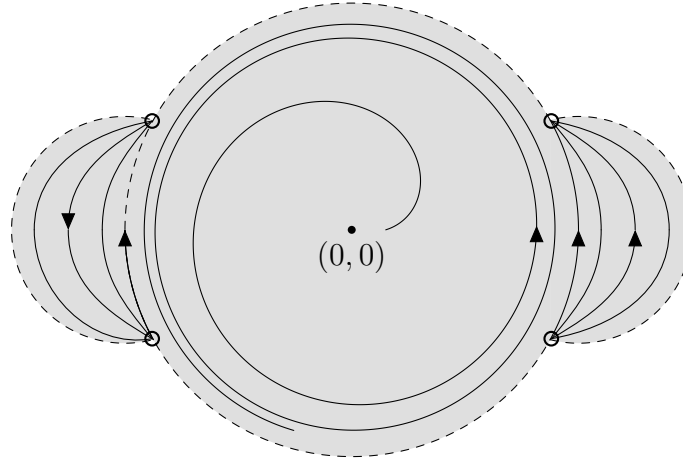
Zdefiniujmy na X lokalny układ dynamiczny ϕ . Niech $x \in X$ spełnia warunek $\|x\| \leq 1$. Dynamika dla takich x jest zadana przez układ równań różniczkowych we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \vartheta' = 1. \end{cases}$$

Jeżeli x jest takie, że $\|x\| < 1$, to $I_x = \mathbb{R}$. Jeżeli teraz $\|x\| = 1$, to orbity punktów $(1, 0)$ oraz $(-1, 0)$ są zdefiniowane na przedziałach $I_{(-1, 0)} = I_{(1, 0)} = (-\arccos 7/8, \arccos 7/8)$ (definiuje to jednocześnie przedziały dla wszystkich x o normie jednostkowej).

Rozważmy teraz rodzinę okręgów $\{C_w \mid w \in (0, 1)\}$, każdy C_w jest zdefiniowany przez równanie $x^2 - 2xw + y^2 = 1 - 7w/4$ (tutaj x jest odcięta, a y rzędną układu kartezjańskiego współrzędnych). Wybierzmy dowolny $u \in X$ i taki, że $\|u\| > 1$ oraz odcięta punktu u jest dodatnia. Orbita takiego punktu jest zdefiniowana tak, że pokrywa się z łukiem $C_w \cap B((1, 0), 1/2)$, gdzie C_w jest wybrane tak, aby $u \in C_w$ dla pewnego, jednoznacznie określonego $w \in (0, 1)$. Zakładamy ponadto, że ruch na każdej trajektorii punktu u odbywa się ze stałą prędkością kątową oraz, że $I_u = (-\arccos 7/8, \arccos 7/8)$ o ile u jest takie, że rzędna jest równa 0 (Rysunek 3.1). Analogicznie definiujemy ϕ wewnątrz $B((-1, 0), 1/2) \setminus B((0, 0), 1)$.

Z konstrukcji wynika, że $\text{AP}(x) = 2\pi < +\infty$, o ile $x \in X$ jest takie, że $0 < \|x\| < 1$, ale dla takich x zbiór $\omega(x)$ nie jest ani zwarty, ani spójny.

RYSUNEK 3.1. Szkic potoku ϕ z Przykładu 3.1.2.

Możemy zauważyć, że pomimo iż przestrzeń z przykładu jest ograniczona oraz lokalnie zwarta, zbiór graniczny $\omega(x)$ traci topologiczne własności (nie jest ani zwarty, ani spójny). Wydaje się więc, że potrzebna może być własność silniejsza od lokalnej zwartości. Motywuje to zastosowanie właściwych przestrzeni metrycznych i własności, które te przestrzenie posiadają.

Odnotujmy, że lokalny układ zdefiniowany w Przykładzie 3.1.2 jest określony na przestrzeni, która nie jest właściwa. Jednakże przestrzenie właściwe również dopuszczają zbiory graniczne, które nie są ani zwarte, ani spójne. Łatwo można skonstruować przykład w \mathbb{R}^3 , w którym zbiór graniczny pewnego punktu jest złożony z trzech rozłącznych, parami prostopadłych prostych. Z tej obserwacji wynika, że potrzebne jest ustawienie dodatkowego kryterium tak, aby odzyskać zwartość i spójność. Można to osiągnąć wykorzystując wprowadzone wcześniej pojęcie okresu asymptotycznego.

Przykład 3.1.2 opisuje ponadto sytuację, w której $AP(x)$ jest skończony dla punktów niestałych w $B((0,0),1)$, ale zbiór graniczny dla takich punktów nie jest ani zwarty, ani spójny. Ponadto przestrzeń (X,d) z przykładu nie jest przestrzenią właściwą. Z tego, co wywnioskowaliśmy do tej pory wynika więc, że założenie tylko jednego z warunków: właściwości przestrzeni lub nierówności $AP(x) < +\infty$ nie wystarczy. Jednakże połączenie obu warunków jest wystarczające. Zagadnienie to rozwiążemy w kolejnej części rozdziału.

Na koniec tej części rozdziału przytoczymy dwie ważne definicje. Zaczniemy od pojęcia przyciągania ([BS], Lemat 2.1.1).

Definicja 3.1.3. Zbiór $M \subset X$ przyciąga punkt x (lub równoważnie przyciąga dodatnią orbitę $o^+(x)$) jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $T > 0$, że dla dowolnego $t > T$ mamy $d(\phi(t,x), M) < \varepsilon$.

Ponadto przypomnijmy definicję stabilności w sensie Lagrange'a ([BS]).

Definicja 3.1.4. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, ϕ potokiem na X oraz $x \in X$. Ruch punktu x (orbita punktu x) jest *stabilny w sensie Lagrange'a*, jeżeli zbiór $\overline{o^+(x)}$ jest zwarty.

3.2. Własności topologiczne

Wiadomo, że przy pewnych założeniach zbiór graniczny jest zwarty, spójny oraz przyciągający (Lemat 2.1.1). W tej części rozdziału wprowadzimy inne kryterium, które implikuje topologiczne własności.

W Uwadze 1.2.18 opisaliśmy przypadek, w którym $AP(x)$ można zdefiniować dla lokalnych układów dynamicznych. Rozumowania w dalszej części są prowadzone dla globalnych układów, można je jednak również przeprowadzić analogicznie dla układów lokalnych.

Uwaga 3.2.1. Wyniki dotyczące okresu asymptotycznego, wykazane w tym podrozdziale, pozostają prawdziwe dla lokalnych semi-układów dynamicznych, o ile w założeniach dotyczących punktu $x \in X$ dodamy, że $I_x \supset [0, +\infty)$.

Odnotujmy następujące twierdzenie charakteryzujące trajektorie stabilne w sensie Lagrange'a ([BS]).

Twierdzenie 3.2.2. *Niech (X, d) będzie lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, ϕ potokiem na X oraz $x \in X$. Wtedy trajektoria punktu x jest stabilna w sensie Lagrange'a wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\omega(x)$ jest niepusty, zwarty i spójny.*

W szczególności mamy również następujący wniosek.

Wniosek 3.2.3. *Niech $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie układem dynamicznym i niech $x \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli zbiór $o^+(x)$ jest ograniczony, to x jest stabilny w sensie Lagrange'a.*

Powyższy wniosek można łatwo uogólnić na przypadek właściwych przestrzeni metrycznych. Poniższe twierdzenie łatwo wynika z Twierdzenia 3.2.2, prezentujemy jednak niezależny oraz prosty dowód.

Twierdzenie 3.2.4 ([G2]). *Niech X będzie właściwą przestrzenią metryczną i niech $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ będzie układem dynamicznym. Wybierzmy taki $x \in X$, że $o^+(x)$ jest ograniczony. Wtedy x jest stabilny w sensie Lagrange'a.*

Dowód. Zbiór $o^+(x)$ jest ograniczony, więc $o^+(x) \subset B(0, R)$ dla pewnego dostatecznie dużego $R > 0$, a więc $o^+(x)$ jest zawarty w pewnym zwartym zbiorze $\overline{B}(0, R)$. Wynika stąd, że $\overline{o^+(x)}$ jest zwarty. \square

W szczególności Twierdzenie 3.2.4 pozwala na scharakteryzowanie orbit ograniczonych wyłącznie w języku topologii zbiorów granicznych.

Wniosek 3.2.5. *Niech (X, d) będzie właściwą przestrzenią metryczną, ϕ układem dynamicznym na X oraz $x \in X$. Wtedy $o^+(x)$ jest zbiorem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(x)$ jest zbiorem zwartym.*

Uwaga 3.2.6. Teza Twierdzenia 3.2.4 nie pozostaje prawdziwa w lokalnie zwartych przestrzeniach metrycznych dla lokalnych układów dynamicznych (Przykład 3.1.2).

Głównym celem podrozdziału jest teraz udowodnienie następnego twierdzenia. Pozwoli ono częściowo uzupełnić lukę pozostawioną dla punktów z orbitami o skończonym okresie asymptotycznym, opisaną w rozdziale drugim.

Twierdzenie 3.2.7 ([G2]). *Załóżmy, że (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną, ϕ jest potokiem na X oraz $x \in X$. Jeżeli $AP(x) < +\infty$, to x jest stabilny w sensie Lagrange'a.*

Mając Twierdzenie 3.2.4 wystarczy pokazać, że orbita punktu x jest ograniczona. Zakończmy to dowód Twierdzenia 3.2.7. W dalszej części pracy, dla wygody Czytelnika, udowodnimy niezależnie od wspomnianego twierdzenia spójność zbioru granicznego (Twierdzenie 3.2.9).

Twierdzenie 3.2.8 ([G2]). *Załóżmy, że (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną, ϕ jest potokiem na X oraz $x \in X$. Jeżeli $AP(x) < +\infty$, to $o^+(x)$ jest zbiorem ograniczonym.*

Co więcej, twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

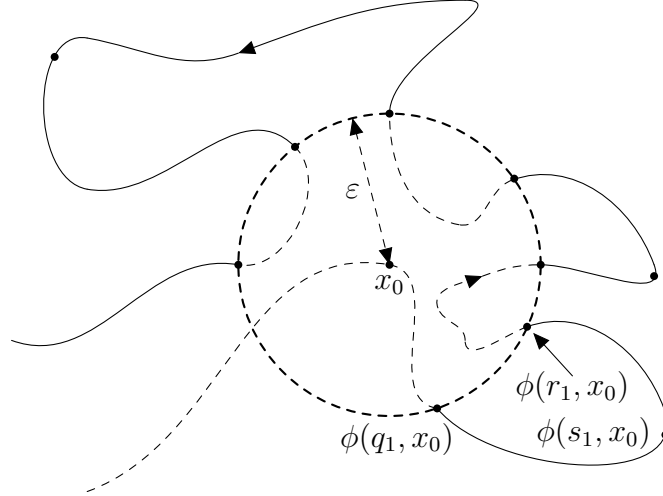
Dowód. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $o^+(x)$ nie jest ograniczony. Ze względu na to, że $AP(x)$ jest ograniczony, można znaleźć taką liczbę $\varepsilon > 0$ oraz czas \tilde{t} , że $W(\phi(\tilde{t}, x), \varepsilon)$ jest ograniczona. Wynika stąd, że zbiór $W_{\phi(\tilde{t}, x), \varepsilon}$ ma wszystkie elementy ograniczone przez pewną dodatnią liczbę K .

Niech $x_0 := \phi(\tilde{t}, x)$. Weźmy ciągi $(q_i)_{i=1}^{+\infty}$ i $(r_i)_{i=1}^{+\infty}$ z definicji asymptotycznego okresu dla x_0 . Odnotujmy, że $r_i - q_i < K$ dla $i \geq 1$. Każdy ze zbiorów $\phi([q_i, r_i], x_0)$ jest zwarty,

zatem dla wszystkich $i \geq 1$ można znaleźć takie $s_i \in [q_i, r_i]$, że

$$d(y_i, B(x_0, \varepsilon)) = \sup_{t \in [q_i, r_i]} d(\phi(t, x_0), B(x_0, \varepsilon)),$$

gdzie $y_i := \phi(s_i, x_0)$ (Rysunek 3.2). Ponownie, $s_i - q_i < K$ dla $i \geq 1$.



RYСУNEK 3.2. Definicja ciągów $(q_i)_{i=1}^{+\infty}$, $(r_i)_{i=1}^{+\infty}$ i $(s_i)_{i=1}^{+\infty}$ wykorzystanych w dowodzie Twierdzenia 3.2.8. Wyróżnione kropki wskazują punkty wykorzystane w konstrukcji ciągów.

Wyberzmy podciąg $(i_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ liczb naturalnych spełniający następujące warunki:

- (1) $d(y_{i_k}, B(x_0, \varepsilon)) \rightarrow +\infty$, gdy $k \rightarrow +\infty$,
- (2) $\phi(q_{i_k}, x) \rightarrow \tilde{x}$, gdy $k \rightarrow +\infty$,
- (3) $s_{i_k} - q_{i_k} \rightarrow \tilde{s}$, gdy $k \rightarrow +\infty$.

Własność (1) wynika z początkowego założenia oraz z doboru ciągu $(y_i)_{i=1}^{+\infty}$. Własność (2) jest konsekwencją zwartości zbioru $\partial B(x_0, \varepsilon)$. Wreszcie, własność (3) wynika z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa.

Ciągłość ϕ gwarantuje, że

$$y_{i_k} = \phi(s_{i_k}, x_0) = \phi(s_{i_k} - q_{i_k}, \phi(q_{i_k}, x_0)) \rightarrow \phi(\tilde{s}, \tilde{x}),$$

ale z (1) wynika, że ciąg $(y_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ nie jest ograniczony, zatem nie może mieć granicy. Sprzeczność kończy dowód.

Pokażemy teraz, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Rozważmy zbiór $X := \overline{B}((0, 0), 2)$ wyposażony w metrykę euklidesową dziedziczną z \mathbb{R}^2 . Niech ϕ będzie układem

dynamicznym na X generowanym przez układ równań w biegunowym układzie współrzędnych:

$$\begin{cases} r' = r(2 - r), \\ \vartheta' = \vartheta^{-\frac{1}{k}}, \end{cases}$$

gdzie $k \geq 1$ jest dowolne, ale ustalone. Można sprawdzić, że $\omega((1, 1)) = \partial B((0, 0), 2)$, ale $\text{AP}((1, 1)) = +\infty$, co wynika z definicji okresu asymptotycznego, lub bezpośrednio z [G1, Twierdzenie 2.2.1]. \square

Twierdzenie 3.2.9 ([G2]). *Założmy, że (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną oraz ϕ jest potokiem na X . Wybierzmy $x \in X$ i założmy, że $\text{AP}(x) < +\infty$. Wtedy $\omega(x)$ jest zbiorem spójnym.*

Co więcej, twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Dowód. Przypadek $\omega(x) = \emptyset$ jest oczywisty.

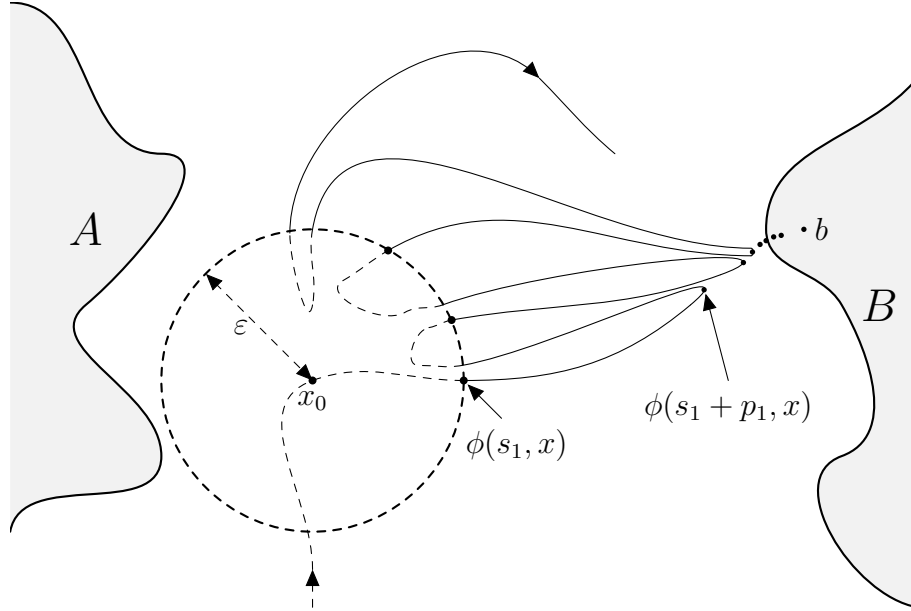
Założmy, że $\omega(x)$ jest niepusty i nie jest spójny. Niech $\omega(x) = A \cup B$, gdzie A i B są takimi domkniętymi i niepustymi zbiorami, że $A \cap B = \emptyset$. Z Twierdzenia 3.2.8 wynika, że $\sigma^+(x)$ jest ograniczona, zatem z Twierdzenia 3.2.4 wynika, że $\omega(x)$ jest zwarty (nie wnioskujemy z tego twierdzenia spójności). Zdefiniujmy wobec tego $d := d(A, B) > 0$ i wybierzmy takie $\varepsilon > 0$, że $\varepsilon < \frac{d}{4}$. Możemy znaleźć taki czas \tilde{t} , że granica $W(\phi(\tilde{t}, x), \varepsilon)$ jest skończona, a zatem każda z liczb $W(\phi(s, x), \varepsilon)$ jest skończona, o ile $s \geq \tilde{t}$. Wynika stąd w szczególności, że zbiór $W_{\phi(\tilde{t}, x), \varepsilon}$ składa się z elementów wspólnie ograniczonych dodatnią liczbą L . Oznaczmy $s_0 := \tilde{t}$ i $x_0 := \phi(s_0, x)$. Bez straty ogólności (z doboru epsilon) możemy założyć, że $B(x_0, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ (jeżeli tak nie jest, to $B(x_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$).

Wybierzmy dwa ciągi $(p_n)_{n=1}^{+\infty}$ i $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$, dla których $\phi(s_n, x) \in \partial B(x_0, \varepsilon)$ i $\phi(s_n + p_n, x) \rightarrow b \in B$. Co więcej, możemy założyć, że $\phi([s_n, p_n], x) \cap B(x_0, \varepsilon) = \emptyset$ dla wszystkich $n \geq 1$ (Rysunek 3.3). Odnotujmy, że $p_n < L$ dla $n \geq 1$.

Możemy teraz znaleźć taki podciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liczb naturalnych, że następujące warunki są spełnione:

- (1) $p_{n_k} \rightarrow p$, gdy $k \rightarrow +\infty$,
- (2) $\phi(s_{n_k}, x) \rightarrow x_s$, gdy $k \rightarrow +\infty$.

Pierwszy warunek wynika z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa, drugi to konsekwencja zwartości zbioru $\partial B(x_0, \varepsilon)$.



RYSUNEK 3.3. Rysunkowy szkic dowodu Twierdzenia 3.2.9.

Z ciągłości ϕ wynika, że

$$\phi(s_{n_k} + p_{n_k}, x) = \phi(p_{n_k}, \phi(s_{n_k}, x)) \rightarrow \phi(p, x_s),$$

ale z drugiej strony

$$\phi(s_{n_k} + p_{n_k}, x) \rightarrow b \in B,$$

więc $b = \phi(p, x_s)$. Zbiór B , jako składowa (lub suma składowych) zbioru granicznego, jest niezmienniczy oraz $x_s \notin B$, sprzeczność.

Aby pokazać, że twierdzenie odwrotne nie zachodzi, można ponownie wykorzystać przykład podany w Twierdzeniu 3.2.8. \square

Udowodnimy teraz Twierdzenie 3.2.7.

Dowód Twierdzenia 3.2.7. Twierdzenie 3.2.8 implikuje, że zbiór $o^+(x)$ jest ograniczony. Wystarczy teraz zastosować Twierdzenie 3.2.4. Spójność wynika niezależnie z Twierdzenia 3.2.9. \square

Z dowodów Twierdzenia 3.2.8 oraz Twierdzenia 3.2.9 można również wywnioskować, że implikacja odwrotna do tej z Twierdzenia 3.2.7 jest fałszywa.

Powyższe wyniki można połączyć z pojęciem przyciągania. Związek ten przedstawiony jest w Twierdzeniu 3.2.11, poprzedzonym następującym lematem.

Lemat 3.2.10 ([BK, Twierdzenie 4.7], [G1]). *Załóżmy, że (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną oraz ϕ jest potokiem na X . Jeżeli zbiór graniczny $\omega(x)$ punktu x jest niepusty i ograniczony, to $\omega(x)$ przyciąga punkt x .*

Dowód. Prowadzimy dowód nie wprost. Weźmy takie $\varepsilon > 0$, że dla dowolnego $T > 0$ mamy

$$\sup_{t>T} d(\phi(t, x), \omega(x)) \geq \varepsilon.$$

Możemy znaleźć taki ciąg czasów $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, że $t_n \nearrow +\infty$ oraz

$$2\varepsilon \geq d(\phi(t_n, x), \omega(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zbiór $\omega(x)$ jest ograniczony, więc $(\phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony. Korzystając ze zwartości kuli domkniętej, ograniczającej ciąg, wybieramy podciąg zbieżny $(\phi(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ i oznaczamy jego granicę przez y . Wynika stąd, że $y \in \omega(x)$, ale również $d(y, \omega(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Sprzeczność. \square

Twierdzenie 3.2.11 ([G2]). *Załóżmy, że (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną, ϕ potokiem na X oraz $x \in X$. Jeżeli $\text{AP}(x) < +\infty$, to $\omega(x)$ przyciąga orbitę punktu x .*

Co więcej, twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Dowód. Twierdzenie 3.2.7 gwarantuje, że $\omega(x)$ jest niepusty i ograniczony. Stosujemy teraz Lemat 3.2.10.

Przykład asymptotycznie nieokresowego punktu, który jest przyciągany przez jego zbiór ω -graniczny został podany w Przykładzie 2.2.3. Wprost z konstrukcji wynika, że zbiór graniczny przyciąga orbitę punktu x . \square

Wróćmy teraz do problemu istnienia zbiorów minimalnych w zadanych zbiorach. W dalszej części poszukujemy takich zbiorów w zbiorach granicznych punktów asymptotycznie okresowych.

Twierdzenie 3.2.12. *Załóżmy, że ϕ jest semi-potokiem na właściwej przestrzeni metrycznej (X, d) . Jeśli $\text{AP}(x) < +\infty$ dla pewnego punktu $x \in X$, to zbiór $\omega(x)$ zawiera co najwyżej jeden podzbiór minimalny.*

Dowód. Prowadzimy dowód nie wprost. Niech A oraz B będą dwoma różnymi zbiorami minimalnymi. Z Twierdzenia 1.2.9 wynika, że istnieją taki $x \in A$ oraz $y \in B$, że $\overline{o(x)} = A$ oraz $\overline{o(y)} = B$. W szczególności, $d(o(x), o(y)) > 0$. Stosujemy teraz Twierdzenie 2.2.2. \square

W Twierdzeniu 3.2.12 wykazaliśmy, wykorzystując jedynie wiedzę z rozdziałów pierwszego i drugiego, że we właściwych przestrzeniach metrycznych skończony okres asymptotyczny implikuje ograniczenie na liczbę podzbiorów minimalnych w zbiorze granicznym. Możemy teraz to twierdzenie wzmocnić, wykorzystując rezultaty z tego rozdziału.

Twierdzenie 3.2.13. *Załóżmy, że ϕ jest semi-potokiem na właściwej przestrzeni metrycznej (X, d) . Jeśli $AP(x) < +\infty$ dla pewnego punktu $x \in X$, to zbiór $\omega(x)$ zawiera dokładnie jeden (zwarty) podzbiór minimalny.*

Dowód. Jednoznaczność wynika z Twierdzenia 3.2.12. Wykorzystując fakt, $AP(x) < +\infty$, na mocy Twierdzenia 3.2.7 wnioskujemy, że x jest stabilny w sensie Lagrange'a. Wystarczy teraz zastosować Twierdzenie 1.2.9. \square

Podsumujmy – powyższe wyniki dostarczają jedynie warunków wystarczających. Nie podajemy żadnych warunków koniecznych. Z podanych kontrprzykładów wynika, że topologiczne własności zbiorów granicznych nie implikują żadnego konkretnego zachowania się orbity w kontekście okresu asymptotycznego. Nawet gdy zbiór graniczny jest asymptotycznie stabilny, zwarty i spójny, wartość $AP(x)$ może być całkowicie dowolna.

Pokażemy teraz pewne zastosowanie przedstawionych powyżej wyników. Przypomnimy najpierw klasyczne twierdzenie z jakościowej teorii równań różniczkowych na płaszczyźnie ([C]).

Twierdzenie 3.2.14 (Poincaré, Bendixson). *Niech $X = \mathbb{R}^2$ oraz ϕ będzie układem dynamicznym na X , generowanym przez pole wektorowe klasy \mathcal{C}^1 . Niech ponadto dla pewnego $x \in X$ zbiór $\omega(x)$ będzie zwarty i niepusty. Jeśli wtedy $\omega(x)$ nie zawiera ani jednego punktu stacjonarnego, to jest orbitą okresową.*

Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe, gdy za X weźmiemy podzbiór otwarty i jednospójny w \mathbb{R}^2 .

Twierdzenie 3.2.15. *Niech $X = \mathbb{R}^2$ oraz ϕ będzie układem dynamicznym generowanym przez pole wektorowe klasy \mathcal{C}^1 . Jeśli $AP \in (0, +\infty)$ dla pewnego punktu $x \in X$, to $\omega(x)$ jest orbitą okresową.*

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 3.2.7 wiemy, że zbiór graniczny jest niepusty i zwarty. Z drugiej strony, gdyby $\omega(x)$ zawierał punkt stacjonarny, to Twierdzenie 2.2.1 implikuje równość $AP(x) = +\infty$. Sprzeczność. Wobec tego $\omega(x)$ nie zawiera punktów stacjonarnych. Wystarczy teraz zastosować twierdzenie Poincarégo–Bendixsona. \square

Twierdzenie udowodnione powyżej odpowiada częściowo na postawiony w rozdziale drugim problem, dotyczący klasyfikacji orbit okresowych za pomocą orbit asymptotycznie okresowych. Rozwiązany został przypadek dla płaszczyzny, typowej dla wielu układów dynamicznych na przestrzeni metrycznej. Można jednak sformułować analogiczny problem, dotyczący przestrzeni \mathbb{R}^n .

Problem 3.2.16. Czy jest prawdą, że jeżeli $0 < AP(x) < +\infty$, to zbiór graniczny $\omega(x)$ jest orbitą okresową?

3.3. Elementy topologii algebraicznej

Ten podrozdział poświęcony jest wybranym przykładom zastosowań wykazanych twierdzeń w badaniu dynamiki układu, gdy pewne własności przestrzeni lub zbioru opisane są w języku topologii algebraicznej. Zaczniemy od przypomnienia podstawowych pojęć ([Ha, DG]; również wszystkie klasyczne twierdzenia oraz przykłady pochodzą z cytowanych pozycji).

Definicja 3.3.1. Niech $f: X \rightarrow X$ oraz $g: X \rightarrow X$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Powiemy, że f jest homotopijne z g , co będziemy zapisywać przez $f \simeq g$, gdy istnieje taka ciągła funkcja $H: [0, 1] \times X \rightarrow X$, że $H(0, x) = f(x)$ oraz $H(1, x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Definicja 3.3.2. Przestrzeń topologiczna X ma *slabą własność punktu stałego*, gdy dla dowolnego odwzorowania $f: X \rightarrow X$ homotopijnego z identycznością na X , f ma punkt stały, to jest istnieje taki $x \in X$, że $f(x) = x$.

Definicja 3.3.3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Przestrzeń X nazywamy *euklidesowym retraktem otoczeniowym* (w skrócie: *ENR-em*), jeżeli istnieje zbiór otwarty V w przestrzeni \mathbb{R}^n oraz funkcje $r: V \rightarrow X$ i $s: X \rightarrow V$, dla których $r \circ s = \text{Id}_X$.

Następujący lemat pozostawiamy bez dowodu ([DG]).

Lemat 3.3.4. Niech ϕ będzie układem dynamicznym na zwartej przestrzeni metrycznej (X, d) , która ma *slabą własność punktu stałego*. Wtedy ϕ ma punkt stacjonarny w X .

Z powyższego lematu wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3.5. Niech ϕ będzie układem dynamicznym na przestrzeni metrycznej (X, d) . Wybierzmy $x \in X$ i założmy, że zbiór $\omega(x) = S$ jest zwartym ENR-em mającym *slabą własność punktu stałego*. Jeżeli $\text{card } S > 1$, to $AP(x) = +\infty$.

Dowód. Na mocy Lematu 3.3.4 w zbiorze S jest punkt stacjonarny potoku ϕ . Teza wynika teraz z Twierdzenia 2.2.1. \square

Przypomnijmy teraz definicję liczby Lefschetza oraz charakterystyki Eulera. Niech X będzie zwartym ENR-em, a $f: X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech H będzie funktorem homologii singularnych o współczynnikach w \mathbb{Q} . Niech $H(f): H(X) \rightarrow H(X)$ będzie homomorfizmem indukowanym w homologiach.

Definicja 3.3.6. Wielkość

$$L(f) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr} H_n(f) \in \mathbb{Z}$$

nazywamy *liczbą Lefschetza* odwzorowania f , gdzie $\operatorname{tr} H_n(f)$ jest śladem endomorfizmu $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(X)$.

Jeżeli $f = \operatorname{Id}_X$, to $\chi(X) := L(\operatorname{Id}_X)$ nazywamy *charakterystyką Eulera* przestrzeni X . Wtedy też

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dim H_n(X).$$

Powyższe definicje są poprawnie określone, gdyż wiadomo, że zwarte ENR-y mają tylko skończenie wiele niezerowych homologii $H_n(X)$ oraz wszystkie one są skończonego wymiaru. Odnotujmy również, że liczby Lefschetza są niezmiennikami przekształceń homotopijnych.

Przypomnijmy jedno z klasycznych twierdzeń o punkcie stałym.

Twierdzenie 3.3.7 (Lefschetza o punkcie stałym). *Niech X będzie zwartym ENR-em oraz $f: X \rightarrow X$ będzie ciągle. Jeżeli $L(f) \neq 0$, to f ma punkt stały.*

Proste zastosowanie twierdzenia Lefschetza o punkcie stałym przedstawia poniższy przykład.

Przykład 3.3.8. Charakterystyka Eulera dla sfer wyraża się następująco:

$$\chi(\mathbb{S}^{2k}) = 2, \quad \chi(\mathbb{S}^{2k+1}) = 0.$$

W szczególności, z twierdzenia Lefschetza wynika, że sfery parzystego wymiaru mają słabą własność punktu stałego. Na podstawie Lematu 3.3.4 wiemy więc, że układy dynamiczne na takich sferach muszą mieć punkt stacjonarny.

Twierdzenie Lefschetza pozwala również na zmodyfikowanie Twierdzenia 3.3.5 przez osłabienie jednego z założeń.

Twierdzenie 3.3.9. *Niech ϕ będzie układem dynamicznym na X , a $\omega(x) = S$ niech będzie zwartym ENR-em dla pewnego $x \in X$. Załóżmy dodatkowo, że $\text{card } S > 1$. Jeżeli $\chi(S) \neq 0$, to $\text{AP}(x) = +\infty$.*

Dowód. Dla dowolnego t zachodzi ciąg równości $\chi(S) = L(\text{Id}_S) = L(\phi_t|_S)$, więc z twierdzenia Lefschetza wynika, że wszystkie $\phi_t|_S$ mają punkt stacjonarny. Wystarczy teraz zastosować Twierdzenie 3.3.5. \square

Z powyższego Twierdzenia wynika w szczególności, że jeżeli pewien zbiór S jest granicznym zbiorem zwartym i minimalnym o niezerowej charakterystyce Eulera, to dowolny punkt, którego zbiorem granicznym jest S , jest asymptotycznie nieokresowy.

Przykład 3.3.10. Jeżeli w Twierdzeniu 3.3.9 przyjmiemy $S = \mathbb{S}^{2k}$, to $\text{AP}(x) = +\infty$. W szczególności wynika z tego, że sfera parzystego wymiaru nie może być zbiorem granicznym punktu asymptotycznie okresowego. Z kolei sfera \mathbb{S}^1 jest zbiorem granicznym punktu okresowego dla układu w \mathbb{R}^2 , generowanego przez układ równań w biegunowym układzie współrzędnych

$$\begin{cases} r' = 1, \\ \vartheta' = 0. \end{cases}$$

Przykład ten pokazuje, że założenie o niezerowości charakterystyki Eulera nie może zostać opuszczone. Przykład 2.2.3 opisuje układ, w którym dla pewnego punktu x zbiorem granicznym jest $\omega(x) = \mathbb{T}$. Tezy Twierdzenia 3.3.9 nie można więc odwrócić, gdy $\chi(\mathbb{T}) = 0$.

Ekstremalne własności układów dynamicznych

4.1. Wybrane ekstremalne własności

W teorii układów równoważnych jednym z badanych zagadnień jest, które z własności potoków zachowują się przez homeomorficzne przekształcenia przestrzeni. Pierwszym matematykiem zajmującym się tą problematyką był prawdopodobnie Taijiro Ohno, który badał niezmienniczość entropii topologicznej dwóch równoważnych układów dynamicznych ([O]).

Istnieją dwa istotnie różne przypadki, które są tu brane pod uwagę. Możemy rozważyć potoki posiadające punkty stacjonarne, których dynamika oraz struktura w sąsiedztwie punktu stacjonarnego jest w pewien sposób ograniczona przez dynamikę punktu stacjonarnego. Z drugiej strony są również potoki bez punktów stacjonarnych, których dynamika nie jest w żaden sposób ograniczana; w tym przypadku przy definiowaniu ruchu mamy znacznie większą swobodę.

Ta część rozdziału poświęcona jest klasycznym rezultatom pokazanym na przestrzeni ostatnich lat. Dla potrzeb rozdziału przypomnimy definicję entropii ([AKM, D]), poprzedzoną technicznym wprowadzeniem oznaczeń.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną a \mathcal{U} -pokryciem otwartym X . Definiujemy

$$N(\mathcal{U}) := \min\{\text{card}\mathcal{U}' \mid \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \text{ oraz } \mathcal{U}' \text{ jest pokryciem otwartym } X\}.$$

Połączeniem dwóch pokryć \mathcal{U} i \mathcal{V} nazywamy pokrycie

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

Mając ciągłą funkcję $T: X \rightarrow X$ wprowadzamy również następujące oznaczenie:

$$\mathcal{U}^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \vee T^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\mathcal{U}).$$

Definicja 4.1.1. Ustalmy pokrycie otwarte \mathcal{U} przestrzeni X oraz zdefiniujmy:

$$H(n, T, \mathcal{U}) := \ln N(\mathcal{U}^n),$$

$$h(T, \mathcal{U}) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(n, T, \mathcal{U}),$$

$$h(T) := \sup_{\mathcal{U}} h(T, \mathcal{U}).$$

Wielkość $h(T, \mathcal{U})$ nazywamy *entropią topologiczną pokrycia \mathcal{U}* , natomiast $h(T)$ nazywamy *entropią topologiczną odwzorowania T* .

Powyższa definicja dotyczy jednak funkcji i jej iteracji, nie układu dynamicznego. Rozwiązaniem tego problemu jest rozważenie nie całego układu, a jedynie odwzorowania po ustalonym czasie.

Definicja 4.1.2. Niech $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ będzie potokiem. Definiujemy *entropię topologiczną* potoku ϕ jako wielkość

$$h(\phi) := h(\phi_1).$$

Wprost z definicji wydawać się może, że wartość $t = 1$ jest w jakiś sposób szczególnie wyróżniona. Następujące twierdzenie pokazuje jednak, że nie ma ona jakościowego znaczenia.

Twierdzenie 4.1.3 ([I]). *Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy*

$$h(\phi_t) = |t|h(\phi_1).$$

Pozwala to wybrać t w dowolny sposób, gdyż zmiana parametru na inny proporcjonalnie modyfikuje wartość entropii w porównaniu z wartością „1”. Historycznie wybór „1” okazał się być najbardziej naturalnym, stąd też Definicja 4.1.2.

Przejdziemy teraz do krótkiego przeglądu znanych wyników dotyczących potoków równoważnych, w których pewne charakterystyki liczbowe są zachowywane lub nie, w zależności od założeń dotyczących potoku.

Twierdzenie 4.1.4 ([O]). *Niech $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ oraz $\psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ będą potokami na zwartych przestrzeniach metrycznych X i Y . Jeżeli ϕ i ψ są równoważne i nie mają punktów stacjonarnych, to*

$$h(\phi) = C(\phi, \psi)h(\psi),$$

gdzie $C(\phi, \psi)$ jest skończoną i dodatnią liczbą.

Twierdzenie 4.1.5 ([O]). *Istnieje para takich równoważnych potoków na zwartych przestrzeniach metrycznych, że jeden z nich ma dodatnią entropię, a drugi ma zerową entropię.*

Podobnie, istnieje para takich równoważnych potoków na zwartych przestrzeniach metrycznych, że jeden z nich ma dodatnią entropię, a drugi ma nieskończoną entropię.

Dowód zaprezentowany przez Ohno przedstawia przykład dwóch potoków, które nie są różniczkowalnymi funkcjami. Postawił on tym samym pytanie, czy podobny przykład można podać zakładając dodatkowo, że oba potoki są różniczkowalne. Odpowiedź okazała się być pozytywna, a jej szczegóły zawarte są w [SYZ].

Przypadek z entropią został później poprawiony w [SZ], gdzie rozważono również pojęcie tempa wzrostu orbit okresowych i ich niezmienniczość względem równoważności. Przypomnimy teraz pojęcie tempa wzrostu orbit okresowych.

Niech $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ będzie potokiem na przestrzeni metrycznej (X, d) .

Definicja 4.1.6. Dla danego $A \in \mathbb{R}^+$ definiujemy liczbę orbit o okresie nieprzekraczającym A przez

$$\pi(\phi, A) := \max\{1, \text{card}\{o(x) \subset X \mid \phi(x, a) = x \text{ dla pewnego } 0 < a \leq A\}\}.$$

Jeżeli zbiór orbit o okresie A jest nieskończony, przyjmujemy, że $\pi(\phi, A) = +\infty$. Niech

$$p(\phi, A) := \frac{1}{A} \log \pi(\phi, A),$$

$$p(\phi) := \limsup_{A \rightarrow +\infty} p(\phi, A).$$

Wartość $p(\phi)$ nazywamy *tempem wzrostu orbit okresowych* dla ϕ . Odnotujmy, że $p(\phi) \in [0, +\infty]$.

Rozważmy następnie powyższe pojęcie w przypadku, gdy potoki posiadają punkt stacjonarny.

Twierdzenie 4.1.7 ([SZ]). *Istnieje para takich równoważnych potoków $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ oraz $\psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ z punktami stacjonarnymi, określonych na zwartych przestrzeniach metrycznych, że*

$$p(\phi) = \infty, \quad p(\psi) = 0.$$

Powyższe twierdzenie udowodnimy w niezależny od [SZ] sposób, (Twierdzenie 4.3.2 oraz Twierdzenie 4.3.4). Zakładając, że w żadnym z potoków nie ma punktów stacjonarnych, otrzymujemy niezmienniczość.

Twierdzenie 4.1.8 ([SZ]). *Dla pary równoważnych potoków bez punktów stacjonarnych, $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ oraz $\psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ określonych na zwartych przestrzeniach metrycznych, zachodzą następujące równoważności:*

$$p(\phi) = 0 \iff p(\psi) = 0,$$

$$p(\phi) = \infty \iff p(\psi) = \infty.$$

Twierdzenia, w założeniach których nie występują punkty stałe, oparte są na funkcji reparametryzacji czasu. Istnienie takiej funkcji i jej opis jest treścią kolejnego, klasycznego lematu.

Lemat 4.1.9 ([R]). *Dla pary równoważnych potoków $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ oraz $\psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$, niech $h: X \rightarrow Y$ będzie homeomorfizmem z definicji potoków równoważnych. Jeżeli potoki ϕ oraz ψ nie mają punktów stacjonarnych, to istnieje taka ciągła funkcja $\beta: \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x \in X$ oraz dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące warunki:*

$$(1) \beta(0, x) = 0 \text{ i } \beta(\cdot, x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest silnie rosnąca,}$$

$$(2) \beta(s + t, x) = \beta(s, x) + \beta(t, \phi(s, x)),$$

$$(3) h(\phi(t, x)) = \psi(\beta(t, x), h(x)).$$

Więcej szczegółów dotyczących takich funkcji można znaleźć w [O, SZ, T].

Zauważmy, że funkcja β opisana w Lemacie 4.1.9 spełnia silniejsze warunki niż te wymagane w definicji potoków równoważnych. Istotą tego lematu jest drugi warunek, z którego wynika, że funkcja reparametryzacji jest w pewnym zakresie addytywna.

Na zakończenie przytoczymy następujące dwa fakty ([SZ]).

Twierdzenie 4.1.10. *Istnieje taki potok ϕ na zwartej przestrzeni metrycznej X , że*

$$h(\phi) = +\infty, \quad p(\phi) = 0.$$

Twierdzenie 4.1.11. *Istnieje taki potok ϕ na zwartej przestrzeni metrycznej X , że*

$$h(\phi) = 0, \quad p(\phi) = +\infty.$$

To podsumowuje podstawową koncepcję równoważnych potoków (zarówno takich, w których występują punkty stacjonarne, jak i takich, w których one nie występują) oraz niezmienniczość pewnych charakterystyk tych potoków. Kolejnym krokiem jest wprowadzenie nieco bardziej złożonych przykładów potoków, które są równoważne i które są rozróżnialne przez inne, ekstremalne własności układów.

4.2. Tempo wzrostu orbit asymptotycznie okresowych

Wprowadzimy teraz pojęcie tempa wzrostu orbit asymptotycznie okresowych. Jest to naturalne uogólnienie wprowadzonego w poprzedniej części rozdziału tempa wzrostu orbit okresowych.

Definicja 4.2.1. Dla danego $A \in \mathbb{R}^+$ definiujemy liczbę orbit asymptotycznie okresowych o okresie co najwyżej A przez

$$\pi_{\text{AP}}(\phi, A) := \max\{1, \text{card}\{o(x) \subset X \mid 0 < \text{AP}(x) \leq A\}\}.$$

Podobnie,

$$p_{\text{AP}}(\phi, A) := \frac{1}{A} \log \pi_{\text{AP}}(\phi, A),$$

$$p_{\text{AP}}(\phi) := \limsup_{A \rightarrow +\infty} p_{\text{AP}}(\phi, A).$$

Wartość $p_{\text{AP}}(\phi)$ nazywamy *tempem wzrostu orbit asymptotycznie okresowych*.

W podobny sposób wprowadzamy tempo wzrostu orbit istotnie asymptotycznie okresowych.

Definicja 4.2.2. Dla danego $A \in \mathbb{R}^+$ definiujemy liczbę orbit istotnie asymptotycznie okresowych o okresie co najwyżej A przez

$$\pi_{\text{EAP}}(\phi, A) := \max\{1, \text{card}\{o(x) \subset X \mid 0 < \text{AP}(x) \leq A\} \setminus P_{\phi, A}\},$$

gdzie $P_{\phi, A} := \{o(x) \subset X \mid 0 < \text{Per}(x) \leq A\}$. Definiujemy teraz *tempo wzrostu orbit istotnie asymptotycznie okresowych* $p_{\text{EAP}}(\phi)$:

$$p_{\text{EAP}}(\phi, A) := \frac{1}{A} \log \pi_{\text{EAP}}(\phi, A),$$

$$p_{\text{EAP}}(\phi) := \limsup_{A \rightarrow +\infty} p_{\text{EAP}}(\phi, A).$$

Motywacja dla obu pojęć jest bardzo naturalna; chcemy oddzielnie opisać własności orbit asymptotycznie okresowych, które nie są okresowe. Odnotowaliśmy już w Uwadze 1.2.13, że w pewnych prostych przypadkach pojęcia te opisują takie same orbity. Dzięki takiemu rozróżnieniu jesteśmy w stanie przedstawić mocniejsze wyniki, wiążące oba pojęcia.

4.3. Ekstremalne tempo wzrostu orbit

Twierdzenie 1.1 z [SZ] podaje przykład ekstremalnego tempa wzrostu orbit okresowych. W tym podrozdziale podamy rozszerzenie wyniku do orbit asymptotycznie okresowych oraz istotnie asymptotycznie okresowych ([G1]). Jednakże, ponieważ każda orbita

okresowa jest jednocześnie asymptotycznie okresowa, (Uwaga 1.2.13), możemy w [SZ, Twierdzenie 1.1] podstawić $p_{\text{AP}}(\phi)$ w miejsce $p(\phi)$ i otrzymać ten sam wynik. Dlatego też skupimy się wyłącznie na drugim typie orbit.

Zanim przedstawimy oraz udowodnimy główny wynik tego rozdziału (Twierdzenie 4.3.6), opiszemy oddzielnie dwa przypadki ekstremalnego tempa wzrostu specyficznych orbit. Poprzedzimy je uwagą, która pozwala skojarzyć okres asymptotyczny z okresem orbity okresowej.

Uwaga 4.3.1. Rozważmy przykład z Uwagi 1.2.14. Załóżmy, że prędkość (która jest stała) jest równa v (prędkość liniowa) lub ω (prędkość kąтова). Oznaczmy przez T_v oraz przez T_ω odpowiednie okresy orbit okresowych. Wtedy dla danego x należącego do orbity nawijającej się na okrąg mamy $\text{AP}(x) = T_v$ lub $\text{AP}(x) = T_\omega$.

Następujący wynik został już udowodniony w [SZ] w prostym przypadku $a = 0$ oraz $b = +\infty$. Przedstawimy inną konstrukcję, którą można zastosować do ogólnego przypadku.

Twierdzenie 4.3.2 ([G1, SZ]). *Dla dowolnych $a, b \in [0, +\infty]$ istnieje zwarta przestrzeń metryczna X oraz para równoważnych potoków $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ i $\psi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ z punktami stacjonarnymi, dla których*

$$p(\phi) = a, \quad p(\psi) = b.$$

Co więcej, homeomorfizm wyznaczający równoważność jest identycznością.

Dowód. Załóżmy, że $\lambda \in (0, +\infty)$. Skonstruujemy taki potok (Z, ξ_λ) na podzbiórze \mathbb{R}^2 , że $p(\xi_\lambda) = \lambda$. Dla uproszczenia będziemy pisać ξ w miejsce ξ_λ .

Odnotujmy, że

$$\frac{1}{A} \log 2^{\frac{\lambda}{\log 2} A} = \lambda.$$

Jeżeli teraz zdefiniujemy

$$\mu(A, \lambda) := \left\lfloor 2^{\frac{\lambda}{\log 2} A} \right\rfloor,$$

to

$$2^{\frac{\lambda}{\log 2} A} \leq \mu(A, \lambda) \leq 2^{\frac{\lambda}{\log 2} A} + 1.$$

Niech $\mathcal{X} := \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

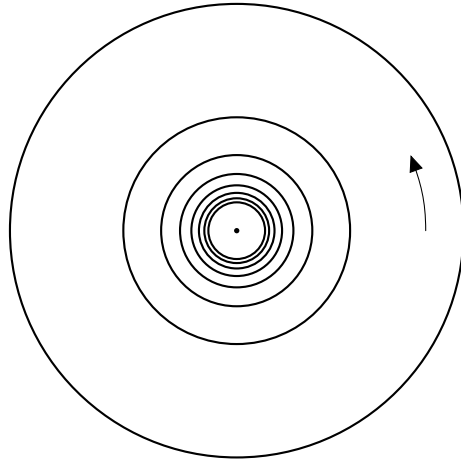
$$X_0 := \{(0, 0)\}, \quad X_n := \partial B \left((0, 0), \frac{1}{n} \right), n \geq 1,$$

i $B((a, b), r)$ oznacza kulę otwartą w przestrzeni \mathbb{R}^2 wyposażonej w metrykę euklidesową. Definiujemy teraz dynamikę (oraz ξ) na zbiorze $Z := \bigcup \mathcal{X}$. Niech X_0 będzie punktem stacjonarnym, a X_n orbitą okresową, której okres jest wyznaczony następująco:

- orbita jest 1-okresowa dla $n = 1, 2, \dots, \mu(1, \lambda)$,
- orbita jest 2-okresowa dla $n = \mu(1, \lambda) + 1, \dots, \mu(2, \lambda)$,
- orbita jest k -okresowa dla $n = \mu(k - 1, \lambda) + 1, \dots, \mu(k, \lambda)$.

W przypadku, gdy $\mu(k, \lambda) = \mu(k + 1, \lambda)$ nie bierzemy żadnej k -okresowej orbity.

Tu i dalej (w Twierdzeniu 4.3.4) zakładamy, że ruch po każdej orbicie odbywa się ze stałą prędkością. Zakładamy ponadto, że ruch na wszystkich orbitach (zarówno na tych okresowych, jak i później, z małymi poprawkami, asymptotycznie okresowych) jest zgodny z dodatnią orientacją płaszczyzny.



RYSunEK 4.1. Szkic układu z dowodu Twierdzenia 4.3.2. Na rysunku przedstawionych jest kilka orbit. Strzałka wskazuje kierunek ruchu.

Bezpośrednio z konstrukcji wynika, że dla potoku $\xi: \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$ mamy

$$2^{\frac{\lambda}{\log 2} A} \leq \pi(\xi, A) \leq 2^{\frac{\lambda}{\log 2} A} + 1,$$

a zatem $p(\xi) = \lambda$.

Załóżmy teraz, że $\lambda = 0$. Wtedy definiujemy dynamikę na okręgach następująco:

dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zbiór X_n jest orbitą n -okresową,

oraz X_0 pozostaje punktem stacjonarnym. W tym przypadku $\pi(\xi, A) = A$ i stąd $p(\xi) = 0$.

Wreszcie, załóżmy, że $\lambda = +\infty$. Podobnie, X_0 jest punktem stacjonarnym oraz X_1 jest orbitą 1-okresową. Dla $n \geq 2$ wprowadzamy dynamikę w następujący sposób:

$X_{2^{(k-1)^2+1}}, \dots, X_{2^{k^2}}$ są orbitami k -okresowymi, dla $k = 1, 2, \dots$

W tym przypadku $\pi(\xi, A) = 2^{A^2}$ dla $A \geq 2, A \in \mathbb{N}$, stąd $p(\xi) = +\infty$.

Jest jasne, że dowolne dwa potoki zdefiniowane jak powyżej są równoważne: identyficzywność jest poszukiwanym homeomorfizmem. \square

Uwaga 4.3.3. Dla dowolnego $\lambda \in [0, +\infty]$ potok (Z, ξ) zdefiniowany w Twierdzeniu 4.3.2 spełnia równość $p_{\text{EAP}}(\xi) = 0$.

Twierdzenie 4.3.4 ([G1]). *Dla dowolnych $c, d \in [0, +\infty]$ istnieje zwarta przestrzeń metryczna Z oraz para równoważnych potoków $\phi: \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$ i $\psi: \mathbb{R} \times Z \rightarrow Z$ z punktami stacjonarnymi, dla których*

$$p_{\text{EAP}}(\phi) = c, \quad p_{\text{EAP}}(\psi) = d.$$

Dowód. Załóżmy, że $\lambda \in (0, +\infty)$. Skonstruujemy taki potok (Z, ξ_λ) na podzbiórze \mathbb{R}^2 , że $p_{\text{EAP}}(\xi_\lambda) = \lambda$. Wykorzystamy ideę z Twierdzenia 4.3.2 oraz będziemy stosować analogiczną notację dla μ i definicję zbiorów X_n . Określamy dodatkowo $X'_1 := \partial B((0, 0), 2)$ i $Z' := \bigcup \mathcal{X} \cup X'_1$. Dla uproszczenia będziemy pisać ξ zamiast ξ_λ .

Zdefiniujemy teraz potok ξ' na Z . Załóżmy, że X_0 jest punktem stacjonarnym oraz X'_1 jest orbitą 1-okresową. Załóżmy teraz, że X_n jest orbitą n -okresową dla wszystkich n . Pomiedzy X_{n-1} i X_n dla $n \geq 2$ oraz pomiedzy X_1 i X'_1 umieszczamy istotnie asymptotycznie okresowe orbity Y_n^k używając następującego przepisu.

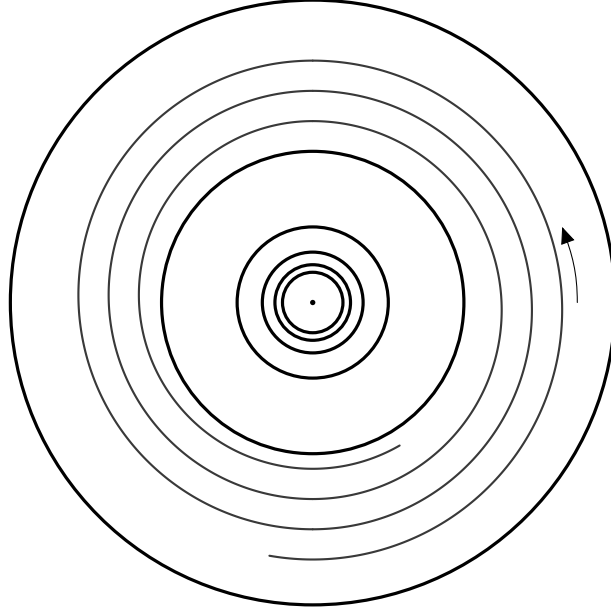
- Dla $n = 1$ umieszczamy orbity $Y_1^k, k = 1, 2, \dots, \mu(1, \lambda)$ tak, aby ich zbiorem α -granicznym był X'_1 oraz zbiorem ω -granicznym był X_1 .
- Dla $n = 2$ umieszczamy orbity $Y_2^k, k = \mu(1, \lambda) + 1, \dots, \mu(2, \lambda)$ tak, aby ich zbiorem α -granicznym był X_1 oraz zbiorem ω -granicznym był X_2 .
- Dla $n = \ell$ umieszczamy orbity $Y_\ell^k, k = \mu(\ell - 1, \lambda) + 1, \dots, \mu(\ell, \lambda)$ tak, aby ich zbiorem α -granicznym był $X_{\ell-1}$ oraz zbiorem ω -granicznym był X_ℓ .

Jeżeli $\mu(k, \lambda) = \mu(k + 1, \lambda)$, to nie umieszczamy żadnych orbit.

Zdefiniujemy

$$Z := Z' \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=\mu(n-1, \lambda)+1}^{\mu(n, \lambda)} Y_n^k.$$

Na orbitach okresowych poruszamy się ze stałą prędkością w kierunku zgodnym z orientacją płaszczyzny. Ruch punktu $x \in Y_i^j$ zależy od tego, jak blisko jest on najbliższego okręgu. Ruch ten zwalnia blisko zbioru ω -granicznego osiągając prędkość zgodną



RYSUNEK 4.2. Szkic układu zdefiniowanego w dowodzie Twierdzenia 4.3.4. Zaznaczono kilka orbit okresowych oraz jedną orbitę istotnie asymptotycznie okresową. Strzałka wskazuje kierunek ruchu.

z prędkością ruchu na zbiorze granicznym (Uwaga 1.2.14, gdzie opisany został podobny przypadek). Podobnie definiujemy ruch blisko zbioru $\alpha(x)$. Rozszerza to ξ' do ξ , które jest teraz zdefiniowane na całym Z .

Z konstrukcji wynika, że dla potoku (Z, ξ) otrzymujemy równość $p_{EAP}(\xi) = \lambda$.

Przypadki $\lambda = 0$ oraz $\lambda = +\infty$ są podobne do odpowiednich przypadków z Twierdzenia 4.3.2, szczegóły pomijamy. \square

Uwaga 4.3.5. Dla dowolnego $\lambda \in [0, +\infty]$ potok (Z, ξ) zdefiniowany w Twierdzeniu 4.3.4 spełnia relację $p(\xi) = 0$.

Twierdzenie 4.3.6 ([G1]). *Dla dowolnych a, b, c oraz $d \in [0, +\infty]$, istnieje zwarta przestrzeń metryczna X oraz para równoważnych potoków $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ i $\psi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ z punktami stacjonarnymi, dla których*

$$p(\phi) = a, \quad p(\psi) = b, \quad p_{EAP}(\phi) = c, \quad p_{EAP}(\psi) = d.$$

Dowód. Wykorzystując Twierdzenia 4.3.2 oraz 4.3.4 budujemy dwie zwarte przestrzenie metryczne C_1 oraz C_2 i dwa potoki ϕ i ψ , określone na przestrzeni metrycznej $X = C_1 \sqcup C_2$, dla których

$$p(\phi|_{C_1}) = a, p_{EAP}(\phi|_{C_1}) = 0, \quad p(\psi|_{C_1}) = b, p_{EAP}(\psi|_{C_1}) = 0,$$

i podobnie

$$p(\phi|_{C_2}) = 0, p_{\text{EAP}}(\phi|_{C_2}) = c, \quad p(\psi|_{C_2}) = 0, p_{\text{EAP}}(\psi|_{C_2}) = d,$$

gdzie $\phi|_A := \phi|_{\mathbb{R} \times A}$. Potoki (X, ϕ) i (X, ψ) spełniają tezę twierdzenia. \square

Konstrukcje opisane wyżej gwarantują również możliwość podania jawnego opisu układów dynamicznych jako takich, które są generowane przez pewne układy równań różniczkowych. Układy te można wypisać w sposób jawny w biegunowym układzie współrzędnych. Odpowiednia konstrukcja oraz opis zaprezentowane są w kolejnych przykładach. W przykładach tych przez r zawsze oznaczamy promień, a przez ϑ kąt mierzony od osi OX w kierunku zgodnym z orientacją dodatnią płaszczyzny.

Przykład 4.3.7 (przypadek orbit okresowych). Zachowujemy notację wykorzystaną w dowodzie Twierdzenia 4.3.2.

Założmy na początek, że $\lambda = 0$. W tym prostym przypadku możemy wypisać równania bezpośrednio:

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \vartheta' = 0, & \text{jeśli } r = 0, \\ \vartheta' = \frac{2\pi}{k}, & \text{jeśli } r = \frac{1}{k} \text{ dla pewnego } k \geq 1. \end{cases}$$

Założmy teraz, że $\lambda \in (0, +\infty)$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \ell_0 &:= 0, \\ \ell_k &:= \mu(k, \lambda), & \text{dla } k \geq 1 \\ L_k &:= \{\ell_{k-1} + 1, \dots, \ell_k\}, & \text{dla } k \geq 1 \\ r_\ell^k &:= \frac{1}{\ell}, & \text{dla } \ell \in L_k \\ R_k &:= \{r_\ell^k : \ell \in L_k\}, & \text{dla } k \geq 1. \end{aligned}$$

Jeżeli $\ell_{k-1} + 1 > \ell_k$, to definiujemy $L_k := \emptyset$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ istnieje taka jednoznacznie wyznaczona para liczb (k, ℓ) , że promień okręgu X_n to $\frac{1}{n} = r_\ell^k$ oraz X_n jest orbitą o okresie k . Wynika to łatwo z tego, że:

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} L_k = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

oraz

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Teraz możemy zdefiniować układ:

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \vartheta' = 0, & \text{jeżeli } r = 0, \\ \vartheta' = \frac{2\pi}{k}, & \text{jeżeli } r \in R_k \text{ oraz } k \geq 1. \end{cases}$$

Dla przypadku $\lambda = +\infty$ zdefiniujemy następujące wielkości oraz zbiory:

$$\ell_k := 2^{k^2}, \quad \text{dla } k \geq 1$$

$$L_k := \{\ell_{k-1} + 1, \dots, \ell_k\}, \quad \text{dla } k \geq 1$$

$$r_\ell^k := \frac{1}{\ell}, \quad \text{dla } \ell \in L_k$$

$$R_k := \{r_\ell^k : \ell \in L_k\}, \quad \text{dla } k \geq 1.$$

Zauważmy, że

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} L_k = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},$$

stąd przypadek $r = 1$ musi zostać zdefiniowany oddzielnie. Definiujemy dynamikę za pomocą następującego układu równań:

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \vartheta' = 0, & \text{jeżeli } r = 0, \\ \vartheta' = 2\pi, & \text{jeżeli } r = 1, \\ \vartheta' = \frac{2\pi}{k}, & \text{jeżeli } r \in R_k \text{ oraz } k \geq 1. \end{cases}$$

Przykład 4.3.8 (przypadek orbit istotnie asymptotycznie okresowych). Twierdzenie 4.3.4 zostało udowodnione za pomocą konstrukcji potoku, dla którego $p(\xi) = 0$. Na potrzeby poniższej konstrukcji wystarczy więc ograniczyć się do takich właśnie potoków. Opisana poniżej jest ogólniejsza od tej, która jest nam potrzebna. Łatwo można podstawić do niej wymagane wielkości tak, by otrzymać potok opisany w Twierdzeniu 4.3.4. Idea konstrukcji jest zbliżona do tej przedstawionej w Przykładzie 2.3.10.

Niech $\{r_k\}_{k=0}^{+\infty}$ będzie dowolnym silnie malejącym ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do zera. Z każdym r_k wiążemy okrąg $C_k := \partial B((0, 0), r_k)$. Każde C_k jest zdefiniowane jako orbita okresowa o okresie t_k , przy czym wymagamy jako ograniczenie, aby tempo wzrostu orbit okresowych było zerowe. Możemy to zrobić tak, jak w Przykładzie 4.3.7, przypadku $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} r' = 0, & r \geq 0 \\ \vartheta' = 0, & \text{jeśli } r = 0, \\ \vartheta' = \frac{2\pi}{t_k}, & \text{jeśli } r = \frac{1}{k} \text{ dla pewnego } k \geq 1. \end{cases}$$

Kolejnym krokiem w konstrukcji jest opisanie zmian promienia r oraz kąta ϑ pomiędzy orbitami okresowymi. Zmiany promienia określamy równaniem

$$r' = (r - r_{k+1})(r - r_k) \quad \text{dla } k \geq 0.$$

W przypadku kąta musimy znaleźć ciągłą funkcję przełączającą się pomiędzy dwoma okresami t_k i t_{k+1} . Można to zrobić używając funkcji typu Cantora. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \ell_k &:= r_k - r_{k+1}, & \text{dla } k \geq 0, \\ I_k^f &:= \left[r_{k+1} + \frac{2}{3}\ell_k, r_k \right), & \text{dla } k \geq 0, \\ I_k^m &:= \left[r_{k+1} + \frac{1}{3}\ell_k, r_{k+1} + \frac{2}{3}\ell_k \right), & \text{dla } k \geq 0, \\ I_k^s &:= \left[r_{k+1}, r_{k+1} + \frac{1}{3}\ell_k \right), & \text{dla } k \geq 0, \\ I_k &:= I_k^f \cup I_k^m \cup I_k^s, & \text{dla } k \geq 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$I_k = [r_{k+1}, r_k)$$

oraz

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k = (0, r_0).$$

Potrzebujemy również następującej funkcji, zdefiniowanej dla wszystkich k :

$$\Theta_k : I_k^m \ni r \mapsto 6\pi \cdot \frac{\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k+1}}}{r_k - r_{k+1}} \cdot \left(r - \left(r_{k+1} + \frac{1}{3}\ell_k \right) \right) + \frac{2\pi}{t_{k+1}} \in (0, +\infty).$$

Funkcja Θ_k jest afiniczna (Rysunek 4.3a), przy czym

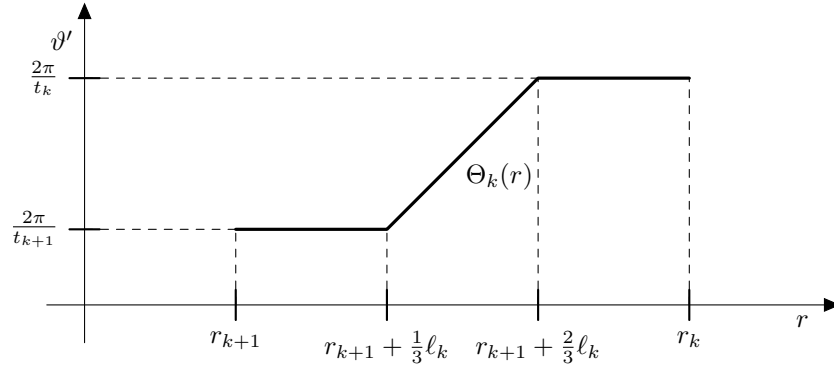
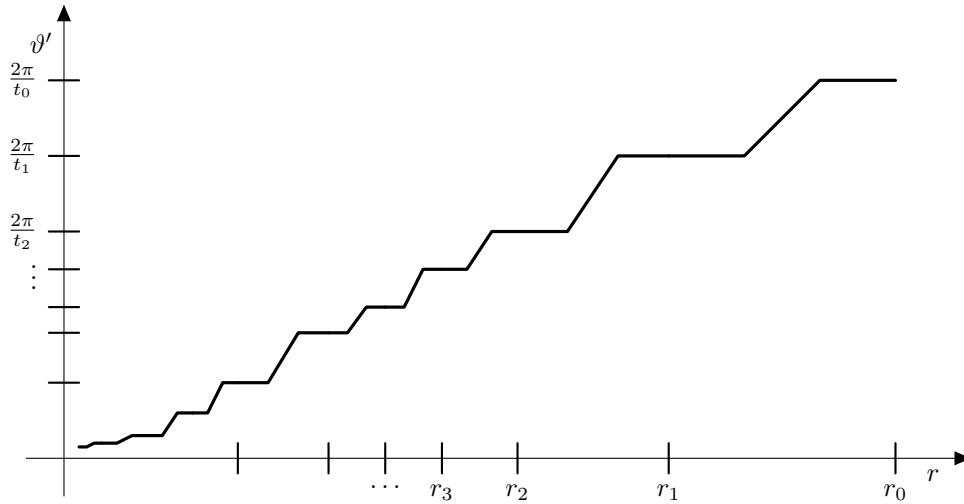
$$\Theta_k \left(r_{k+1} + \frac{1}{3}\ell_k \right) = \frac{2\pi}{t_{k+1}},$$

$$\Theta_k \left(r_{k+1} + \frac{2}{3}\ell_k \right) = \frac{2\pi}{t_k}.$$

Możemy teraz zdefiniować dynamikę potoku na orbitach nieokresowych:

$$\left\{ \begin{array}{ll} r' = (r - r_k)(r - r_{k+1}), & \text{dla } k \geq 0, \\ \vartheta' = \frac{2\pi}{t_k}, & \text{dla } r \in I_k^f \text{ i } k \geq 0, \\ \vartheta' = \Theta_k(r), & \text{dla } r \in I_k^m \text{ i } k \geq 0, \\ \vartheta' = \frac{2\pi}{t_{k+1}}, & \text{dla } r \in I_k^s \text{ i } k \geq 0. \end{array} \right.$$

Aby zakończyć konstrukcję, umieszczamy tyle orbit istotnie asymptotycznie okresowych, ile zostało opisane w dowodzie Twierdzenia 4.3.4.

(A) Jeden stopień funkcji na przedziale I_k .

(B) Ogólny wygląd funkcji.

RYSUNEK 4.3. Funkcja typu Cantora dla ϑ' .

W [G1] zostało zadane następujące pytanie:

Czy któraś z przedstawionych konstrukcji może być poprawiona tak, aby dodatkowo otrzymać ekstremalne własności entropii?

Przez „przedstawionych” rozumiemy konstrukcje zamieszczone w Twierdzeniach 4.3.2 i 4.3.4. Odpowiedź twierdząca dałaby mocniejszą wersję Twierdzenia 4.3.6. Podamy teraz częściową odpowiedź na powyższe pytanie. Konstrukcję opisaną w [SZ], będącą ważnym punktem odniesienia do uzupełnienia własności o entropię oraz uzupełniającą techniczną stronę dowodu, przedstawimy poniżej. W dowodzie wykorzystane są różne własności entropii, pozwalające wyznaczyć jej wartość. Szczegóły dotyczące różnych technik obliczeniowych zawarte są w [D].

Dowód Twierdzenia 4.1.10. Niech

$$\Sigma_2 := \{(\dots s_{-1}\bar{s}_0s_1 \dots) \mid s_i \in \{0, 1\} \text{ dla wszystkich } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Punkt $(\dots s_{-1}\bar{s}_0s_1 \dots)$ w przestrzeni Σ_2 jest więc nieskończonym ciągiem zero–jedynekowym, dwustronnym, z wyróżnioną zerową pozycją oznaczoną nadkreśleniem. Na Σ_2 wprowadzamy metrykę

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |x_n - y_n|.$$

Jest jasne, że (Σ_2, d) jest zwartą przestrzenią metryczną. Niech $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ będzie odwzorowaniem przesunięcia

$$\sigma(\dots s_{-1}\bar{s}_0s_1 \dots) := (\dots s_0\bar{s}_1s_2 \dots).$$

Parę (Σ_2, σ) nazywamy pełnym shiftem na dwóch symbolach. Jest to dyskretny układ dynamiczny. Rozważmy teraz teraz taki $x_* \in \Sigma_2$, że:

- (1) dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ oraz $n \geq 1$ istnieje $2n - 1$ kolejnych jedynek w podciągu $x_{*k} \dots x_{*k+4 \cdot 3^n}$,
- (2) dla wszystkich $n \geq 1$ istnieje 2^{p_n} różnych słów (sekwencji) długości $2 \cdot 3^{n-1}$ w x_* , gdzie $p_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$.

Opis konstrukcji takiego x_* został przedstawiony przez Ohno ([O]). Przytoczymy ją poniżej.

Na początek definiujemy indukcyjnie ciągi skończone $x_n \in \{1, a\}$, gdzie a będzie później zastąpione przez 0 lub 1. Niech $x_1 = 1a$ oraz $x_2 = x_1\bar{x}_1x_1$, gdzie $\bar{x}_1 = 11$. Definiujemy x_n dla $n \geq 2$. Jeżeli dane jest x_n , to definiujemy \bar{x}_n przez zamianę w x_n jednego symbolu a na 1 tak, aby zawierał on $2n - 1$ kolejnych jedynek. Określamy $x_{n+1} = x_n\bar{x}_nx_n$. Następnie definiujemy $x_{n+1} := x_n\bar{x}_nx_n$ dla $n \geq 2$. Niech x^+ będzie „granicą” operacji opisanej powyżej, gdy $n \rightarrow +\infty$. Nieskończony ciąg x^+ zawiera nieskończenie wiele podciągów x_n dla wszystkich $n \geq 1$. Ponadto z konstrukcji wynika, że w każdym skończonym ciągu x_n jest dokładnie p_n symboli a .

Zamieniając a w x_n na 0 lub 1 możemy otrzymać 2^{p_n} różnych słów długości $2 \cdot 3^{n-1}$. Te różne słowa zastępują następnie odpowiednie 2^{p_n} słów w ciągu x^+ . Tak czynimy dla wszystkich $n \geq 1$. Pozostałe symbole a zastępujemy w dowolny sposób zerami i jedykami. Otrzymujemy ostatecznie ciąg nieskończony $x^+ \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Określamy następnie $x_{*k} := x_{|k|}^+$ dla $k \neq 0$ oraz $x_{*0} := 1$. Zdefiniowany w ten sposób ciąg x_* spełnia żądane wyżej warunki.

Oznaczmy $Z := \overline{\{\sigma^k(x_*) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$ i weźmy podukład $\{Z, \sigma\}$ układu (Σ_2, σ) . Wtedy w Z jest dokładnie jeden punkt stacjonarny (ciąg złożony z samych jedynek), a entropia

topologiczna σ to

$$h(\sigma) = c \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2^{p_n}}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{\ln 2}{4} > 0.$$

Bierzemy teraz ciąg podprzestrzeni Σ_2 zdefiniowanych jako $Y_i := \overline{\{\sigma^{i^2 k}(x_*) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$ dla $i \in \mathbb{N}$. Niech teraz Y będzie rozłączną sumą wszystkich Y_i razem z punktem y_∞ . Na Y wprowadzamy metrykę:

$$d_Y(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{i^2} d(x, y), & \text{dla } x, y \in Y_i, \\ \sum_{j=1}^p \frac{3}{j^2}, & \text{dla } x \in Y_i, y \in Y_p, i < p, \\ \sum_{j=1}^p \frac{3}{j^2}, & \text{dla } x = y_\infty, y \in Y_i. \end{cases}$$

Można sprawdzić, że (Y, d_Y) jest zwartą przestrzenią metryczną. Definiujemy $T: Y \rightarrow Y$ wzorami $T|_{Y_i} := \sigma^{i^2}$ oraz $T(y_\infty) = y_\infty$. Odwzorowanie T jest homeomorfizmem przestrzeni Y . Ponadto $h(T) = +\infty$, gdyż $h(T|_{Y_i}) = i^2 c$.

Dla każdego i definiujemy przestrzeń ilorazową Y^i przestrzeni $\{(u, x) \mid 0 \leq u \leq i\}$ przez relację równoważności $(i, x) \sim (0, T(x))$. Definiujemy również $\psi^i(u, t, x) := (u + t, x)$ dla $-u \leq t \leq i - u$.

Bierzemy jednopunktowe uzwarcenie rozłącznej sumy przestrzeni Y^i i otrzymujemy przestrzeń W . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punktem uzwarcenia nadal jest y_∞ . Definiujemy potok ψ na W wzorami $\psi|_{Y^i} := \psi^i$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $\psi(t, y_\infty) = y_\infty$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Funkcja $\psi^i(i, \cdot)$ jest odwzorowaniem po czasie i i jest topologicznie równoważna $T|_{Y_i}$, zatem

$$h(\psi^i(i, \cdot)) = h(T|_{Y_i}) = i^2 c.$$

Stąd

$$h(\psi^i) = h(\psi^i(1, \cdot)) = \frac{1}{i} h(\psi^i(i, \cdot)) = ic.$$

Ostatecznie więc $h(\psi) = +\infty$.

Zauważmy teraz, że ψ ma dokładnie jeden punkt stacjonarny oraz dla każdego $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ istnieje dokładnie jedna orbita i -okresowa, pochodząca od ψ^i . Stąd $p(\psi) = 0$. \square

Przed wypowiedzeniem twierdzenia odnotujmy istotną dla jego potrzeb uwagę.

Uwaga 4.3.9 ([SZ]). Dla dowolnego $\lambda \in [0, +\infty]$ potok (Z, ξ) zdefiniowany w Twierdzeniu 4.3.2 ma zerową entropię.

Konstrukcja układu z dowodu Twierdzenia 4.1.10 pozwala na sformułowanie i udowodnienie następnego twierdzenia.

Twierdzenie 4.3.10. *Dla dowolnych a, b, c oraz $d \in [0, +\infty]$, istnieje zwarta przestrzeń metryczna Y oraz para równoważnych potoków $\phi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ i $\psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ z punktami stacjonarnymi, dla których*

$$p(\phi) = a, \quad p(\psi) = b, \quad p_{EAP}(\phi) = c, \quad p_{EAP}(\psi) = d,$$

$$h(\phi) = h(\psi) = +\infty.$$

Dowód. Niech X będzie takie, jak w dowodzie Twierdzenia 4.3.6, a W takie, jak w dowodzie Twierdzenia 4.1.10. Wystarczy przyjąć $Y := X \sqcup W$ i zdefiniować potoki ϕ oraz ψ analogicznie, jak w dowodzie Twierdzenia 4.3.6. \square

Na tym jednak nie kończą się wszystkie możliwości. Tych jest zdecydowanie więcej, a odpowiedź na kolejne pytania nie jest znana. Na zakończenie rozdziału sformułujemy więc jeszcze raz problem.

Problem 4.3.11. Czy konstrukcje opisane w rozdziale czwartym można zmodyfikować tak, aby entropia któregoś z układów była skończona? Czy może ona być zerowa? Czy można podać takie przykłady, dla których również entropie będą dowolnymi wartościami z przedziału $[0, +\infty]$?

Bibliografia

- [AKM] R. Andrew, A. Konheim, M. McAndrew, *Topological Entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309–319.
- [BK] A. Bacciotti, N. Kalouptsidis, *Topological Properties of Control Systems: Stability and Attraction*, Nonlinear Anal. **10** (1986), no. 6, 547–565.
- [BS] N. P. Bhatia, G. P. Szegö, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlang, Berlin · Heidelberg · New York, 1970.
- [Bi] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 9, New York, 1927.
- [Bo] H. Bohr, *Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen I, II, III*, Acta Math. **45**, 29–127 (1924); **46**, 101–214 (1925); **47**, 237–281 (1926).
- [C] K. Ciesielski, *Some Aspects of the Theory of Dynamical Systems from the Topological Point of View*, Lecture notes, Toruń 2011.
- [D] T. Downarowicz, *Entropy in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2011.
- [DG] J. Dugundji, A. Granas *Fixed Point Theory*, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa, 1982.
- [G1] K. Gryszka, *Asymptotic Period in Dynamical Systems in Metric Spaces*, Colloq. Math. **139** (2015), 245–257.
- [G2] K. Gryszka, *A Note on Fundamental Topological Properties of Limit Sets*, preprint.
- [GR] Y. H. Gu, D. H. Ry, *Limit Sets and Prolongation Limit Sets in Dynamical Polysystems*, J. Korea Soc. Math. Edu. Ser. B: Pure Appl. Math **2** (1995), no. 2, 149–155.

- [Ha] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, podręcznik elektroniczny.
- [He] M.R. Herman, *Construction d'un difféomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle*, Erg. Th. Dyn. Systems, **1** (1981), 67–76.
- [I] Sh. Ito, *On the Topological Entropy of a Dynamical System*, Proc. Japan Acad. **45** (1969), 838 – 841.
- [K] J. Kłapyta, *Asymptotically periodic motions in pseudo-processes*, Univ. Iagel. Acta Math. **33** (1996), 73–86.
- [M] A. A. Markov, *Stabilität im Liapunoffschen Sinne und Fastperiodizität*, Math. Z. **36** (1933) 708–738.
- [NS] V. V. Nemytskii, V. V. Stephanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, 1960.
- [O] T. Ohno, *A weak equivalence and topological entropy*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **16** (1980), 289–298.
- [P] A. Pelczar, *Asymptotically Periodic Motions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **vol. 33, No. 5–6** (1985), 313–319.
- [R] V. A. Rohlin, *Entropy of Metric Automorphism*, Dokl. Acad. Nauk. USSR **124** (1959), 980–983.
- [SV] W. Sun, E. Vargas, *Entropy on flows, revisited*, Bol. Soc. Bra. Mat. **30** (1999), 313–333.
- [SYZ] W. Sun, T. Young, Y. Zhou, *Topological entropies of equivalent smooth flows*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (6) (June 2009), 3071–3082.
- [SZ] W. Sun, Ch. Zhang, *Extreme growth rates of periodic orbits in flows*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 1387–1392.
- [T] H. Totoki, *Time changes of flows*, Mem. Fac. Sci Kyushu Univ. Ser. Am **20** (1966), 27–55.
- [Z] E. Zehnder, *Lecture Notes on Dynamical Systems*, European Mathematical Society, 2010.