Struktura i reprezentacje algebr plaktycznych

Łukasz Kubat

Rozprawa doktorska
przygotowana pod opieką
prof. dr. hab. Jana Oknińskiego
(Uniwersytet Warszawski)

Instytut Matematyczny PAN
Warszawa, Październik 2013

Oświadczenie autora rozprawy:

oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

....	....
data	podpis autora rozprawy

Oświadczenie promotora rozprawy:

niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

....	....
data	podpis promotora rozprawy

Wyrazy głębokiego szacunku i serdeczne podziękowania dla mojego promotora profesora Jana Oknińskiego, za poświęcony czas, przekazaną wiedzę, inspiracje oraz troskę, pomoc i nieskończoną cierpliwość.

Gorące podziękowania pragnę przekazać mojej żonie, za jej miłość, wyrozumiałość, troskę i wsparcie oraz pomoc podczas pracy nad rozprawą.

Streszczenie

Praca ta poświęcona jest badaniu struktury oraz reprezentacji nieprzywiedlnych algebry półgrupowej $K[M_n]$ monoidu plaktycznego M_n rangi $n \geq 1$ nad ciałem K. W przypadku gdy $n \leq 3$ znaleziono minimalne ideały pierwsze algebry $K[M_n]$ oraz, gdy ciało K jest algebraicznie domknięte i nieprzeliczalne, opisano wszystkie jej reprezentacje nieprzywiedlne wraz z towarzyszącymi im ideałami prymitywnymi. Jako zastosowanie powyższego opisu otrzymano nowy dowód półprymitywności algebry $K[M_n]$ dla $n \leq 3$. Wyznaczono również minimalne ideały pierwsze algebry $K[M_4]$ i wykazano, że jej radykał pierwszy $\mathcal{B}(K[M_4])$ jest nilpotentny. Udowodniono także, że algebra $K[M_n]$ dla $n \leq 3$ posiada skończoną bazę Gröbnera-Shirshova, natomiast dla $n \geq 4$ dowolna baza Gröbnera-Shirshova algebry $K[M_n]$ względem porządku stopniowo-leksykograficznego musi być nieskończona. W końcu, jako zastosowanie znalezionych reprezentacji, pokazano, że monoid M_n dla $n \leq 3$ spełnia pewną nietrywialną tożsamość półgrupową ściśle związaną z tożsamością Adjana.

Słowa kluczowe

algebra plaktyczna, algebra półgrupowa, baza Gröbnera-Shirshova, Diamond Lemma, ideał pierwszy, ideał prymitywny, moduł prosty, monoid bicykliczny, monoid plaktyczny, radykał Jacobsona, radykał pierwszy, tożsamość Adjana, tożsamość półgrupowa

Klasyfikacja tematyczna pracy według AMS Mathematical Subject Classification 2010

16D60, 16N60, 16S15, 16S36, 20M05, 20M07, 20M30

Spis treści

Wstęp

Praca ta poświęcona jest badaniu struktury, reprezentacji i własności kombinatorycznych algebry półgrupowej $K[M_n]$ nad ciałem K monoidu plaktycznego M_n dowolnej rangi $n \geq 1$ definiowanego przy pomocy prezentacji

$$M_n = \langle x_1, \ldots, x_n : x_j x_i x_k = x_j x_k x_i \text{ dla } i < j \leq k \text{ oraz } x_i x_k x_j = x_k x_i x_j \text{ dla } i \leq j < k \rangle.$$

Jednym z naturalnych powodów motywujących do badania klasy algebr plaktycznych jest fakt, że monoid plaktyczny jest strukturą dziś już klasyczną, mającą liczne i ważne zastosowania w algebrze oraz pokrewnych działach matematyki. Sam monoid plaktyczny początki swe zawdzięcza pracom Schensteda oraz Knutha (patrz [24], [47]) poświęconym kombinatorycznym aspektom diagramów Younga. Nieco później został on systematycznie zbadany przez Lascoux oraz Schützenbergera (patrz [33], [50]) i stał się ważnym narzędziem w teorii reprezentacji, kombinatoryce algebraicznej i wielu innych działach algebry. Ewidencją tego faktu może być liczba prac poświęconych monoidowi plaktycznemu oraz jego zastosowaniom (patrz [4], [6], [13], [28], [34], [35], [37], [38], [39]) z całym rozdziałem w monografii Fultona (patrz [15]) oraz monografią autorstwa Lascoux, Leclerca i Thibona (patrz [32]) na czele. Pierwszym z istotnych zastosowań monoidu plaktycznego był dowód formuły Littlewooda-Richardsona dla funkcji Schura, jednego z ważniejszych wyników teorii funkcji symetrycznych. Wśród innych zastosowań monoidu plaktycznego warto wspomnieć też o jego roli w kombinatorycznym opisie wielomianów Kostki-Foulkesa pojawiających się jako elementy tabeli charakterów grup liniowych nad ciałem skończonym, jak również o jego zastosowaniach: w teorii baz krystalicznych Kashiwary, w teorii reprezentacji modularnych grup symetrycznych, w teorii grup kwantowych poprzez reprezentacje kwantowych wersji algebr obwiednich, a nawet w teorii języków.

Kolejną motywacją przyświecającą badaniom podjętym w tej pracy są fundamentalne oraz niejednokrotnie bardzo trudne problemy dotyczące skończenie prezentowalnych algebr nad ciałem zdefiniowanych przy pomocy jednorodnych relacji półgrupowych. Na przykład problemy pochodzące od Amitsura, Latysheva czy Zelmanova związane z nilpotentnością czy własnościami radykału Jacobsona takich algebr (patrz [52]). Przytoczmy tu definicję obiektów, o których mowa. Mówimy, że algebra łączna A nad ciałem K zdefiniowana jest przez jednorodne relacje półgrupowe, gdy posiada ona prezentację $A = K\langle X : R\rangle$, gdzie X jest zbiorem wolnych generatorów algebry wolnej nad K, natomiast R jest zbiorem relacji postaci $v = w$ dla pewnych słów v, w tego samego stopnia względem każdego generatora ze zbioru X. Struktury tego typu od dawna pełnią fundamentalną rolę w algebrze oraz jej zastosowaniach. Po pierwsze dlatego, że wiele obiektów algebraicznych posiada taką prezentację. Po drugie obiekty takie często mogą być badane za pomocą efektywnych metod obliczeniowych, co prowadzi do licznych i owocnych zastosowań. Zaznaczmy wyraźnie, że algebry plaktyczne są oczywiście przykładem opisanej tu klasy (są definiowane przez relacje jednorodne stopnia 3). W szczególności rezultaty otrzymane dla algebr plaktycznych mogą być traktowane jako wkład w ogólny program badania algebr definiowanych za pomocą jednorodnych relacji półgrupowych.

Wśród motywacji skłaniających do badania klasy algebr plaktycznych warto wspomnieć o zaskakujących i jednocześnie fascynujących, otrzymanych stosunkowo niedawno wynikach dla pewnych specjalnych klas algebr definiowanych przez jednorodne relacje półgrupowe.

Monoidy i algebry chińskie. Istotna rola, jaką pełni monoid plaktyczny, spowodowała pojawienie się szeregu pokrewnych konstrukcji. Za jedną z takich konstrukcji może być uważany wprowadzony i badany w pracy [7] monoid chiński C_n rangi $n \geq 1$ definiowany za pomocą prezentacji

$$C_n = \langle x_1, \ldots, x_n : x_j x_k x_i = x_k x_j x_i = x_k x_i x_j \text{ dla } i \leq j \leq k\rangle.$$

W pracy [20] wykazano, że stowarzyszona z monoidem C_n algebra półgrupowa $K[C_n]$ nad ciałem K posiada skończenie wiele minimalnych ideałów pierwszych oraz, że dowolny minimalny ideał pierwszy P algebry $K[C_n]$ jest skończenie generowany i pochodzi od jednorodnej kongruencji ρ_P w monoidzie C_n. Oznacza to, że ideał P jest generowany przez skończenie wiele elementów postaci $v - w$ dla pewnych $(v, w) \in \rho_P$, gdzie elementy v, w mają ten sam stopień względem każdego z generatorów. W szczególności algebra $K[C_n]/P \cong K[C_n/\rho_P]$ pozostaje w klasie algebr definiowanych za pomocą jednorodnych relacji półgrupowych, czyli może być badana przy użyciu metod stosownych dla tej klasy. Uzyskany w pracy [20] opis spektrum minimalnego algebry $K[C_n]$ posłużył także do otrzymania zupełnie nowych i interesujących reprezentacji monoidu C_n jako podmonoidu w $\mathbb{B}^k \times \mathbb{Z}^l$ dla pewnych $k, l \geq 0$, gdzie $\mathbb{B}$ jest monoidem bicyklicznym zadanym prezentacją $\mathbb{B} = \langle x, y : yx = 1\rangle$. Za pomocą tej reprezentacji wykazano, że monoid C_n spełnia nietrywialną tożsamość. Dodajmy jeszcze, że w pracy [10] zbadano własności radykału Jacobsona algebry $K[C_n]$ dowodząc, że jest on nilpotentny. Natomiast w pracy [11] wykazano, że algebry chińskie dowolnej rangi $n \geq 1$ posiadają skończoną bazę Gröbnera-Shirshova, co ma kapitalne znaczenie dla problemów kombinatorycznych oraz arytmetycznych związanych z monoidem C_n oraz algebrą $K[C_n]$.

Algebry związane z równaniem Yanga-Baxtera. Kwantowe równanie Yanga-Baxtera jest dziś jednym z ważniejszych równań fizyki matematycznej. Równanie to dało impuls do rozwoju bogatej teorii grup kwantowych, natomiast badania teoriozbiorowych rozwiązań równania Yanga-Baxtera doprowadziły do powstania ciekawej klasy monoidów, grup oraz algebr zdefiniowanych przez jednorodne relacje półgrupowe stopnia 2 (relacje kwadratowe) o pewnych specjalnych własnościach (patrz [17], [21], [22], [53]). Okazało się, że struktury te posiadają fascynujące tak algebraiczne jak i kombinatoryczne własności oraz pojawiają się w wielu zagadnieniach nowoczesnej algebry i jej zastosowań. Wspomnijmy tu o ich roli dotyczącej metod homologicznych w geometrii nieprzemiennej (patrz [53]) oraz o związku z własnościami arytmetycznymi grup krystalograficznych i oczywiście związku z problemem klasyfikacji rozwiązań równania Yanga-Baxtera (patrz [8], [14], [16], [52]). Ponadto wiadomo, że w klasie algebr związanych z równaniem Yanga-Baxtera czy ogólniej, w klasie algebr definiowanych za pomocą jednorodnych relacji kwadratowych, minimalne ideały pierwsze mają bardzo specjalne własności i odgrywają szczególnie ważną rolę w opisie struktury oraz własności arytmetycznych takich algebr (patrz [22]).

W końcu źródło motywacji skłaniających do podjęcia badań nad kombinatorycznymi aspektami (wśród nich np. bazy Gröbnera-Shirshova i tożsamości półgrupowe) monoidów oraz algebr plaktycznych ma dwojaką naturę. Po pierwsze doskonale wiadomo, że bazy Gröbnera-Shirshova mają kapitalne znaczenie dla problemów obliczeniowych. Dodajmy, że istnienie skończonej bazy Gröbnera-Shirshova oprócz zastosowań czysto praktycznych ma także głębokie konsekwencje teoretyczne. Przykładowo pewne otwarte problemy dotyczące skończenie prezentowalnych algebr nad ciałem mają pozytywne rozwiązanie w klasie algebr posiadających skończoną bazę Gröbnera-Shirshova (patrz [54]). Po drugie zagadnienie tożsamości spełnianych przez monoid plaktyczny wpisuje się naturalnie w ogólny program badań tożsamości dla skończenie generowanych półgrup o wzroście wielomianowym. Zachęcające mogą być też otrzymane w pracach [11] i [19] rezultaty opisujące bazy Gröbnera-Shirshova algebr chińskich i tożsamości spełniane przez monoid chiński, czy w końcu wyniki dotyczące tożsamości spełnianych przez tak zwane macierze tropikalne (patrz [18]).

Przejdźmy teraz do opisu zawartości poszczególnych rozdziałów pracy.

W rozdziale 1 wprowadzamy oznaczenia i definicje oraz przypominamy dobrze znane fakty, które pełnią ważną rolę w dalszej części pracy. Kolejne podrozdziały poświęcone są odpowiednio: własnościom monoidów, pierścieni i modułów (1.1), ideałom pierwszym oraz radykałowi pierwszemu (1.2), ideałom prymitywnym oraz radykałowi Jacobsona (1.3), centralnym lokalizacjom (1.4), bazom Gröbnera-Shirshova ze szczególnym uwzględnieniem tak zwanego Diamond Lemma (1.5) i w końcu podstawowym własnościom monoidu oraz algebry bicyklicznej ze szczególnym naciskiem na opis ideałów pierwszych tej algebry oraz tożsamości spełniane przez monoid bicykliczny (1.6).

W rozdziale 2 pojawiają się kluczowe dla całej pracy struktury monoidu plaktycznego M_n rangi $n \geq 1$ oraz stowarzyszonej z nim algebry plaktycznej $K[M_n]$ nad ciałem K. Podrozdział 2.1 zawiera, wielokrotnie wykorzystywane dalej w pracy, rezultaty dotyczące postaci kanonicznej elementów monoidu M_n (Twierdzenie 2.1.3) i pewnych izomorfizmów związanych z lokalizacją algebr plaktycznych oraz inwolucji w algebrach plaktycznych i ich homomorficznych obrazach. W podrozdziale 2.1 umieszczone są również dowody ogólnych negatywnych stwierdzeń dotyczących noetherowskości, (pół)pierwszości oraz prymitywności algebr plaktycznych. Natomiast podrozdział 2.2 poświęcony jest opisowi własności algebr plaktycznych rangi $n < 3$. W szczególności wykazanow w nim, że algebry te są pierwsze oraz półprymitywne i podano charakteryzację ideałów prymitywnych algebry plaktycznej $K[M_2]$ rangi 2, która znajduje zastosowanie w rozdziale trzecim.

Pomimo tego, że dwa pierwsze rozdziały nie zawierają nowych rezultatów, to niektóre z zamieszczonych tam wyników opatrzone zostały dowodami. Fakt ten dotyczy zwłaszcza: wniosku z twierdzenia o gęstości dla algebr prymitywnych (Wniosek 1.3.5), opisu struktury ideałów pierwszych algebry bicyklicznej (Propozycja 1.6.12), tożsamości spełnianej przez monoid bicykliczny (Propozycja 1.6.16) i rezultatów bezpośrednio związanych z algebrami plaktycznymi. Postępowanie takie motywowane jest dwojako. Po pierwsze rezultaty te mają szczególnie duże znaczenie dla całej pracy, zaś po drugie prezentowane dowody mogą być traktowane jako wprowadzenie do metod stosowanych w kolejnych rozdziałach.

W rozdziale 3 skupiamy się na strukturze i reprezentacjach algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad ciałem K. W podrozdziale 3.1 dowodzimy, że algebra ta posiada dokładnie dwa minimalne ideały pierwsze oraz, że każdy z tych ideałów jest ideałem głównym i pochodzi od jednorodnej kongruencji w monoidzie M_3 (Twierdzenie 3.1.3). Jako wniosek otrzymujemy też nowy dowód półpierwszości algebry $K[M_3]$. Natomiast w podrozdziale 3.2 opisujemy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry $K[M_3]$ wraz z towarzyszącymi im ideałami prymitywnymi, w przypadku gdy ciało K jest algebraicznie domknięte oraz nieprzeliczalne (Twierdzenia 3.2.3 oraz 3.2.8). Wykazujemy także, że minimalne ideały pierwsze algebry $K[M_3]$ nad dowolnym ciałem K są półprymitywne (Propozycja 3.2.10). Stąd, jako wniosek, uzyskujemy nowy (oraz, jak się wydaje, bardziej przejrzysty i strukturalny w stosunku do dowodu zamieszczonego w pracy [9]) dowód półprymitywności algebry $K[M_3]$.

W rozdziale 4 prezentujemy wyniki dotyczące kombinatorycznych aspektów związanych z monoidem plaktycznym i algebrą plaktyczną. W podrozdziale 4.1 dowodzimy, że algebra plaktyczna $K[M_n]$ rangi $n \leq 3$ nad ciałem K posiada skończoną bazę Gröbnera-Shirshova (Twierdzenie 4.1.1 oraz poprzedzająca go dyskusja) oraz, że dla $n \geq 4$ dowolna baza Gröbnera-Shirshova algebry $K[M_n]$ względem porządku stopniowo-leksykograficznego musi być nieskończona (Twierdzenie 4.1.2). Natomiast podrozdział 4.2 w całości poświęcony jest problemowi tożsamości półgrupowych spełnianych przez monoid plaktyczny. Wykazujemy tam, że monoid plaktyczny M_n rangi $n \leq 3$ spełnia pewną tożsamość dość ściśle związaną z tożsamością Adjana (Twierdzenie 4.2.3).

W rozdziale 5 uwagę poświęcamy algebrze plaktycznej $K[M_4]$ rangi 4 nad ciałem K. W podrozdziale 5.1 dowodzimy, że algebra ta posiada dokładnie cztery minimalne ideały pierwsze oraz, że każdy z tych ideałów pochodzi od jednorodnej kongruencji w monoidzie M_4. Wykazujemy również, że radykał pierwszy $\mathcal{B}(K[M_4])$ algebry $K[M_4]$ jest nilpotentny indeksu ≤ 7 (Propozycja 5.1.1, Twierdzenia 5.1.4 i 5.1.5 oraz Wniosek 5.1.6). Podkreślmy tu wyraźnie, że rozdział 5 ma nieco inny charakter niż poprzednie i może być traktowany jako pewnego rodzaju dodatek do głównej części pracy, którą stanowią rozdziały 1, 2, 3 oraz 4. W szczególności w rozdziale 5 można zaobserwować, że bezpośrednie przeniesienie technik z rozdziału 3 prowadzi do znacznych komplikacji (które jednak udało się przezwyciężyć), co sugeruje, że prawdopodobnie metody te stają się nieadekwatne w przypadku próby analizy analogicznych problemów dla algebr plaktycznych rangi ≥ 5.

Na zakończenie dodajmy, że otrzymane w pracy wyniki mogę być traktowane jako część podjętego przez autora programu badawczego dotyczącego analizy struktury, reprezentacji oraz kombinatorycznych aspektów monoidów i algebr plaktycznych dowolnej rangi $n \geq 1$. Celem tego programu jest z jednej strony wypracowanie nowych metod (w szczególności metod związanych z nieskończenie wymiarowymi reprezentacjami), które mogłyby zostać z powodzeniem zastosowane do badania szerszej klasy algebr definiowanych za pomocą jednorodnych relacji półgrupowych. Natomiast z drugiej strony program ten jest rozwijany w nadziei na uzyskanie zupełnie nowych rezultatów dotyczących klasycznych i ważnych struktur algebraicznych, w tym monoidów i algebr plaktycznych. Wydaje się, że wyniki zawarte w rozdziałach 3, 4 oraz 5 pełnią tę właśnie rolę.

Niniejsza rozprawa została przygotowana w okresie, gdy autor był kierownikiem grantu Preludium, finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki, które zostały przyznane na podstawie decyzji numer DEC-2011/03/N/ST1/00108.

Rozdział

1 Podstawowe pojęcia i fakty

Rozdział ten służy przede wszystkim ustaleniu oznaczeń i wprowadzeniu używanej w pracy terminologii. Dla wygody czytelnika przypomniano tu też pewne dobrze znane twierdzenia. Dowody tych rezultatów zostały w większości przypadków pominięte — można je znaleźć w monografiach [12], [21], [25], [29], [30], [36], [42], [44], [45], [46] oraz pracach [3], [5], [40], [41]. Terminologia oraz prezentowane wyniki dotyczą kolejno: monoidów, pierścieni i modułów (podrozdział 1.1), ideałów pierwszych i radykału pierwszego (podrozdział 1.2), ideałów prymitywnych i radykału Jacobsona (podrozdział 1.3), elementów regularnych oraz centralnych lokalizacji (podrozdział 1.4), tzw. Diamond Lemma i baz Gröbnera-Shirshova (podrozdział 1.5) oraz w końcu monoidu oraz algebry bicyklicznej (podrozdział 1.6).

1.1 Monoidy, pierścienie i moduły

Jeśli M jest monoidem, to $\mathcal{U}(M)$ oznacza grupę jedności monoidu M, zaś $\mathcal{Z}(M)$ oznacza jego centrum. Dodatkowo $\langle A\rangle$ oznacza podmonoid w M generowany przez zbiór $A \subseteq M$. Natomiast przez M^{op} rozumiemy monoid przeciwny do M, tzn. monoid o tych samych elementach co M lecz z mnożeniem określonym jako $v \cdot w = wv$ dla dowolnych $v, w \in M$. Jeśli M i N są monoidami oraz $M \cong N^{\mathrm{op}}$, to mówimy, że monoidy M, N są antyizomorficzne.

Przykład 1.1.1. Gdy M jest nieskończoną grupą cykliczną o generatorze $x \in M$, to wtedy $M = \langle x, x^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}$ oraz $\langle x\rangle = \{1, x, x^2, \dots\} \cong \mathbb{N}$.

Niech F będzie monoidem wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$. Elementy monoidu F nazywamy słowami. Każde słowo $1 \neq w \in F$ jest postaci $w = x_1 \cdots x_n$ dla pewnych $x_1, \dots, x_n \in X$. Liczbę $n \geq 1$ nazywamy stopniem słowa w i oznaczamy $\deg(w)$, dodatkowo przyjmując, że stopień słowa pustego (tzn. $1 \in F$) równy jest zeru. Stopień definiuje w F naturalną gradację, czyli rozkład $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ spełniający $F_nF_m \subseteq F_{n+m}$ dla $n, m \geq 0$, gdzie F_n jest zbiorem słów stopnia $n \geq 0$. Liczbę wystąpień generatora $x \in X$ w słowie $w \in F$ nazywamy stopniem słowa w względem generatora x i oznaczamy $\deg_x(w)$. Oczywiście

$\deg(w) = \sum_{x \in X} \deg_x(w)$. Analogicznie dowolny generator $x \in X$ definiuje w monoidzie F naturalną gradację wyznaczoną przez stopnień względem x.

Definicja 1.1.2. Jeśli M jest monoidem, to relację równoważności $\rho \subseteq M \times M$ nazywamy kongruencją w M, gdy dla dowolnych $l, r \in M$ oraz $(v, w) \in \rho$ zachodzi $(lvr, lwr) \in \rho$.

Kongruencje w monoidach mogą być, w pewnym sensie, traktowane jako uogólnienie podgrup normalnych w grupach. Mianowicie gdy ρ jest kongruencją w grupie G, to łatwo sprawdzić, że $H_\rho = \{g \in G : (g, 1) \in \rho\}$ jest podgrupą normalną w G. Także odwrotnie, każda podgrupa normalna $H \subseteq G$ wyznacza kongruencję $\rho_H = \{(g, h) \in G \times G : gh^{-1} \in H\}$. Ponadto przyporządkowania $\rho \mapsto H_\rho$ i $H \mapsto \rho_H$ są wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami pomiędzy kratą kongruencji w G oraz kratą podgrup normalnych w G.

Jeśli ρ jest kongruencją w monoidzie M, to zbiór ilorazowy M/ρ posiada naturalną strukturę monoidu dziedziczoną z M. W szczególności jeśli ρ jest najmniejszą kongruencją w M zawierającą pary $(v_i, w_i) \in M \times M$ dla $i = 1, \dots, r$, to iloraz M/ρ oznaczamy przez

$$M/(v_1 = w_1, \dots, v_r = w_r).$$

Przykład 1.1.3. Jeśli F jest monoidem wolnym nad $\{x, y\}$, to $F/(xy = yx) \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Monoidy wolne odgrywają szczególnie ważną rolę, gdyż jak doskonale wiadomo każdy monoid da się przedstawić jako iloraz monoidu wolnego przez pewną kongruencję.

Definicja 1.1.4. Jeśli $M = F/\rho$, gdzie F jest monoidem wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$, zaś ρ jest najmniejszą, w sensie inkluzji, kongruencją w F zawierającą zbiór $R \subseteq F \times F$, to piszemy

$$M = \langle X : R \rangle$$

i mówimy o prezentacji monoidu M za pomocą generatorów ze zbioru X i relacji ze zbioru R. Gdy $(v, w) \in R$, to mówimy też, że relacja $v = w$ zachodzi w M. Jeśli oba zbiory X oraz R są skończone, to prezentację nazywamy skończona, zaś monoid M nazywamy skończenie prezentowalnym. W sytuacji gdy $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ oraz $R = \{(v_i, w_i) : i = 1, \dots, r\}$ piszemy

$$M = \langle x_1, \dots, x_n : v_1 = w_1, \dots, v_r = w_r \rangle.$$

Niejednokrotnie, dla uproszczenia zapisu, słowa z monoidu F identyfikować będziemy z elementami monoidu M przez nie wyznaczonymi, pamiętając, że na ogół każdy element monoidu M może być reprezentowany przez wiele różnych słów.

Gdy relacje definiujące M są jednorodne, tzn. gdy $\deg(v) = \deg(w)$ dla każdej pary $(v, w) \in R$, to każde słowo w F reprezentujące ustalony element w M ma ten sam stopień. Pozwala to przenieść pojęcie stopnia na elementy M i tym samym zadać w M naturalną gradację. Podobnie wygląda sytuacja, gdy relacje definiujące M są jednorodne względem ustalonego generatora $x \in X$. Również w tym przypadku monoid M dziedziczy z F gradację zadaną przez stopień względem generatora x.

Przykład 1.1.5. Jeśli $M = \langle x_1, \ldots, x_n : x_i x_j = x_j x_i$ dla $i, j = 1, \ldots, n\rangle$, to M jest wolnym monoidem abelowym i oczywiście $M \cong \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ (produkt n-krotny).

Wszystkie występujące w tej pracy pierścienie, to łączne pierścienie z jedynką. Jeśli R jest pierścieniem, to $\mathcal{U}(R)$ oznacza grupę jedności pierścienia R, natomiast $\mathcal{Z}(R)$ oznacza jego centrum. Przez R^{op} rozumiemy pierścień przeciwny do R, tzn. pierścień o tej samej strukturze addytywnej co R lecz z mnożeniem określonym jako $a \cdot b = ba$ dla dowolnych $a, b \in R$. Jeśli R i S są pierścieniami oraz $R \cong S^{\mathrm{op}}$, to mówimy, że pierścienie R, S są antyizomorficzne. W końcu dla niepustych podzbiorów $A, B \subseteq R$ piszemy

$$AB = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n : a_i \in A,\ b_i \in B \text{ oraz } n \geq 1\}.$$

Przez ideał pierścienia R rozumiemy zawsze jego ideał obustronny. Jeśli $a_1, \ldots, a_n \in R$, to ideał $Ra_1R + \cdots + Ra_nR$ oznaczamy przez $(a_1, \ldots, a_n)$.

Definicja 1.1.6. Niech R będzie pierścieniem. Mówimy, że ideał $I \subseteq R$ jest nilpotentny, gdy istnieje takie $n \geq 1$, że $I^n = 0$. Najmniejszą liczbę o tej własności nazywamy indeksem nilpotentności ideału I. Powiemy, że ideał $I \subseteq R$ jest nil-ideałem, gdy dowolny element z I jest nilpotentny.

Oczywiście każdy ideał nilpotentny jest nil-ideałem, ale na ogół implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Definicja 1.1.7. Mówimy, że R jest pierścieniem z gradacją, gdy R, jako grupa abelowa, posiada rozkład $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ spełniający $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$ dla dowolnych $n, m \geq 0$. W tej sytuacji elementy zbioru $\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$ nazywamy jednorodnymi. Dowolny element $a \in R$ ma jednoznaczny zapis $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \in R_n$ oraz $a_n \neq 0$ tylko dla skończenie wielu $n \geq 0$. Każdy niezerowy element a_n nazywamy składową jednorodną stopnia n elementu a.

Choć pojęcie pierścienia z gradacją może być wprowadzone w znacznie ogólniejszym kontekście, gdzie gradacja jest zadana za pomocą dowolnej półgrupy, to my ograniczymy się do opisanej wyżej sytuacji, w której gradacja pochodzi od półgrupy addytywnej $\mathbb{N}$.

Przykład 1.1.8. Niech $R = K[x_1, \dots, x_n]$ będzie algebrą wielomianów nad ciałem K. W tym przypadku R ma gradację pochodzącą od stopnia, tzn. $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$, gdzie R_n jest przestrzenią K-liniową rozpiętą przez zbiór jednomianów w R stopnia n.

Definicja 1.1.9. Mówimy, że ideał I pierścienia z gradacją $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ jest jednorodny, gdy $I = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(I \cap R_n)$.

Innymi słowy, ideał $I \subseteq R$ jest jednorodny, gdy wraz z każdym elementem zawiera jego składowe jednorodne. Równoważnie można powiedzieć, że ideał $I \subseteq R$ jest jednorodny, gdy jest generowany przez elementy jednorodne.

Przykład 1.1.10. Wprost z definicji widać, że w algebrze wielomianów $K[x, y, z]$ nad ciałem K ideał $(xy - z^2)$ jest jednorodny, natomiast ideał $(x^2 + y^2 - z)$ nie ma tej własności.

Przejdźmy teraz do bardzo ważnej, nie tylko z punktu widzenia tej pracy, klasy pierścieni i algebr jaką stanowią pierścienie oraz algebry półgrupowe. Ograniczymy się tutaj do algebr półgrupowych nad ciałem.

Definicja 1.1.11. Niech K będzie ciałem, natomiast M monoidem. Oznaczmy przez $K[M]$ przestrzeń K-liniową o bazie M z mnożeniem zdefiniowanym jako dwuliniowe rozszerzenie mnożenia w M. Tak wprowadzone działania definiują w $K[M]$ strukturę K-algebry. Algebrę tę nazywamy algebrą półgrupową monoidu M nad ciałem K. Dowolny element $a \in K[M]$ jest postaci $a = \sum_{w \in M} \lambda_w w$ dla pewnych $\lambda_w \in K$. Zbiór skończony

$$\mathrm{Supp}(a) = \{w \in M : \lambda_w \neq 0\}$$

nazywamy nośnikiem elementu a.

Przykład 1.1.12. Niech K będzie ciałem. Jeśli $M = \mathbb{Z}$, to $K[M] \cong K[x, x^{-1}]$, gdzie $K[x, x^{-1}]$ jest algebrą wielomianów Laurenta jednej zmiennej.

Ze strukturalnego punktu widzenia szczególnie ważna jest algebra półgrupowa monoidu wolnego. Jeśli F jest monoidem wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$ oraz K jest ciałem, to algebrę półgrupową $K[F]$ nazywamy K-algebrą wolną nad X i oznaczamy przez $K\langle X\rangle$. Elementy algebry $K\langle X\rangle$ nazywamy wielomianami. Gdy $|X| = 1$, to $K\langle X\rangle \cong K[x]$, gdzie $K[x]$ jest algebrą wielomianów jednej zmiennej. Gdy zaś $|X| \geq 2$, to algebra $K\langle X\rangle$ jest nieprzemienna i bywa nazywana algebrą wielomianów nieprzemiennych zmiennych ze zbioru X. W sytuacji gdy $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ piszemy również $K\langle X\rangle = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

Algebry wolne pełnią tę samą funkcję w kategorii algebr nad ciałem, co monoidy wolne wśród wszystkich monoidów. Innymi słowy, każda algebra da się przedstawić jako iloraz algebry wolnej przez pewien ideał.

Definicja 1.1.13. Niech K będzie ciałem. Jeśli $A = K\langle X\rangle/I$, gdzie $K\langle X\rangle$ jest K-algebrą wolną nad zbiorem $X \neq \varnothing$, zaś I jest ideałem w $K\langle X\rangle$ generowanym przez zbiór $R \subseteq K\langle X\rangle$, to piszemy

$$A = K\langle X : R\rangle$$

i mówimy o prezentacji algebry A za pomocą generatorów ze zbioru X i relacji ze zbioru R. Jeśli oba zbiory X oraz R są skończone, to prezentację nazywamy skończoną, zaś algebrę A nazywamy skończenie prezentowalną.

Najważniejszą będzie dla nas sytuacja, w której zbiór relacji R ma szczególnie prostą postać. Mianowicie gdy każdy element zbioru R jest różnicą dwóch słów tych samych stopni względem każdego generatora $x \in X$.

Definicja 1.1.14. Niech K będzie ciałem. Mówimy, że K-algebra A jest zdefiniowana przez jednorodne relacje półgrupowe, gdy posiada ona prezentację $A = K\langle X : R\rangle$, w której każdy element zbioru relacji R jest postaci $v - w$ dla pewnych słów $v, w \in F$ monoidu wolnego F nad zbiorem $X \neq \varnothing$, spełniających $\deg_x(v) = \deg_x(w)$ dla wszystkich $x \in X$.

Zauważmy, że algebra $A = K\langle X : R\rangle$ zdefiniowana przez jednorodne relacje półgrupowe może być traktowana jako algebra półgrupowa $K[M]$ monoidu $M = \langle X : R\rangle$ zdefiniowanego tą samą prezentacją co algebra A. Ponieważ relacje definiujące są jednorodne względem dowolnego z generatorów $x \in X$, to zarówno monoid M jak i algebra A posiadają naturalne gradacje dziedziczone z monoidu wolnego oraz algebry wolnej odpowiednio, stowarzyszone ze stopniami względem generatorów ze zbioru X.

W pewnym sensie powyższa sytuacja jest szczególnym przypadkiem zależności pomiędzy kongruencjami w monoidzie a ideałami algebry półgrupowej tego monoidu.

Definicja 1.1.15. Niech $K[M]$ będzie algebrą półgrupową monoidu M nad ciałem K. Każda kongruencja ρ w M wyznacza ideał I_ρ algebry $K[M]$ będący podprzestrzenią $K[M]$ rozpiętą przez zbiór $\{v - w : (v, w) \in \rho\}$. W tej sytuacji mówimy, że ideał I_ρ pochodzi od kongruencji ρ. Analogicznie każdy ideał I algebry $K[M]$ wyznacza w M kongruencję $\rho_I = \{(v, w) \in M \times M : v - w \in I\}$, o której mówimy, że pochodzi od ideału I.

Zaznaczmy tu wyraźnie, że odpowiedniość ta nie jest wzajemnie jednoznaczna. Choć każda kongruencja ρ w M pochodzi od ideału w $K[M]$, to nie każdy ideał I w $K[M]$ pochodzi od kongruencji w M. Nietrudno też sprawdzić, że dla kongruencji ρ w monoidzie M istnieje naturalny izomorfizm K-algebr $K[M]/I_\rho \cong K[M/\rho]$.

Omówmy teraz krótko dwa pojawiające się w pracy wymiary związane z pierścieniami. Pierwszym z nich jest klasyczny wymiar Krulla, znany dobrze np. z algebry przemiennej czy geometrii algebraicznej. Dla wygody przyjmijmy, że -1 jest również liczbą porządkową.

Definicja 1.1.16. Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem wszystkich ideałów pierwszych pierścienia R. Zdefiniujmy, przy pomocy indukcji pozaskończonej, podzbiory $\mathcal{P}_\alpha$ zbioru $\mathcal{P}$ dla dowolnej liczby porządkowej α. Aby zacząć przyjmijmy $\mathcal{P}_{-1} = \varnothing$. Gdy natomiast $\alpha \geq 0$ oraz zbiory $\mathcal{P}_\beta$ zostały zdefiniowane dla wszystkich $\beta < \alpha$, to niech $\mathcal{P}_\alpha$ będzie zbiorem tych ideałów $P \in \mathcal{P}$, dla których każdy ideał ze zbioru $\mathcal{P}$ istotnie zawierający P leży w $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}_\beta$. Jeśli $\mathcal{P}_\gamma = \mathcal{P}$ dla pewnego γ, to mówimy, że klasyczny wymiar Krulla pierścienia R istnieje, zaś najmniejszą liczbę porządkową γ o powyższej własności nazywamy klasycznym wymiarem Krulla tego pierścienia i oznaczamy przez $\operatorname{clKdim} R$. W przeciwnym wypadku mówimy, że klasyczny wymiar Krulla pierścienia R nie istnieje.

Oczywiście gdy $R = 0$, to mamy $\operatorname{clKdim} R = -1$. Jeśli natomiast klasyczny wymiar Krulla pierścienia $R \neq 0$ istnieje i jest skończony, to jest on równy największej z liczb $n \geq 0$, dla których istnieje w R łańcuch ideałów pierwszych postaci $P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$.

Przykład 1.1.17. Klasyczny wymiar Krulla dowolnego pierścienia prostego równy jest zeru. Natomiast klasyczny wymiar Krulla algebry wielomianów $K[x_1, \ldots, x_n]$ nad ciałem K równy jest n.

Drugi z wymiarów, który tu wprowadzimy ma zdecydowanie bardziej kombinatoryczny charakter. Dla naszych potrzeb zmodyfikujemy nieco definicję tzw. przestrzeni generującej, która w ogólniejszej sytuacji nie musi zawierać jedynki algebry. Ograniczymy się również do skończenie generowanych algebr nad ciałem.

Definicja 1.1.18. Niech A będzie skończenie generowaną algebrą nad ciałem K. Mówimy, że skończenie wymiarowa przestrzeń K-liniowa $V \subseteq A$ jest przestrzenią generującą algebry A, gdy $1 \in V$ oraz V generuje A jako K-algebrę. Jeśli V jest przestrzenią generującą algebry A, to niech $V^0 = K$ oraz V^n dla $n \geq 1$ będzie przestrzenią K-liniową rozpiętą przez jednomiany postaci $v_1 \cdots v_n$, gdzie $v_i \in V$. Funkcją wzrostu algebry A, względem przestrzeni generującej V, nazywamy funkcję zdefiniowaną jako $d_A(n) = \dim_K V^n$ dla $n \geq 0$. Wymiarem Gelfanda-Kirillova algebry A nazywamy liczbę (dopuszczając ∞) daną jako

$$\operatorname{GKdim} A = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log d_A(n)}{\log n}.$$

Oczywiście funkcja wzrostu algebry A jest zależna od wyboru jej przestrzeni generującej. Mimo tego można pokazać, że funkcje wzrostu algebry A otrzymane dla różnych przestrzeni generujących są w pewien sposób porównywalne i prowadzą do niezmiennika zwanego jej wzrostem. W szczególności wymiar Gelfanda-Kirillova algebry A jest zależny tylko od jej wzrostu, nie zaś od wybory konkretnej przestrzeni generującej dla A.

Przykład 1.1.19. Jeśli K jest ciałem, to wymiar Gelfanda-Kirillova algebry wielomianów $K[x_1, \dots, x_n]$ równy jest n. Natomiast wymiar Gelfanda-Kirillova algebry wolnej $K\langle x, y\rangle$ jest nieskończony.

Wymiar Gelfanda-Kirillova, w przeciwieństwie do klasycznego wymiaru Krulla, może przyjmować również wartości niecałkowite. Mianowicie można pokazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $r \in \{0, 1\} \cup [2, \infty)$ istnieje skończenie generowana algebra nad ciałem o wymiarze Gelfanda-Kirillova równym r (patrz [25]). W przypadku algebr przemiennych mamy jednak następujący wynik.

Propozycja 1.1.20. *Niech A będzie przemienną algebrą nad ciałem K.*

(1) *Wymiar* $\operatorname{GKdim} A$ *jest albo liczbą naturalną albo jest nieskończony.*

(2) *Jeśli algebra A jest skończenie generowana, to* $\operatorname{GKdim} A = \operatorname{clKdim} A < \infty$.

Na koniec podrozdziału wprowadźmy kilka pojęć związanych z modułami. Zaznaczmy wyraźnie, że wszystkie pojawiające się w pracy moduły są unitarne, tzn. jedynka pierścienia działa w nich jako identyczność. Jeśli V jest lewostronnym R-modułem, to dla oznaczenia tej sytuacji stosujemy zapis ${}_RV$. Analogicznie zapis W_R oznacza, że W jest prawostronnym R-modułem. Gdy nie chcemy podkreślać strony z której działają skalary pierścienia R, to mówimy po prostu o R-modułach.

Definicja 1.1.21. Jeśli V jest lewostronnym R-modułem, to zbiór

$$\operatorname{Ann}_R(V) = \{a \in R : aV = 0\}$$

nazywamy anihilatorem modułu V. Mówimy, że moduł V jest wierny, gdy $\operatorname{Ann}_R(V) = 0$.

Oczywiście dla dowolnego R-modułu V jego anihilator $I = \mathrm{Ann}_R(V)$ jest ideałem w R. Ponadto V posiada naturalną strukturę (R/I)-modułu i V traktowany jako (R/I)-moduł jest wierny.

Wśród wszystkich modułów istotną klasę stanowią moduły proste, które w pewnym sensie są budulcem bardziej złożonych struktur.

Definicja 1.1.22. Mówimy, że R-moduł V jest prosty, gdy $V \neq 0$ oraz V nie posiada niezerowych R-podmodułów właściwych.

Jeśli lewostronny R-moduł V jest prosty, to dla dowolnego $0 \neq v \in V$ musi być $Rv = V$. Odwrotnie, gdy dla dowolnego $0 \neq v \in V$ zachodzi $Rv = V$, to R-moduł V jest prosty. Dobrze znanym faktem dotyczącym modułów prostych jest następujący wynik.

Lemat 1.1.23 (Schur)**.** *Niech R będzie pierścieniem. Jeśli V jest prostym R-modułem, to $D = \mathrm{End}_R(V)$ jest pierścieniem z dzieleniem.*

Definicja 1.1.24. Reprezentacją (liniową) algebry A nad ciałem K w przestrzeni K-liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm K-algebr $\rho\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$. Jeśli homomorfizm ρ jest injektywny, to mówimy, że reprezentacja ρ jest wierna.

Zauważmy, że każda reprezentacja monoidu M w przestrzeni K-liniowej V rozszerza się jednoznacznie do reprezentacji algebry półgrupowej $K[M]$ w przestrzeni V. Odnotujmy również, że każda reprezentacja $\rho\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$ algebry A w przestrzeni V zadaje na V strukturę lewostronnego A-modułu. Mianowicie wystarczy przyjąć

$$a \cdot v = \rho(a)(v) \text{ dla } a \in A \text{ oraz } v \in V.$$

Także odwrotnie, każdy lewostronny A-moduł V wyznacza reprezentację $\rho\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$ algebry A w przestrzeni V za pomocą wzoru

$$\rho(a)(v) = av \text{ dla } a \in A \text{ oraz } v \in V.$$

Z tych powodów często utożsamiamy reprezentacje algebry lub monoidu z odpowiadającymi im modułami.

Definicja 1.1.25. Mówimy, że reprezentacja algebry A nad ciałem K w przestrzeni liniowej V jest nieprzywiedlna, gdy stowarzyszony z nią A-moduł V jest prosty.

Innymi słowy, reprezentacja $\rho\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$ jest nieprzywiedlna, gdy przestrzeń V nie posiada nietrywialnych podprzestrzeni ρ-niezmienniczych, tzn. takich podprzestrzeni K-liniowych W, że $0 \neq W \neq V$ oraz $\rho(a)(W) \subseteq W$ dla dowolnego $a \in A$.

Wśród reprezentacji monoidów lub odpowiadających im reprezentacji stowarzyszonych algebr półgrupowych wyróżniamy reprezentacje o szczególnie przejrzystej budowie.

Definicja 1.1.26. Mówimy, że reprezentacja algebry półgrupowej $K[M]$ monoidu M nad ciałem K w przestrzeni K-liniowej V jest jednomianowa, gdy przestrzeń V posiada taką bazę B, że dla dowolnego $a \in M$ oraz $v \in B$ istnieją $\lambda \in K$ oraz $w \in B$ spełniające $av = \lambda w$.

1.2 Ideały pierwsze i radykał pierwszy

Definicja 1.2.1. Mówimy, że pierścień R jest pierwszy, gdy $R \neq 0$ oraz dla dowolnych ideałów $I, J \subseteq R$ równość $IJ = 0$ implikuje $I = 0$ lub $J = 0$. Ideał $P \subseteq R$ nazywamy pierwszym, gdy pierścień ilorazowy R/P jest pierwszy.

Nietrudno sprawdzić, że w pierścieniu R ideał $P \neq R$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in R$ inkluzja $aRb \subseteq P$ implikuje $a \in P$ lub $b \in P$. W szczególności pierścień $R \neq 0$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in R$ równość $aRb = 0$ implikuje $a = 0$ lub $b = 0$.

Przykład 1.2.2. Jeśli R jest pierścieniem przemiennym, to R jest pierwszy dokładnie wtedy, gdy jest dziedziną, tzn. gdy dla dowolnych $a, b \in R$ równość $ab = 0$ implikuje $a = 0$ lub $b = 0$.

Wśród pierścieni nieprzemiennych istnieje jednak duże rozgraniczenie pomiędzy tymi pojęciami. Przykładowo dla dowolnego ciała K oraz $n \geq 2$ algebra $n \times n$ macierzy $\mathcal{M}_n(K)$ jest pierwsza ale nie jest dziedziną.

Definicja 1.2.3. Radykałem pierwszym $\mathcal{B}(R)$ pierścienia R nazywamy przecięcie rodziny wszystkich ideałów pierwszych tego pierścienia. Mówimy, że pierścień R jest półpierwszy, gdy $\mathcal{B}(R) = 0$. Natomiast ideał $I \subseteq R$ nazywamy półpierwszym, gdy pierścień ilorazowy R/I jest półpierwszy.

Podobnie jak pierwszość tak i półpierwszość może być zdefiniowana za pomocą relacji angażujących nie ideały a elementy pierścienia. Mianowicie pierścień R jest półpierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in R$ równość $aRa = 0$ implikuje $a = 0$. Natomiast ideał $I \subseteq R$ jest półpierwszy dokładnie wtedy, gdy dla dowolnego $a \in R$ inkluzja $aRa \subseteq I$ implikuje $a \in I$.

Dobrze znana jest również inna charakteryzacja półpierwszości. Mianowicie pierścień R jest półpierwszy dokładnie wtedy, gdy nie zawiera niezerowych ideałów nilpotentnych, tzn. gdy dla dowolnego ideału $J \subseteq R$ równość $J^2 = 0$ implikuje $J = 0$. Natomiast ideał $I \subseteq R$ jest półpierwszy dokładnie wtedy, gdy dla dowolnego ideału $J \subseteq R$ inkluzja $J^2 \subseteq I$ implikuje $J \subseteq I$. W szczególności każdy ideał nilpotentny pierścienia R zawiera się w dowolnym ideale półpierwszym pierścienia R.

Definicja 1.2.4. Jeśli R jest pierścieniem przemiennym, to R jest półpierwszy dokładnie wtedy, gdy jest zredukowany, tzn. gdy nie ma on niezerowych elementów nilpotentnych.

Również w tym przypadku dla pierścieni nieprzemiennych mamy wyraźne rozgraniczenie pomiędzy wprowadzonymi pojęciami. Oczywiście pierścień zredukowany jest półpierwszy. Jednak dla dowolnego $n \geq 2$ algebra $n \times n$ macierzy $\mathcal{M}_n(K)$ nad ciałem K jest półpierwsza i zawiera niezerowe nilpotenty.

Wykorzystując pojęcie m-systemów (które może być traktowane jako pewne uogólnienie zbiorów multiplikatywnych) oraz dowodząc, że maksymalny, względem inkluzji, ideał pusto przecinający ustalony m-system jest pierwszy, otrzymujemy następujący wynik.

Propozycja 1.2.5. *Jeśli R jest pierścieniem, to $\mathcal{B}(R)$ jest nil-ideałem w R.*

Dodajmy jeszcze, że gdy $I \subseteq R$ jest ideałem, to warunek $\mathcal{B}(R/I) = 0$ sprowadza się do powiedzenia, że ideał I jest przecięciem pewnej rodziny ideałów pierwszych, w szczególności radykał pierwszy $\mathcal{B}(R)$ jest najmniejszym ideałem półpierwszym pierścienia R.

Na zakończenie tego podrozdziału wspomnijmy o własnościach minimalnych ideałów pierwszych. Choć, jak zaznaczono we wstępie do tego rozdziału, wyniki te są klasyczne zaś ich dowody dobrze znane, to pozwolimy sobie tutaj je przypomnieć, ze względu na ważną rolę jaką pełnią minimalne ideały pierwsze w tej pracy.

Poniższa propozycja pokazuje, że w definicji radykału pierwszego wystarczy ograniczyć się do przecięcia minimalnych ideałów pierwszych.

Propozycja 1.2.6. *Każdy ideał pierwszy P pierścienia R zawiera w sobie minimalny ideał pierwszy tego pierścienia.*

Dowód. Należy wykazać, że rodzina $\mathcal{F}$ ideałów pierwszych pierścienia R zawartych w P posiada element minimalny (względem inkluzji). Dzięki lematowi Kuratowskiego-Zorna ([1]) wystarczy sprawdzić, że każdy łańcuch $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ posiada minorantę. Twierdzimy, że ideał $P_0 = \bigcap \mathcal{C}$ jest minorantą łańcucha $\mathcal{C}$. Oczywiście $P_0 \subseteq Q$ dla dowolnego $Q \in \mathcal{C}$. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że P_0 jest ideałem pierwszym. Załóżmy więc, że $IJ \subseteq P_0$ dla pewnych ideałów I, J pierścienia R oraz $I \nsubseteq P_0$. Wtedy także $I \nsubseteq Q_0$ dla pewnego $Q_0 \in \mathcal{C}$, co implikuje $J \subseteq Q_0$. W tej sytuacji dla dowolnego $Q \in \mathcal{C}$ mamy $Q_0 \subseteq Q$ i wtedy $J \subseteq Q$ lub $Q \subseteq Q_0$ i dzięki $IJ \subseteq Q$ oraz $I \nsubseteq Q$ dostajemy $J \subseteq Q$. Łącznie $J \subseteq Q$ dla dowolnego $Q \in \mathcal{C}$, co daje $J \subseteq P_0$ i tym samym kończy dowód. □

Ponadto w pierścieniach z gradacją minimalne ideały pierwsze są jednorodne.

Propozycja 1.2.7. *Dowolny minimalny ideał pierwszy P pierścienia z gradacją R jest jednorodny.*

Dowód. Niech P^* będzie ideałem w R generowany przez wszystkie elementy jednorodne z P. Oczywiście ideał P^* jest jednorodny oraz $P^* \subseteq P$. Pokażemy, że P^* jest ideałem pierwszym, co wobec minimalności P da równość $P = P^*$ i tym samym zakończy dowód.

Niech zatem $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in R$ oraz $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \in R$ spełniają $aRb \subseteq P^*$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $a, b \notin P^*$. Wtedy $a_p, b_q \notin P^*$ dla pewnych $p, q \geq 0$ i możemy dodatkowo założyć, że są to najmniejsze liczby o tej własności. Zauważmy, że z jednorodności ideału P^* wynika

$$\sum_{i+j=p+q} a_i R b_j \subseteq P^*. \tag{1.1}$$

Jeśli $(p, q) = (0, 0)$, to wprost z (1.1) dostajemy $a_p R b_q \subseteq P^*$. Jeśli natomiast $(p, q) \neq (0, 0)$, to dla dowolnych $(p, q) \neq (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spełniających $i + j = p + q$ mamy $i < p$ albo $j < q$. Wtedy odpowiednio $a_i \in P^*$ lub $b_j \in P^*$, zatem $a_i R b_j \subseteq P^*$ i w konsekwencji dzięki (1.1) również uzyskujemy $a_p R b_q \subseteq P^*$. Łącznie w obu przypadkach mamy $a_p R b_q \subseteq P^* \subseteq P$, co dzięki pierwszości P gwarantuje $a_p \in P$ lub $b_q \in P$. Ponieważ są to elementy jednorodne, to stąd $a_p \in P^*$ lub $b_q \in P^*$ odpowiednio. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że ideał P^* jest pierwszy. □

Łącząc ze sobą Propozycje 1.2.6 oraz 1.2.7 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 1.2.8. *Jeśli R jest pierścieniem z gradacją, to radykał pierwszy $\mathcal{B}(R)$ pierścienia R jest ideałem jednorodnym.*

([1]) Wykorzystując jego wersję dualną: *Jeśli w zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch posiada minorantę, to w zbiorze tym istnieje element minimalny.*

1.3 Ideały prymitywne i radykał Jacobsona

Definicja 1.3.1. Mówimy, że pierścień R jest lewostronnie prymitywny, gdy istnieje wierny i prosty lewostronny R-moduł. Ideał $P \subseteq R$ nazywamy lewostronnie prymitywnym, gdy pierścień ilorazowy R/P jest lewostronnie prymitywny. Analogicznie definiujemy pierścienie i ideały prawostronnie prymitywne.

Zauważmy, że gdy V jest lewostronnym R-modułem prostym, to $P = \mathrm{Ann}_R(V)$ jest ideałem lewostronnie prymitywnym w R. Ponadto każdy ideał lewostronnie prymitywny pierścienia R jest tej postaci.

Przykład 1.3.2. Jeśli R jest pierścieniem przemiennym, to R jest prymitywny dokładnie wtedy, gdy jest ciałem.

Powyższy przykład pokazuje, że nietrywialnych pierścieni prymitywnych należy szukać wśród pierścieni nieprzemiennych. Wiadomo także, że w klasie pierścieni nieprzemiennych pojęcie prymitywności nie jest symetryczne. Mianowicie istnieje taki pierścień, który jest lewostronnie prymitywny ale nie jest prawostronnie prymitywny.

Propozycja 1.3.3. *Jeśli R jest pierścieniem lewostronnie (prawostronnie) prymitywnym, to R jest pierścieniem pierwszym. W szczególności każdy ideał lewostronnie (prawostronnie) prymitywny jest pierwszy.*

Od dawna znane jest twierdzenie o gęstości opisujące dość dokładnie strukturę pierścieni jednostronnie prymitywnych. Aby je zacytować wprowadźmy nieco terminologii. Niech R oraz D będą pierścieniami, niech V będzie (R, D)-bimodułem oraz niech $E = \mathrm{End}_D(V)$. W takiej sytuacji mówimy, że R działa gęsto w V_D, gdy dla dowolnego $\varphi \in E$ oraz dla dowolnych $v_1, \dots, v_n \in V$ istnieje takie $r \in R$, że $\varphi(v_i) = rv_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Pojęcie *gęstości* ma tu istotnie topologiczny charakter. Mianowicie niech $\mathcal{T}$ będzie topologią w E zadaną przez bazę otoczeń złożoną ze zbiorów postaci

$$\{\psi \in E : \psi(v_i) = w_i \text{ dla } i = 1, \dots, n\},$$

gdzie $v_i, w_i \in V$ oraz $n \geq 1$. Można wtedy sprawdzić, że R działa gęsto w V_D dokładnie wtedy, gdy naturalny obraz pierścienia R w E jest gęsty w topologii $\mathcal{T}$. W szczególności gdy $D = \mathrm{End}_R(V)$, to R może być traktowany jako podpierścień E. Gdy R działa gęsto w V_D, to mówimy wtedy, że R jest gęsty w E.

Twierdzenie 1.3.4 (Jacobson, Chevalley)**.** *Załóżmy, że R jest pierścieniem lewostronnie prymitywnym, zaś V wiernym i prostym lewostronnym R-modułem. Niech $D = \mathrm{End}_R(V)$. Wtedy pierścień R jest izomorficzny z gęstym podpierścieniem pierścienia $\mathrm{End}_D(V)$.*

(1) *Jeśli pierścień R jest lewostronnie artinowski, to $n = \dim_D V < \infty$ oraz $R \cong \mathcal{M}_n(D)$.*

(2) *Jeśli pierścień R nie jest lewostronnie artinowski, to $\dim_D V = \infty$ oraz dla dowolnego $n \geq 1$ istnieje podpierścień $R_n \subseteq R$ dopuszczający homomorfizm na $\mathcal{M}_n(D)$.*

Dla nas najistotniejszy będzie płynący z Twierdzenia 1.3.4 wniosek.

Wniosek 1.3.5. *Niech A będze lewostronnie lub prawostronnie prymitywną algebrą nad algebraicznie domkniętym ciałem K. Jeśli $\dim_K A < |K|$, to algebra A jest centralna, tzn. $\mathcal{Z}(A) = K$.*

Dowód. Zamieniając ewentualnie A na A^{op} możemy założyć, że algebra A jest lewostronnie prymitywna. Niech zatem V będzie wiernym i prostym lewostronnym A-modułem. Jeśli $z \in \mathcal{Z}(A)$, to odwzorowanie $\varphi\colon V \to V$ dane wzorem $\varphi(v) = zv$ dla $v \in V$ leży w algebrze $D = \mathrm{End}_A(V)$. Pokażemy, że $D = K$ uzyskując tym samym skalar $\lambda \in K$ spełniający $zv = \varphi(v) = \lambda v$ dla $v \in V$. W takiej sytuacji wierność V zapewni $z = \lambda \in K$ i zakończy dowód.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieje $x \in D \setminus K$. Dzięki Lematowi 1.1.23 wiemy, że D jest K-algebrą z dzieleniem, zatem dla dowolnego $\lambda \in K$ istnieje odwrotność $(x - \lambda)^{-1} \in D$. Ponadto Twierdzenie 1.3.4 implikuje, że D jest obrazem homomorficznym pewnej podalgebry A, w szczególności $\dim_K D \leq \dim_K A < |K|$. W tej sytuacji elementy zbioru $\{(x - \lambda)^{-1} : \lambda \in K\} \subseteq D$ muszą być liniowo zależne nad K, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (x - \lambda_i)^{-1} = 0 \tag{1.2}$$

dla pewnych $\lambda_i, \mu_i \in K$, gdzie λ_i są parami różne oraz nie wszystkie μ_i są równe zeru. Mnożąc równość (1.2) przez $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ dostajemy nietrywialne równanie algebraicznej zależności x nad K. Ponieważ ciało K jest algebraicznie domknięte, to musi być $x \in K$, sprzeczność. □

Definicja 1.3.6. Radykałem Jacobsona $\mathcal{J}(R)$ pierścienia R nazywamy przecięcie rodziny wszystkich lewostronnie prymitywnych ideałów tego pierścienia. Mówimy, że pierścień R jest półprymitywny, gdy $\mathcal{J}(R) = 0$. Natomiast ideał $I \subseteq R$ nazywamy półprymitywnym, gdy pierścień ilorazowy R/I jest półprymitywny.

Pomimo tego, że radykał Jacobsona $\mathcal{J}(R)$ pierścienia R zdefiniowaliśmy jako przecięcie wszystkich jego ideałów lewostronnie prymitywnych, to dobrze wiadomo, iż radykał $\mathcal{J}(R)$ jest też równy przecięciu wszystkich prawostronnie prymitywnych ideałów pierścienia R.

Przykład 1.3.7. Algebra wielomianów $K[x_1, \ldots, x_n]$ nad ciałem K jest półprymitywna. Natomiast dla algebry szeregów formalnych $K[[x]]$ mamy $\mathcal{J}(K[[x]]) = (x)$.

Radykał Jacobsona może być też definiowany za pomocą maksymalnych lewostronnych (prawostronnych) ideałów modularnych czy też w końcu za pomocą ideałów (elementów) lewostronnie (prawostronnie) quasi-regularnych. My jednak nie będziemy wykorzystywać tych definicji. Istotny będzie tylko poniższy rezultat.

Propozycja 1.3.8. *Jeśli I jest nil-ideałem pierścienia R, to $I \subseteq \mathcal{J}(R)$. W szczególności $\mathcal{B}(R) \subseteq \mathcal{J}(R)$.*

Dodajmy, że gdy I jest ideałem pierścienia R, to warunek $\mathcal{J}(R/I) = 0$ jest równoważny stwierdzeniu, że I jest przecięciem pewnej rodziny ideałów lewostronnie (prawostronnie) prymitywnych. W szczególności wynika stąd, że radykał Jacobsona $\mathcal{J}(R)$ jest najmniejszym ideałem półprymitywnym pierścienia R.

Podobnie jak w przypadku radykału pierwszego również radykał Jacobsona pierścienia z gradacją jest jednorodny.

Twierdzenie 1.3.9 (Bergman)**.** *Jeśli R jest pierścieniem z gradacją, to radykał Jacobsona $\mathcal{J}(R)$ pierścienia R jest ideałem jednorodnym.*

Kolejną istotną w tej pracy kwestią jest zachowanie się radykału Jacobsona podczas operacji rozszerzenia skalarów. Można wykazać, że dla algebr nad ciałem prawdziwy jest następujący rezultat.

Twierdzenie 1.3.10 (Amitsur)**.** *Niech A będzie algebrą nad ciałem K oraz niech L/K będzie algebraicznym rozszerzeniem ciał. Wtedy $L \otimes_K \mathcal{J}(A) \subseteq \mathcal{J}(L \otimes_K A)$. Jeśli dodatkowo rozszerzenie L/K jest rozdzielcze, to $L \otimes_K \mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(L \otimes_K A)$.*

Jeżeli $K[M]$ jest algebrą półgrupową monoidu M nad ciałem K, natomiast L/K jest rozszerzeniem ciał, to oczywiście $L \otimes_K K[M] \cong L[M]$ jako L-algebry. W szczególności otrzymujemy następujący wniosek z Twierdzenia 1.3.10.

Wniosek 1.3.11. *Niech M będzie monoidem. Jeśli L/K jest algebraicznym rozszerzeniem ciał, to $L \otimes_K \mathcal{J}(K[M]) \subseteq \mathcal{J}(L[M])$. W szczególności jeśli algebra $L[M]$ jest półprymitywna, to algebra $K[M]$ jest również półprymitywna.*

1.4 Elementy regularne i centralne lokalizacje

Definicja 1.4.1. Niech R będzie pierścieniem. Mówimy, że element $x \in R$ jest regularny, gdy dla dowolnego $a \in R$ z faktu $ax = 0$ lub $xa = 0$ wynika $a = 0$.

W szczególności każdy element regularny musi być różny od zera. Oczywiście dowolny element odwracalny jest regularny. Nietrudno się też przekonać, że gdy R jest pierścieniem pierwszym oraz $0 \neq x \in \mathcal{Z}(R)$, to element x jest regularny.

Definicja 1.4.2. Podzbiór S pierścienia R nazywamy multiplikatywnym, gdy $1 \in S$ oraz dla dowolnych $a, b \in S$ również $ab \in S$.

Innymi słowy, podzbiory multiplikatywne pierścienia R to podmonoidy pierścienia R traktowanego jako monoid względem mnożenia.

Definicja 1.4.3. Niech S będzie zbiorem multiplikatywnym w pierścieniu R. Mówimy, że S jest prawostronnie przestawialny, gdy dla dowolnego $a \in R$ oraz $s \in S$ równość $sa = 0$ implikuje $as' = 0$ dla pewnego $s' \in S$. Mówimy, że S jest prawostronnie permutowalny (lub, że S spełnia prawostronny warunek Orego), gdy dla dowolnego $a \in R$ oraz $s \in S$ zachodzi $aS \cap sR \neq \varnothing$. Powiemy w końcu, że S jest zbiorem prawostronnych mianowników w R, gdy S jest jednocześnie prawostronnie przestawialny i prawostronnie permutowalny.

Oczywiście wprowadzone powyżej pojęcia mają też swoje lewostronne odpowiedniki. Zauważmy jeszcze, że gdy S składa się z elementów regularnych, to jest on automatycznie lewostronnie i prawostronnie przestawialny. Gdy natomiast $S \subseteq \mathcal{Z}(R)$, to S jest zbiorem lewostronnych i prawostronnych mianowników w R.

Definicja 1.4.4. Jeśli S jest podzbiorem multiplikatywnym pierścienia R, to pierścień Q wraz z homomorfizmem $\varphi\colon R \to Q$ nazywamy (klasycznym) pierścieniem prawostronnych ułamków pierścienia R względem zbioru multiplikatywnego S, gdy:

(1) $\varphi(S) \subseteq \mathcal{U}(Q)$,

(2) każdy element $q \in Q$ jest postaci $q = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ dla pewnego $a \in R$ oraz $s \in S$,

(3) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in R : as = 0 \text{ dla pewnego } s \in S\}$.

Gdy taki pierścień Q istnieje, to można pokazać, że jest on wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do jedynego izomorfizmu. Piszemy wtedy $Q = RS^{-1}$.

Przykład 1.4.5. Niech $R = K[x]$ będzie algebrą wielomianów nad ciałem K. Wtedy dla zbioru $S = \langle x \rangle$ mamy $RS^{-1} \cong K[x, x^{-1}]$, gdzie $K[x, x^{-1}]$ jest algebrą wielomianów Laurenta jednej zmiennej.

Warunek konieczny i zarazem wystarczający istnienia klasycznego pierścienia ułamków sformułowany jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.4.6 (Ore, Asano)**.** *Pierścień R posiada klasyczny pierścień prawostronnych ułamków względem zbioru multiplikatywnego $S \subseteq R$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest zbiorem prawostronnych mianowników w R.*

Gdy $S \subseteq R$ składający się z elementów regularnych jest prawostronnie permutowalny, to po pierwsze dzięki Twierdzeniu 1.4.6 pierścień RS^{-1} istnieje, a po drugie warunek (3) Definicji 1.4.4 mówi, że homomorfizm φ jest injektywny, zatem R może być traktowany jako podpierścień RS^{-1}. W takiej sytuacji w zapisie elementów RS^{-1} pomijamy φ pisząc dla prostoty as^{-1} zamiast $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ dla $a \in R$ oraz $s \in S$.

Gdy zaś $S \subseteq \mathcal{Z}(R)$, to również w tym przypadku Twierdzenie 1.4.6 implikuje istnienie pierścienia RS^{-1}, zwanego centralną lokalizacją R względem S.

Dla nas najistotniejsza będzie jednak sytuacja, w której zbiór multiplikatywny S spełnia oba wymienione wyżej warunki.

Lemat 1.4.7. *Niech $Q = RS^{-1}$ będzie centralną lokalizacją pierścienia R względem zbioru multiplikatywnego $S \subseteq \mathcal{Z}(R)$ złożonego z elementów regularnych. Jeśli I jest ideałem w R, to IQ jest ideałem w Q oraz $I \subseteq IQ \cap R$, w szczególności $I = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $IQ = 0$. Podobnie jeśli J jest ideałem w S, to $J \cap R$ jest ideałem w R oraz $J = (J \cap R)Q$, w szczególności $J = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $J \cap R = 0$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że I jest ideałem w R. Jeśli $q, q' \in IQ$, to istnieją takie $a, a' \in I$ oraz $s \in S$, że $q = as^{-1}$ oraz $q' = a's^{-1}$. Wtedy $q - q' = (a - a')s^{-1} \in IQ$. Ponadto jeśli $r \in R$ oraz $s' \in S$, to $(rs'^{-1})q = (rs'^{-1})(as^{-1}) = (ra)(ss')^{-1} \in IQ$, co dowodzi, że IQ jest ideałem lewostronnym w Q. Oczywiście IQ jest również ideałem prawostronnym w Q. Pozostaje zauważyć, że inkluzja $I \subseteq IQ \cap R$ jest trywialna.

Niech teraz J będzie ideałem w Q. Oczywiście $J \cap R$ jest ideałem w R. Ponadto mamy $(J \cap R)Q \subseteq JQ \subseteq J$. Natomiast gdy $q = as^{-1} \in J$ dla pewnego $a \in R$ oraz $s \in S$, to $a = qs \in J \cap R$, zatem $q \in (J \cap R)Q$, co dowodzi inkluzji przeciwnej. □

Jako wniosek z Lematu 1.4.8 otrzymujemy wynik wiążący (pół)pierwszość pierścienia z (pół)pierwszością jego centralnej lokalizacji względem zbioru elementów regularnych.

Propozycja 1.4.8. *Niech $Q = RS^{-1}$ będzie centralną lokalizacją pierścienia R względem zbioru multiplikatywnego $S \subseteq \mathcal{Z}(R)$ złożonego z elementów regularnych. Wtedy pierścień Q jest (pół)pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień R jest (pół)pierwszy.*

Dowód. Ograniczymy się do dowodu części twierdzenia dotyczącej pierwszości, gdyż część dotyczącą półpierwszości dowodzi się niemal identycznie.

Na początek załóżmy, że R jest pierścieniem pierwszym. Niech ideały $J, J' \subseteq Q$ spełniają $JJ' = 0$. Na podstawie Lematu 1.4.7 wiemy, że $I = J \cap R$ oraz $I' = J' \cap R$ są ideałami w R. Ponadto $II' \subseteq JJ' = 0$, zatem pierwszość R gwarantuje $I = 0$ lub $I' = 0$. W tej sytuacji Lemat 1.4.7 zapewnia, że $J = 0$ lub $J' = 0$ odpowiednio, czyli Q jest pierścieniem pierwszym.

Odwrotnie, załóżmy teraz, że Q jest pierścieniem pierwszym. Niech $I, I' \subseteq R$ będą ideałami w R spełniającymi $II' = 0$. Wtedy dzięki Lematowi 1.4.7 wiemy, że $J = IQ$ oraz $J' = I'Q$ są ideałami w Q oraz $JJ' = IQI'Q = II'Q = 0$. W tej sytuacji pierwszość Q zapewnia $J = 0$ lub $J' = 0$ i pozostaje zauważyć, że Lemat 1.4.7 implikuje $I \subseteq J \cap R = 0$ lub $I' \subseteq J' \cap R = 0$ odpowiednio, czyli R jest pierścieniem pierwszym. □

Na koniec tego podrozdziału dodajmy, że naszkicowana wyżej technika lokalizacji ma swój odpowiednik w teorii monoidów i jest tam również bardzo użyteczna. Nie będziemy tu jednak powtarzać wszystkich definicji. Wspomnijmy tylko, że gdy M jest monoidem, $S \subseteq \mathcal{Z}(M)$ jest podmonoidem złożonym z elementów regularnych oraz K jest ciałem, to po pierwsze istnieje monoid prawostronnych ułamków MS^{-1}, natomiast po drugie S jest zbiorem prawostronnych mianowników w $K[M]$ oraz mamy naturalny izomorfizm K-algebr $K[M]S^{-1} \cong K[MS^{-1}]$.

1.5 Bazy Gröbnera-Shirshova i Diamond Lemma

Bazy Gröbnera w kontekście przemiennych algebr wielomianów po raz pierwszy pojawiły się w pracy Buchbergera z 1965 roku. Dziś są one dobrze znanym i szeroko stosowanym narzędziem w wielu zagadnieniach matematyki, informatyki a nawet inżynierii (patrz [1], [5], [36]). Trzynaście lat później, w 1978 roku, Bergman udowodnił swój słynny Diamond Lemma dla pierścieni (patrz [3]). Jako zauważył Mora (patrz [40], [41]) wynik ten może być traktowany jako uogólnienie przemiennych baz Gröbnera na przypadek algebry wielomianów nieprzemiennych, tzn. algebry wolnej. Ponieważ w sytuacji nieprzemiennej podobne metody stosowane były również przez Shirshova, to dziś nieprzemienne bazy Gröbnera noszą nazwę baz Gröbnera-Shirshova.

Definicja 1.5.1. Mówimy, że dobry porządek $\leq$ w monoidzie wolnym F nad zbiorem $X \neq \varnothing$ jest jednomianowy, gdy:

(1) $1 \leq w$ dla dowolnego $w \in F$,

(2) jeśli $v \leq w$ dla pewnych $v, w \in F$, to $lvr \leq lwr$ dla dowolnych $l, r \in F$.

Gdy dla słów $v, w \in F$ zachodzi $v \leq w$ oraz $v \neq w$, to piszemy $v < w$.

Przypomnijmy, że porządek liniowy jest dobry, gdy każdy niepusty zbiór ma względem tego porządku element najmniejszy lub równoważnie, gdy porządek ten spełnia warunek stabilizacji ciągów malejących ([2]).

Przykład 1.5.2. Załóżmy, że zbiór X jest dobrze uporządkowany relacją $\preceq$. Można wtedy rozszerzyć $\preceq$ do porządku leksykograficznego w monoidzie wolnym F nad X. Wystarczy dla $v, w \in F$ przyjąć $v \prec w$, gdy $w = vr$ dla pewnego $1 \neq r \in F$ lub $v = lx_1r_1$ i $w = lx_2r_2$ dla pewnych $l, r_1, r_2 \in F$ oraz $x_1, x_2 \in X$ spełniających $x_1 \prec x_2$. Niestety gdy $|X| \geq 2$, to porządek ten nie jest dobry, gdyż dla $x, y \in X$ spełniających $x \prec y$ mamy $x^{i+1}y \prec x^iy$ dla $i \geq 0$. Jednakże niewielka modyfikacja prowadzi do porządku jednomianowego zwanego porządkiem stopniowo-leksykograficznym. Mianowicie dla $v, w \in F$ definiujemy $v < w$, gdy $\deg(v) < \deg(w)$ lub $\deg(v) = \deg(w)$ ale $v \prec w$ leksykograficznie.

Niech F będzie monoidem wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$, zaś $K\langle X\rangle$ algebrą wolną nad ciałem K. Każdy wielomian $0 \neq f \in K\langle X\rangle$ ma jednoznaczny zapis w postaci $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$, gdzie $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in F$ spełniają $w_i \neq w_j$ dla $i \neq j$. Oczywiście mamy wtedy $\mathrm{Supp}(f) = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Gdy dodatkowo $\leq$ jest porządkiem jednomianowym w F, to możemy założyć, że $w_1 < \cdots < w_n$. W takiej sytuacji skalar $\mathrm{LC}(f) = \lambda_n$ nazywany jest współczynnikiem wiodącym, zaś słowo $\mathrm{LM}(f) = w_n$ nazywane jest jednomianem wiodącym wielomianu f względem porządku $\leq$ odpowiednio.

([2]) Znany jako DCC = Descending Chain Condition.

Definicja 1.5.3. Niech $\leq$ będzie porządkiem jednomianowym w monoidzie wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$ oraz niech $K\langle X\rangle$ będzie algebrą wolną nad ciałem K. Ideałem jednomianów wiodących zbioru $G \subseteq K\langle X\rangle$ nazywamy ideał $\mathrm{LM}(G)$ generowany przez słowa $\mathrm{LM}(g)$ dla $0 \neq g \in G$. Mówimy, że zbiór $G \subseteq K\langle X\rangle$ jest bazą Gröbnera-Shirshova ideału $I \subseteq K\langle X\rangle$ względem porządku $\leq$, gdy $G \subseteq I$ oraz $\mathrm{LM}(G) = \mathrm{LM}(I)$.

Jeżeli porządek jest ustalony i nie prowadzi to do pomyłek, to dla uproszczenia mówimy o współczynnikach wiodących, jednomianach wiodących oraz bazach Gröbnera-Shirshova opuszczając opis *względem porządku.*

W przeciwieństwie do przemiennych baz Gröbnera dopuszczamy sytuację, w której baza Gröbnera-Shrishova jest nieskończona. Takie podejście ma swoje uzasadnienia. Po pierwsze gdy $|X| \geq 2$, to istnieją ideały w $K\langle X\rangle$, które nie są skończenie generowane. Ideały takie, zgodnie z Propozycją 1.5.4, nie mogą mieć skończonej bazy Gröbnera-Shirshova (zaznaczmy, że nieskończone bazy Gröbnera-Shirshova zawsze istnieją). Po drugie nawet nieskończone bazy Gröbnera-Shirshova są użyteczne i mogą pełnić niemal tę samą rolę co bazy skończone.

Propozycja 1.5.4. *Niech $K\langle X\rangle$ będzie algebrą wolną nad ciałem K. Jeśli zbiór G jest bazą Gröbnera-Shirshova ideału $I \subseteq K\langle X\rangle$, to G generuje I jako ideał.*

Przejdźmy teraz do pojęć, które pozwolą nam sformułować słynny Diamond Lemma Bergmana.

Definicja 1.5.5. Niech F będzie monoidem wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$ oraz niech $K\langle X\rangle$ będzie algebrą wolną nad ciałem K. Zbiorem redukcji w $K\langle X\rangle$ nazywamy dowolny podzbiór $S \subseteq F \times K\langle X\rangle$ o własności $w_\sigma \notin \mathrm{Supp}(f_\sigma)$ dla dowolnego $\sigma = (w_\sigma, f_\sigma) \in S$. Redukcją związaną z $\sigma = (w_\sigma, f_\sigma) \in S$ oraz $l, r \in F$ nazywamy endomorfizm $\mathcal{R}_{l\sigma r} \in \mathrm{End}_K(K\langle X\rangle)$ określony na bazie F przestrzeni $K\langle X\rangle$ formułą

$$\mathcal{R}_{l\sigma r}(w) = \begin{cases} l f_\sigma r, & \text{gdy } w = l w_\sigma r, \\ w, & \text{gdy } w \neq l w_\sigma r. \end{cases}$$

Powiemy w końcu, że wielomian $f \in K\langle X\rangle$ jest zredukowany względem S (S-zredukowany), gdy $\mathcal{R}_{l\sigma r}(f) = f$ dla dowolnych $\sigma \in S$ oraz $l, r \in F$.

Nietrudno się przekonać, że wielomiany zredukowane względem zbioru redukcji S tworzą podprzestrzeń K-liniową algebry $K\langle X\rangle$. Podprzestrzeń tę oznaczamy przez $\mathcal{R}(S)$.

Definicja 1.5.6. Niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle X\rangle$ nad ciałem K oraz niech $f \in K\langle X\rangle$. Jeśli istnieje skończony ciąg redukcji $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ w $K\langle X\rangle$, dla których wielomian $\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1(f)$ jest S-zredukowany, to nazywamy go postacią zredukowaną f względem S (postacią S-zredukowaną). Jeśli dla dowolnego ciągu redukcji $(\mathcal{R}_j)_{j=0}^{\infty}$ w $K\langle X\rangle$ istnieje takie $n \geq 0$, że $\mathcal{R}_{j+1}$ działa trywialnie na $\mathcal{R}_j \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1(f)$ dla $j \geq n$, to mówimy, że wielomian f jest skończenie redukowalny względem S (skończenie S-redukowalny). Powiemy w końcu, że f jest jednoznacznie redukowalny względem S (jednoznacznie S-redukowalny), gdy f jest skończenie S-redukowalny oraz posiada jedyną postać zredukowaną, oznaczaną przez $\mathcal{R}_S(f)$.

Można łatwo sprawdzić, że skończenie S-redukowalne wielomiany tworzą podprzestrzeń K-liniową algebry $K\langle X\rangle$. Dodatkowo każdy skończenie S-redukowalny wielomian $f \in K\langle X\rangle$ posiada postać S-zredukowaną.

Zdefiniujemy teraz kluczowe pojęcia niejednoznaczności dwóch typów oraz pojęcie ich rozwiązywalności.

Definicja 1.5.7. Niech F będzie monoidem wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$ oraz niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle X\rangle$ nad ciałem K. W takiej sytuacji piątkę (σ, τ, l, w, r), gdzie $\sigma, \tau \in S$ oraz $1 \neq l, w, r \in F$ nazywamy niejednoznacznością nakryciową, gdy $w_\sigma = lw$ oraz $w_\tau = wr$. Natomiast piątkę (σ, τ, l, w, r), gdzie $\sigma, \tau \in S$ są różne oraz $l, w, r \in F$ nazywamy niejednoznacznością inkluzyjną, gdy $w_\sigma = w$ oraz $w_\tau = lwr$. Powiemy, że niejednoznaczność nakryciowa (odpowiednio inkluzyjna) (σ, τ, l, w, r) jest rozwiązywalna, gdy istnieją skończone złożenia redukcji $\mathcal{R}$ oraz $\mathcal{R}'$, dla których zachodzi $\mathcal{R}(f_\sigma r) = \mathcal{R}'(l f_\tau)$ (odpowiednio $\mathcal{R}(l f_\sigma r) = \mathcal{R}'(f_\tau)$).

Zanim przejdziemy dalej rozważmy nieco słabszą wersję porządku w monoidzie wolnym F. Mianowicie powiemy, że $\leq$ jest częściowym porządkiem jednomianowym w F, gdy $\leq$ jest częściowym porządkiem w F oraz dla $v, w \in F$ nierówność $v \leq w$ implikuje $lvr \leq lwr$ dla dowolnych $l, r \in F$. Mówimy, że porządek częściowy $\leq$ spełnia DCC, gdy nie istnieje w F nieskończony ciąg malejący względem $\leq$ (porównaj z Definicją 1.5.1).

Definicja 1.5.8. Mówimy, że częściowy porządek jednomianowy $\leq$ w monoidzie wolnym F nad zbiorem $X \neq \varnothing$ jest zgodny ze zbiorem redukcji S w algebrze wolnej $K\langle X\rangle$ nad ciałem K, gdy $w < w_\sigma$ dla dowolnego $w \in \mathrm{Supp}(f_\sigma)$ oraz dowolnego $\sigma = (w_\sigma, f_\sigma) \in S$.

Gdy S jest zbiorem redukcji w algebrze $K\langle X\rangle$, to niech $\mathcal{I}(S)$ oznacza ideał algebry $K\langle X\rangle$ generowany przez wszystkie wielomiany postaci $w_\sigma - f_\sigma$ dla $\sigma = (w_\sigma, f_\sigma) \in S$. Dodatkowo gdy $\leq$ jest częściowym porządkiem jednomianowym w F oraz $w \in F$, to oznaczmy przez V_w podprzestrzeń K-liniową algebry $K\langle X\rangle$ rozpinaną elementami postaci $l(w_\sigma - f_\sigma)r$ dla $\sigma = (w_\sigma, f_\sigma) \in S$ oraz $l, r \in F$ spełniających $lw_\sigma r < w$.

Definicja 1.5.9. Niech $\leq$ będzie porządkiem jednomianowym w monoidzie wolnym nad zbiorem $X \neq \varnothing$ oraz niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle X\rangle$ nad ciałem K. Mówimy, że niejednoznaczność nakryciowa (odpowiednio inkluzyjna) (σ, τ, l, w, r) jest rozwiązywalna względem porządku $\leq$, gdy $f_\sigma r - lf_\tau \in V_{lwr}$ (odpowiednio $lf_\sigma r - f_\tau \in V_{lwr}$).

Posiadając już wszystkie niezbędne pojęcia jesteśmy gotowi do sformułowania bardzo ważnego dla nas twierdzenia — słynnego Diamond Lemma autorstwa Bergmana.

Diamond Lemma (Bergman). *Niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle X\rangle$ nad ciałem K. Jeśli $\leq$ jest częściowym porządkiem jednomianowym w monoidzie wolnym F nad $X \neq \varnothing$ zgodnym z S oraz spełniającym DCC, to następujące warunki są równoważne:*

(1) *wszystkie niejednoznaczności dla S są rozwiązywalne,*

(2) *wszystkie niejednoznaczności dla S są rozwiązywalne względem $\leq$,*

(3) *dowolny wielomian $f \in K\langle X\rangle$ jest jednoznacznie S-redukowalny,*

(4) *jako przestrzeń K-liniowa $K\langle X\rangle = \mathcal{I}(S) \oplus \mathcal{R}(S)$.*

Jeżeli powyższe warunki są spełnione, to K-algebra $K\langle X\rangle/\mathcal{I}(S)$ może być utożsamiana z przestrzenią $\mathcal{R}(S)$ wyposażoną w strukturę K-algebry za pomocą mnożenia określonego formułą $f \cdot g = \mathcal{R}_S(fg)$ dla $f, g \in \mathcal{R}(S)$.

Zauważmy także, iż w powyższej sytuacji Diamond Lemma implikuje, że obraz zbioru $F \cap \mathcal{R}(S)$ w algebrze $K\langle X\rangle/\mathcal{I}(S)$ stanowi bazę liniową tej algebry.

Na koniec tego podrozdziału odnotujmy, że Diamond Lemma Bergmana oraz metody związane z bazami Gröbnera-Shirshova mogą być traktowane jako dwa ujęcia tej samej techniki. Istotnie, niech $\leq$ będzie porządkiem jednomianowym w monoidzie wolnym F nad zbiorem $X \neq \varnothing$ oraz niech G będzie podzbiorem algebry wolnej $K\langle X\rangle$ nad ciałem K spełniającym $\mathrm{LC}(g) = 1$ dla $0 \neq g \in G$. Zdefiniujmy

$$S = \{(\mathrm{LM}(g), \mathrm{LM}(g) - g) : 0 \neq g \in G\} \subseteq F \times K\langle X\rangle.$$

Wtedy S jest zbiorem redukcji w algebrze $K\langle X\rangle$, zaś porządek $\leq$ jest zgodny z S. Również odwrotnie, każdy zbiór redukcji S w algebrze $K\langle X\rangle$ wyznacza zbiór

$$G = \{w_\sigma - f_\sigma : \sigma = (w_\sigma, f_\sigma) \in S\} \subseteq K\langle X\rangle.$$

Jeśli dodatkowo porządek $\leq$ jest zgodny ze zbiorem redukcji S, to oczywiście $\mathrm{LC}(g) = 1$ oraz $\mathrm{LM}(g) = w_\sigma$ dla dowolnego $g = w_\sigma - f_\sigma \in G$.

1.6 Monoid i algebra bicykliczna

Monoid bicykliczny jest jedną z fundamentalnych półgrup, która posiada wiele ważnych własności (patrz [12]). Przykładowo jest on półgrupą prostą, w której istnieje idempotent nieprymitywny oraz wiadomo, że każda półgrupa o tej własności zawiera kopię monoidu bicyklicznego. Jest on także całkowicie wyznaczony przez swoją kratę podpółgrup i spełnia nietrywialną tożsamość półgrupową. Dodajmy, że monoid bicykliczny znalazł również wiele zastosowań poza teorią półgrup.

Definicja 1.6.1. Monoid bicykliczny $\mathbb{B}$, to monoid zdefiniowany przez prezentację

$$\mathbb{B} = \langle x, y : yx = 1\rangle.$$

Nietrudno sprawdzić, że $xy \neq 1$ w $\mathbb{B}$. Natomiast przyporządkowanie $(x, y) \mapsto (y, x)$ rozszerza się do izomorfizmu monoidów $\mathbb{B} \cong \mathbb{B}^{\mathrm{op}}$. Ponadto mamy następujący rezultat.

Propozycja 1.6.2. *Niech M będzie monoidem generowanym przez elementy $x, y \in M$ spełniające $yx = 1$ oraz $xy \neq 1$. Wtedy $M \cong \mathbb{B}$ oraz każdy element monoidu M można jednoznacznie zapisać w postaci $x^i y^j$ dla pewnych $i, j \geq 0$.*

Monoid bicykliczny ma również tę własność, że każdy jego obraz homomorficzny jest izomorficzny z nim samym bądź z grupą cykliczną.

Wniosek 1.6.3. *Niech M będzie obrazem homomorficznym monoidu bicyklicznego $\mathbb{B}$. Wtedy $M \cong \mathbb{B}$ lub M jest izomorficzny z grupą cykliczną.*

W praktyce oznacza to, że monoid bicykliczny pojawia się w wielu różnych kontekstach, przykładowo w teorii pierścieni. Mianowicie niech

$$e_i = y^i x^i \in \mathbb{B}$$

dla $i \geq 1$. Zbiór $\{e_i : i \geq 1\}$ jest łańcuchem idempotentów w $\mathbb{B}$, przy użyciu którego można wykazać następujący fakt dotyczący algebry półgrupowej $K[\mathbb{B}]$ monoidu bicyklicznego nad ciałem K.

Propozycja 1.6.4. *Algebra bicykliczna $K[\mathbb{B}]$ nad ciałem K nie jest ani lewostronnie ani prawostronnie noetherowska.*

Dowód. Zauważmy, że dla $i \geq 1$ mamy $e_{i+1} = e_i e_{i+1}$, a stąd $1 - e_i = (1 - e_i)(1 - e_{i+1})$. Otrzymujemy więc wstępujący łańcuch ideałów lewostronnych postaci

$$K[\mathbb{B}](1 - e_1) \subseteq K[\mathbb{B}](1 - e_2) \subseteq K[\mathbb{B}](1 - e_3) \subseteq \cdots,$$

w którym inkluzje muszą być istotne. Rzeczywiście, gdyby $1 - e_{i+1} = a(1 - e_i)$ dla pewnego $i \geq 1$ oraz $a \in K[\mathbb{B}]$, to dzięki $e_{i+1} = e_{i+1}e_i$ otrzymalibyśmy

$$e_i - e_{i+1} = (1 - e_{i+1})e_i = a(1 - e_i)e_i = 0$$

i w konsekwencji $e_i = e_{i+1}$ co implikuje $xy = 1$ w $\mathbb{B}$, sprzeczność. Ponieważ z faktu $\mathbb{B} \cong \mathbb{B}^{\mathrm{op}}$ wynika izomorfizm K-algebr $K[\mathbb{B}] \cong K[\mathbb{B}]^{\mathrm{op}}$, to algebra bicykliczna $K[\mathbb{B}]$ nie jest także prawostronnie noetherowska. □

Oczywiście algebra bicykliczna $K[\mathbb{B}]$ nad ciałem K może być również traktowana jako algebra o prezentacji $K\langle x, y\rangle/(yx - 1)$, gdzie $K\langle x, y\rangle$ jest algebrą wolną. Odnotujmy jeszcze, że identyfikacja ta jest szczególnym przypadkiem izomorfizmu $K\langle x, y\rangle/(yx - \lambda) \cong K[\mathbb{B}]$ dla $0 \neq \lambda \in K$, który będziemy wykorzystywać w dalszej części pracy.

Definicja 1.6.5. Mówimy, że pierścień R jest skończony w sensie Dedekinda, gdy równość $ab = 1$ implikuje $ba = 1$ dla dowolnych $a, b \in R$.

Innymi słowy, pierścienie skończone w sensie Dedekinda to takie pierścienie, w których lewostronna odwracalność elementu implikuje jego prawostronną odwracalność. Dla wielu pierścieni spełniających pewne *warunki skończoności* da się wykazać, że są one skończone w sensie Dedekinda. Oczywiście istnieją również pierścienie nie posiadające tej własności — chociażby algebra bicykliczna. Ogólnie, gdy pierścień R nie jest skończony w sensie Dedekinda, to $ab = 1$ oraz $e = ba \neq 1$ dla pewnych $a, b \in R$. W tej sytuacji $e = e^2$ jest nietrywialnym idempotentem w R. Ponadto gdy

$$e_{ij} = b^i(1 - e)a^j \in R$$

dla $i, j \geq 1$, to zbiór $\{e_{ij} : i, j \geq 1\}$ tworzy układ jedynek macierzowych, tzn. spełnione są relacje $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ dla dowolnych $i, j, k, l \geq 1$. W szczególności jeśli algebra A nad ciałem K nie jest skończona w sensie Dedekinda, to zawiera ona izomorficzną kopię algebry $n \times n$ macierzy $\mathcal{M}_n(K)$ dla dowolnego $n \geq 1$.

Definicja 1.6.6. Mówimy, że algebra A nad ciałem K spełnia tożsamość wielomianową stopnia $d \geq 1$, gdy dla pewnego $n \geq 1$ istnieje taki wielomian f stopnia d w algebrze wolnej $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, że $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in A$. Jeśli algebra A spełnia tożsamość wielomianową pewnego stopnia, to mówimy, że jest PI-algebrą.

Jednym z najprostszych przykładów algebr spełniających tożsamość wielomianową są algebry przemienne. W tym przypadku wielomian z Definicji 1.6.6 ma postać $x_1x_2 - x_2x_1$. Również algebry skończenie wymiarowe są przykładem PI-algebr. Mianowicie każda algebra skończonego wymiaru $< n$ spełnia tzw. tożsamość standardową

$$s_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

stopnia n. W szczególności algebra $n \times n$ macierzy $\mathcal{M}_n(K)$ nad ciałem K spełnia tożsamość standardową stopnia $n^2 + 1$. Algebra ta spełnia również tożsamość niższego stopnia, co jest treścią słynnego twierdzenia.

Twierdzenie 1.6.7 (Amitsur, Levitzki)**.** *Dla dowolnego $n \geq 1$ algebra $n \times n$ macierzy $\mathcal{M}_n(K)$ nad ciałem K spełnia tożsamość standardową stopnia $2n$ oraz nie spełnia żadnej tożsamości wielomianowej stopnia mniejszego od $2n$.*

Wykorzystując teraz Twierdzenie 1.6.7 oraz uwzględniając dyskusję go poprzedzającą otrzymujemy następujący wynik.

Propozycja 1.6.8. *Jeśli algebra A nad ciałem K spełnia tożsamość wielomianową, to jest skończona w sensie Dedekinda.*

Wniosek 1.6.9. *Algebra bicykliczna $K[\mathbb{B}]$ nad ciałem K nie spełnia żadnej tożsamości wielomianowej.*

Zanim przejdziemy do kolejnego faktu dotyczącego algebry bicyklicznej przypomnijmy klasyczną konstrukcję wiernej i nieprzywiedlnej reprezentacji tej algebry (patrz [31]). Niech więc V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K o bazie $\{e_i : i \geq 0\}$. Niech ponadto

$f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ będą określone formułą

$$f(e_i) = e_{i+1}, \qquad g(e_i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i = 0, \\ e_{i-1}, & \text{gdy } i > 0. \end{cases}$$

Ponieważ $g \circ f = \mathrm{id}_V$, to przyporządkowanie $(x, y) \mapsto (f, g)$ rozszerza się jednoznacznie do reprezentacji $K[\mathbb{B}] \to \mathrm{End}_K(V)$, która zadaje na V strukturę lewostronnego $K[\mathbb{B}]$-modułu.

Propozycja 1.6.10. *Algebra bicykliczna $K[\mathbb{B}]$ nad ciałem K jest obustronnie prymitywna, w szczególności jest też pierwsza oraz półprymitywna.*

Dowód. Na początek wykażemy, że V jest prostym i wiernym $K[\mathbb{B}]$-modułem, co dowiedzie lewostronnej prymitywności algebry bicyklicznej $K[\mathbb{B}]$.

Przypuśćmy, że $a = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij} x^i y^j$, gdzie $\lambda_{ij} \in K$, leży w anihilatorze $K[\mathbb{B}]$-modułu V. Jeśli $a \neq 0$ oraz $j_0 = \min\{j : \lambda_{ij} \neq 0 \text{ dla pewnego } i\}$, to

$$0 = ae_{j_0} = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij} x^i y^j e_{j_0} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij_0} x^i e_0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij_0} e_i,$$

co daje $\lambda_{ij_0} = 0$ dla wszystkich $i = 0, \ldots, n$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że moduł V jest wierny. Niech teraz $0 \neq v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \in V$ dla pewnych $\lambda_i \in K$, gdzie $\lambda_n \neq 0$. Ponieważ $V = K[\mathbb{B}]e_0$ oraz $e_0 = \lambda_n^{-1} y^n v$, to $V = K[\mathbb{B}]v$, co dowodzi, że moduł V jest prosty.

Pozostaje zauważyć, że dzięki izomorfizmowi $K[\mathbb{B}] \cong K[\mathbb{B}]^{\mathrm{op}}$ algebra bicykliczna $K[\mathbb{B}]$ jest również prawostronnie prymitywna. □

Okazuje się także, że skonstruowany powyżej lewostronny $K[\mathbb{B}]$-moduł V jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, prostym i wiernym lewostronnym $K[\mathbb{B}]$-modułem.

Propozycja 1.6.11. *Algebra bicykliczna $K[\mathbb{B}]$ nad ciałem K posiada jedną, z dokładnością do izomorfizmu, wierną reprezentację nieprzywiedlną.*

Dowód. Niech W będzie prostym i wiernym lewostronnym $K[\mathbb{B}]$-modułem. Istnieje wtedy taki wektor $0 \neq w \in W$, że $yw = 0$. Istotnie, gdyby $yw \neq 0$ dla dowolnego $0 \neq w \in W$, to dzięki wierności W oraz $y(xy - 1)W = 0$ otrzymalibyśmy $xy = 1$ w $\mathbb{B}$, sprzeczność. Wybierzmy więc wektor $0 \neq w \in W$ o własności $yw = 0$. Wtedy $W = K[\mathbb{B}]w = K[\langle x \rangle]w$. Twierdzimy, że elementy zbioru $B = \{x^i w : i \geq 0\}$ są liniowo niezależne nad K. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i w = 0$ dla pewnych $\lambda_i \in K$, gdzie $\lambda_n \neq 0$. Wtedy

$$0 = y^n \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i w = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i y^{n-i} w = \lambda_n w,$$

sprzeczność. Stąd wniosek, że zbiór B jest bazą przestrzeni W nad ciałem K, zaś działanie elementów x oraz y na B jest dokładnie takie jak dla V. Ostatecznie mamy więc $V \cong W$ jako $K[\mathbb{B}]$-moduły. $\square$

Nietrudno też opisać spektrum pierwsze algebry bicyklicznej.

Propozycja 1.6.12. *Niech $K[\mathbb{B}]$ będzie algebrą bicykliczną nad ciałem K. Jeśli P jest ideałem pierwszym algebry $K[\mathbb{B}]$, to $P = 0$ lub $P = (xy - 1)$ lub $P = (f(x), xy - 1)$, gdzie $0 \neq f \in K[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym różnym od x.*

Dowód. Dzięki Propozycji 1.6.10 możemy założyć, że $P \neq 0$. Wybierzmy teraz element $0 \neq a = \sum_{i,j=0} \lambda_{ij} x^i y^j \in P$, gdzie $\lambda_{ij} \in K$. Jeśli $i_0 = \min\{i : \lambda_{ij} \neq 0 \text{ dla pewnego } j\}$ oraz $j_0 = \min\{j : \lambda_{i_0 j} \neq 0\}$, to uwzględniając $(1 - xy)x = 0 = y(1 - xy)$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(1 - xy)y^{i_0} a x^{j_0}(1 - xy) &= \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij}(1 - xy)y^{i_0} x^i y^j x^{j_0}(1 - xy) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \lambda_{i_0 j}(1 - xy)y^j x^{j_0}(1 - xy) \\
&= \lambda_{i_0 j_0}(1 - xy),
\end{aligned}
$$

gdyż $1 - xy$ jest idempotentem w $K[\mathbb{B}]$. Ponieważ $xy - 1 \in P$, to ideałowi P jednoznacznie odpowiada ideał pierwszy algebry $K[\mathbb{B}]/(xy - 1) \cong K[x, x^{-1}]$. Oczywiście algebra $K[x, x^{-1}]$ jest pierwsza. Pozostaje zauważyć, że dzięki izomorfizmowi $K[x, x^{-1}] \cong K[x]\langle x\rangle^{-1}$ niezerowe ideały pierwsze w $K[x, x^{-1}]$ są postaci $K[x, x^{-1}]f$, gdzie $0 \neq f \in K[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym różnym od x. $\square$

Wniosek 1.6.13. *Jeśli $K[\mathbb{B}]$ jest algebrą bicykliczną nad ciałem K, to* $\operatorname{clKdim} K[\mathbb{B}] = 2$.

Dowód. Jeśli P jest niezerowym ideałem pierwszym algebry bicyklicznej $K[\mathbb{B}]$ różnym od $(xy - 1)$, to dzięki Twierdzeniu 1.6.12 istnieje taki wielomian nierozkładalny $0 \neq f \in K[x]$ różny od x, że $P = (f(x), xy - 1)$. W tej sytuacji algebra $K[\mathbb{B}]/P \cong K[x]/fK[x]$ jest ciałem, w szczególności ideał P jest maksymalny. $\square$

Dla kompletności obliczmy także wymiar Gelfanda-Kirillova algebry bicyklicznej.

Propozycja 1.6.14. *Jeśli $K[\mathbb{B}]$ jest algebrą bicykliczną nad ciałem K, to* $\operatorname{GKdim} K[\mathbb{B}] = 2$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że $V = K \oplus Kx \oplus Ky$ jest przestrzenią generującą algebry $K[\mathbb{B}]$. Ponadto dla $n \geq 0$ bazą przestrzeni V^n jest zbiór $B_n = \{x^i y^j \in \mathbb{B} : i + j \leq n\}$. Nietrudno sprawdzić, że dla $n \geq 0$ mamy $|B_n| = (n+1)(n+2)/2$. Otrzymujemy więc

$$\operatorname{GKdim} K[\mathbb{B}] = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)(n+2)/2}{\log n} = 2,$$

co kończy dowód. □

Na koniec tego podrozdziału zajmiemy się kwestią tożsamości półgrupowych spełnianych przez monoid $\mathbb{B}$. Zacznijmy od następującej definicji.

Definicja 1.6.15. Niech F będzie monoidem wolnym nad $\{x, y\}$ oraz niech $w_1, w_2 \in F$. Mówimy, że monoid M spełnia tożsamość $w_1 = w_2$, gdy $w_1(a, b) = w_2(a, b)$ dla dowolnych $a, b \in M$. Powiemy, że monoid M spełnia nietrywialną tożsamość półgrupową, gdy M spełnia pewną tożsamość $w_1 = w_2$, gdzie $w_1, w_2 \in F$ oraz $w_1 \neq w_2$.

Innymi słowy, monoid M spełnia tożsamość $w_1 = w_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego homomorfizmu monoidów $\phi\colon F \to M$ zachodzi $(w_1, w_2) \in \operatorname{Ker}(\phi)$, gdzie $\operatorname{Ker}(\phi)$ oznacza kongruencję w F zdefiniowaną jako

$$\operatorname{Ker}(\phi) = \{(v, w) \in F \times F : \phi(v) = \phi(w)\}.$$

Od dawna wiadomo (patrz [2]), że monoid bicykliczny $\mathbb{B}$ spełnia tożsamość Adjana

$$xy^2xxyxy^2x = xy^2xyxxy^2x.$$

Całkiem niedawno w pracy [18] podano nowy i ciekawy ale zarazem skomplikowany dowód tego faktu wykorzystujący tzw. macierze tropikalne. Poniżej prezentujemy znacznie prostszy dowód stosując standardową wierną reprezentację monoidu $\mathbb{B}$ w przestrzeni liniowej V nad ciałem K o bazie $\{e_i : i \geq 0\}$ (patrz dyskusja przed Propozycją 1.6.10).

Propozycja 1.6.16. *Monoid bicykliczny $\mathbb{B}$ spełnia tożsamość Adjana.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla dowolnych $i, j \geq 0$ oraz $n \geq 0$ gdy $x^i y^j e_n \neq 0$ (co zachodzi dokładnie wtedy, gdy $j \leq n$), to mamy $x^i y^j e_n = e_{n+i-j}$. W szczególności gdy $ae_n = 0$ dla pewnego $a \in \mathbb{B}$ oraz $n \geq 0$, to również $ae_k = 0$ dla dowolnego $k \leq n$.

Niech $a = x^{i_1} y^{j_1} \in \mathbb{B}$ oraz $b = x^{i_2} y^{j_2} \in \mathbb{B}$. Aby wykazać, że $ab^2aabab^2a = ab^2abaab^2a$ możemy ograniczyć się do sytuacji, w której

$$i_1 + i_2 \geq j_1 + j_2. \tag{1.3}$$

Istotnie, gdy zachodzi nierówność przeciwna, to aby znaleźć się w żądanej sytuacji wystarczy zastosować inwolucję wyznaczoną przez $(x, y) \mapsto (y, x)$. Ponieważ reprezentacja monoidu $\mathbb{B}$ w przestrzeni V jest wierna (patrz Propozycja 1.6.10), to dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $abab^2ae_n = baab^2ae_n$ dla dowolnego $n \geq 0$. Ustalmy więc $n \geq 0$. Oczywiście możemy założyć, że jeden z elementów $abab^2ae_n$ lub $baab^2ae_n$ jest niezerowy. W tej sytuacji otrzymujemy $ab^2ae_n \neq 0$. Oznaczmy $bae_n = e_{n'}$ oraz $abe_{n'} = e_{n''}$. Wtedy dzięki (1.3) mamy

$$n'' = n' + (i_1 + i_2 - j_1 - j_2) \geq n' = n + (i_1 + i_2 - j_1 - j_2) \geq n.$$

Ponieważ $abe_{n'} = e_{n''} \neq 0$ oraz $n'' \geq n'$, to również $abab^2ae_n = abe_{n''} \neq 0$. Analogicznie ponieważ $bae_n \neq 0$ oraz $n'' \geq n$, to $baab^2ae_n = bae_{n''} \neq 0$. Ostatecznie oba elementy $abab^2ae_n$ oraz $baab^2ae_n$ są niezerowe, muszą więc być równe $e_{n+3(i_1+i_2-j_1-j_2)}$. Kończy to dowód propozycji. $\square$

Rozdział

2 Monoid i algebra plaktyczna

W rozdziale tym oprócz definicji kluczowych dla pracy obiektów podano również pewne znane rezultaty dotyczące monoidu plaktycznego i algebry plaktycznej (pominięte dowody można odnaleźć w pracach [9] oraz [32]). W szczególności w podrozdziale 2.1 zaprezentowane jest twierdzenie opisujące postać kanoniczną elementów monoidu plaktycznego oraz seria negatywnych rezultatów związanych z podstawowymi własnościami pierścieniowymi algebry plaktycznej takimi jak noetherowskość, prymitywność, (pół)pierwszość czy fakt spełniania tożsamości wielomianowej. W podrozdziale 2.2 zamieszczono natomiast dowód pierwszości i półprymitywności algebry plaktycznej rangi $n < 3$. Opisano tam także ideały prymitywne algebry plaktycznej rangi $n < 3$ wraz z towarzyszącymi im modułami prostymi i wyznaczono jej klasyczny wymiar Krulla. Dodajmy, że podrozdział 2.2 może być też traktowany jako wstęp do kolejnych rozdziałów.

2.1 Wprowadzenie i znane rezultaty

Definicja 2.1.1. Monoidem plaktycznym M_n rangi $n \geq 1$ nazywamy monoid zdefiniowany za pomocą prezentacji

$$M_n = \langle x_1, \ldots, x_n : x_j x_i x_k = x_j x_k x_i \text{ dla } i < j \leq k \text{ oraz } x_i x_k x_j = x_k x_i x_j \text{ dla } i \leq j < k \rangle.$$

Jeśli K jest ciałem, to stowarzyszoną z M_n algebrę półgrupową $K[M_n]$ nazywamy algebrą plaktyczną rangi n nad ciałem K.

Przykładowo gdy $n = 1$, to M_1 jest monoidem cyklicznym izomorficznym z addytywnym monoidem liczb naturalnych $\mathbb{N}$, zaś odpowiadająca mu algebra plaktyczna $K[M_1]$ nad ciałem K jest izomorficzna z algebrą wielomianów $K[x]$ jednej zmiennej. Natomiast dla $n = 2$ dostajemy monoid o prezentacji

$$M_2 = \langle x_1, x_2 : x_2 x_1 x_1 = x_1 x_2 x_1 \text{ oraz } x_2 x_1 x_2 = x_2 x_2 x_1 \rangle,$$

w którym relacje definiujące sprowadzają się do żądania by element $x_2 x_1$ był centralny.

Ponieważ relacje definiujące monoid plaktyczny M_n są jednorodne względem każdego z generatorów $x_1, \ldots, x_n$, to monoid M_n oraz algebra $K[M_n]$ dziedziczą gradacje związane ze stopniem względem generatorów $x_1, \ldots, x_n$ odpowiednio. W szczególności ma sens pojęcie stopnia $\deg_{x_i}(w)$ elementu $w \in M_n$ względem wybranego generatora $x_i \in M_n$ oraz pojęcie stopnia $\deg(w) = \sum_{i=1}^n \deg_{x_i}(w)$. Natomiast dla dowolnego $0 \neq a \in K[M_n]$ możemy przyjąć

$$\deg_{x_i}(a) = \max\{\deg_{x_i}(w) : w \in \mathrm{Supp}(a)\}$$

oraz

$$\deg(a) = \max\{\deg(w) : w \in \mathrm{Supp}(a)\}.$$

Definicja 2.1.2. Niech M_n będzie monoidem plaktycznym rangi $n \geq 1$. Wierszem w M_n nazywamy dowolny element $x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in M_n$, gdzie $r \geq 1$ oraz $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq n$. Natomiast przez kolumnę w M_n rozumiemy każdy element $x_{j_s} \cdots x_{j_1} \in M_n$, gdzie $s \geq 1$ oraz $1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n$. Mówimy, że wiersz $v = x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in M_n$ dominuje wiersz $w = x_{j_1} \cdots x_{j_s} \in M_n$, gdy $r \leq s$ oraz $i_k > j_k$ dla $k = 1, \ldots, r$. Analogicznie mówimy, że kolumna $v = x_{i_r} \cdots x_{i_1} \in M_n$ dominuje kolumnę $w = x_{j_s} \cdots x_{j_1} \in M_n$, gdy $r \geq s$ oraz $i_k \leq j_k$ dla $k = 1, \ldots, s$. W obu przypadkach piszemy $v \rhd w$. W końcu tabelą w M_n nazywamy dowolny element $w_1 \cdots w_t \in M_n$, gdzie $t \geq 1$ oraz $w_1, \ldots, w_t \in M_n$ są wierszami spełniającymi $w_1 \rhd \cdots \rhd w_t$.

Fundamentalne rezultaty dotyczące kombinatoryki monoidu plaktycznego otrzymano w pracach cytowanych na początku rozdziału. Wykazano tam między innym, że elementy monoidu plaktycznego dopuszczają specyficzną postać kanoniczną.

Twierdzenie 2.1.3. *Dowolny element monoidu plaktycznego M_n rangi $n \geq 1$, różny od elementu neutralnego, może być zapisany jednoznacznie w postaci tabeli.*

Zatrzymajmy się na chwilę przy treści Twierdzenia 2.1.3. Mówi ono dokładnie tyle, że dowolny element monoidu M_n, różny od neutralnego, da się przepisać (przy użyciu relacji plaktycznych) do postaci tabeli oraz, że przedstawienie takie jest jedyne. Mówiąc jeszcze inaczej, elementy $1 \neq v, w \in M_n$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy po zapisaniu ich w formie tabel uzyskane tabele są identyczne. Ten jednoznaczny zapis elementów monoidu plaktycznego M_n w postaci tabel (odpowiadających diagramom Younga pewnego typu) implikuje, że M_n jest monoidem o wzroście wielomianowym (porównaj z Propozycją 2.1.14).

Przykład 2.1.4. Element

$$w = x_5x_3x_4x_4x_2x_3x_3x_3x_1x_1x_2x_2x_2x_3 \in M_5$$

jest zapisany w postaci tabeli o wierszach

$$w_1 = x_5, \qquad w_2 = x_3x_4x_4, \qquad w_3 = x_2x_3x_3x_3, \qquad w_4 = x_1x_1x_2x_2x_2x_3.$$

Dodatkowo element w może być przedstawiony graficznie jako diagram (tabela) ([1])

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\cline{1-1}
x_5 \\
\cline{1-3}
x_3 & x_4 & x_4 \\
\cline{1-4}
x_2 & x_3 & x_3 & x_3 \\
\hline
x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_2 & x_3 \\
\hline
\end{array}$$

o kolumnach

$$v_1 = x_5x_3x_2x_1, \quad v_2 = x_4x_3x_1, \quad v_3 = x_4x_3x_2, \quad v_4 = x_3x_2, \quad v_5 = x_2, \quad v_6 = x_3.$$

Można sprawdzić, że w monoidzie M_5 mamy $w = w_1 \cdots w_4 = v_1 \cdots v_6$ oraz $v_1 \rhd \cdots \rhd v_6$. Innymi słowy, zapis wierszowy elementu w zgadza się z jego zapisem kolumnowym.

Okazuje się, że powyższy fakt jest prawdziwy w monoidzie plaktycznym M_n dowolnej rangi $n \geq 1$. Mianowicie jeśli element $1 \neq w \in M_n$ zapiszemy w postaci tabeli, to tabela ta wyznacza jednoznacznie kolumny $w_1, \ldots, w_t \in M_n$ (dla pewnego $t \geq 1$, zależnego od elementu w) spełniające $w_1 \rhd \cdots \rhd w_t$ oraz $w = w_1 \cdots w_t$. Jeżeli element $1 \neq w \in M_n$ jest zapisany w jednej z dwóch opisanych powyżej postaci (wierszowej lub kolumnowej), to mówimy wtedy o jego formie (postaci) kanonicznej.

Wykorzystując relacje plaktyczne definiujące monoid M_n nietrudno się przekonać, że dla dowolnego $s \geq 1$ oraz dowolnych $1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n$ kolumna $x_{j_s} \cdots x_{j_1} \in M_n$ jest przemienna z każdym generatorem $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s} \in M_n$, w szczególności otrzymujemy $z = x_n \cdots x_1 \in \mathcal{Z}(M_n)$. Natomiast opierając się o Twierdzenie 2.1.3 można także dowieść następujące własności.

Propozycja 2.1.5. *Niech M_n będzie monoidem plaktycznym rangi $n \geq 1$ oraz przyjmijmy $z = x_n \cdots x_1 \in M_n$.*

(1) *Centrum $\mathcal{Z}(M_n)$ monoidu M_n jest monoidem cyklicznym $\langle z \rangle$.*

(2) *Element z jest regularny w M_n, tzn. jeśli $zv = zw$ dla pewnych $v, w \in M_n$, to $v = w$.*

(3) *Jeśli $w \in M_n$, to $w \in zM_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w = w_nx_n \cdots w_1x_1w_0$ dla pewnych $w_i \in M_n$.*

([1]) Stąd pochodzą terminy *wiersz*, *kolumna* oraz *tabela* w odniesieniu do elementów monoidu plaktycznego.

Wykorzystując Propozycję 2.1.5 udowodnimy teraz klika faktów, które będą użyteczne w dalszej części pracy.

Propozycja 2.1.6. *Niech $K[M_n]$ będzie algebrą plaktyczną rangi $n \geq 1$ nad ciałem K oraz niech $z = x_n \cdots x_1 \in M_n$. Wtedy $\mathcal{Z}(K[M_n]) = K[z]$. Dodatkowo niezerowe elementy centrum $K[z]$ są regulare w algebrze $K[M_n]$.*

Dowód. Uwzględniając Propozycję 2.1.5 dostajemy $K[z] \subseteq \mathcal{Z}(K[M_n])$. Inkluzję przeciwną wykażemy indukcyjnie względem n. Gdy $n = 1$, to teza jest oczywiście prawdziwa. Niech zatem $n > 1$ oraz $a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i \in \mathcal{Z}(K[M_n])$, gdzie $m \geq 1$, $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in M_n$ są parami różne. Wykorzystując gradacje algebry $K[M_n]$ możemy dodatkowo założyć, że element a jest jednorodny względem każdego z generatorów $x_1, \ldots, x_n$. W takiej sytuacji niech $k = \deg_{x_n}(a)$ oraz $b = aw^k$, gdzie $w = x_{n-1} \cdots x_1$. Ponieważ

$$x_n^k b = x_n^k a w^k = x_n^k w^k a = z^k a, \tag{2.1}$$

to Propozycja 2.1.5 implikuje $b \neq 0$ oraz $\mathrm{Supp}(b) \subseteq \langle x_1, \ldots, x_{n-1}, z\rangle$. Wnioskujemy stąd, że $b = z^k c$ dla pewnego $c \in K[\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle]$, gdyż element b jest jednorodny względem generatora x_n. Następnie wykorzystując fakt, że $w \in \mathcal{Z}(\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle)$ stwierdzamy, że b centralizuje podalgebrę $K[\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle]$. Jeśli teraz $f \in K[\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle]$, to

$$z^k f c = f z^k c = f b = b f = z^k c f. \tag{2.2}$$

Pozostaje zaobserwować, że Propozycja 2.1.5 implikuje regularność elementu z w $K[M_n]$, co w połączeniu z (2.2) gwarantuje $c \in \mathcal{Z}(K[\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle])$. W tej sytuacji założenie indukcyjne zapewnia $c \in K[w]$, a ponieważ element c jest jednorodny względem każdego z generatorów $x_1, \ldots, x_{n-1}$, to musi być $|\mathrm{Supp}(c)| = 1$. Uwzględniając (2.1) otrzymujemy

$$|\mathrm{Supp}(a)| = \left|\mathrm{Supp}(z^k a)\right| = \left|\mathrm{Supp}(x_n^k b)\right| = \left|\mathrm{Supp}(x_n^k z^k c)\right| = |\mathrm{Supp}(c)| = 1,$$

czyli $m = 1$ oraz $a = \lambda_1 w_1$. Oczywiście dzięki $a \in \mathcal{Z}(K[M_n])$ musi być $w_1 \in \mathcal{Z}(M_n) = \langle z \rangle$, zatem $a \in K[z]$.

Aby wykazać ostatnią część tezy wybierzmy $0 \neq a = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i z^i \in K[z]$, gdzie $\lambda_i \in K$ oraz przypuśćmy, że $ab = 0$ dla pewnego $0 \neq b \in K[M_n]$. Niech $i_0 = \min\{i : \lambda_i \neq 0\}$ oraz niech $0 \neq c \in K[M_n]$ będzie składową jednorodną najmniejszego stopnia elementu b. Wtedy równość $ab = 0$ implikuje $\lambda_{i_0} z^{i_0} c = 0$, co wobec regularności elementu z w $K[M_n]$ oraz $\lambda_{i_0} \neq 0$ daje $c = 0$, sprzeczność. $\square$

Niech M_n będzie monoidem plaktycznym rangi $n \geq 1$ oraz niech $z = x_n \cdots x_1 \in M_n$. W dalszej części pracy istotną rolę odgrywał będzie również monoid

$$M_n' = M_n/(z = 1).$$

W szczególności gdy K jest ciałem, to $K[M_n'] \cong K[M_n]/(z-1)$.

Propozycja 2.1.7. *Niech M_n będzie monoidem plaktycznym rangi $n \geq 1$ oraz przyjmijmy $z = x_n \cdots x_1 \in M_n$. Wtedy $M_n\langle z\rangle^{-1} \cong \mathbb{Z} \times M_n'$. W szczególności gdy K jest ciałem, to $K[M_n]\langle z\rangle^{-1} \cong K[x, x^{-1}][M_n']$, gdzie $K[x, x^{-1}]$ jest algebrą wielomianów Laurenta jednej zmiennej.*

Dowód. Zauważmy na początek, że pojęcie stopnia względem generatora x_n ma naturalne rozszerzenie na $M_n\langle z\rangle^{-1}$ z tą różnicą, że $\deg_{x_n}(q) \in \mathbb{Z}$ dla $q \in M_n\langle z\rangle^{-1}$. Analogicznie ma sens pojęcie obrazu q' elementu $q \in M_n\langle z\rangle^{-1}$ w monoidzie M_n'. Po tych uwagach możemy zdefiniować odwzorowanie

$$M_n\langle z\rangle^{-1} \ni q \mapsto (\deg_{x_n}(q), q') \in \mathbb{Z} \times M_n'.$$

Jest niemal oczywiste, że odwzorowanie to jest surjektywnym homomorfizmem monoidów. Pozostaje sprawdzić, że jest ono również injektywne. Niech zatem $\deg_{x_n}(q_1) = \deg_{x_n}(q_2)$ oraz $q_1' = q_2'$ dla pewnych $q_1, q_2 \in M_n\langle z\rangle^{-1}$. Wprost z definicji kongruencji generowanej przez parę $(z, 1) \in M_n \times M_n$ wiemy, że równość $q_1' = q_2'$ implikuje

$$z^{n_1} q_1 = z^{n_2} q_2 \tag{2.3}$$

dla pewnych $n_1, n_2 \geq 0$. Wykorzystując (2.3) otrzymujemy

$$n_1 + \deg_{x_n}(q_1) = \deg_{x_n}(z^{n_1} q_1) = \deg_{x_n}(z^{n_2} q_2) = n_2 + \deg_{x_n}(q_2),$$

czyli również $n_1 = n_2$. Ostatecznie równość (2.3), w połączeniu z regularnością elementu z w algebrze $K[M_n]$, implikuje $q_1 = q_2$.

Aby wykazać ostatnią część tezy zauważmy, że

$$K[M_n]\langle z\rangle^{-1} \cong K[M_n\langle z\rangle^{-1}] \cong K[\mathbb{Z} \times M_n'] \cong K[\mathbb{Z}][M_n'].$$

Oczywiście mamy też $K[\mathbb{Z}] \cong K[x, x^{-1}]$, co kończy dowód. □

Dzięki Propozycji 2.1.6 możemy także rozważyć centralną lokalizację algebry $K[M_n]$ względem zbioru multiplikatywnego $K[z] \setminus \{0\}$ złożonego z elementów regularnych.

Wniosek 2.1.8. *Niech $K[M_n]$ będzie algebrą plaktyczną rangi $n \geq 1$ nad ciałem K oraz niech $z = x_n \cdots x_1 \in M_n$. Wtedy $K[M_n](K[z] \setminus \{0\})^{-1} \cong K(x)[M_n']$, gdzie $K(x)$ jest ciałem funkcji wymiernych jednej zmiennej.*

Dowód. Nietrudno się przekonać, że rozszerzenie homomorfizmu $K[M_n]\langle z\rangle^{-1} \to K(x)[M_n']$, występującego w Propozycji 2.1.7, na algebrę $K[M_n](K[z] \setminus \{0\})^{-1}$ jest izomorfizmem. □

Oprócz udowodnionych wyżej rezultatów przydatne będą także naturalne inwolucje związane z algebrą plaktyczną oraz pewnym jej obrazem.

Propozycja 2.1.9. *Niech $K[M_n]$ będzie algebrą plaktyczną rangi $n \geq 1$ nad ciałem K. Istnieje wtedy inwolucja $\phi\colon K[M_n] \to K[M_n]$ spełniająca $\phi(x_i) = x_{n-i+1}$ dla $i = 1, \ldots, n$.*

Dowód. Dzięki własności uniwersalnej algebry wolnej $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ istnieje homomorfizm K-algebr $\phi\colon K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \to K[M_n]^{\mathrm{op}}$ spełniający $\phi(x_i) = x_{n-i+1}$ dla $i = 1, \ldots, n$ ([2]). Zauważmy, że homomorfizm ϕ respektuje relacje plaktyczne. Istotnie, przykładowo gdy $i < j \leq k$, to mamy

$$\begin{aligned}\phi(x_j x_i x_k) = \phi(x_k)\phi(x_i)\phi(x_j) &= x_{n-k+1}x_{n-i+1}x_{n-j+1} \\ &= x_{n-i+1}x_{n-k+1}x_{n-j+1} = \phi(x_i)\phi(x_k)\phi(x_j) = \phi(x_j x_k x_i),\end{aligned}$$

gdyż $n-k+1 \leq n-j+1 < n-i+1$. Z tych powodów ϕ może być traktowany jako homomorfizm $\phi\colon K[M_n] \to K[M_n]^{\mathrm{op}}$. Pozostaje zaobserwować, że dla $i = 1, \ldots, n$ mamy

$$\phi(\phi(x_i)) = \phi(x_{n-i+1}) = x_i,$$

zatem homomorfizm ϕ jest bijektywny. □

Niech M_n będzie monoidem plaktycznym rangi $n \geq 1$. Jeśli $v = 1 \in M_n$, to przyjmijmy $v^{\perp} = 1$. Gdy zaś $v = x_{j_s} \cdots x_{j_1} \in M_n$ jest kolumną, to określmy jej dopełnienie $v^{\perp}$ jako

$$v^{\perp} = \begin{cases} x_{j_n} \cdots x_{j_{s+1}}, & \text{gdy } s < n, \\ 1, & \text{gdy } s = n, \end{cases}$$

gdzie $j_{s+1} < \cdots < j_n$ spełniają $\{j_1, \ldots, j_s\} \cup \{j_{s+1}, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$. Zauważmy, że gdy $v^{\perp} \neq 1$, to dopełnienie $v^{\perp}$ jest kolumną. Jeśli teraz element $w = w_1 \cdots w_t \in M_n$ jest zapisany w postaci kanonicznej, gdzie $w_i \in M_n$ są kolumnami, to niech $w^{\perp} = w_t^{\perp} \cdots w_1^{\perp}$.

([2]) W formule tej elementy $x_1, \ldots, x_n$ jako argumenty homomorfizmu ϕ pełnią rolę generatorów algebry $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, natomiast jako wartości tego homomorfizmu pełnią rolę elementów algebry $K[M_n]$.

W końcu jeśli w' oznacza obraz w M'_n elementu $w \in M_n$, to przyjmijmy $(w')^\perp = (w^\perp)'$. Można sprawdzić, że definicja ta nie zależy od wyboru reprezentanta elementu $w' \in M'_n$. Ponadto prawdziwy jest następujący rezultat.

Propozycja 2.1.10. *Niech $K[M_n]$ będzie algebrą plaktyczną rangi $n \geq 1$ nad ciałem K. Istnieje wtedy inwolucja $\psi\colon K[M'_n] \to K[M'_n]$ spełniająca $\psi(w) = w^\perp$ dla $w \in M'_n$.*

Przejdźmy teraz do jednych z podstawowych, z punktu widzenia teorii pierścieni, pytań dotyczących algebr plaktycznych. Na początek przedstawmy kilka negatywnych rezultatów. Pierwszym z nich jest poniższy fakt.

Propozycja 2.1.11. *Algebra plaktyczna $K[M_n]$ rangi $n \geq 2$ nad ciałem K nie jest ani lewostronnie ani prawostronnie noetherowska. Algebra ta nie spełnia też żadnej tożsamości wielomianowej.*

Dowód. Ponieważ algebra $K[M_2]$ jest obrazem homomorficznym algebry $K[M_n]$, to można ograniczyć się do przypadku $n = 2$. W tej sytuacji odwzorowanie posyłające generatory x_1, x_2 algebry plaktycznej $K[M_2]$ na generatory x, y algebry bicyklicznej $K[\mathbb{B}]$ rozszerza się jednoznacznie do homomorfizmu K-algebr $K[M_2] \to K[\mathbb{B}]$. Naturalnie jest to surjekcja. Gdyby algebra $K[M_2]$ była lewostronnie lub prawostronnie noetherowska, to własność ta byłaby dziedziczona przez $K[\mathbb{B}]$, co stoi w sprzeczności z Propozycją 1.6.4. Analogicznie algebra $K[M_2]$ nie może spełniać żadnej tożsamości wielomianowej, gdyż wtedy tę samą własność posiadałaby algebra $K[\mathbb{B}]$, co jest sprzeczne z Propozycją 1.6.8. $\square$

Ponieważ dla dowolnego $n \geq 1$ centrum $\mathcal{Z}(K[M_n])$ jest nietrywialne, to korzystając z Wniosku 1.3.5 stwierdzamy następujący fakt.

Propozycja 2.1.12. *Algebra plaktyczna $K[M_n]$ rangi $n \geq 1$ nad algebraicznie domkniętym i nieprzeliczalnym ciałem K nie jest ani lewostronnie ani prawostronnie prymitywna.*

Dowód. Propozycja 2.1.6 zapewnia, że $\mathcal{Z}(K[M_n]) \neq K$. W tym przypadku pozostaje już tylko powołać się na Wniosek 1.3.5 zauważając, że przy założeniach dotyczących ciała K mamy $\dim_K K[M_n] < |K|$. $\square$

Oczywiście w przypadku $n = 1$ powyższe stwierdzenie pozostaje prawdziwe niezależnie od własności ciała K. Wystarczy powołać się na Przykład 1.3.2.

Kolejny z negatywnych wyników dotyczy (pół)pierwszości algebr plaktycznych.

Twierdzenie 2.1.13. *Niech $K[M_n]$ będzie algebrą plaktyczną rangi n nad ciałem K.*

(1) *Jeśli $n \geq 3$, to algebra $K[M_n]$ nie jest pierwsza.*

(2) *Jeśli $n \geq 4$, to algebra $K[M_n]$ nie jest półpierwsza.*

Dowód. Załóżmy, że $n \geq 3$ oraz niech

$$x = (x_n \cdots x_1)(x_{n-1} \cdots x_2) - (x_{n-1} \cdots x_1)(x_n \cdots x_2),$$
$$y = x_n x_1 - x_1 x_n, \qquad z = x_n x_2 - x_2 x_n.$$

Zauważmy na początek, że dzięki Twierdzeniu 2.1.3 elementy $x, y, z \in K[M_n]$ są niezerowe. Niech teraz $v = x_{j_s} \cdots x_{j_1} \in M_n$ będzie kolumną. Stosując wielokrotnie Propozycję 2.1.5 oraz komentarz bezpośrednio ją poprzedzający stwierdzamy, że:

(1) gdy $j_1 > 1$ oraz $j_s < n$ lub $s = n$, to $vx = xv$,

(2) gdy $j_1 = 1$ oraz $j_s < n$, to $xv = (x_{j_s} \cdots x_{j_2})xx_1 = 0$,

(3) gdy $j_1 > 1$ oraz $j_s = n$, to $vx = x_n x(x_{j_{s-1}} \cdots x_{j_1}) = 0$,

(4) gdy $j_1 = 1$, $j_s = n$ oraz $s < n$, to

$$\begin{aligned} xv &= (x_n \cdots x_1)(x_{n-1} \cdots x_2)(x_n x_{j_{s-1}} \cdots x_{j_2})x_1 \\ &\qquad - (x_{n-1} \cdots x_1)(x_n \cdots x_2)(x_n x_{j_{s-1}} \cdots x_{j_2})x_1 \\ &= (x_n \cdots x_1)(x_{n-1} \cdots x_1)(x_n x_{j_{s-1}} \cdots x_{j_2}) \\ &\qquad - (x_{n-1} \cdots x_1)(x_n \cdots x_1)(x_n x_{j_{s-1}} \cdots x_{j_2}) = 0. \end{aligned}$$

Ponadto $x_i y = 0$ dla dowolnego $i > 1$. Łącząc ostatni fakt z powyższą obserwacją oraz pamiętając o kolumnowej postaci kanonicznej elementów monoidu M_n z Twierdzenia 2.1.3 otrzymujemy $xwy = 0$ dla dowolnego $w \in M_n$. W konsekwencji $xK[M_n]y = 0$, czyli algebra $K[M_n]$ nie jest pierwsza.

Załóżmy teraz, że $n \geq 4$ oraz niech $v = x_{j_s} \cdots x_{j_1} \in M_n$ będzie kolumną. Jeśli $vx \neq xv$ oraz $vx \neq 0$, to (1) oraz (3) implikują $s < n$ oraz $j_1 = 1$. Jeśli dodatkowo $zv \neq 0$, to dzięki równości $zx_i = 0$ dla $1 < i < n$ musi być $s = 1$ lub $s > 1$ oraz $j_s = n$. W obu przypadkach otrzymujemy $u \in M_n \setminus x_n \cdots x_1 M_n$ dla dowolnego $u \in \mathrm{Supp}(zv)$. Istotnie, gdy $s = 1$, to stwierdzenie jest prawdziwe, gdyż wtedy $\deg(u) = 3 < n$. Jeśli natomiast $s > 1$ oraz $j_s = n$, to $u = x_n x_2 x_n x_{j_{s-1}} \cdots x_{j_1}$ lub $u = x_2 x_n x_n x_{j_{s-1}} \cdots x_{j_1}$. Pozostaje zauważyć, że dzięki $s < n$ Propozycja 2.1.5 gwarantuje, że żaden z tych elementów nie leży w $x_n \cdots x_1 M_n$. Oznacza to, że w kolumnowej formie kanonicznej słowa u pierwsza kolumna musi mieć postać $x_{i_r} \cdots x_{i_1} x_1$ dla pewnych $1 < i_1 < \cdots < i_r$, gdzie $r < n-1$. W tej sytuacji (2) oraz (4) gwarantują $xu = 0$, czyli

$$xzv = 0. \tag{2.4}$$

Jeśli natomiast $vx = xv$ lub $vx = 0$, to dzięki $zx = 0$ otrzymujemy

$$zvx = 0. \tag{2.5}$$

Łącząc ze sobą (2.4) oraz (2.5) i pamiętając o kolumnowej postaci kanonicznej elementów monoidu M_n z Twierdzenia 2.1.3 otrzymujemy $xzwx = 0$ dla dowolnego $w \in M_n$, co implikuje $xzK[M_n]xz = 0$. Pozostaje zaobserwować, że $xz \neq 0$ w $K[M_n]$ aby stwierdzić, że algebra $K[M_n]$ nie jest półpierwsza. □

Jak wspomniano już na początku rozdziału, specyficzna postać kanoniczna elementów monoidu plaktycznego M_n implikuje, że M_n jest monoidem o wzroście wielomianowym. To gwarantuje, że wymiar Gelfanda-Kirillova algebry plaktycznej $K[M_n]$ nad ciałem K jest skończony. Poniżej wyliczamy dokładną jego wartość.

Propozycja 2.1.14. *Jeśli $K[M_n]$ jest algebrą plaktyczną rangi $n \geq 1$ nad ciałem K, to* $\operatorname{GKdim} K[M_n] = n(n+1)/2$.

Dowód. Oczywiście $V = K \oplus Kx_1 \oplus \cdots \oplus Kx_n$ jest przestrzenią generującą algebry $K[M_n]$. W pracy [32] wykazano, że dla $k \geq 0$ liczba $c_k = |\{w \in M_n : \deg(w) = k\}|$ równa jest współczynnikowi przy t^k w rozwinięciu funkcji wymiernej

$$\frac{1}{(1-t)^n} \cdot \frac{1}{(1-t^2)^{n(n-1)/2}}$$

w szereg potęgowy względem t. Ponieważ zachodzi $1/(1-t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i$ oraz analogicznie $1/(1-t^2) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{2i}$, to stąd

$$c_k = \left|\{(i_1, \ldots, i_{n(n+1)/2}) \in \mathbb{N}^{n(n+1)/2} : i_1 + \cdots + i_n + 2i_{n+1} + \cdots + 2i_{n(n+1)/2} = k\}\right|.$$

Ponadto dla $k \geq 0$ mamy $d_{K[M_n]}(k) = \dim_K V^k = c_0 + \cdots + c_k$, czyli

$$d_{K[M_n]}(k) = \left|\{(i_1, \ldots, i_{n(n+1)/2}) \in \mathbb{N}^{n(n+1)/2} : i_1 + \cdots + i_n + 2i_{n+1} + \cdots + 2i_{n(n+1)/2} \leq k\}\right|.$$

Niech teraz

$$d(k) = \left|\{(i_1, \ldots, i_{n(n+1)/2}) \in \mathbb{N}^{n(n+1)/2} : i_1 + \cdots + i_{n(n+1)/2} \leq k\}\right|$$

dla $k \geq 0$. Nietrudno uzasadnić (patrz [25]), że tak zdefiniowane d jest funkcją wzrostu algebry wielominanów $K[x_1, \ldots, x_{n(n+1)/2}]$ zmiennych $x_1, \ldots, x_{n(n+1)/2}$. Stąd wniosek, że $d(k) \sim Ck^{n(n+1)/2}$, gdzie $C > 0$ jest pewną stałą. Uwzględniając łatwe do sprawdzenia nierówności

$$d_{K[M_n]}(k) \leq d(k) \leq d_{K[M_n]}(2k),$$

prawdziwe dla dowolnego $k \geq 0$, otrzymujemy więc ostatecznie

$$\begin{aligned} \operatorname{GKdim} K[M_n] &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log d_{K[M_n]}(k)}{\log k} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log d(k)}{\log k} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log Ck^{n(n+1)/2}}{\log k} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

□

Na koniec tego podrozdziału wróćmy do zagadnień, które legły u podstaw konstrukcji monoidu plaktycznego M_n rangi $n \geq 1$. Mianowicie gdy $(k_1, \ldots, k_t)$ jest ciągiem o wyrazach w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$ oraz $w = x_{k_1} \cdots x_{k_t} \in M_n$ jest elementem stowarzyszonym z tym ciągiem, to:

(1) długość najdłuższego niemalejącego podciągu ciągu $(k_1, \ldots, k_t)$ równa jest stopniowi ostatniego wiersza w zapisie w jako tabeli w M_n,

(2) długość najdłuższego malejącego podciągu ciągu $(k_1, \ldots, k_t)$ równa jest stopniowi pierwszej kolumny w zapisie w jako tabeli w M_n.

Przykładowo ciągom $(5, 3, 4, 4, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$ oraz $(5, 3, 2, 1, 4, 3, 1, 4, 3, 2, 3, 2, 2, 3)$ o elementach w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ odpowiada element $w \in M_5$ z Przykładu 2.1.4. Stąd wniosek, że najdłuższy podciąg niemalejący obu tych ciągów ma długość równą 6, natomiast długość najdłuższego malejącego podciągu tych ciągów wynosi 4.

2.2 Algebry plaktyczne rangi < 3

Niech $K[M_n]$ będzie algebrą plaktyczną rangi $n \geq 1$ nad ciałem K.

Zacznijmy od przypadku gdy $n = 1$. W tej sytuacji $K[M_1] \cong K[x]$, gdzie $K[x]$ jest algebrą wielomianów jednej zmiennej. Doskonale wiadomo, że algebra ta jest przemienna, noetherowska, pierwsza oraz półprymitywna. Dodatkowo dowolny niezerowy ideał pierwszy

P algebry $K[M_1]$ jest postaci $P = f(x_1)K[M_1]$, gdzie $0 \neq f \in K[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym. Ideał P jest również prymitywny (maksymalny). Natomiast każdy prosty $K[M_1]$-moduł jest izomorficzny z modułem postaci $K[M_1]/f(x_1)K[M_1]$ i jest skończenie wymiarowy. W końcu mamy $\mathrm{clKdim}\, K[M_1] = \mathrm{GKdim}\, K[M_1] = 1$.

Przejdźmy do przypadku gdy $n = 2$. Dzięki Propozycji 2.1.11 wiemy, że algebra $K[M_2]$ nie jest ani lewostronnie ani prawostronnie noetherowska i nie spełnia żadnej tożsamości wielomianowej. Na początek pokażemy, że algebra ta jest pierwsza i półprymitywna.

Propozycja 2.2.1. *Algebra plaktyczna $K[M_2]$ rangi 2 nad ciałem K jest pierwsza.*

Dowód. Jeśli $z = x_2x_1 \in M_2$, to Wniosek 2.1.8 daje $K[M_2](K[z]\setminus\{0\})^{-1} \cong K(x)[M_2']$, gdzie $K(x)$ jest ciałem funkcji wymiernych jednej zmiennej. Ponieważ $M_2' = M_2/(z = 1) \cong \mathbb{B}$, to Propozycja 1.6.10 implikuje pierwszość algebry $K[M_2](K[z] \setminus \{0\})^{-1}$. Pozostaje powołać się na Propozycję 1.4.8 aby wywnioskować stąd pierwszość algebry $K[M_2]$. □

Twierdzenie 2.2.2. *Niech P będzie lewostronnie lub prawostronnie prymitywnym ideałem algebry plaktycznej $K[M_2]$ rangi 2 nad algebraicznie domkniętym i nieprzeliczalnym ciałem K. Wtedy $P = (x_2x_1 - \lambda)$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$ lub $P = (x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2)$ dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Ponadto dowolny z tych ideałów jest lewostronnie i prawostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_2]$.*

Dowód. Na początku załóżmy, że P jest ideałem lewostronnie prymitywnym algebry $K[M_2]$. Ponieważ obraz elementu $x_2x_1 \in K[M_2]$ w algebrze $K[M_2]/P$ jest centralny, to na podstawie Wniosku 1.3.5 otrzymujemy $x_2x_1 - \lambda \in P$ dla pewnego $\lambda \in K$.

Jeśli $\lambda = 0$, to $x_2x_1 \in P$ i nietrudno sprawdzić, że wtedy $x_2K[M_2]x_1 \subseteq P$. W tej sytuacji jeden z generatorów x_1, x_2 leży w P (patrz Propozycja 1.3.3). Gdy $x_1 \in P$, to $P/(x_1)$ jest ideałem prymitywnym przemiennej algebry $K[M_2]/(x_1) \cong K[x]$, gdzie $K[x]$ jest algebrą wielomianów jednej zmiennej. Istnieje więc takie $\lambda_2 \in K$, że $P = (x_1, x_2 - \lambda_2)$. Analogicznie gdy $x_2 \in P$, to $P = (x_1 - \lambda_1, x_2)$ dla pewnego $\lambda_1 \in K$.

Jeśli natomiast $\lambda \neq 0$, to wtedy $P/(x_2x_1 - \lambda)$ jest ideałem lewostronnie prymitywnym algebry $K[M_2]/(x_2x_1 - \lambda) \cong K[\mathbb{B}]$ (patrz dyskusja przed Propozycją 1.6.4). W tej sytuacji Propozycja 1.6.12 implikuje $P = (x_2x_1 - \lambda)$ lub $P = (x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2)$ dla pewnych $0 \neq \lambda_1, \lambda_2 \in K$ spełniających $\lambda_1\lambda_2 = \lambda$.

Aby zakończyć dowód zauważmy, że pojawiające się w tezie ideały są lewostronnie oraz prawostronnie prymitywne. Jeśli natomiast P jest ideałem prawostronnie prymitywnym algebry $K[M_2]$, to $Q = \phi(P)$ jest ideałem lewostronnie prymitywnym tej algebry, gdzie ϕ

jest inwolucją z Propozycji 2.1.9 (dla $n = 2$). Stąd wniosek, że ideał Q jest jednej z postaci wymienionych w tezie, zatem również ideał $P = \phi(Q)$ ma tę własność, gdyż rodziny ideałów z tezy są niezmiennicze względem inwolucji ϕ. $\square$

Choć w Twierdzeniu 2.2.2 istnieją ograniczenia nałożone na ciało bazowe K, to nie mają one wpływu na istnienie izomorfizmu $K[M_2]/(x_2x_1 - \lambda) \cong K[\mathbb{B}]$ dla $0 \neq \lambda \in K$. Innymi słowy, dla dowolnego ciała bazowego K mamy całą rodzinę ideałów prymitywnych algebry $K[M_2]$ postaci $P_\lambda = (x_2x_1 - \lambda)$ dla $0 \neq \lambda \in K$.

Wniosek 2.2.3. *Algebra plaktyczna $K[M_2]$ rangi 2 nad ciałem K jest półprymitywna.*

Dowód. Korzystając z Wniosku 1.3.5 możemy założyć, że ciało bazowe K jest algebraicznie domknięte, a w szczególności nieskończone. Istnieje wtedy nieskończona rodzina ideałów prymitywnych w $K[M_2]$ postaci $P_i = (x_2x_1 - \lambda_i)$ dla $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $i \geq 1$. Ponieważ ideały P_i są parami komaksymalne i generowane przez centralne elementy, to $\bigcap_{i=1}^n P_i = \prod_{i=1}^n P_i$ dla dowolnego $n \geq 1$. W szczególności każdy niezerowy element zbioru $\bigcap_{i=1}^n P_i$ zawiera w swoim nośniku jednomian stopnia $\geq 2n$. Stąd wniosek, że $\mathcal{J}(K[M_2]) \subseteq \bigcap_{i=1}^\infty P_i = 0$. $\square$

Opiszmy teraz reprezentacje nieprzywiedlne algebry plaktycznej $K[M_2]$ w sytuacji, gdy ciało K jest algebraicznie domknięte i nieprzeliczalne. Zacznijmy od reprezentacji skończenie wymiarowych. Okazuje się, że wszystkie takie reprezentacje są jednowymiarowe.

Propozycja 2.2.4. *Niech $\rho\colon K[M_2] \to \mathcal{M}_n(K)$ będzie reprezentacją nieprzywiedlną algebry plaktycznej $K[M_2]$ rangi 2 nad algebraicznie domkniętym ciałem K. Wtedy $n = 1$.*

Dowód. Na początek zauważmy, że gdy $\rho(x_2x_1) \neq 0$, to $\rho(x_2x_1)$ jest macierzą odwracalną. Istotnie, podalgebra $\rho(K[M_2])$ algebry macierzy $\mathcal{M}_n(K)$ jest prosta, gdyż jest prymitywna i skończenie wymiarowa. Ponieważ macierz $\rho(x_2x_1)$ jest centralna w $\rho(K[M_2])$, to musi być odwracalna w $\rho(K[M_2])$. Stąd wniosek, że macierze $\rho(x_1)$ oraz $\rho(x_2)$ są odwracalne. Wykorzystując teraz relację $x_1x_2x_1 = x_2x_1x_1$ zachodzącą w M_2 otrzymujemy

$$\rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x_1) = \rho(x_2)\rho(x_1)\rho(x_1).$$

W tej sytuacji odwracalność macierzy $\rho(x_1)$ implikuje $\rho(x_1)\rho(x_2) = \rho(x_2)\rho(x_1)$, czyli algebra $\rho(K[M_2])$ jest przemienna. To implikuje $n = 1$.

Jeśli natomiast $\rho(x_2x_1) = 0$, to nietrudno sprawdzić, że musi być wtedy $\rho(x_1) = 0$ lub $\rho(x_2) = 0$ (patrz dowód Twierdzenia 2.2.2). To wymusza przemienność algebry $\rho(K[M_2])$ i w konsekwencji zapewnia, że $n = 1$. $\square$

Zauważmy, że Wniosek 2.2.3 oraz Propozycja 2.2.4 gwarantują, że algebra plaktyczna $K[M_2]$ nad algebraicznie domkniętym ciałem K musi posiadać reprezentacje nieprzywiedlne nieskończonego wymiaru. W przypadku gdy ciało K jest dodatkowo nieprzeliczalne łatwo opisać takie reprezentacje. Mianowicie gdy V jest nieskończenie wymiarowym i prostym lewostronnym $K[M_2]$-modułem o anihilatorze P, to Twierdzenie 2.2.2 daje $P = (x_2x_1 - \lambda)$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$ (drugi typ ideałów z Twierdzenia 2.2.2 jest wykluczony przez nieskończony wymiar V). W tej sytuacji moduł V może być traktowany jako wierny i prosty moduł lewostronny nad algebrą ilorazową $K[M_2]/P = K[M_2]/(x_2x_1 - \lambda) \cong K[\mathbb{B}]$. Dzięki Propozycji 1.6.11 istnieje więc taka baza $\{e_i : i \geq 0\}$ przestrzeni V nad K oraz $0 \neq \mu, \nu \in K$ spełniające $\mu\nu = \lambda$, że

$$x_1e_i = \mu e_{i+1}, \qquad x_2e_i = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i = 0, \\ \nu e_{i-1}, & \text{gdy } i > 0. \end{cases}$$

Wniosek 2.2.5. *Każda reprezentacja nieprzywiedlna algebry plaktycznej $K[M_2]$ rangi 2 and algebraicznie domkniętym i nieprzeliczalnym ciałem K jest jednomianowa.*

Ostatnim celem tego rozdziału jest opis struktury spektrum pierwszego algebry $K[M_2]$ i wyznaczenie jej klasycznego wymiaru Krulla.

Niech więc P będzie niezerowym ideałem pierwszym w $K[M_2]$ oraz $z = x_2x_1 \in M_2$.

Jeśli $P \cap M_2 \neq \varnothing$, to nietrudno sprawdzić, że $P \cap \langle z \rangle \neq \varnothing$ i w konsekwencji $z \in P$. Analogicznie jak w Twierdzeniu 2.2.2 wnioskujemy, że $x_1 \in P$ lub $x_2 \in P$. W szczególności gdy P jest ideałem wysokości 1 (lub inaczej, w tej sytuacji, minimalnym niezerowym ideałem pierwszym), to $P = (x_1)$ lub $P = (x_2)$ oraz $K[M_2]/P \cong K[x]$, gdzie $K[x]$ jest algebrą wielomianów jednej zmiennej. Oczywiście mamy wtedy $\operatorname{clKdim} K[M_2]/P = 1$.

Jeśli $P \cap M_2 = \varnothing$ ale $P \cap K[z] \neq 0$, to $P \cap K[z] = f(z)K[z]$ dla pewnego wielomianu nierozkładalnego $0 \neq f \in K[z]$ różnego od z. W takiej sytuacji ideałowi P odpowiada jednoznacznie ideał pierwszy algebry

$$\begin{aligned} K[M_2]/f(z)K[M_2] &\cong K\langle x, y, z\rangle/(xz - zx, yz - zy, yx - z, f(z)) \\ &\cong K[z]\langle x, y\rangle/(yx - z, f(z)) \\ &\cong L\langle x, y\rangle/(yx - \overline{z}) \\ &\cong L[\mathbb{B}], \end{aligned}$$

gdzie $\overline{z}$ jest obrazem zmiennej z w ciele $L = K[z]/fK[z]$. W szczególności gdy P jest ideałem wysokości 1, to $K[M_2]/P \cong L[\mathbb{B}]$ oraz dzięki Wnioskowi 1.6.13 mamy $\operatorname{clKdim} K[M_2]/P = 2$.

Jeśli natomiast $P \cap K[z] = 0$, to ideałowi P odpowiada jednoznacznie ideał pierwszy algebry $K[M_2](K[z] \setminus \{0\})^{-1} \cong L[\mathbb{B}]$, gdzie $L = K(z)$ jest ciałem funkcji wymiernych jednej zmiennej. W szczególności gdy P jest ideałem wysokości 1, to dzięki Twierdzeniu 1.6.12 odpowiadającym mu ideałem w $L[\mathbb{B}]$ jest $(xy-1)$. W tej sytuacji mamy $P = (x_1x_2 - x_2x_1)$, co daje $K[M_2]/P \cong K[x_1, x_2]$, gdzie $K[x_1, x_2]$ jest algebrą wielomianów dwóch zmiennych. Oczywiście mamy wtedy $\operatorname{clKdim} K[M_2]/P = 2$.

Otrzymane do tej pory fakty dają $\operatorname{clKdim} K[M_2] \leq 3$. Ponieważ algebra $K[M_2]$ jest pierwsza (patrz Propozycja 2.2.1) oraz

$$K[M_2]/(x_1x_2 - x_2x_1) \cong K[x_1, x_2],$$

gdzie $K[x_1, x_2]$ jest algebrą wielomianów dwóch zmiennych, to uzyskujemy stąd nierówność przeciwną $\operatorname{clKdim} K[M_2] \geq 3$. Łącząc ze sobą obie nierówności otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.2.6. *Niech $K[M_2]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 2 nad ciałem K. Wtedy* $\operatorname{clKdim} K[M_2] = \operatorname{GKdim} K[M_2] = 3$.

Naturalnym wydaje się pytanie: czy dla algebry plaktycznej $K[M_n]$ rangi $n \geq 3$ również zachodzi równość $\operatorname{clKdim} K[M_n] = \operatorname{GKdim} K[M_n]$?

Rozdział

3 Algebra plaktyczna rangi 3

W rozdziale tym wyznaczono minimalne ideały pierwsze algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad ciałem K. Pokazano, że istnieją dokładnie dwa takie ideały oraz, że każdy z nich jest ideałem głównym pochodzącym od jednorodnej kongruencji w monoidzie M_3. Ponadto gdy ciało K jest algebraicznie domknięte i nieprzeliczalne, uzyskano opis ideałów lewostronnie oraz prawostronnie prymitywnych algebry $K[M_3]$ wraz z towarzyszącymi im reprezentacjami nieprzywiedlnymi. Dodajmy, że każda z tych reprezentacji jest jednomianowa. W końcu jako zastosowanie znalezionego opisu ideałów prymitywnych algebry $K[M_3]$ podano nowy dowód jej półprymitywności. Rezultaty prezentowane w tym rozdziale pochodzą z pracy [27].

3.1 Minimalne ideały pierwsze

Niech M_3 będzie monoidem plaktycznym rangi 3. Wtedy Twierdzenie 2.1.3 implikuje, że każdy element monoidu M_3 może być jednoznacznie zapisany w jednej z postaci

$$\begin{aligned}&(x_3x_2x_1)^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}(x_3x_1)^{k_3}(x_3x_2)^{k_4}x_2^{k_5}x_3^{k_6},\\&(x_3x_2x_1)^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}(x_3x_1)^{k_3}x_1^{k_4}x_2^{k_5}x_3^{k_6},\end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie $k_i \geq 0$.

Wprost z dowodu Twierdzenia 2.1.13 wiadomo, że algebra plaktyczna $K[M_3]$ nad ciałem K nie jest pierwsza oraz $(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2)K[M_3](x_3x_1 - x_1x_3) = 0$. Niech zatem

$$M_{3,1} = M_3/(x_3x_1 = x_1x_3), \qquad M_{3,2} = M_3/(x_3x_2x_2x_1 = x_2x_1x_3x_2) \tag{3.2}$$

oraz

$$M'_{3,1} = M'_3/(x_3x_1 = x_1x_3), \qquad M'_{3,2} = M'_3/(x_3x_2x_2x_1 = x_2x_1x_3x_2). \tag{3.3}$$

Zauważmy, że monoidy $M_{3,1}$ oraz $M_{3,2}$ zdefiniowane są za pomocą relacji jednorodnych względem każdego z generatorów x_1, x_2, x_3. W szczególności algebry półgrupowe $K[M_{3,1}]$ oraz $K[M_{3,2}]$ posiadają naturalne gradacje wyznaczone przez stopień względem x_1, x_2, x_3 odpowiednio.

Zanim przejdziemy do opisu postaci elementów w monoidach $M_{3,1}$ oraz $M_{3,2}$ umówmy się używać tych samych symboli do zapisu generatorów monoidu wolnego oraz monoidu plaktycznego i jego homomorficznych obrazów. Nie będzie to prowadzić do nieporozumień, gdyż za każdym razem będzie wynikać z kontekstu o elementach którego monoidu mówimy.

Lemat 3.1.1. *Każdy element monoidu $M_{3,1}$ może być jednoznacznie zapisany w postaci*

$$(x_3x_2x_1)^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}x_1^{k_3}(x_3x_2)^{k_4}x_2^{k_5}x_3^{k_6},$$

gdzie $k_i \geq 0$. Ponadto element $x_3x_2x_1 \in M_{3,1}$ jest centralny i regularny w algebrze $K[M_{3,1}]$ nad ciałem K.

Dowód. Ponieważ w $M_{3,1}$ mamy $x_3x_1 = x_1x_3$, to wykorzystując postać kanoniczną (3.1) elementów monoidu M_3 nietrudno sprawdzić, że każdy element $M_{3,1}$ może być zapisany w powyższej formie. Twierdzimy, że zapis ten jest jednoznaczny.

Na początek dowolnemu elementowi w monoidu wolnego nad $\{x_1, x_2, x_3\}$ przypiszmy liczbę naturalną $n(w)$ za pomocą indukcji względem stopnia $\deg(w)$. Jeśli $w = 1$, to niech $n(w) = 0$. Gdy natomiast $w \neq 1$ oraz liczba $n(v)$ została zdefiniowana dla dowolnego słowa v spełniającego $\deg(v) < \deg(w)$, to postępujemy w następujący sposób. Jeżeli w nie zawiera podsłowa postaci $x_3w_2x_2w_1x_1$ dla pewnych słów w_1, w_2, to przyjmijmy $n(w) = 0$. Gdy zaś w zawiera podsłowo wspomnianej postaci, to zapiszmy w jako $w = v_0x_1w_0$ dla pewnych słów v_0, w_0, gdzie v_0 jest słowem minimalnego stopnia zawierającym podsłowo x_3ux_2 dla pewnego słowa u. Kolejno zapiszmy v_0 jako $v_0 = v_1x_2w_1$ dla pewnych słów v_1, w_1, gdzie słowo w_1 jest minimalnego stopnia. W końcu niech $v_1 = w_3x_3w_2$ dla pewnych słów w_2, w_3, gdzie słowo w_2 jest możliwie najmniejszego stopnia. W tej sytuacji $w = w_3x_3w_2x_2w_1x_1w_0$. Jeśli teraz $\overline{w} = w_3w_2w_1w_0$, to oczywiście $\deg(\overline{w}) < \deg(w)$, co pozwala zdefiniować $n(w) = n(\overline{w}) + 1$.

Dzięki Propozycji 2.1.5 wiemy, że dla dowolnego słowa w, traktowanego jako element M_3, liczba $n(w)$ równa jest największej z liczb $n \geq 0$ spełniających $w \in (x_3x_2x_1)^nM_3$. Oznacza to, że $n(w)$ jest niezmiennikiem klasy słowa w w M_3. Twierdzimy, że $n(w)$ jest również niezmiennikiem klasy słowa w w $M_{3,1}$. Aby tego dowieść wystarczy sprawdzić, że gdy v jest słowem otrzymanym z w przez jednokrotne zastosowanie relacji $x_3x_1 = x_1x_3$, to $n(v) = n(w)$. Zauważmy, że gdy $n(w) = 0$, to również $n(v) = 0$. Natomiast gdy $n(w) > 0$, to nietrudno się przekonać, że słowo $\overline{v}$, powstałe ze słowa v zgodnie z opisaną powyżej procedurą, jest równe $\overline{w}$. Stąd już $n(v) = n(\overline{v}) + 1 = n(\overline{w}) + 1 = n(w)$.

Niech teraz

$$u = (x_3x_2x_1)^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}x_1^{k_3}(x_3x_2)^{k_4}x_2^{k_5}x_3^{k_6} \in M_{3,1},$$
$$v = (x_3x_2x_1)^{l_1}(x_2x_1)^{l_2}x_1^{l_3}(x_3x_2)^{l_4}x_2^{l_5}x_3^{l_6} \in M_{3,1}$$

dla pewnych $k_i, l_i \geq 0$. Jeśli obrazy elementów u, v względem homomorfizmów naturalnych

$$M_{3,1} \to M_{3,1}/(x_1 = 1) \cong \langle x_2, x_3 \rangle \cong M_2,$$
$$M_{3,1} \to M_{3,1}/(x_3 = 1) \cong \langle x_1, x_2 \rangle \cong M_2$$

są równe, to wykorzystując postać kanoniczną elementów monoidu M_2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &k_1 + k_2 = l_1 + l_2, \qquad && k_4 + k_5 = l_4 + l_5, \qquad && k_3 = l_3, \\ &k_1 + k_4 = l_1 + l_4, && k_2 + k_5 = l_2 + l_5, && k_6 = l_6. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jeśli teraz $u = v$ w $M_{3,1}$, to stąd $k_1 = n(u) = n(v) = l_1$ i na podstawie równań (3.4) otrzymujemy $k_i = l_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, 6$. Pozostaje zauważyć, że w tej sytuacji ostatnia część tezy jest oczywista. □

W celu wyznaczenia postaci kanonicznej elementów monoidu $M_{3,2}$ użyjemy innej metody.

Lemat 3.1.2. *Każdy element monoidu $M_{3,2}$ może być jednoznacznie zapisany w jednej z postaci*

$$x_1^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}(x_3x_1)^{k_4}(x_3x_2x_1)^{k_5}(x_3x_2)^{k_6}x_3^{k_7},$$
$$x_1^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}x_2^{k_3}(x_3x_2)^{k_6}x_3^{k_7},$$

gdzie $k_i \geq 0$. Ponadto element $x_3x_2x_1 \in M_{3,2}$ jest centralny i regularny w algebrze $K[M_{3,2}]$ nad ciałem K.

Dowód. W dowodzie lematu posłużymy się Diamond Lemma. Rozważmy więc porządek stopniowo-leksykograficzny w monoidzie wolnym nad $\{x_1, x_2, x_3\}$ wyznaczony przez relacje $x_1 < x_2 < x_3$ (patrz Przykład 1.5.2). Niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ złożonym z par:

(1) $(x_2x_1x_1, x_1x_2x_1)$,
(2) $(x_2x_2x_1, x_2x_1x_2)$,
(3) $(x_2x_3x_1, x_2x_1x_3)$,
(4) $(x_3x_1x_1, x_1x_3x_1)$,
(5) $(x_3x_1x_2, x_1x_3x_2)$,
(6) $(x_3x_2x_2, x_2x_3x_2)$,
(7) $(x_3x_3x_1, x_3x_1x_3)$,
(8) $(x_3x_3x_2, x_3x_2x_3)$,
(9) $(x_3x_2x_1x_2, x_2x_1x_3x_2)$,
(10) $(x_2x_3x_2x_1, x_2x_1x_3x_2)$,
(11) $(x_3x_2x_1x_3x_1, x_3x_1x_3x_2x_1)$.

Oczywiście zdefiniowany wyżej porządek spełnia DCC i jest zgodny ze zbiorem redukcji S. Wykorzystując fakt, że każdy element monoidu M_3 może być zapisany w postaci (3.1) łatwo sprawdzić, że wypisane w tezie elementy, traktowane jako słowa monoidu wolnego, stanowią zbiór wszystkich słów zredukowanych względem S. Zauważmy także, że relacje pochodzące od par (1)–(9) definiują monoid $M_{3,2}$, zaś relacje związane z parami (10) i (11) są w nim spełnione, co gwarantuje $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle/\mathcal{I}(S) \cong K[M_{3,2}]$. Ponieważ ostatnia część tezy wynika prosto z części pierwszej, to dla zakończenia dowodu wystarczy sprawdzić, że wszystkie niejednoznaczności zbioru redukcji S są rozwiązywalne. Istnieje dokładnie 29 niejednoznaczności:

1. $(x_2x_2x_1)x_1 = x_2(x_2x_1x_1)$,
2. $(x_2x_3x_1)x_1 = x_2(x_3x_1x_1)$,
3. $(x_2x_3x_1)x_2 = x_2(x_3x_1x_2)$,
4. $(x_3x_2x_2)x_1 = x_3(x_2x_2x_1)$,
5. $(x_3x_3x_1)x_1 = x_3(x_3x_1x_1)$,
6. $(x_3x_3x_1)x_2 = x_3(x_3x_1x_2)$,
7. $(x_3x_3x_2)x_2 = x_3(x_3x_2x_2)$,
8. $(x_2x_3x_2x_1)x_1 = x_2x_3(x_2x_1x_1)$,
9. $(x_2x_3x_2x_1)x_2 = x_2(x_3x_2x_1x_2)$,
10. $(x_3x_1x_2)x_1x_1 = x_3x_1(x_2x_1x_1)$,
11. $(x_3x_1x_2)x_2x_1 = x_3x_1(x_2x_2x_1)$,
12. $(x_3x_1x_2)x_3x_1 = x_3x_1(x_2x_3x_1)$,
13. $(x_3x_2x_2)x_1x_1 = x_3x_2(x_2x_1x_1)$,
14. $(x_3x_2x_2)x_3x_1 = x_3x_2(x_2x_3x_1)$,
15. $(x_3x_3x_2)x_1x_1 = x_3x_3(x_2x_1x_1)$,
16. $(x_3x_3x_2)x_1x_2 = x_3(x_3x_2x_1x_2)$,
17. $(x_3x_3x_2)x_2x_1 = x_3x_3(x_2x_2x_1)$,

18. $(x_3x_3x_2)x_3x_1 = x_3x_3(x_2x_3x_1)$,
19. $(x_2x_3x_2x_1)x_3x_1 = x_2(x_3x_2x_1x_3x_1)$,
20. $(x_3x_1x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_1(x_2x_3x_2x_1)$,
21. $(x_3x_2x_1x_2)x_1x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_1x_1)$,
22. $(x_3x_2x_1x_2)x_2x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_2x_1)$,
23. $(x_3x_2x_1x_2)x_3x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_3x_1)$,
24. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_1 = x_3x_2x_1(x_3x_1x_1)$,
25. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_2 = x_3x_2x_1(x_3x_1x_2)$,
26. $(x_3x_2x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_2(x_2x_3x_2x_1)$,
27. $(x_3x_3x_2)x_1x_3x_1 = x_3(x_3x_2x_1x_3x_1)$,
28. $(x_3x_3x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_3(x_2x_3x_2x_1)$,
29. $(x_3x_2x_1x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_3x_2x_1)$.

Nietrudno sprawdzić, że każda z tych niejednoznaczności jest rozwiązywalna. Jeśli przez $\xrightarrow{(i)}$ oznaczymy redukcję algebry $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ związaną z elementem zbioru S typu (i), to przykładowo dla niejednoznaczności: 4, 10, 16, 21, 24, 26 i 29 mamy odpowiednio:

4. $(x_3x_2x_2)x_1 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(10)} x_2x_1x_3x_2$,
   $x_3(x_2x_2x_1) \xrightarrow{(2)} x_3x_2x_1x_2 \xrightarrow{(9)} x_2x_1x_3x_2$,

10. $(x_3x_1x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_1x_3x_1x_2x_1$,
    $x_3x_1(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_1x_2x_1 \xrightarrow{(4)} x_1x_3x_1x_2x_1$,

16. $(x_3x_3x_2)x_1x_2 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_1x_2 \xrightarrow{(5)} x_3x_2x_1x_3x_2$,
    $x_3(x_3x_2x_1x_2) \xrightarrow{(9)} x_3x_2x_1x_3x_2$,

21. $(x_3x_2x_1x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(9)} x_2x_1x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_2x_1x_3x_1x_2x_1$
    $\xrightarrow{(5)} x_2x_1x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(1)} x_1x_2x_1x_3x_2x_1$,
    $x_3x_2x_1(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_2x_1x_1x_2x_1 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_2x_1x_2x_1$
    $\xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_2x_1 \xrightarrow{(9)} x_1x_2x_1x_3x_2x_1$,

24. $$\begin{aligned} (x_3x_2x_1x_3x_1)x_1 &\xrightarrow{(11)} x_3x_1x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_3x_1x_2x_1 \\ &\xrightarrow{(5)} x_3x_1x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(4)} x_1x_3x_1x_3x_2x_1, \\ x_3x_2x_1(x_3x_1x_1) &\xrightarrow{(4)} x_3x_2x_1x_1x_3x_1 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_2x_1x_3x_1 \\ &\xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_3x_1 \xrightarrow{(11)} x_1x_3x_1x_3x_2x_1, \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} (x_3x_2x_2)x_3x_2x_1 &\xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(10)} x_2x_3x_2x_1x_3x_2 \xrightarrow{(10)} x_2x_1x_3x_2x_3x_2, \\ x_3x_2(x_2x_3x_2x_1) &\xrightarrow{(10)} x_3x_2x_2x_1x_3x_2 \xrightarrow{(2)} x_3x_2x_1x_2x_3x_2 \xrightarrow{(9)} x_2x_1x_3x_2x_3x_2, \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} (x_3x_2x_1x_2)x_3x_2x_1 &\xrightarrow{(9)} x_2x_1x_3x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(10)} x_2x_1x_3x_2x_1x_3x_2, \\ x_3x_2x_1(x_2x_3x_2x_1) &\xrightarrow{(10)} x_3x_2x_1x_2x_1x_3x_2 \xrightarrow{(9)} x_2x_1x_3x_2x_1x_3x_2. \end{aligned}$$

Analogicznie można sprawdzić, że pozostałe niejednoznaczności są rozwiązywalne. □

Znając bazy liniowe algebr $K[M_{3,1}]$ i $K[M_{3,2}]$ oraz wiedząc, że $z = x_3x_2x_1$ jest w nich elementem regularnym jesteśmy gotowi by przejść do dowodu głównego twierdzenia tego podrozdziału.

Twierdzenie 3.1.3. *Niech $K[M_3]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 3 nad ciałem K. Wtedy ideały $P_1 = (x_3x_1 - x_1x_3)$ oraz $P_2 = (x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2)$ są jedynymi minimalnymi ideałami pierwszymi algebry $K[M_3]$.*

Dowód. Ze względu na równość $(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2)K[M_3](x_3x_1 - x_1x_3) = 0$ dowolny ideał pierwszy algebry $K[M_3]$ zawiera jeden z ideałów P_1 lub P_2. Wystarczy więc pokazać, że ideały P_1, P_2 są pierwsze.

Przypuśćmy na chwilę, że ideał P_1 jest pierwszy. Wtedy algebra $K[M_{3,1}] \cong K[M_3]/P_1$ jest pierwsza. Na podstawie Lematu 3.1.1 obraz elementu $z = x_3x_2x_1 \in M_3$ w algebrze $K[M_{3,1}]$ jest centralny i regularny, zatem dzięki Propozycji 1.4.8 algebra $K[M_{3,1}]\langle z\rangle^{-1}$ jest również pierwsza. Uwzględniając izomorfizm $K[M_3]\langle z\rangle^{-1} \cong K[M_3'][x, x^{-1}]$ z Propozycji 2.1.7 stwierdzamy, że $K[M_{3,1}]\langle z\rangle^{-1} \cong K[M_{3,1}'][x, x^{-1}]$, co gwarantuje pierwszość algebry $K[M_{3,1}']$. Ponieważ $z = 1$ w M_3' oraz dla inwolucji ψ z Propozycji 2.1.10 (dla $n = 3$) mamy

$$\psi(x_3x_1 - x_1x_3) = x_2 - x_2x_1x_3x_2 = x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2,$$

to ψ indukuje antyizomorfizm pomiędzy $K[M_{3,1}']$ oraz $K[M_{3,2}']$, czyli algebra $K[M_{3,2}']$ jest pierwsza. Na podstawie Lematu 3.1.2 obraz elementu $z \in M_3$ w algebrze $K[M_{3,2}]$ jest centralny i regularny. Wykorzystując ponownie izomorfizm z Propozycji 2.1.7 stwierdzamy, że centralna lokalizacja $K[M_{3,2}]\langle z\rangle^{-1} \cong K[M_{3,2}'][x, x^{-1}]$ jest algebrą pierwszą. W tej sytuacji

Propozycja 1.4.8 implikuje pierwszość algebry $K[M_{3,2}]$. Ponieważ $K[M_{3,2}] \cong K[M_3]/P_2$, to ideał P_2 jest pierwszy.

Aby zakończyć dowód musimy pokazać, że algebra $K[M_{3,1}]$ jest pierwsza. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $aK[M_{3,1}]b = 0$ dla pewnych $0 \neq a, b \in K[M_{3,1}]$. Wykorzystując gradacje algebry $K[M_{3,1}]$ możemy dodatkowo założyć, że elementy a oraz b są jednorodne względem każdego z generatorów x_1, x_2, x_3. Niech $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$, gdzie $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in M_{3,1}$ są parami różne. Oznaczmy przez $k_{ij} \geq 0$ wykładniki występujące w postaci kanonicznej elementu w_i danej przez Lemat 3.1.1. Jeśli $k_{i3} \geq 1$ dla pewnego i, to

$$x_3x_2w_i = (x_3x_2x_1)^{k_{i1}+1}(x_2x_1)^{k_{i2}}x_1^{k_{i3}-1}(x_3x_2)^{k_{i4}}x_2^{k_{i5}}x_3^{k_{i6}}.$$

Ponadto gdy $k_{i3} = 0$, to wykładnik przy x_1 w elemencie $x_3x_2w_i$ jest nadal równy zeru. Stąd wniosek, że gdy $k_{i3} \geq 2$ dla pewnego i, to $x_3x_2a \neq 0$ oraz maksymalny z wykładników przy x_1 elementów $\mathrm{Supp}(x_3x_2a)$ jest mniejszy niż maksymalny z wykładników k_{i3}. Zamieniając a na x_3x_2a oraz powtarzając tę procedurę skończenie wiele razy możemy założyć, że $k_{i3} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Podobnie gdy $k_{i2} \geq 1$ dla pewnego i, to

$$x_3w_i = (x_3x_2x_1)^{k_{i1}+1}(x_2x_1)^{k_{i2}-1}x_1^{k_{i3}}(x_3x_2)^{k_{i4}}x_2^{k_{i5}}x_3^{k_{i6}}$$

oraz gdy $k_{i2} = 0$, to wykładnik przy x_2x_1 w elemencie x_3w_i jest wciąż równy zeru. Dlatego jeśli $k_{i2} \geq 2$ dla pewnego i, to wtedy $x_3a \neq 0$ oraz maksymalny z wykładników przy x_2x_1 elementów $\mathrm{Supp}(x_3a)$ jest mniejszy niż maksymalny z wykładników k_{i2}. Podobnie jak poprzednio możemy więc założyć, że $k_{i2} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Pamiętając, że element $x_3x_2x_1$ jest regularny w $K[M_{3,1}]$ możemy też założyć, że $k_{i1} = 0$ dla pewnego i. Ponieważ element a jest jednorodny względem x_1, to koniecznie $\deg_{x_1}(a) \leq 2$. Dodatkowo wśród elementów $a \in K[M_{3,1}]$ spełniających wszystkie powyższe warunki możemy wybrać element najmniejszego stopnia. Analogiczne rozumowanie dla elementu $b \in K[M_{3,1}]$ pozwala założyć, że ma on dokładnie te same własności co a.

Na początku rozważmy przypadek $\deg_{x_1}(a) = 2$. W tej sytuacji element a ma postać

$$a = (x_3x_2x_1)^2a_1 + x_3x_2x_1x_2x_1a_2 + x_3x_2x_1x_1a_3 + x_2x_1x_1a_4,$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Gdyby $a_4 = 0$, to wtedy $a = x_3x_2x_1a'$ dla pewnego $a' \in K[M_{3,1}]$. Dzięki regularności $x_3x_2x_1$ w $K[M_{3,1}]$ moglibyśmy zamienić a na a' otrzymując sprzeczność z minimalnością stopnia elementu a. Ponadto $x_3x_2a = 0$, bo w przeciwnym przypadku $0 \neq x_3x_2a = x_3x_2x_1a'$ dla pewnego $a' \in K[M_{3,1}]$. Podobnie jak wcześniej zamiana a na a' prowadziłaby do sprzeczności. Zauważmy, że równość

$$0 = x_3x_2a = (x_3x_2x_1)^2x_3x_2a_1 + (x_3x_2x_1)^2x_2a_2 + (x_3x_2x_1)^2a_3 + x_3x_2x_1x_2x_1a_4$$

gwarantuje, że również $a_4 = 0$. Istotnie, stosując najpierw Lemat 3.1.1 stwierdzamy, że $x_3x_2x_1x_2x_1a_4 \in (x_3x_2x_1)^2K[M_{3,1}]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_3x_2x_1x_2x_1a_4 = 0$. Teraz równość $x_3x_2x_1x_2x_1a_4 = 0$ w połączeniu z regularnością elementu $x_3x_2x_1$ implikuje $x_2x_1a_4 = 0$. Mnożąc natomiast z lewej strony ostatnie równanie przez x_3 oraz ponownie korzystając z regularności $x_3x_2x_1$ otrzymujemy ostatecznie $a_4 = 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że koniecznie $\deg_{x_1}(a) \leq 1$. Analogicznie $\deg_{x_1}(b) \leq 1$.

Jeśli $\deg_{x_1}(a) = 1$, to element a ma postać

$$a = x_3x_2x_1a_1 + x_2x_1a_2 + x_1a_3, \tag{3.5}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Rozważmy teraz element

$$x_3a = x_3x_2x_1x_3a_1 + x_3x_2x_1a_2 + x_1x_3a_3$$

i towarzyszące mu możliwości.

(1) Jeśli $x_3a = 0$, to dzięki $x_1x_3a_3 \in x_3x_2x_1K[M_{3,1}]$ oraz Lematowi 3.1.1 stwierdzamy, że $x_1x_3a_3 = 0$, co implikuje $x_3x_2x_1(x_3a_1 + a_3) = 0$. Uwzględniając regularność elementu $x_3x_2x_1$ w algebrze $K[M_{3,1}]$ konkludujemy, że $x_3a_1 + a_2 = 0$.

(2) Jeśli natomiast $x_3a \neq 0$, to zastosujmy następującą redukcję. Element x_3a może być zapisany w postaci analogicznej do (3.5) jako $x_3a = x_3x_2x_1a_1' + x_2x_1a_2' + x_1a_3'$, gdzie $a_1' = x_3a_1 + a_2$, $a_2' = 0$ oraz $a_3' = x_3a_3$. Zastępując wyjściowy element a przez x_3a dostajemy element typu (3.5), w którym brak środkowego członu ($a_2' = 0$). W takiej sytuacji powiemy, że zamiana elementu a na x_3a pozwala założyć, że $a_2 = 0$. Redukcje tego typu pojawią się jeszcze wielokrotnie, nie będą jednak aż tak dokładnie objaśniane. Odnotujmy również, że postępując w ten sposób (tzn. wymieniając a na x_3a) zwiększyliśmy stopień elementu a dokładnie o jeden, w szczególności nie możemy już powoływać się na minimalność stopnia elementu a. Jednak gdy operacje wykonywane na a nie zwiększą jego stopnia o więcej niż dwa oraz doprowadzą do elementu, z którego da się usunąć czynnik regularny $x_3x_2x_1$, to argument związany z minimalnością stopnia pozostaje w mocy. Wróćmy do przypadku $x_3a \neq 0$. Wiemy już, że w takiej sytuacji wymiana a na nowy element (dla wygody dalej oznaczany przez a) pozwala założyć, że $a_2 = 0$. Wobec (3.5) element a przybiera wtedy postać $a = x_3x_2x_1a_1 + x_1a_3$. Rozważmy element

$$x_2a = x_3x_2x_1x_2a_1 + x_2x_1a_3 \tag{3.6}$$

i przypuśćmy na chwilę, że $x_2a = 0$. Dzięki Lematowi 3.1.1 otrzymujemy $x_2x_1a_3 = 0$, czyli również $x_3x_2x_1a_3 = 0$. Wykorzystując regularność elementu $x_3x_2x_1$ dostajemy $a_3 = 0$, czyli

$a = x_3x_2x_1a_1$. Ponieważ $a \neq 0$, to również $a_1 \neq 0$. Pozostaje zauważyć, że wymiana elementu a na a_1 prowadzi do sprzeczności z minimalnością stopnia a. Musi więc być $x_2a \neq 0$. Wobec (3.6) zamiana a na x_2a (tu należy pamiętać, że przy wymianie a na nowy element tracimy uzyskane wcześniej informacje o elementach a_i, przykładowo po wymianie a na x_2a nie możemy dłużej zakładać, że $a_2 = 0$) pozwala założyć, że $a_3 = 0$. W tej sytuacji (3.5) implikuje, że $a = x_3x_2x_1a_1 + x_2x_1a_2$. Rozważmy teraz element

$$x_3a = x_3x_2x_1x_3a_1 + x_3x_2x_1a_2.$$

Gdy $x_3a \neq 0$, to wymieniając a na x_3a możemy założyć, że $a = x_3x_2x_1a'$ dla pewnego $a' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Zastępując a przez a' redukujemy do przypadku $a \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Jeśli natomiast $x_3a = 0$, to dzięki regularności $x_3x_2x_1$ otrzymujemy $x_3a_1 + a_2 = 0$.

Podsumowując przypadki (1) oraz (2), wystarczy rozważyć sytuację gdy element a jest postaci (3.5) i spełniony jest warunek

$$x_3a_1 + a_2 = 0 \tag{3.7}$$

oraz przypadek gdy $a \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ (tzn. $\deg_{x_1}(a) = 0$). Drugą sytuacją zajmiemy się pod koniec twierdzenia. Załóżmy więc (3.7) i rozważmy element

$$x_2a = x_3x_2x_1x_2a_1 + x_2x_1x_2a_2 + x_2x_1a_3.$$

Przypuśćmy na chwilę, że $x_2a = 0$. Wtedy Lemat 3.1.1 implikuje $x_3x_2x_1x_2a_1 = 0$ oraz $x_2x_1x_2a_2 + x_2x_1a_3 = 0$. Pierwsze z równań daje $x_2a_1 = 0$, czyli również $x_3x_2a_1 = 0$. Dzięki regularności elementu x_3x_2 w algebrze $K[\langle x_2, x_3\rangle] \cong K[M_2]$ dostajemy stąd $a_1 = 0$. Uwzględniając (3.7) oraz drugie z otrzymanych równań uzyskujemy $a_2 = 0$ oraz $x_2x_1a_3 = 0$. Mnożąc ostatnie równanie z lewej strony przez x_3 oraz korzystając z regularności $x_3x_2x_1$ dostajemy $a_3 = 0$ i w konsekwencji $a = 0$. Otrzymana sprzeczność gwarantuje, że $x_2a \neq 0$. Możemy więc zastąpić a przez x_2a, co pozwala założyć, że $a_3 = 0$. Wtedy wobec (3.5) element a ma postać $a = x_3x_2x_1a_1 + x_2x_1a_2$. Rozważmy element

$$x_3x_2a = x_3x_2x_1x_3x_2a_1 + x_3x_2x_1x_2a_2.$$

Jeśli $x_3x_2a \neq 0$, to zamieniając a na x_3x_2a uzyskujemy $a = x_3x_2x_1a'$ dla pewnego elementu $a' \in K[\langle x_2, x_2\rangle]$ i w konsekwencji przez zastąpienie a elementem a' sprowadzamy sytuację do $a \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Jeśli natomiast $x_3x_2a = 0$, to dzięki regularności elementu $x_3x_2x_1$ uzyskujemy $x_3x_2a_1 + x_2a_2 = 0$. Mnożąc tę równość z lewej strony przez x_3 dostajemy

$x_3x_2(x_3a_1 + a_2) = 0$, co wobec regularności elementu x_3x_2 w algebrze $K[\langle x_2, x_3\rangle] \cong K[M_2]$ implikuje $x_3a_1 + a_2 = 0$. W tej sytuacji element a przybiera postać $a = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)a_1$.

Rozpatrzmy teraz dwie możliwości.

(3) Niech $ax_2^t \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 0$. Ponieważ a_1 spełnia $a_1x_2^t \in K[\langle x_3x_2, x_2\rangle]$ dla pewnego $t \geq 0$, to dzięki jednorodności elementu a_1 względem x_2, x_3 możemy przyjąć, że $a_1x_2^t = (x_3x_2)^n x_2^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. W tej sytuacji wymiana a na ax_2^t pozwala założyć, że element a przybiera postać $a = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)(x_3x_2)^n x_2^m$. Zamieniając następnie a na $ax_1^n = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^m(x_3x_2x_1)^n \neq 0$ oraz usuwając czynnik regularny $(x_3x_2x_1)^n$ redukujemy a do postaci $a = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^m$.

(4) Jeśli zaś $ax_2^{t+1} = 0$ oraz $ax_2^t \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$, to zamieniając a na ax_2^t możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $ax_2 = 0$. W tej sytuacji Lemat 3.1.1 gwarantuje, że $a_1x_2 = 0$. Nietrudno sprawdzić, że wtedy musi być $a_1 = a_1'(x_3x_2 - x_2x_3)$ dla pewnego $a_1' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Ponieważ mamy $x_3(x_3x_2 - x_2x_3) = 0$, to dzięki jednorodności elementu a_1' względem x_2, x_3 możemy założyć, że a_1' jest postaci $a_1' = (x_3x_2)^n x_2^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. Łącznie uzyskujemy $a = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)(x_3x_2)^n x_2^m(x_3x_2 - x_2x_3)$. Wymieniając teraz a na $ax_1^n = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^m(x_3x_2 - x_2x_3)(x_3x_2x_1)^n \neq 0$ i usuwając element regularny $(x_3x_2x_1)^n$ redukujemy a do postaci $a = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^m(x_3x_2 - x_2x_3)$.

Wróćmy teraz do ostatniego przypadku gdy $\deg_{x_1}(a) = 0$, tzn. $a \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Jeśli $ax_2^t \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 0$, to postępując tak jak w (3) można założyć, że $a = (x_3x_2)^n x_2^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. W tej sytuacji wymiana a na $x_3^m a x_1^{n+m} = (x_3x_2x_1)^{n+m} \neq 0$ oraz usunięcie czynnika regularnego $(x_3x_2x_1)^{n+m}$ prowadzi do redukcji $a = 1$. Jeśli natomiast $ax_2^{t+1} = 0$ oraz $ax_2^t \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$, to zastępując a elementem ax_2^t możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $ax_2 = 0$. W tym przypadku postępując tak jak w (4) redukujemy element a do postaci $a = (x_3x_2)^n x_2^m(x_3x_2 - x_2x_3)$ dla pewnych $n, m \geq 0$. Ponadto wymiana a na $x_3^m a x_1^{n+m} = (x_3x_2 - x_2x_3)(x_3x_2x_1)^{n+m} \neq 0$ i usunięcie czynnika regularnego $(x_3x_2x_1)^{n+m}$ pozwala założyć, że $a = x_3x_2 - x_2x_3$.

Podsumowując uzyskane powyżej wyniki dotyczące możliwych postaci elementu a oraz powtarzając rozumowanie dla elementu b możemy założyć, że a oraz b są jednej z postaci:

$$\begin{aligned}
&x_3x_2 - x_2x_3, \\
&(x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^n, \\
&(x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^n(x_3x_2 - x_2x_3),
\end{aligned}$$

gdzie $n \geq 0$. Dla zakończenia dowodu wystarczy więc pokazać, że równość

$$(x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^n(x_3x_2 - x_2x_3)K[M_{3,1}](x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_2^m(x_3x_2 - x_2x_3) = 0$$

prowadzi do sprzeczności dla dowolnych $n, m \geq 0$. Rzeczywiście, nietrudno sprawdzić, że podstawiając $x_1 \in K[M_{3,1}]$ w powyższej równości otrzymujemy niezerowy element algebry $K[M_{3,1}]$ posiadający dwa różne elementy zbioru $(x_3x_2x_1)^3 M_{3,1}$ w swoim nośniku. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że algebra $K[M_{3,1}]$ jest pierwsza i tym samym kończy dowód. □

Zauważmy, że minimalne ideały pierwsze P_1, P_2 algebry plaktycznej $K[M_3]$ pochodzą od jednorodnych kongruencji w M_3. W szczególności algebry ilorazowe $K[M_3]/P_1 \cong K[M_{3,1}]$ oraz $K[M_3]/P_2 \cong K[M_{3,2}]$ są definiowane za pomocą jednorodnych relacji półgrupowych.

Stosując Twierdzenie 3.1.3 oraz Lemat 3.1.1 można podać nowy dowód półpierwszości algebry $K[M_3]$.

Propozycja 3.1.4. *Niech P_1, P_2 będą minimalnymi ideałami pierwszymi algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad ciałem K zdefiniowanymi w Twierdzeniu 3.1.3. Wtedy $P_1 \cap P_2 = 0$, w szczególności algebra $K[M_3]$ jest półpierwsza.*

Dowód. Niech $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i (x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2) w_i \in P_1 \cap P_2$ dla pewnych $\lambda_i \in K$ oraz $v_i, w_i \in M_3$. Zapiszmy elementy v_i oraz w_i w postaci kanonicznej (3.1)

$$v_i = (x_3x_2x_1)^{k_{i1}}(x_2x_1)^{k_{i2}}(x_3x_1)^{k_{i3}} x_1^{k_{i4}} x_2^{k_{i5}} x_3^{k_{i6}},$$
$$w_i = (x_3x_2x_1)^{l_{i1}}(x_2x_1)^{l_{i2}}(x_3x_1)^{l_{i3}}(x_3x_2)^{l_{i4}} x_2^{l_{i5}} x_3^{l_{i6}},$$

gdzie $k_{ij}, l_{ij} \geq 0$ (można założyć, że elementy v_i, w_i są tej właśnie postaci). Ponieważ $x_3x_2x_1$ oraz x_2 komutują z $x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2$, to uwzględniając $u(x_3x_2x_1x_2 - x_2x_1x_3x_2) = 0$ dla $u \in \{x_3x_1, x_3\}$ możemy założyć, że $k_{i3} = k_{i6} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Podobnie wykorzystując równość $(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2)u = 0$ dla $u \in \{x_3x_1, x_2x_1\}$ możemy przyjąć, że $l_{i2} = l_{i3} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Dodatkowo przenosząc czynnik $(x_3x_2x_1)^{l_{i1}}$ z elementu w_i do v_i możemy założyć, że $l_{i1} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. W tej sytuacji element a ma postać

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_3x_2x_1)^{k_{i1}}(x_2x_1)^{k_{i2}} x_1^{k_{i4}} x_2^{k_{i5}} (x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2)(x_3x_2)^{l_{i4}} x_2^{l_{i5}} x_3^{l_{i6}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_3x_2x_1)^{k_{i1}+1}(x_2x_1)^{k_{i2}} x_1^{k_{i4}} (x_3x_2)^{l_{i4}} x_2^{k_{i5}+l_{i5}+1} x_3^{l_{i6}} \\ &\qquad\qquad - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_3x_2x_1)^{k_{i1}}(x_2x_1)^{k_{i2}+1} x_1^{k_{i4}} (x_3x_2)^{l_{i4}+1} x_2^{k_{i5}+l_{i5}} x_3^{l_{i6}}. \end{aligned}$$

Ze względu na $a \in P_1$ obraz elementu a w algebrze $K[M_3]/P_1 \cong K[M_{3,1}]$ jest równy zeru. Ponieważ elementy monoidu $M_{3,1}$ wypisane w Lemacie 3.1.1 stanowią bazę liniową algebry

$K[M_{3,1}]$, to powyższa równość implikuje $\lambda_i = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Tym samym $a = 0$ w $K[M_3]$, co kończy dowód. □

Propozycja 3.1.4 gwarantuje, że $K[M_3]$ jest produktem podprostym algebr $K[M_{3,1}]$ oraz $K[M_{3,2}]$, w szczególności monoid plaktyczny M_3 zanurza się w monoidzie $M_{3,1} \times M_{3,2}$. Fakt ten będzie dla nas użyteczny w dalszej części pracy dotyczącej tożsamości półgrupowych spełnianych przez M_3 (patrz podrozdział 4.2).

Ponadto ideały pierwsze algebry $K[M_3]$ nie przecinające M_3 prowadzą do ciekawej (oraz jak się wydaje nowej) klasy monoidów prostych.

Propozycja 3.1.5. *Niech P będzie ideałem pierwszym algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad ciałem K spełniającym $P \cap M_3 = \varnothing$. Niech ponadto M_P będzie obrazem monoidu M_3 w algebrze $K[M_3]/P$.*

(1) *Obraz elementu $z = x_3x_2x_1 \in M_3$ w monoidzie M_P jest centralny i regularny, zaś monoid $M_P\langle z\rangle^{-1}$ jest prosty.*

(2) *Jeśli P_1 oraz P_2 są minimalnymi ideałami pierwszymi algebry $K[M_3]$ zdefiniowanymi w Twierdzeniu 3.1.3, to $M_{P_1} \cong M_{3,1}$ oraz $M_{P_2} \cong M_{3,2}$. Ponadto monoidy $M_{3,1}\langle z\rangle^{-1}$ oraz $M_{3,2}\langle z\rangle^{-1}$ są antyizomorficzne.*

(3) *Grupa jedności $\mathcal{U}(M_{3,1}\langle z\rangle^{-1})$ monoidu $M_{3,1}\langle z\rangle^{-1}$ jest grupą cykliczną $\langle z, z^{-1}\rangle$.*

Dowód. Dzięki $P \cap M_3 = \varnothing$ i Propozycji 2.1.6 wiemy, że z jest niezerowym elementem centralnym i regularnym w $K[M_3]/P$, w szczególności także w M_P. Ponadto wykorzystując Propozycję 2.1.5 nietrudno sprawdzić, że gdy $w \in M_3$, to istnieją $x, y \in M_3$ spełniające $xwy \in \langle z\rangle$, zatem $M_P\langle z\rangle^{-1}$ jest monoidem prostym. To kończy dowód części (1).

Oczywiście mamy izomorfizm $M_{P_1} \cong M_{3,1}$ oraz $M_{P_2} \cong M_{3,2}$. Nietrudno też sprawdzić, że $M_{3,1}\langle z\rangle^{-1} \cong \mathbb{Z} \times M'_{3,1}$ oraz $M_{3,2}\langle z\rangle^{-1} \cong \mathbb{Z} \times M'_{3,2}$. Pozostaje dodać, że inwolucja ψ z Propozycji 2.1.10 (dla $n = 3$) indukuje antyizomorfizm pomiędzy $M'_{3,1}$ oraz $M'_{3,2}$. Kończy to dowód części (2).

Oczywiście mamy $\langle z, z^{-1}\rangle \subseteq \mathcal{U}(M_{3,1}\langle z\rangle^{-1})$. Dla dowodu inkluzji przeciwnej zauważmy najpierw, że dzięki Lematowi 3.1.1 dowolny element $w \in M_{3,1}\langle z\rangle^{-1}$ da się jednoznacznie zapisać w postaci

$$w = (x_3x_2x_1)^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}x_1^{k_3}(x_3x_2)^{k_4}x_2^{k_5}x_3^{k_6},$$

gdzie $k_1 \in \mathbb{Z}$ oraz $k_i \geq 0$ dla $i \geq 2$. Jeśli teraz $v \in M_{3,1}\langle z\rangle^{-1}$, to nietrudno sprawdzić, że wykładnik przy x_3x_2 w postaci kanonicznej elementu vw jest $\geq k_4$, w szczególności gdy element w jest odwracalny, to $k_4 = 0$. Podobnie wykładnik przy x_2x_1 w postaci kanonicznej elementu wv jest $\geq k_2$, w szczególności gdy element w jest odwracalny, to koniecznie $k_2 = 0$. Analogicznie można sprawdzić, że gdy $w \in \mathcal{U}(M_{3,1}\langle z\rangle^{-1})$, to również $k_3 = k_5 = k_6 = 0$, czyli $w \in \langle z, z^{-1}\rangle$. □

3.2 Moduły proste i spektrum prymitywne

Aby wyznaczyć wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad algebraicznie domkniętym i nieprzeliczalnym ciałem K zacznijmy od opisu reprezentacji skończonego wymiaru. Okazuje się, że wszystkie takie reprezentacje są jednowymiarowe.

Propozycja 3.2.1. *Niech $\rho\colon K[M_3] \to \mathcal{M}_n(K)$ będzie reprezentacją nieprzywiedlną algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi* 3 *nad algebraicznie domkniętym ciałem K. Wtedy $n = 1$.*

Dowód. Jeśli $\rho(x_3x_2x_1) \neq 0$, to ten sam argument co w Propozycji 2.2.4 zapewnia, że macierze $\rho(x_1), \rho(x_2), \rho(x_3)$ są odwracalne. Wykorzystując teraz relację $x_1x_2x_1 = x_2x_1x_1$ zachodzącą w M_3 otrzymujemy

$$\rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x_1) = \rho(x_2)\rho(x_1)\rho(x_1).$$

W tej sytuacji odwracalność macierzy $\rho(x_1)$ implikuje $\rho(x_1)\rho(x_2) = \rho(x_2)\rho(x_1)$. Podobnie stosując inne relacje plaktyczne sprawdzamy, że macierze $\rho(x_1), \rho(x_2), \rho(x_3)$ komutują, czyli algebra $\rho(K[M_3])$ jest przemienna. To gwarantuje, że $n = 1$.

Jeśli natomiast $\rho(x_3x_2x_1) = 0$, to można sprawdzić (patrz dowód Twierdzenia 3.2.3), że wtedy $\rho(x_1) = 0$ lub $\rho(x_2) = 0$ lub $\rho(x_3) = 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\rho(x_3) = 0$. Gdy $\rho(x_2x_1) = 0$, to $\rho(x_1) = 0$ lub $\rho(x_2) = 0$ (patrz dowód Twierdzenia 3.2.3). W tej sytuacji algebra $\rho(K[M_3])$ jest przemienna i znów musi być $n = 1$. Jeśli natomiast $\rho(x_2x_1) \neq 0$, to macierze $\rho(x_1)$ oraz $\rho(x_2)$ są odwracalne, gdyż macierz $\rho(x_2x_1)$ jest centralna w algebrze prostej $\rho(K[M_3])$. Podobnie jak poprzednio wymusza to przemienność algebry $\rho(K[M_3])$ i w konsekwencji zapewnia, że $n = 1$. □

W pracy [9] wykazano, że algebra plaktyczna $K[M_3]$ jest półprymitywna. Informacja ta oraz Propozycja 3.2.1 prowadzą do wniosku, że gdy ciało K jest algebraicznie domknięte i nieprzeliczalne, to algebra $K[M_3]$ posiada reprezentacje nieprzywiedlne nieskończonego wymiaru. Naszym najbliższym celem jest opis tych reprezentacji.

Wprowadźmy wcześniej pewne uogólnienie inwolucji ψ z Propozycji 2.1.10 (dla $n = 3$).

Propozycja 3.2.2. *Niech $K[M_3]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 3 nad ciałem K. Wtedy dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$ istnieje antymonomorfizm $\psi_\lambda \colon K[M_3] \to K[M_3]$ spełniający*

$$\psi_\lambda(x_1) = \lambda^{-1} x_3 x_2, \qquad \psi_\lambda(x_2) = x_3 x_1, \qquad \psi_\lambda(x_3) = x_2 x_1,$$

który indukuje inwolucję ψ_λ^* algebry $K[M_3]/(x_3x_2x_1 - \lambda)$.

Dowód. Rozumowanie podobne do tego z dowodu Propozycji 2.1.9 gwarantuje, że istnieje antyhomomorfizm $\psi_\lambda \colon K[M_3] \to K[M_3]$ o zadanych w tezie wartościach na generatorach x_1, x_2, x_3. Ponadto mamy

$$\psi_\lambda(\psi_\lambda(x_1)) = \psi_\lambda(\lambda^{-1}x_3x_2) = \lambda^{-1}\psi_\lambda(x_2)\psi_\lambda(x_3) = \lambda^{-1}x_3x_1x_2x_1 = \lambda^{-1}(x_3x_2x_1)x_1.$$

Podobnie uzyskujemy $\psi_\lambda(\psi_\lambda(x_i)) = \lambda^{-1}(x_3x_2x_1)x_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Uwzględniając regularność elementu $x_3x_2x_1$ w $K[M_3]$ stwierdzamy, że antyhomomorfizm ψ_λ jest injektywny. Dodatkowo

$$\psi_\lambda(x_3x_2x_1) = \psi_\lambda(x_1)\psi_\lambda(x_2)\psi_\lambda(x_3) = \lambda^{-1}x_3x_2x_3x_1x_2x_1 = \lambda^{-1}(x_3x_2x_1)^2.$$

To oznacza, że ψ_λ indukuje antyendomorfizm ψ_λ^* algebry $K[M_3]/(x_3x_2x_1 - \lambda)$ spełniający $\psi_\lambda^*(\psi_\lambda^*(x_i)) = x_i$ dla $i = 1, 2, 3$, zatem ψ_λ^* jest inwolucją. □

Ponieważ mamy $K[M_3]/(x_3x_2x_1 - 1) \cong K[M_3']$, to inwolucja ψ z Propozycji 2.1.10 (dla $n = 3$) jest szczególnym przypadkiem inwolucji ψ_λ^*, gdyż $\psi = \psi_\lambda^*$ dla $\lambda = 1$.

Zanim przejdziemy do pełnego opisu ideałów prymitywnych algebry plaktycznej $K[M_3]$ zauważmy, że istnienie inwolucji w $K[M_3]$ oraz w pewnych jej obrazach homomorficznych ma duże znaczenie dla struktury spektrum prymitywnego tej algebry. Mówiąc dokładniej, inwolucja ϕ z Propozycji 2.1.9 (dla $n = 3$) zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy ideałami lewostronnie prymitywnymi algebry $K[M_3]$ i jej ideałami prawostronnie prymitywnymi. Analogicznie inwolucja ψ_λ^* z Propozycji 3.2.2 (dla $0 \neq \lambda \in K$) gwarantuje istnienie wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy lewostronnie i prawostronnie prymitywnymi ideałami algebry $K[M_3]$ zawierającymi element centralny $x_3x_2x_1 - \lambda$.

Niech P będzie lewostronnie lub prawostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]$ nad algebraicznie domkniętym oraz nieprzeliczalnym ciałem K. Ponieważ obraz elementu $x_3x_2x_1 \in M_3$ w algebrze $K[M_3]/P$ jest centralny, to Wniosek 1.3.5 gwarantuje istnienie takiego $\lambda \in K$, że $x_3x_2x_1 - \lambda \in P$.

Zacznijmy od przypadku $\lambda = 0$, tzn. $x_3x_2x_1 \in P$.

Twierdzenie 3.2.3. *Niech P będzie lewostronnie lub prawostronnie prymitywnym ideałem algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad algebraicznie domkniętym i nieprzeliczalnym ciałem K. Jeśli $x_3x_2x_1 \in P$, to P jest jednym z ideałów postaci:*

(1) $(x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2, x_3 - \lambda_3)$ *dla pewnych* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ *spełniających* $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$,

(2) $(x_1, x_3x_2 - \lambda)$ *lub* $(x_2, x_3x_1 - \lambda)$ *lub* $(x_3, x_2x_1 - \lambda)$ *dla pewnego* $0 \neq \lambda \in K$.

Ponadto dowolny z tych ideałów jest lewostronnie i prawostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]$.

Dowód. Ponieważ $x_3x_2x_1 \in P$, to dzięki Propozycji 2.1.5 mamy $x_3x_2K[M_3]x_1 \subseteq P$. Stąd wniosek, że $x_3x_2 \in P$ lub $x_1 \in P$ (patrz Propozycja 1.3.3). W pierwszym przypadku, używając postaci kanonicznej (3.1) elementów monoidu M_3, otrzymujemy $x_3K[M_3]x_2 \subseteq P$ i w konsekwencji $x_3 \in P$ lub $x_2 \in P$. Istotnie, gdy

$$w = (x_3x_2x_1)^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}(x_3x_1)^{k_3}x_1^{k_4}x_2^{k_5}x_3^{k_6} \in M_3$$

dla pewnych $k_i \geq 0$ (wystarczy rozważyć w tej postaci), to $k_1 > 0$ lub $k_2 > 0$ lub $k_6 > 0$ implikuje $x_3wx_2 \in P$. Załóżmy więc, że $k_1 = k_2 = k_6 = 0$. W tej sytuacji, używając relacji $x_3x_1x_1 = x_1x_3x_1$ oraz $x_3x_1x_2 = x_1x_3x_2$, dostajemy

$$x_3wx_2 = x_3(x_3x_1)^{k_3}x_1^{k_4}x_2^{k_5}x_2 = (x_3x_1)^{k_3}x_3x_1^{k_4}x_2^{k_5+1} = (x_3x_1)^{k_3}x_1^{k_4}x_3x_2^{k_5+1} \in P.$$

Ostatecznie mamy $x_1 \in P$ lub $x_2 \in P$ lub $x_3 \in P$. Załóżmy, że $x_3 \in P$ (pozostałe przypadki rozważamy analogicznie). Wtedy $P/(x_3)$ jest lewostronnie lub prawostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]/(x_3) \cong K[\langle x_1, x_2\rangle] \cong K[M_2]$. W tej sytuacji pozostaje powołać się na Twierdzenie 2.2.2 aby stwierdzić, że $P = (x_3, x_2x_1 - \lambda)$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$ lub $P = (x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2, x_3)$ dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. □

Przejdźmy do sytuacji, w której ideał lewostronnie lub prawostronnie prymitywny P algebry $K[M_3]$ zawiera element centralny $x_3x_2x_1 - \lambda$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$. Dodatkowo dzięki Twierdzeniu 3.1.3 wiemy, że $P_1 \subseteq P$ lub $P_2 \subseteq P$.

Skonstruujmy teraz rodziny prostych lewostronnych $K[M_3]$-modułów o anihilatorach tego typu. Dodajmy, że moduły te mogą być traktowane jako uogólnienie wiernego i prostego modułu nad algebrą bicykliczną (patrz dyskusja poprzedzająca Propozycję 1.6.10).

Propozycja 3.2.4. *Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K o przeliczalnej bazie $\{e_{ij} : i, j \geq 0\}$. Niech działanie $x_1, x_2, x_3 \in M_3$ w V będzie określone formułami*

$$x_1 e_{ij} = e_{i,j+1}, \qquad x_2 e_{ij} = \begin{cases} \mu e_{ij}, & \text{gdy } j = 0, \\ e_{i+1,j-1}, & \text{gdy } j > 0, \end{cases} \qquad x_3 e_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i = 0, \\ \lambda e_{i-1,j} & \text{gdy } i > 0, \end{cases}$$

gdzie $\lambda, \mu \in K$ oraz $\lambda \neq 0$. Wtedy powyższe działanie zadaje na V strukturę prostego lewostronnego $K[M_3]$-modułu. Ponadto gdy P jest anihilatorem $K[M_3]$-modułu V, to

$$P = (x_3x_1 - x_1x_3, (x_2 - \mu)(x_1x_3x_2 - \lambda) + \mu(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3), x_3x_2x_1 - \lambda).$$

Dowód. Nietrudno sprawdzić, że określone powyżej działanie respektuje relacje plaktyczne, zatem zadaje ono na V strukturę lewostronnego $K[M_3]$-modułu. Ponadto dla $i, j \geq 0$ mamy $e_{ij} = (x_2x_1)^i x_1^j e_{00}$, zatem $V = K[M_3]e_{00}$. Aby wykazać prostotę modułu V wystarczy więc udowodnić, że dla dowolnego $0 \neq v \in V$ zachodzi $e_{00} \in K[M]v$. Niech zatem $0 \neq v \in V$. Ponieważ $x_3^{t+1}v = 0$ oraz $x_3^t v \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$, to zastępując v elementem $x_3^t v$ możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $x_3 v = 0$. W tej sytuacji łatwo się przekonać, że musi być $v = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_{0j}$ dla pewnych $\lambda_j \in K$, gdzie $\lambda_n \neq 0$. Pozostaje teraz zauważyć, że mamy $e_{00} = (\lambda^n \lambda_n)^{-1}(x_3x_2)^n v \in K[M]v$.

Przejdźmy do ostatniej części tezy. Prosty rachunek pokazuje, że $x_3x_1 - x_1x_3 \in P$, $(x_2 - \mu)(x_1x_3x_2 - \lambda) + \mu(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3) \in P$ oraz $x_3x_2x_1 - \lambda \in P$. To dowodzi jednej inkluzji. Aby wykazać inkluzję przeciwną zauważmy, że

$$\text{gdy } a \in K[\langle x_2x_1, x_1 \rangle] \text{ spełnia } ae_{00} = 0, \text{ to } a = 0. \tag{3.8}$$

Istotnie, zapisując element a w postaci $a = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij}(x_2x_1)^i x_1^j$, gdzie $\lambda_{ij} \in K$, uzyskujemy

$$0 = ae_{00} = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij}(x_2x_1)^i x_1^j e_{00} = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij} e_{ij},$$

zatem $\lambda_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j = 0, \ldots, n$. Oznacza to, że $a = 0$, co dowodzi (3.8). Ponadto

$$\text{gdy } b \in K[\langle x_1, x_2 \rangle] \text{ spełnia } be_{0j} = 0 \text{ dla wszystkich } j \geq 0, \text{ to } b = 0. \tag{3.9}$$

Rzeczywiście, niech $b = \sum_{i=0}^{n} b_i x_2^i$, gdzie $b_i \in K[\langle x_2x_1, x_1 \rangle]$. Wybierzmy $0 \leq k \leq n$ oraz przypuśćmy, że $b_i = 0$ dla $i < k$ (gdy $k = 0$, to warunek ten jest trywialnie spełniony). Ponieważ dla $i \geq k$ mamy

$$x_2^i e_{0k} = x_2^i x_1^k e_{00} = (x_2x_1)^k x_2^{i-k} e_{00} = \mu^{i-k}(x_2x_1)^k e_{00},$$

to stąd

$$0 = be_{0k} = \sum_{i=k}^{n} b_i x_2^i e_{0k} = (x_2x_1)^k \left(\sum_{i=k}^{n} \mu^{i-k} b_i \right) e_{00}.$$

Dzięki (3.8) mamy więc $(x_2x_1)^k \sum_{i=k}^{n} \mu^{i-k} b_i = 0$, co implikuje

$$\sum_{i=k}^{n} \mu^{i-k} b_i = 0, \tag{3.10}$$

gdyż x_2x_1 jest elementem regularnym algebry $K[\langle x_1, x_2 \rangle] \cong K[M_2]$. Gdy $k = n$, to równość (3.10) bezpośrednio daje $b_k = 0$. Możemy więc założyć, że $k < n$. Następnie wykorzystując

$$x_2^i e_{0,k+1} = x_2^i x_1^{k+1} e_{00} = \begin{cases} (x_2x_1)^k x_1 e_{00}, & \text{gdy } i = k, \\ \mu^{i-k-1} (x_2x_1)^{k+1} e_{00}, & \text{gdy } i > k \end{cases}$$

otrzymujemy

$$0 = \mu b e_{0,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \mu b_i x_2^i e_{0,k+1} = (x_2x_1)^k \left(\mu b_k x_1 + \sum_{i=k+1}^{n} \mu^{i-k} b_i x_2 x_1 \right) e_{00}.$$

Ponowne zastosowanie (3.8), po uwzględnieniu regularności elementu x_2x_1 w $K[\langle x_1, x_2 \rangle]$, prowadzi do $\mu b_k x_1 + \sum_{i=k+1}^{n} \mu^{i-k} b_i x_2 x_1 = 0$, co w połączeniu z (3.10) implikuje

$$\mu b_k x_1 = - \sum_{i=k+1}^{n} \mu^{i-k} b_i x_2 x_1 = b_k x_2 x_1.$$

W tej sytuacji Lemat 3.1.1 zapewnia, że $b_k = 0$. Pozostaje zauważyć, że indukcja względem k daje $b = 0$, dowodząc tym samym (3.9).

Rozważmy teraz element $c \in P$ i przypuśćmy, że jego obraz (oznaczany dalej przez c) w algebrze

$$R = K[M_3]/(x_3x_1 - x_1x_3, (x_2 - \mu)(x_1x_3x_2 - \lambda) + \mu(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3), x_3x_2x_1 - \lambda)$$

jest niezerowy. Wykorzystując fakt, że zbiór

$$B = \{x_1^{k_1}(x_2x_1)^{k_2} x_2^{k_3} x_3^{k_4}, x_1^{k_1} x_2^{k_2} (x_3x_2)^{k_3} x_3^{k_4} : k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0\}$$

stanowi bazę liniową algebry R nad ciałem K (dowód tego technicznego rezultatu zostanie zaprezentowany w Lemacie 3.2.5) możemy zapisać jednoznacznie element $c \in R$ w postaci $c = \sum_{i,j=0}^{m} a_{ij} (x_2x_1)^i x_3^j + \sum_{i=1,\, j=0}^{m} b_{ij} (x_3x_2)^i x_3^j$, gdzie a_{ij}, b_{ij} są kombinacjami K-liniowymi elementów $x_1^k x_2^l$ dla $k, l \geq 0$. Zauważmy teraz, że gdy $a_{ij} \neq 0$ lub $b_{ij} \neq 0$ dla pewnego $i \geq 0$ oraz $j \geq 2$, to element

$$cx_2x_1 = \sum_{i=0}^{m} a_{i0}(x_2x_1)^{i+1} + \lambda \sum_{i=0,\, j=1}^{m} a_{ij}(x_2x_1)^i x_3^{j-1} + \lambda \sum_{i=1}^{m} b_{i0}x_2(x_3x_2)^{i-1} + \lambda \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(x_3x_2)^i x_3^{j-1}$$

jest niezerowy w R. Ponadto maksymalny wykładnik przy x_3 pojawiający się w elementach $\mathrm{Supp}(cx_2x_1)$ jest mniejszy niż maksymalny wykładnik przy x_3 pojawiający się w elementach $\mathrm{Supp}(c)$. Analogicznie gdy $b_{ij} \neq 0$ dla pewnego $i \geq 2$ oraz $j \geq 0$, to element

$$cx_1 = \sum_{i,j=0}^{m} a_{ij}x_1(x_2x_1)^i x_3^j + \lambda \sum_{i=1,\, j=0}^{m} b_{ij}(x_3x_2)^{i-1}x_3^j$$

jest niezerowy w R oraz maksymalny wykładnik przy x_3x_2 pojawiający się w elementach $\mathrm{Supp}(cx_1)$ jest mniejszy niż maksymalny wykładnik przy x_3x_2 pojawiający się w elementach $\mathrm{Supp}(c)$. Stosując obie procedury (polegające na zamianie elementu c na cx_2x_1 lub na cx_1), skończenie wiele razy, możemy założyć, że element c jest następującej postaci

$$c = c_0 + c_1x_3 + c_0'x_3x_2 + c_1'x_3x_2x_3,$$

gdzie $c_0, c_1 \in K[\langle x_1, x_2\rangle]$, zaś $c_0', c_1' \in R$ są kombinacjami K-liniowymi elementów $x_1^k x_2^l$ dla $k, l \geq 0$. Ponieważ $c \in R$ spełnia $c(x_2x_1)^{t+1} \in K[\langle x_1, x_2\rangle]$ oraz $c(x_2x_1)^t \notin K[\langle x_1, x_2\rangle]$ dla pewnego $t \geq 0$, to dzięki (3.9) musi być $c(x_2x_1)^{t+1} = 0$ w R. Zamieniając więc c na element $c(x_2x_1)^t \neq 0$ możemy założyć, że $t = 0$, tzn.

$$cx_2x_1 = c_0x_2x_1 + \lambda c_1 + \lambda c_0'x_2 + \lambda c_1'x_3x_2 = 0$$

w R. Równość ta zapewnia, że $c_1' = 0$ w R. W tej sytuacji $c = c_0 + c_1x_3 + c_0'x_3x_2$. Rozważmy teraz element

$$cx_1 = c_0x_1 + c_1x_1x_3 + \lambda c_0'. \tag{3.11}$$

Przypuśćmy na moment, że $cx_1 \neq 0$. Zastępując wtedy c elementem cx_1 możemy przyjąć, że $c_0' = 0$. W takiej sytuacji $c = c_0 + c_1x_3$. Ponadto równość $cx_2x_1 = c_0x_2x_1 + \lambda c_1 = 0$ daje $\lambda c = c_0(\lambda - x_2x_1x_3)$. Uwzględniając $x_3e_{0j} = 0$ dla $j \geq 0$ uzyskujemy

$$0 = \lambda ce_{0j} = c_0(\lambda - x_2x_1x_3)e_{0j} = \lambda c_0e_{0j},$$

co w połączeniu z (3.9) gwarantuje, że $c_0 = 0$ i w konsekwencji $c = 0$ w R. Otrzymana sprzeczność implikuje, że musi być $cx_1 = 0$ w R, co wobec (3.11) daje $c_0x_1 + \lambda c_0' = 0$ w R. Ponieważ w R mamy też

$$0 = cx_2x_1 = c_0x_2x_1 + \lambda c_1 + \lambda c_0'x_2 = 0,$$

to łącząc ze sobą oba fakty uzyskujemy

$$\lambda c_0' = -c_0x_1, \qquad \lambda c_1 = -\lambda c_0'x_2 - c_0x_2x_1 = c_0(x_1x_2 - x_2x_1).$$

Stąd

$$\begin{aligned}\lambda c &= \lambda c_0 + \lambda c_1x_3 + \lambda c_0'x_3x_2\\ &= \lambda c_0 + c_0(x_1x_2 - x_2x_1)x_3 - c_0x_1x_3x_2\\ &= c_0(\lambda - x_1x_3x_2 + x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3).\end{aligned}$$

Dodatkowo

$$0 = \lambda ce_{00} = c_0(\lambda - x_1x_3x_2 + x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3)e_{00} = \lambda c_0e_{00},$$

ponieważ $x_3e_{00} = x_3x_2e_{00} = 0$. Gdy $c_0 = \sum_{i=0}^n d_ix_2^i$, gdzie $d_i \in K[\langle x_2x_1, x_1\rangle]$, to dzięki (3.8) równość

$$0 = c_0e_{00} = \sum_{i=0}^n d_ix_2^ie_{00} = \sum_{i=0}^n \mu^id_ie_{00}$$

implikuje $\sum_{i=0}^n \mu^id_i = 0$ w R. Dlatego $c_0 = \sum_{i=0}^n d_ix_2^i - \sum_{i=0}^n \mu^id_i = \sum_{i=1}^n d_i(x_2^i - \mu^i)$, a stąd $c_0 = d(x_2 - \mu)$ dla pewnego $d \in K[\langle x_1, x_2\rangle]$. Ostatecznie mamy w R następującą równość

$$\begin{aligned}\lambda c &= c_0(\lambda - x_1x_3x_2 + x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3)\\ &= d(x_2 - \mu)(\lambda - x_1x_3x_2 + x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3)\\ &= d((x_2 - \mu)(\lambda - x_1x_3x_2) - \mu(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3)) = 0,\end{aligned}$$

ponieważ $x_2(x_2x_1x_3 - x_1x_2x_3) = 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Wróćmy do dowodu występującego w Propozycji 3.2.4 faktu dotyczącego bazy liniowej B algebry R.

Lemat 3.2.5. *Niech $K[M_3]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 3 nad ciałem K. Niech*

$$R = K[M_3]/(x_3x_1 - x_1x_3, (x_2 - \mu)(x_1x_3x_2 - \lambda) + \mu(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3), x_3x_2x_1 - \lambda),$$

gdzie $\lambda, \mu \in K$ oraz $\mu \neq 0$. Wtedy zbiór

$$B = \{x_1^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}x_2^{k_3}x_3^{k_4}, x_1^{k_1}x_2^{k_2}(x_3x_2)^{k_3}x_3^{k_4} : k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0\}$$

jest bazą K-liniową algebry R.

Dowód. Dowód tego faktu oparty będzie o Diamond Lemma. Rozważmy więc porządek stopniowo-leksykograficzny w monoidzie wolnym nad zbiorem $\{x_1, x_2, x_3\}$ wyznaczony przez relacje $x_1 < x_2 < x_3$ (patrz Przykład 1.5.2). Niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ złożonym z par:

$$\begin{array}{llllll} (1) & (x_2x_1x_1, x_1x_2x_1), & (3) & (x_3x_2x_2, x_2x_3x_2), & (5) & (x_3x_1, x_1x_3), \\ (2) & (x_2x_2x_1, x_2x_1x_2), & (4) & (x_3x_3x_2, x_3x_2x_3), & (6) & (x_3x_2x_1, \lambda) \end{array}$$

oraz

$$(7) \quad (x_2x_1x_2^nx_3x_2, \lambda x_2^{n+1} + \mu^{n+1}(x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 - x_1x_2x_3) - \lambda\mu^{n+1})$$

dla $n \geq 0$. Oczywiście zdefiniowany wyżej porządek spełnia DCC i jest zgodny ze zbiorem redukcji S. Wykorzystując Lemat 3.1.1 nietrudno sprawdzić, że wypisane w tezie elementy, traktowane jako słowa monoidu wolnego, stanowią zbiór wszystkich słów zredukowanych względem S. Zauważmy także, że relacje pochodzące od par (1)–(6) oraz (7) dla $n = 0$ definiują algebrę R, zaś pozostałe relacje związane z parami typu (7) dla $n \geq 1$ są w niej spełnione, stąd zaś mamy $R \cong K\langle x_1, x_2, x_3\rangle/\mathcal{I}(S)$. Istotnie, używając indukcji względem n otrzymujemy w R następującą równość

$$\begin{aligned} x_2x_1x_2^{n+1}x_3x_2 &= x_2x_2x_1x_2^nx_3x_2 \\ &= \lambda x_2^{n+2} + \mu^{n+1}(x_2x_2x_1x_3 + x_2x_1x_3x_2 + x_2x_1x_2x_3) - \lambda\mu^{n+1}x_2 \\ &= \lambda x_2^{n+2} + \mu^{n+1}(x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2) \\ &= \lambda x_2^{n+2} + \mu^{n+2}(x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 - x_1x_2x_3) - \lambda\mu^{n+2}. \end{aligned}$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy więc sprawdzić, że wszystkie niejednoznaczności zbioru redukcji S są rozwiązywalne. Istnieje dokładnie 18 typów niejednoznaczności:

1. $(x_2x_2x_1)x_1 = x_2(x_2x_1x_1)$,
2. $(x_3x_2x_1)x_1 = x_3(x_2x_1x_1)$,
3. $(x_3x_2x_2)x_1 = x_3(x_2x_2x_1)$,
4. $(x_3x_3x_2)x_1 = x_3(x_3x_2x_1)$,
5. $(x_3x_3x_2)x_2 = x_3(x_3x_2x_2)$,
6. $(x_3x_2x_2)x_1x_1 = x_3x_2(x_2x_1x_1)$,
7. $(x_3x_2x_2)x_2x_1 = x_3x_2(x_2x_2x_1)$,

8. $(x_3x_3x_2)x_1x_1 = x_3x_3(x_2x_1x_1)$,

9. $(x_3x_3x_2)x_2x_1 = x_3x_3(x_2x_2x_1)$,

10. $(x_2x_1x_2^nx_3x_2)x_1 = x_2x_1x_2^n(x_3x_2x_1)$,

11. $(x_2x_1x_2^nx_3x_2)x_2 = x_2x_1x_2^n(x_3x_2x_2)$,

12. $(x_2x_2x_1)x_2^nx_3x_2 = x_2(x_2x_1x_2^nx_3x_2)$,

13. $(x_3x_2x_1)x_2^nx_3x_2 = x_3(x_2x_1x_2^nx_3x_2)$,

14. $(x_2x_1x_2^nx_3x_2)x_1x_1 = x_2x_1x_2^nx_3(x_2x_1x_1)$,

15. $(x_2x_1x_2^nx_3x_2)x_2x_1 = x_2x_1x_2^nx_3(x_2x_2x_1)$,

16. $(x_3x_2x_2)x_1x_2^nx_3x_2 = x_3x_2(x_2x_1x_2^nx_3x_2)$,

17. $(x_3x_3x_2)x_1x_2^nx_3x_2 = x_3x_3(x_2x_1x_2^nx_3x_2)$,

18. $(x_2x_1x_2^nx_3x_2)x_1x_2^mx_3x_2 = x_2x_1x_2^nx_3(x_2x_1x_2^mx_3x_2)$,

gdzie $n, m \geq 0$. Jeśli przez $\xrightarrow{(i)}$ oznaczymy redukcję algebry $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ stowarzyszoną z elementem zbioru S typu (i) (lub czasem wielokrotne jej złożenie), to przykładowo dla niejednoznaczności 6, 12 i 18 mamy odpowiednio:

6. $$(x_3x_2x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(3)} x_2x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(6)} \lambda x_2x_1,$$
$$x_3x_2(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_2x_1x_2x_1 \xrightarrow{(6)} \lambda x_2x_1,$$

12. $$\begin{aligned}(x_2x_2x_1)x_2^nx_3x_2 &\xrightarrow{(2)} x_2x_1x_2^{n+1}x_3x_2\\ &\xrightarrow{(7)} \lambda x_2^{n+2} + \mu^{n+2}(x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 - x_1x_2x_3) - \lambda\mu^{n+2},\\ x_2(x_2x_1x_2^nx_3x_2) &\xrightarrow{(7)} \lambda x_2^{n+2} + \mu^{n+1}(x_2x_2x_1x_3 + x_2x_1x_3x_2 - x_2x_1x_2x_3) - \lambda\mu^{n+1}x_2\\ &\xrightarrow{(2)} \lambda x_2^{n+2} + \mu^{n+1}(x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2)\\ &\xrightarrow{(7)} \lambda x_2^{n+2} + \mu^{n+2}(x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 - x_1x_2x_3) - \lambda\mu^{n+2},\end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned}(x_2x_1x_2^nx_3x_2)x_1x_2^mx_3x_2 &\xrightarrow{(7)} (\lambda x_2^{n+1} + \mu^{n+1}(x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 - x_1x_2x_3 - \lambda))x_1x_2^mx_3x_2\\ &\xrightarrow{(6)} (\lambda x_2^{n+1}x_1 + \mu^{n+1}(x_2x_1x_3x_1 - x_1x_2x_3x_1))x_2^mx_3x_2\\ &\xrightarrow{(5)} (\lambda x_2^{n+1}x_1 + \mu^{n+1}(x_2x_1x_1x_3 - x_1x_2x_1x_3))x_2^mx_3x_2\\ &\xrightarrow{(2)} \lambda x_2x_1x_2^{n+m}x_3x_2,\\ x_2x_1x_2^nx_3(x_2x_1x_2^mx_3x_2) &\xrightarrow{(7)} x_2x_1x_2^nx_3(\lambda x_2^{m+1} + \mu^{m+1}(x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 - x_1x_2x_3 - \lambda))\\ &\xrightarrow{(6)} x_2x_1x_2^n(\lambda x_3x_2^{m+1} + \mu^{m+1}(x_3x_1x_3x_2 - x_3x_1x_2x_3))\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(5)} x_2x_1x_2^n(\lambda x_3x_2^{m+1} + \mu^{m+1}(x_1x_3x_3x_2 - x_1x_3x_2x_3))$$
$$\xrightarrow{(4)} \lambda x_2x_1x_2^{n+m}x_3x_2.$$

Analogicznie można sprawdzić, że pozostałe niejednoznaczności są rozwiązywalne. □

Opiszmy jeszcze drugą rodzinę prostych lewostronnych $K[M_3]$-modułów o anihilatorach nie zawierających elementu $x_3x_2x_1 \in M_3$.

Propozycja 3.2.6. *Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K o przeliczalnej bazie $\{e_i : i \geq 0\}$. Niech działanie $x_1, x_2, x_3 \in M_3$ w V będzie określone formułami*

$$x_1e_i = \lambda e_i, \qquad x_2e_i = \mu e_{i+1}, \qquad x_3e_i = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i = 0, \\ \nu e_{i-1}, & \text{gdy } i > 0, \end{cases}$$

gdzie $0 \neq \lambda, \mu, \nu \in K$. Wtedy działanie to zadaje na V strukturę prostego lewostronnego $K[M_3]$-modułu. Ponadto gdy P jest anihilatorem $K[M_3]$-modułu V, to

$$P = (x_1 - \lambda, x_3x_2 - \mu\nu).$$

Dowód. Analogicznie jak w Propozycji 3.2.4 nietrudno się przekonać, że określone w tezie działanie respektuje relacje plaktyczne, zadając tym samym na V strukturę lewostronnego $K[M_3]$-modułu. Ponadto gdy $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \in V$, gdzie $\lambda_i \in K$ oraz $\lambda_n \neq 0$, to dla $i \geq 0$ mamy $e_i = (\lambda_n\mu^i\nu^n)^{-1}x_2^ix_3^nv$. Oznacza to, że $V = K[M_3]v$, czyli $K[M_3]$-moduł V jest prosty.

Prostym rachunkiem sprawdzamy, że $x_1 - \lambda \in P$ oraz $x_3x_2 - \mu\nu \in P$. Dla wykazania inkluzji przeciwnej rozważmy element $a \in P$ i przypuśćmy, że jego obraz (dalej oznaczany przez a) w algebrze

$$R = K[M_3]/(x_1 - \lambda, x_3x_2 - \mu\nu)$$

jest niezerowy. Wykorzystując fakt, że zbiór

$$B = \{x_2^{k_1}x_3^{k_2} : k_1, k_2 \geq 0\}$$

jest bazą algebry R nad K (dowód tego prostego faktu podany będzie w Lemacie 3.2.7) możemy zapisać jednoznacznie element $a \in R$ w postaci $a = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij}x_2^ix_3^j$ dla pewnych $\lambda_{ij} \in K$. Niemal identyczny argument jak w Propozycji 3.2.4 (użyty tam w celu zmniejszenia maksymalnych wykładników przy x_3 oraz x_3x_2 w elemencie c), oparty na prawostronnym mnożeniu elementu a przez x_2, pozwala założyć, że a jest postaci

$$a = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x_2^i + \sum_{i=0}^{n} \nu_i x_2^i x_3,$$

gdzie $\mu_i, \nu_i \in K$. Ponieważ $a \in R$ spełnia $ax_2 \in K[\langle x_2 \rangle]$, to łatwo wykazać, że musi być $ax_2 = 0$ w R. Istotnie, jeśli element $b = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_2^i \in R$, gdzie $\lambda_i \in K$ spełnia $be_0 = 0$, to

$$0 = be_0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_2^i e_0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mu^i e_i$$

i w konsekwencji $\lambda_i = 0$ dla wszystkich $i = 0, \ldots, n$. Wykorzystując to spostrzeżenie mamy

$$0 = ax_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x_2^{i+1} + \mu\nu \sum_{i=0}^{n} \nu_i x_2^i.$$

Ostatnia równość gwarantuje, że $\mu_n = \nu_0 = 0$ oraz $\mu_{i-1} + \mu\nu\nu_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Stąd zaś otrzymujemy $a = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_2^{i-1}(x_2x_3 - \mu\nu)$ i ostatecznie

$$0 = ae_0 = -\mu\nu \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_2^{i-1} e_0 = -\nu \sum_{i=1}^{n} \mu^i \nu_i e_{i-1},$$

gdyż $x_3e_0 = 0$. Uzyskana równość implikuje $\nu_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, co w połączeniu z $\mu_n = \nu_0 = 0$ oraz $\mu_{i-1} = -\mu\nu\nu_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$ daje ostatecznie $a = 0$ w R. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Wróćmy teraz do dowodu, występującego w Propozycji 3.2.6, faktu dotyczącego bazy liniowej B algebry R.

Lemat 3.2.7. *Niech $K[M_3]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 3 nad ciałem K. Niech*

$$R = K[M_3]/(x_1 - \lambda, x_3x_2 - \mu),$$

gdzie $0 \neq \lambda, \mu \in K$. Wtedy zbiór

$$B = \{x_2^{k_1} x_3^{k_2} : k_1, k_2 \geq 0\}$$

jest bazą K-liniową algebry R.

Dowód. Dowód tego faktu również oparty będzie o Diamond Lemma. Rozważmy ponownie porządek stopniowo-leksykograficzny w monoidzie wolnym nad zbiorem $\{x_1, x_2, x_3\}$ będący rozszerzeniem relacji $x_1 < x_2 < x_3$ (patrz Przykład 1.5.2). Niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ złożonym z dwóch par (x_1, λ) oraz (x_3x_2, μ). Oczywiście zdefiniowany wyżej porządek spełnia DCC i jest zgodny ze zbiorem redukcji S. Nietrudno też sprawdzić, że wypisane w tezie elementy, traktowane jako słowa monoidu wolnego, stanowią zbiór wszystkich słów zredukowanych względem S. Zauważmy w końcu, że po pierwsze relacje pochodzące od obu par definiują algebrę R, czyli $R \cong K\langle x_1, x_2, x_3 \rangle / \mathcal{I}(S)$, zaś po drugie, że nie istnieją niejednoznaczności związane ze zbiorem redukcji S. $\square$

Wykorzystując Propozycje 3.2.4 oraz 3.2.6 wykażemy jeden z głównych rezultatów tego podrozdziału.

Twierdzenie 3.2.8. *Niech P będzie lewostronnie lub prawostronnie prymitywnym ideałem algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad algebraicznie domkniętym i nieprzeliczalnym ciałem K. Jeśli $x_3x_2x_1 \notin P$, to P jest jednym z ideałów postaci:*

(1) $(x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2, x_3 - \lambda_3)$ *dla pewnych* $0 \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$,

(2) $(x_1 - \lambda_1, x_3x_2 - \mu)$ *lub* $(x_3 - \lambda_3, x_2x_1 - \mu)$ *dla pewnych* $0 \neq \lambda_1, \lambda_3, \mu \in K$,

(3) $(x_3x_1 - x_1x_3, x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2, x_3x_2x_1 - \lambda)$ *dla pewnego* $0 \neq \lambda \in K$,

(4) $(x_3x_1 - x_1x_3, (x_2 - \mu)(x_1x_3x_2 - \lambda) + \mu(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3), x_3x_2x_1 - \lambda)$ *dla pewnych* $0 \neq \lambda, \mu \in K$,

(5) $(x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2, (x_1x_3x_2 - \lambda)(x_3x_1 - \mu) + \mu(\lambda^{-1}x_2x_1x_3x_1x_3x_2 - x_2x_1x_3), x_3x_2x_1 - \lambda)$ *dla pewnych* $0 \neq \lambda, \mu \in K$.

Ponadto dowolny z tych ideałów jest lewostronnie i prawostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]$.

Dowód. Niech P będzie lewostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]$. Wtedy dzięki Wnioskowi 1.3.5 wiemy, że P zawiera element $x_3x_2x_1 - \lambda$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$. Ponadto P zawiera jeden z minimalnych ideałów pierwszych P_1 lub P_2 algebry $K[M_3]$. Zacznijmy od przypadku gdy $P_1 \subseteq P$.

Niech V będzie prostym lewostronnym $K[M_3]$-modułem o anihilatorze P. Gdy

$$x_3v \neq 0 \text{ dla dowolnego } 0 \neq v \in V, \tag{3.12}$$

to obraz x_3 w algebrze $K[M_3]/P$ jest elementem odwracalnym, zaś elementem odwrotnym do x_3 jest $\lambda^{-1}x_2x_1$. Stąd konkluzja, że element x_3 jest centralny w $K[M_3]/P$. W tej sytuacji Wniosek 1.3.5 gwarantuje, że $x_3 - \lambda_3 \in P$ dla pewngo $0 \neq \lambda_3 \in K$. To zaś implikuje, że $x_2x_1 - \mu \in P$ dla $0 \neq \mu \in K$ spełniającego $\lambda_3\mu = \lambda$ oraz $P/(x_3 - \lambda, x_2x_1 - \mu)$ jest lewostronnie prymitywnym ideałem algebry

$$K[M_3]/(x_3 - \lambda_3, x_2x_1 - \mu) \cong K[\langle x_1, x_2\rangle]/(x_2x_1 - \mu).$$

Ponieważ $K[\langle x_1, x_2\rangle]/(x_2x_1 - \mu) \cong K[\mathbb{B}]$ (patrz dyskusja przed Propozycją 1.6.4), to dzięki Propozycji 1.6.12 mamy więc $P = (x_3 - \lambda_3, x_2x_1 - \mu)$ lub $P = (x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2, x_3 - \lambda_3)$ dla pewnych $0 \neq \lambda_1, \lambda_2 \in K$ spełniających $\lambda_1\lambda_2 = \mu$.

W przeciwieństwie do (3.12) załóżmy teraz, że $x_3v = 0$ dla pewnego $0 \neq v \in V$. Jeśli $(x_3x_2)^{t+1}v = 0$ oraz $(x_3x_2)^t v \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$, to zamieniając v na $(x_3x_2)^t v$ możemy założyć, że

$$x_3v = x_3x_2v = 0 \text{ dla pewnego } 0 \neq v \in V. \tag{3.13}$$

Zakładając (3.13) rozważmy przypadek, gdy $x_2^{t+1}v = 0$ oraz $x_2^t v \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$. Zastępując wtedy v elementem $x_2^t v$ redukujemy do sytuacji, w której

$$x_2v = x_3v = 0 \text{ dla pewnego } 0 \neq v \in V. \tag{3.14}$$

W tym przypadku Lemat 3.1.1 implikuje, że przestrzeń V jest rozpinana przez elementy zbioru $\{(x_2x_1)^i x_1^j v : i, j \geq 0\}$. Dodatkowo nie jest trudno sprawdzić, że elementy tego zbioru są liniowo niezależne nad ciałem K. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieje nietrywialna zależność liniowa $\sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij}(x_2x_1)^i x_1^j v = 0$, gdzie $\lambda_{ij} \in K$. Zdefiniujmy teraz $i_0 = \max\{i : \lambda_{ij} \neq 0 \text{ dla pewnego } j\}$ oraz $j_0 = \max\{j : \lambda_{i_0 j} \neq 0\}$. Wtedy

$$0 = (x_3x_2)^{j_0} x_3^{i_0} \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij}(x_2x_1)^i x_1^j v = \sum_{j=0}^{n} \lambda^{i_0} \lambda_{i_0 j}(x_3x_2)^{j_0} x_1^j v = \lambda^{i_0+j_0} \lambda_{i_0 j_0} v,$$

zatem $\lambda_{i_0 j_0} = 0$, sprzeczność. Dlatego V jest jednym z $K[M_3]$-modułów skonstruowanych w Propozycji 3.2.4 o anihilatorze $P = (x_3x_1 - x_1x_3, x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2, x_3x_2x_1 - \lambda)$.

Zajmijmy się teraz sytuacją, w której

$$x_3v = x_3x_2v = 0 \text{ dla pewnego } 0 \neq v \in V \text{ oraz } x_2^t v \neq 0 \text{ dla dowolnego } t \geq 0.$$

Ponieważ $V = K[M_3]x_2v$, to $ax_2v = v$ dla pewnego $a \in K[M_3]$. Ponadto uwzględniając równość $x_3v = x_3x_2v = 0$ oraz Lemat 3.1.1 możemy założyć, że $a \in K[\langle x_1, x_2\rangle]$. Stąd zaś otrzymujemy $x_2^t a \in K[\langle x_2x_1, x_2\rangle]$ dla pewnego $t \geq 1$. Ponieważ $x_2^t v \neq 0$, to również $x_2^t a \neq 0$. Zapisując element $x_2^t a$ w postaci $x_2^t a = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{ij}(x_2x_1)^i x_2^j$ dla pewnych $\lambda_{ij} \in K$ oraz definiując $i_0 = \max\{i : \lambda_{ij} \neq 0 \text{ dla pewnego } j\}$ uzyskujemy

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda^{i_0} \lambda_{i_0 j} x_2^{j+1} v = x_3^{i_0} x_2^t a x_2 v = x_3^{i_0} x_2^t v = \begin{cases} x_2^t v, & \text{gdy } i_0 = 0, \\ 0, & \text{gdy } i_0 > 0. \end{cases}$$

Równość ta daje nietrywialną zależność liniową elementów zbioru $\{x_2^j v : j \geq 0\}$ nad K. Istotnie, jeśli $i_0 > 0$ lub $t > n+1$, to nie ma czego dowodzić. Gdy zaś $i_0 = 0$ oraz $t \leq n+1$, to koniecznie $\lambda_{0j} \neq 0$ dla pewnego $j \neq t-1$. Rzeczywiście, gdyby wszystkie λ_{0j} oprócz $\lambda_{0,t-1}$ były równe zeru, to otrzymalibyśmy $x_2^t a = \lambda_{0,t-1} x_2^{t-1}$, a stąd już $\deg(a) + t = t - 1$, sprzeczność. Obserwacja ta implikuje, że element x_2 działa jako endomorfizm na skończenie wymiarowej przestrzeni K-liniowej $W = K[\langle x_2\rangle]v \subseteq V$. Ponieważ ciało K jest algebraicznie domknięte, to endomorfizm wyznaczony przez x_2 posiada wartość własną $\mu \in K$. Istnieje więc wektor $0 \neq w \in W$ spełniający $x_2 w = \mu w$. Ponieważ $x_3 v = x_3 x_2 v = 0$, to również $x_3 w = 0$ oraz $x_3 x_2 w = 0$. Gdy $x_2 w = 0$, to wracamy do przypadku (3.14). Możemy więc założyć, że $\mu \neq 0$. W tej sytuacji Lemat 3.1.1 gwarantuje, że przestrzeń V jest rozpinana przez elementy zbioru $\{(x_2x_1)^i x_1^j w : i, j \geq 0\}$. Dodatkowo można sprawdzić (podobną metodą do tej zastosowanej poprzednio), że elementy te są liniowo niezależne nad K. Stąd wniosek, że V jest jednym z modułów skonstruowanych w Propozycji 3.2.4 o anihilatorze $P = (x_3x_1 - x_1x_3, (x_2 - \mu)(x_1x_3x_2 - \lambda) + \mu(x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3), x_3x_2x_1 - \lambda)$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym

$$x_3 v = 0 \text{ dla pewnego } 0 \neq v \in V \text{ oraz } (x_3x_2)^t v \neq 0 \text{ dla dowolnego } t \geq 0.$$

Ponieważ $V = K[M_3]x_3x_2v$, to stąd $ax_3x_2v = v$ dla pewnego $a \in K[M_3]$. Uwzględniając równość $x_3v = 0$ oraz Lemat 3.1.1 możemy założyć, że $(x_3x_2)^t a \in K[\langle x_3x_2, x_2\rangle]$ dla pewnego $t \geq 1$. Ze względu na $(x_3x_2)^t v \neq 0$ musi być również $(x_3x_2)^t a \neq 0$. Zapisując teraz element $(x_3x_2)^t a$ w postaci $(x_3x_2)^t a = \sum_{i,j=0}^n \lambda_{ij}(x_3x_2)^i x_2^j$ dla pewnych $\lambda_{ij} \in K$ oraz definiując $j_0 = \max\{j : \lambda_{ij} \neq 0 \text{ dla pewnego } i\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \lambda_{ij_0}(x_3x_2)^{i+j_0+1}v &= x_3^{j_0}(x_3x_2)^t a x_3x_2 v \\ &= x_3^{j_0}(x_3x_2)^t v = \begin{cases}(x_3x_2)^t v, & \text{gdy } j_0 = 0,\\ 0, & \text{gdy } j_0 > 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Dokładnie tak jak poprzednio można wykazać, że równanie to gwarantuje liniową zależność elementów zbioru $\{(x_3x_2)^i v : i \geq 0\}$ nad K. To implikuje, że x_3x_2 działa jako endomorfizm na skończenie wymiarowej przestrzeni K-liniowej $W = K[\langle x_3x_2\rangle]v \subseteq V$. Stąd wniosek, że endomorfizm wyznaczony przez element x_3x_2 posiada wartość własną $\mu \in K$. Istnieje więc wektor $0 \neq w \in W$ spełniający $x_3x_2w = \mu w$. Ponieważ $x_3v = 0$, to również $x_3w = 0$, gdyż $w \in W$. Jeśli teraz $x_3x_2w = 0$, to wracamy do przypadku (3.13). Załóżmy więc, że $\mu \neq 0$. Wtedy dla $u = \mu x_1 w - \lambda w$ mamy $x_3u = 0$ oraz $x_3x_2u = 0$. Gdy $u \neq 0$, to znów otrzymujemy przypadek (3.13). Natomiast gdy $u = 0$, to $x_3w = 0$, $x_3x_2w = \mu w$ oraz $x_1w = \lambda_1 w$, gdzie $\lambda_1 \in K$ spełnia $\lambda_1\mu = \lambda$. W tej sytuacji Lemat 3.1.1 zapewnia, że przestrzeń V jest rozpinana przez elementy zbioru $\{(x_2x_1)^i w : i \geq 0\}$, gdyż $x_2x_1w = \lambda_1 x_2 w$. Ponadto nietrudno się przekonać, że elementy te są liniowo niezależne nad ciałem K. Konkludujemy więc, że V jest jednym z $K[M_3]$-modułów skonstruowanych w Propozycji 3.2.6 o anihilatorze $P = (x_1 - \lambda_1, x_3x_2 - \mu)$.

Rozważmy teraz przypadek gdy P jest lewostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]$ zawierającym P_2 oraz $I_\lambda = (x_3x_2x_1 - \lambda)$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$. Jeśli ψ_λ jest antymonomorfizmem z Propozycji 3.2.2, to równość

$$\psi_\lambda(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2) = \lambda^{-1}(x_3x_2x_1)^2(x_3x_1 - x_1x_3)$$

daje $\psi_\lambda(P_2) + I_\lambda = P_1 + I_\lambda$. Stąd wniosek, że $\psi_\lambda(P) + I_\lambda$ jest prawostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]$ zawierającym P_1. Jeśli teraz ϕ jest inwolucją z Propozycji 2.1.9, to wykorzystując $\phi(P_1) = P_1$ oraz $\phi(I_\lambda) = I_\lambda$ stwierdzamy, że $Q = \phi(\psi_\lambda(P)) + I_\lambda$ jest lewostronnie prymitywnym ideałem algebry $K[M_3]$ zawierającym P_1. Dlatego Q jest jednym z ideałów typu (i), gdzie $i = 1, 2, 3, 4$, występujących w tezie twierdzenia. Ponieważ rodziny ideałów typu (i) dla $i = 1, 2, 3, 4$ są niezmiennicze względem inwolucji ϕ, to również ideał $\phi(Q) = \psi_\lambda(P) + I_\lambda$ jest typu (i) dla pewnego $i = 1, 2, 3, 4$. Odnotujmy teraz, że równość

$$\psi_\lambda(x_3x_2x_1 - \lambda) = \lambda^{-1}((x_3x_2x_1)^2 - \lambda^2)$$

gwarantuje $\psi_\lambda(I_\lambda) \subseteq I_\lambda$, co po uwzględnieniu $P = \psi_\lambda(\psi_\lambda(P)) + I_\lambda$ prowadzi do

$$P = \psi_\lambda(\psi_\lambda(P)) + I_\lambda = \psi_\lambda(\psi_\lambda(P) + I_\lambda) + I_\lambda = \psi_\lambda(\phi(Q)) + I_\lambda. \tag{3.15}$$

Wykorzystując (3.15) stwierdzamy, że ideał P jest typu (j) dla pewnego $j = 1, 2, 3, 5$. Istotnie, zauważmy, że gdy $\phi(Q)$ jest typu (i) dla pewnego $i = 1, 2, 3$, to P jest również typu (i), gdy natomiast $\phi(Q)$ jest typu (4), to P jest typu (5).

Zaobserwujmy także, że dla dowolnego prawostronnie prymitywnego ideału P algebry $K[M_3]$ nie zawierającego $x_3x_2x_1$, ideał $Q = \phi(P)$ jest lewostronnie prymitywny w $K[M_3]$ i nie zawiera $x_3x_2x_1$. Stąd wniosek, że Q jest jednym z ideałów typu (k) dla pewnego $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oraz $P = \phi(Q)$ jest również typu (k), ponieważ rodziny ideałów typu (k) dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$ są niezmiennicze względem inwolucji ϕ.

Na zakończenie dodajmy jeszcze, że udowodnione dotychczas w twierdzeniu fakty oraz Propozycje 3.2.4 i 3.2.6 gwarantują, że każdy z ideałów typu (k) dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$ jest lewostronnie i prawostronnie prymitywny w $K[M_3]$. Kończy to dowód twierdzenia. □

Jako konsekwencję uzyskanych dotychczas wyników otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.2.9. *Każda reprezentacja nieprzywiedlna algebry plaktycznej* $K[M_3]$ *rangi* 3 *nad algebraicznie domkniętym i nieprzeliczalnym ciałem* K *jest jednomianowa.*

Dowód. Niech V będzie prostym lewostronnym $K[M_3]$-modułem o anihilatorze P. Jeśli $x_3x_2x_1 \in P$, to dzięki Twierdzeniu 3.2.3 mamy $x_i \in P$ dla pewnego $i = 1, 2, 3$. W tej sytuacji V jest modułem prostym nad algebrą $K[M]/(x_i) \cong K[M_2]$ i z Wniosku 2.2.5 otrzymujemy tezę. Jeśli natomiast $x_3x_2x_1 \notin P$, to P jest jednym z ideałów typu (k) dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$ z Twierdzenia 3.2.8. Jeśli $k = 1$, to istnienie stosownej bazy przestrzeni V nie budzi wątpliwości. Jeśli $k = 2$ lub $k = 3, 4$, to wtedy V jest jednym z modułów skonstruowanych w Propozycjach 3.2.4 oraz 3.2.6 odpowiednio i teza również wynika. Jeśli $k = 5$, to $x_3x_2x_1 - \lambda \in P$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$. W tej sytuacji V jest modułem nad algebrą $R = K[M_3]/(x_3x_2x_1 - \lambda)$. Zauważmy teraz, że inwolucja ϕ z Propozycji 2.1.9 (dla $n = 3$) indukuje inwolucję ϕ^* w R. Dodatkowo w R mamy też inwolucję ψ_λ^* z Propozycji 3.2.2. Przyjmując dla $r \in R$ oraz $v \in V$

$$r \cdot v = \phi^*(\psi_\lambda^*(r))v$$

określamy na V nową strukturę lewostronnego R-modułu. Nietrudno się przekonać, że tak zdefiniowany R-moduł V jest prosty, zaś jego anihilator $\psi_\lambda^*(\phi^*(P))$ jest ideałem typu (4) (patrz dowód Twierdzenia 3.2.8). W tej sytuacji wiemy już, że w przestrzeni V istnieje baza o żądanych własnościach. Pozostaje tylko zauważyć, że baza ta spełnia wymagania Definicji 1.1.26 względem oryginalnego działania algebry R w V, gdyż inwolucje ϕ^*, ψ_λ^* mają tę własność, że posyłają obrazy elementów M_3 w R na obrazy elementów M_3 w R. $\square$

Zauważmy, że choć klasyfikacja ideałów lewostronnie lub prawostronnie prymitywnych algebry $K[M_3]$ przeprowadzona była przy założeniu, że ciało K jest algebraicznie domknięte i nieprzeliczalne, to ideały opisane w Twierdzeniach 3.2.3 oraz 3.2.8 są lewostronnie oraz prawostronnie prymitywne w algebrze $K[M_3]$ niezależnie od własności ciała bazowego K. Ta prosta obserwacja prowadzi do następującego wyniku.

Propozycja 3.2.10. *Minimalne ideały pierwsze P_1 oraz P_2 algebry plaktycznej $K[M_3]$ rangi 3 nad ciałem K zdefiniowane w Twierdzeniu 3.1.3 są ideałami półprymitywnymi.*

Dowód. Aby wykazać tezę dla ideałów P_1 oraz P_2 możemy zastosować Wniosek 1.3.11 do algebr $K[M_3]/P_1 \cong K[M_{3,1}]$ oraz $K[M_3]/P_2 \cong K[M_{3,2}]$ w celu zredukowania dowodu do sytuacji, w której ciało K jest algebraicznie domknięte, w szczególności nieskończone.

Przy powyższym założeniu dotyczącym ciała K udowodnimy najpierw równość

$$P_1 = \bigcap_{0 \neq \lambda \in K} (x_3x_1 - x_1x_3, x_3x_2x_1 - \lambda). \tag{3.16}$$

Każdy z ideałów $(x_3x_1 - x_1x_3, x_3x_2x_1 - \lambda)$ zawiera P_1, zatem aby wykazać (3.16) wystarczy udowodnić, że $\bigcap_{0\neq\lambda\in K}(x_3x_2x_1 - \lambda) = 0$ w algebrze $K[M_3]/P_1 \cong K[M_{3,1}]$. Ustalmy teraz $n \geq 1$ oraz wybierzmy parami różne skalary $0 \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. W takiej sytuacji ideały $(x_3x_2x_1 - \lambda_i) \subseteq K[M_{3,1}]$ są parami komaksymalne i generowane przez centralne elementy, zatem $\bigcap_{i=1}^n(x_3x_2x_1 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n(x_3x_2x_1 - \lambda_i)$. W szczególności każdy niezerowy element zbioru $\bigcap_{i=1}^n(x_3x_2x_1 - \lambda_i)$ zawiera w swoim nośniku jednomian stopnia $\geq 3n$. Ponieważ ciało K jest nieskończone, to stąd $\bigcap_{0\neq\lambda\in K}(x_3x_2x_1 - \lambda) = 0$ w $K[M_{3,1}]$, co dowodzi (3.16).

Aby zakończyć dowód dla P_1 zauważmy, że ze względu na równość (3.16) wystarczy pokazać, że dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$ zachodzi

$$(x_3x_1 - x_1x_3, x_3x_2x_1 - \lambda) = \bigcap_{0\neq\mu\in K} P_1(\lambda, \mu), \tag{3.17}$$

gdzie $P_1(\lambda, \mu)$ jest ideałem prymitywnym algebry $K[M_3]$ typu (4) z Twierdzenia 3.2.8. Ustalmy więc $0 \neq \lambda \in K$. Ponieważ każdy z ideałów występujących w (3.17) zawiera ideał $(x_3x_1 - x_1x_3, x_3x_2x_1 - \lambda)$, to równość ta jest równoważna równości

$$\bigcap_{0\neq\mu\in K} P_1(\mu) = 0, \tag{3.18}$$

gdzie $P_1(\mu)$ jest obrazem ideału $P_1(\lambda, \mu)$ w algebrze

$$R = K[M_3]/(x_3x_1 - x_1x_3, x_3x_2x_1 - \lambda) \cong K[M_{3,1}]/(x_3x_2x_1 - \lambda).$$

Wiemy, że dla dowolnego $0 \neq \mu \in K$ działanie algebry R w przestrzeni K-liniowej $V(\mu)$ o bazie $\{e_{ij}(\mu) : i, j \geq 0\}$ z Propozycji 3.2.4 nadaje jej strukturę prostego lewostronnego R-modułu o anihilatorze $P_1(\mu)$. Zauważmy ponadto, że

$$\text{gdy } a \in K[\langle x_1, x_2\rangle] \text{ spełnia } ae_{00}(\mu) = 0 \text{ dla wszystkich } 0 \neq \mu \in K, \text{ to } a = 0 \text{ w } R. \tag{3.19}$$

Istotnie, zapisując element a w postaci $a = \sum_{i,j,k=0}^n \lambda_{ijk}(x_2x_1)^i x_1^j x_2^k$ dla pewnych $\lambda_{ijk} \in K$ otrzymujemy

$$0 = ae_{00}(\mu) = \sum_{i,j,k=0}^{n} \lambda_{ijk}(x_2x_1)^i x_1^j x_2^k e_{00}(\mu) = \sum_{i,j,k=0}^{n} \mu^k \lambda_{ijk} e_{ij}(\mu),$$

zatem $\sum_{k=0}^n \mu^k\lambda_{ijk} = 0$ dla wszystkich $i, j = 0, \ldots, n$. Powołując się na argument związany z wyznacznikiem Vandermonde'a stwierdzamy, że ostatnia równość implikuje $\lambda_{ijk} = 0$ dla wszystkich $i, j, k = 0, \ldots, n$, co w konsekwencji daje $a = 0$ w R i dowodzi (3.19).

Rozważmy teraz element $b \in \bigcap_{0\neq\mu\in K} P_1(\mu)$ i przypuśćmy, że $b \neq 0$. Uwzględniając Lemat 3.1.1 łatwo sprawdzić, że elementy zbioru

$$B = \{(x_2x_1)^{k_1}x_1^{k_2}x_2^{k_3}(x_3x_2)^{k_4}x_3^{k_5} : k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \geq 0\}$$

stanowią bazę algebry R nad K. Pozwala to jednoznacznie zapisać element $b \in R$ w postaci $b = \sum_{i,j=0}^{n} b_{ij}(x_3x_2)^i x_3^j$ dla pewnych $b_{ij} \in K[\langle x_1, x_2\rangle]$. Stosując analogiczny argument jak w Propozycji 3.2.4 (użyty tam w celu zmniejszenia maksymalnych wykładników przy x_3 oraz x_3x_2 w elemencie c), oparty na prawostronnym mnożeniu elementu b przez x_2x_1 oraz x_1, możemy założyć, że

$$b = b_{00} + b_{01}x_3 + b_{10}x_3x_2 + b_{11}x_3x_2x_3.$$

Ponieważ b spełnia $b(x_2x_1)^{t+1} \in K[\langle x_1, x_2\rangle]$ oraz $b(x_2x_1)^t \notin K[\langle x_1, x_2\rangle]$ dla pewnego $t \geq 0$, to dzięki (3.19) mamy $b(x_2x_1)^{t+1} = 0$. Zastępując b elementem $b(x_2x_1)^t \neq 0$ możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $bx_2x_1 = 0$. Ponadto identyczny argument jak w Propozycji 3.2.4 (użyty tam w celu uzyskania sprzeczności gdy $cx_1 \neq 0$) pozwala przyjąć, że $bx_1 = 0$ i w konsekwencji zredukować sytuację do przypadku gdy

$$\lambda b = b_{00}(\lambda - x_1x_3x_2 + x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3).$$

Uwzględniając teraz $x_3x_2e_{00}(\mu) = x_3e_{00}(\mu) = 0$ otrzymujemy $0 = be_{00}(\mu) = b_{00}e_{00}(\mu)$ dla wszystkich $0 \neq \mu \in K$. Dzięki (3.19) stwierdzamy więc, że $b_{00} = 0$ i ostatecznie $b = 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód dla P_1.

Przejdźmy do dowodu dla ideału P_2. W tym celu ustalmy $0 \neq \lambda \in K$ i zauważmy, że każdy z ideałów występujących w równości (3.17) zawiera ideał $(x_3x_2x_1 - \lambda)$. Wnioskujemy stąd, że w algebrze $R' = K[M_3]/(x_3x_2x_1 - \lambda)$ prawdziwa jest równość

$$(x_3x_1 - x_1x_3) = \bigcap_{0\neq\mu\in K} P_1'(\mu), \tag{3.20}$$

gdzie $P_1'(\mu)$ jest obrazem $P_1(\lambda, \mu)$ w R'. Stosując do (3.20) inwolucję ψ_λ^* z Propozycji 3.2.2 oraz uwzględniając

$$\psi_\lambda^*(x_3x_1 - x_1x_3) = x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2, \qquad \psi_\lambda^*(P_1'(\mu)) = P_2'(\mu),$$

gdzie $P_2'(\mu)$ jest obrazem w R' ideału prymitywnego $P_2(\lambda, \mu)$ algebry $K[M_3]$ typu (5) z Twierdzenia 3.2.8 otrzymujemy

$$(x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2) = \bigcap_{0\neq\mu\in K} P_2'(\mu). \tag{3.21}$$

Zauważmy także, że równość (3.21) implikuje

$$(x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2, x_3x_2x_1 - \lambda) = \bigcap_{0\neq\mu\in K} P_2(\lambda,\mu) \tag{3.22}$$

w $K[M_3]$, gdyż każdy z ideałów pojawiających się w (3.22) zawiera $(x_3x_2x_1 - \lambda)$. Na koniec odnotujmy, że dzięki (3.22) wystarczy wykazać $P_2 = \bigcap_{0\neq\lambda\in K}(x_2x_1x_3x_2 - \lambda x_2, x_3x_2x_1 - \lambda)$. Ponieważ dowód tego faktu jest niemal identyczny z dowodem równości (3.16), to zostanie on pominięty. Kończy to dowód propozycji. □

Wniosek 3.2.11. *Algebra plaktyczna $K[M_3]$ rangi 3 nad ciałem K jest półprymitywna.*

Dowód. Dzięki Propozycji 3.2.10 mamy $\mathcal{J}(K[M_3]) \subseteq P_1 \cap P_2$. Pozostaje zauważyć, że w tej sytuacji Propozycja 3.1.4 kończy dowód. □

Rozdział

4 Własności kombinatoryczne

W podrozdziale 4.1 dowiedziono, że algebra plaktyczna $K[M_n]$ rangi $n \leq 3$ nad ciałem K posiada skończoną bazę Gröbnera-Shirshova oraz, że każda baza Gröbnera-Shirshova algebry $K[M_n]$ rangi $n \geq 4$ względem porządku stopniowo-leksykograficznego musi być nieskończona. Natomiast w podrozdziale 4.2 wykazano, że monoid plaktyczny M_n rangi $n \leq 3$ spełnia nietrywialną tożsamość półgrupową ściśle związaną z tożsamością Adjana. Rezultaty prezentowane w tym rozdziale pochodzą z prac [26] oraz [28].

4.1 Bazy Gröbnera-Shirshova algebr plaktycznych

Bazą Gröbnera-Shirshova algebry A nad ciałem K zdefiniowanej przy pomocy prezentacji $A = K\langle X : R\rangle$ nazywamy tutaj bazę Gröbnera-Shirshova ideału I w algebrze wolnej $K\langle X\rangle$ generowanego przez zbiór $R \subseteq K\langle X\rangle$. Oczywiście wprost z Definicji 1.1.13 mamy wtedy $A = K\langle X\rangle/I$.

W podrozdziale tym zajmiemy się zagadnieniem baz Gröbnera-Shirshova dla algebr plaktycznych względem porządku stopniowo-leksykograficznego związanego z naturalnym uporządkowaniem generatorów $x_1 < \cdots < x_n$ (patrz Przykład 1.5.2). Porządek ten wydaje się być szczególnie interesujący, ponieważ koduje on w sobie problematykę, która legła u podstaw konstrukcji monoidu plaktycznego (patrz wstęp oraz koniec podrozdziału 2.1).

Zacznijmy od opisu baz Gröbnera-Shirshova algebr plaktycznych rangi < 3. Wiemy, że algebra $K[M_1]$ jest izomorficzna z algebrą wielomianów $K[x]$ jednej zmiennej, zatem ideał definiujący $K[M_1]$ jest zerowy. Oznacza to, że zbiór pusty jest bazą Gröbnera-Shirshova algebry $K[M_1]$ względem dowolnego porządku jednomianowego w monoidzie wolnym nad $\{x_1\}$. W przypadku algebry $K[M_2]$ ideał I w $K\langle x_1, x_2\rangle$ definiujący $K[M_2]$ jest generowany przez elementy $x_2x_2x_1 - x_2x_1x_2$ oraz $x_2x_1x_1 - x_1x_2x_1$. W tej sytuacji istnieje tylko jedna niejednoznaczność $(x_2x_2x_1)x_1 = x_2(x_2x_1x_1)$ i jest ona rozwiązywalna. Stąd wniosek, że generatory ideału I stanowią jego bazę Gröbnera-Shirshova.

Pierwszym nietrywialnym rezultatem jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.1. *Algebra plaktyczna* $K[M_3]$ *rangi* 3 *nad ciałem* K *posiada skończoną bazę Gröbnera-Shirshova względem porządku stopniowo-leksykograficznego. Bazę taką tworzą elementy algebry wolnej* $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ *postaci:*

(1) $x_2x_1x_1 - x_1x_2x_1$,	(5) $x_3x_1x_2 - x_1x_3x_2$,	(9) $x_3x_2x_1x_2 - x_2x_3x_2x_1$,
(2) $x_2x_2x_1 - x_2x_1x_2$,	(6) $x_3x_2x_2 - x_2x_3x_2$,	(10) $x_3x_2x_1x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2x_1$,
(3) $x_2x_3x_1 - x_2x_1x_3$,	(7) $x_3x_3x_1 - x_3x_1x_3$,	(11) $x_3x_2x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_3x_2$.
(4) $x_3x_1x_1 - x_1x_3x_1$,	(8) $x_3x_3x_2 - x_3x_2x_3$,	

Dowód. Dowód oparty będzie o Diamond Lemma. Rozważmy zbiór redukcji S w algebrze $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ złożony z par postaci (u, v) dla wszystkich elementów $u - v$ typu (1)–(11) wypisanych w tezie twierdzenia. Zauważmy, że elementy typu (1)–(8) to dokładnie relacje definiujące algebrę plaktyczną $K[M_3]$, natomiast elementy typu (9)–(11), jak nietrudno się przekonać, pochodzą od relacji spełnianych w monoidzie M_3. Jest oczywiste, że porządek stopniowo-leksykograficzny jest zgodny ze zbiorem redukcji S. Dla zakończenia dowodu wystarczy więc pokazać, że wszystkie niejednoznaczności związane z S są redukowalne. Istnieje dokładnie 27 niejednoznaczności:

1. $(x_2x_2x_1)x_1 = x_2(x_2x_1x_1)$,
2. $(x_2x_3x_1)x_1 = x_2(x_3x_1x_1)$,
3. $(x_2x_3x_1)x_2 = x_2(x_3x_1x_2)$,
4. $(x_3x_2x_2)x_1 = x_3(x_2x_2x_1)$,
5. $(x_3x_3x_1)x_1 = x_3(x_3x_1x_1)$,
6. $(x_3x_3x_1)x_2 = x_3(x_3x_1x_2)$,
7. $(x_3x_3x_2)x_2 = x_3(x_3x_2x_2)$,
8. $(x_3x_1x_2)x_1x_1 = x_3x_1(x_2x_1x_1)$,
9. $(x_3x_1x_2)x_2x_1 = x_3x_1(x_2x_2x_1)$,
10. $(x_3x_1x_2)x_3x_1 = x_3x_1(x_2x_3x_1)$,
11. $(x_3x_2x_2)x_1x_1 = x_3x_2(x_2x_1x_1)$,

12. $(x_3x_2x_2)x_2x_1 = x_3x_2(x_2x_2x_1)$,

13. $(x_3x_2x_2)x_3x_1 = x_3x_2(x_2x_3x_1)$,

14. $(x_3x_3x_2)x_1x_1 = x_3x_3(x_2x_1x_1)$,

15. $(x_3x_3x_2)x_1x_2 = x_3(x_3x_2x_1x_2)$,

16. $(x_3x_3x_2)x_2x_1 = x_3x_3(x_2x_2x_1)$,

17. $(x_3x_3x_2)x_3x_1 = x_3x_3(x_2x_3x_1)$,

18. $(x_3x_2x_1x_2)x_1x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_1x_1)$,

19. $(x_3x_2x_1x_2)x_2x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_2x_1)$,

20. $(x_3x_2x_1x_2)x_3x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_3x_1)$,

21. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_1 = x_3x_2x_1(x_3x_1x_1)$,

22. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_2 = x_3x_2x_1(x_3x_1x_2)$,

23. $(x_3x_2x_3x_2x_1)x_1 = x_3x_2x_3(x_2x_1x_1)$,

24. $(x_3x_2x_3x_2x_1)x_2 = x_3x_2(x_3x_2x_1x_2)$,

25. $(x_3x_3x_2)x_1x_3x_1 = x_3(x_3x_2x_1x_3x_1)$,

26. $(x_3x_3x_2)x_3x_2x_1 = x_3(x_3x_2x_3x_2x_1)$,

27. $(x_3x_2x_3x_2x_1)x_3x_1 = x_3x_2(x_3x_2x_1x_3x_1)$.

Nietrudno sprawdzić, że każda z tych niejednoznaczności jest rozwiązywalna. Jeśli przez $\xrightarrow{(i)}$ oznaczymy redukcję algebry $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ związaną z elementem zbioru S typu (i), to mamy odpowiednio:

1. $(x_2x_2x_1)x_1 \xrightarrow{(2)} x_2x_1x_2x_1$,
   $x_2(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_2x_1x_2x_1$,

2. $(x_2x_3x_1)x_1 \xrightarrow{(3)} x_2x_1x_3x_1$,
   $x_2(x_3x_1x_1) \xrightarrow{(4)} x_2x_1x_3x_1$,

3. $(x_2x_3x_1)x_2 \xrightarrow{(3)} x_2x_1x_3x_2$,
   $x_2(x_3x_1x_2) \xrightarrow{(5)} x_2x_1x_3x_2$,

4. $(x_3x_2x_2)x_1 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_1,$
$x_3(x_2x_2x_1) \xrightarrow{(2)} x_3x_2x_1x_2 \xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1,$

5. $(x_3x_3x_1)x_1 \xrightarrow{(7)} x_3x_1x_3x_1,$
$x_3(x_3x_1x_1) \xrightarrow{(4)} x_3x_1x_3x_1,$

6. $(x_3x_3x_1)x_2 \xrightarrow{(7)} x_3x_1x_3x_2,$
$x_3(x_3x_1x_2) \xrightarrow{(5)} x_3x_1x_3x_2,$

7. $(x_3x_3x_2)x_2 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_2,$
$x_3(x_3x_2x_2) \xrightarrow{(6)} x_3x_2x_3x_2,$

8. $(x_3x_1x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_1x_3x_1x_2x_1,$
$x_3x_1(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_1x_2x_1 \xrightarrow{(4)} x_1x_3x_1x_2x_1,$

9. $(x_3x_1x_2)x_2x_1 \xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_2x_1 \xrightarrow{(2)} x_1x_3x_2x_1x_2,$
$x_3x_1(x_2x_2x_1) \xrightarrow{(2)} x_3x_1x_2x_1x_2 \xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_2,$

10. $(x_3x_1x_2)x_3x_1 \xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_3x_1 \xrightarrow{(3)} x_1x_3x_2x_1x_3,$
$x_3x_1(x_2x_3x_1) \xrightarrow{(3)} x_3x_1x_2x_1x_3 \xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_3,$

11. $(x_3x_2x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_1x_1,$
$x_3x_2(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_2x_1x_2x_1 \xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1x_1,$

12. $(x_3x_2x_2)x_2x_1 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_2x_1 \xrightarrow{(6)} x_2x_2x_3x_2x_1,$
$x_3x_2(x_2x_2x_1) \xrightarrow{(2)} x_3x_2x_2x_1x_2 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_1x_2 \xrightarrow{(9)} x_2x_2x_3x_2x_1,$

13. $(x_3x_2x_2)x_3x_1 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_3x_1 \xrightarrow{(3)} x_2x_3x_2x_1x_3,$
$x_3x_2(x_2x_3x_1) \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_2x_1x_3 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_1x_3,$

14. $(x_3x_3x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_1x_1 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_1 \xrightarrow{(10)} x_3x_1x_3x_2x_1,$
$x_3x_3(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_3x_1x_2x_1 \xrightarrow{(7)} x_3x_1x_3x_2x_1,$

15. $(x_3x_3x_2)x_1x_2 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_1x_2 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_2,$
$x_3(x_3x_2x_1x_2) \xrightarrow{(9)} x_3x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(11)} x_3x_2x_1x_3x_2,$

16. $(x_3x_3x_2)x_2x_1 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(11)} x_3x_2x_1x_3x_2,$
$x_3x_3(x_2x_2x_1) \xrightarrow{(2)} x_3x_3x_2x_1x_2 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_1x_2 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_2,$

17. $(x_3x_3x_2)x_3x_1 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_3x_1 \xrightarrow{(7)} x_3x_2x_3x_1x_3,$
$x_3x_3(x_2x_3x_1) \xrightarrow{(3)} x_3x_3x_2x_1x_3 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_1x_3,$

18. $(x_3x_2x_1x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_2x_3x_1x_2x_1x_1$
$\xrightarrow{(3)} x_2x_1x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_2x_1x_3x_1x_2x_1$
$\xrightarrow{(5)} x_2x_1x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(1)} x_1x_2x_1x_3x_2x_1,$
$x_3x_2x_1(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_2x_1x_1x_2x_1 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_2x_1x_2x_1$
$\xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_2x_1 \xrightarrow{(9)} x_1x_2x_3x_2x_1x_1$
$\xrightarrow{(1)} x_1x_2x_3x_1x_2x_1 \xrightarrow{(5)} x_1x_2x_1x_3x_2x_1,$

19. $(x_3x_2x_1x_2)x_2x_1 \xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1x_2x_1$
$\xrightarrow{(9)} x_2x_2x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_2x_2x_3x_1x_2x_1$
$\xrightarrow{(3)} x_2x_2x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(2)} x_2x_1x_2x_3x_2x_1,$
$x_3x_2x_1(x_2x_2x_1) \xrightarrow{(2)} x_3x_2x_1x_2x_1x_2$
$\xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1x_1x_2 \xrightarrow{(1)} x_2x_3x_1x_2x_1x_2$
$\xrightarrow{(3)} x_2x_1x_3x_2x_1x_2 \xrightarrow{(9)} x_2x_1x_2x_3x_2x_1,$

20. $(x_3x_2x_1x_2)x_3x_1 \xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1x_3x_1$
$\xrightarrow{(10)} x_2x_3x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(3)} x_2x_1x_3x_3x_2x_1$
$\xrightarrow{(8)} x_2x_1x_3x_2x_3x_1 \xrightarrow{(3)} x_2x_1x_3x_2x_1x_3,$
$x_3x_2x_1(x_2x_3x_1) \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_2x_1x_3 \xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1x_1x_3$
$\xrightarrow{(1)} x_2x_3x_1x_2x_1x_3 \xrightarrow{(3)} x_2x_1x_3x_2x_1x_3,$

21. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_1 \xrightarrow{(10)} x_3x_1x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_3x_1x_2x_1$
$\xrightarrow{(5)} x_3x_1x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(4)} x_1x_3x_1x_3x_2x_1,$
$x_3x_2x_1(x_3x_1x_1) \xrightarrow{(4)} x_3x_2x_1x_1x_3x_1 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_2x_1x_3x_1$
$\xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_3x_1 \xrightarrow{(10)} x_1x_3x_1x_3x_2x_1,$

22. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_2 \xrightarrow{(10)} x_3x_1x_3x_2x_1x_2 \xrightarrow{(9)} x_3x_1x_2x_3x_2x_1$
$\xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(11)} x_1x_3x_2x_1x_3x_2,$
$x_3x_2x_1(x_3x_1x_2) \xrightarrow{(5)} x_3x_2x_1x_1x_3x_2 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_2x_1x_3x_2 \xrightarrow{(5)} x_1x_3x_2x_1x_3x_2,$

23. $(x_3x_2x_3x_2x_1)x_1 \xrightarrow{(11)} x_3x_2x_1x_3x_2x_1,$
$x_3x_2x_3(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(1)} x_3x_2x_3x_1x_2x_1 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_2x_1,$

24. $(x_3x_2x_3x_2x_1)x_2 \xrightarrow{(11)} x_3x_2x_1x_3x_2x_2 \xrightarrow{(6)} x_3x_2x_1x_2x_3x_2 \xrightarrow{(9)} x_2x_3x_2x_1x_3x_2,$
$x_3x_2(x_3x_2x_1x_2) \xrightarrow{(9)} x_3x_2x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(6)} x_2x_3x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(11)} x_2x_3x_2x_1x_3x_2,$

25. $(x_3x_3x_2)x_1x_3x_1 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_1x_3x_1 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_3x_1$
$\xrightarrow{(7)} x_3x_2x_1x_3x_1x_3 \xrightarrow{(10)} x_3x_1x_3x_2x_1x_3,$

$$
\begin{aligned}
&x_3(x_3x_2x_1x_3x_1) \xrightarrow{(10)} x_3x_3x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(7)} x_3x_1x_3x_3x_2x_1 \\
&\qquad \xrightarrow{(8)} x_3x_1x_3x_2x_3x_1 \xrightarrow{(3)} x_3x_1x_3x_2x_1x_3,
\end{aligned}
$$

26. $$
\begin{aligned}
&(x_3x_3x_2)x_3x_2x_1 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_3x_2x_1 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_2x_3x_1 \\
&\qquad \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_3x_2x_1x_3 \xrightarrow{(11)} x_3x_2x_1x_3x_2x_3, \\
&x_3(x_3x_2x_3x_2x_1) \xrightarrow{(11)} x_3x_3x_2x_1x_3x_2 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_3x_1x_3x_2 \\
&\qquad \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_3x_2 \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_1x_3x_2x_3,
\end{aligned}
$$

27. $$
\begin{aligned}
&(x_3x_2x_3x_2x_1)x_3x_1 \xrightarrow{(11)} x_3x_2x_1x_3x_2x_3x_1 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_3, \\
&x_3x_2(x_3x_2x_1x_3x_1) \xrightarrow{(10)} x_3x_2x_3x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_3x_2x_1 \\
&\qquad \xrightarrow{(8)} x_3x_2x_1x_3x_2x_3x_1 \xrightarrow{(3)} x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_3.
\end{aligned}
$$

Kończy to dowód twierdzenia. □

Okazuje się natomiast, że dla $n \geq 4$ własności kombinatoryczne algebry plaktycznej $K[M_n]$ są bardziej złożone.

Twierdzenie 4.1.2. *Dowolna baza Gröbnera-Shirshova algebry plaktycznej $K[M_n]$ rangi $n \geq 4$ nad ciałem K względem porządku stopniowo-leksykograficznego jest nieskończona.*

Dowód. Dowód oparty będzie na relacji pomiędzy bazami Gröbnera-Shirshova a Diamond Lemma. Rozważmy słowa $x_3x_2x_3^ix_4x_3x_1$ dla $i \geq 1$ w monoidzie wolnym F nad zbiorem $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Następujące równości w M_n:

$$
\begin{gathered}
x_3x_2x_3 = x_3x_3x_2, \qquad x_3x_2x_1x_3 = x_3x_3x_2x_1, \\
x_3x_2x_4x_3x_1 = x_3x_4x_2x_3x_1 = x_3x_4x_2x_1x_3 = x_3x_2x_4x_1x_3 = x_3x_2x_1x_4x_3,
\end{gathered}
$$

gwarantują, że dla dowolnego $i \geq 1$ w M_n prawdziwa jest także równość

$$x_3x_2x_3^ix_4x_3x_1 = x_3x_2x_1x_3^ix_4x_3. \tag{4.1}$$

Zdefiniujmy teraz słowa $u_i = x_3x_2x_3^ix_4x_3 \in F$ oraz $v_i = x_2x_3^ix_4x_3x_1 \in F$ dla $i \geq 1$. Twierdzimy, że słowo u_i jest najmniejsze wśród wszystkich reprezentantów klasy u_i w M_n. Analogicznie twierdzimy, że słowo v_i jest najmniejsze wśród wszystkich reprezentantów klasy v_i w M_n. Przypuśćmy na chwilkę, że powyższe stwierdzenie jest prawdziwe. Wtedy wobec (4.1) jest jasne, że aby zredukować słowo

$$u_ix_1 = x_3v_i = x_3x_2x_3^ix_4x_3x_1 \in F$$

jesteśmy zmuszeni dopuścić redukcję $x_3x_2x_3^ix_4x_3x_1 \to x_3x_2x_1x_3^ix_4x_3$. Ponieważ musimy tak postąpić dla dowolnego $i \geq 1$, to konkludujemy, że zbiór redukcji musi być nieskończony.

Dla zakończenia dowodu pozostaje więc wykazać stwierdzenie dotyczące słów u_i, v_i. Na początku zauważmy, że relacje plaktyczne w M_n wykluczają istnienie takiego $w \in F$, że słowo x_2w lub wx_4 reprezentuje ten sam element co u_i w M_n. Stąd teza dotycząca u_i.

Przejdźmy do słowa v_i. Przypuśćmy, że istnieje takie $w \in F$, że x_1w reprezentuje w M_n ten sam element co v_i. Jedynymi relacjami plaktycznymi w M_n pozwalającymi przepisać v_i w M_n tak aby przenieść x_1 na początek są $x_3x_1x_2 = x_1x_3x_2$, $x_4x_1x_2 = x_1x_4x_2$ oraz $x_4x_1x_3 = x_1x_4x_3$. W tej sytuacji v_i przyjmuje w M_n odpowiednio postać $x_1x_3x_2x_3^jx_4x_3^{i-j}$, $x_1x_4x_2x_3^{i+1}$ oraz $x_1x_4x_3x_3^jx_2x_3^{i-j}$ dla pewnego $0 \leq j \leq i$. Ponieważ długość najdłuższego podciągu malejącego ciągu wyznaczonego przez słowo w F jest niezmiennikiem klasy tego słowa w M_n (patrz koniec podrozdziału 2.1), to wnosimy stąd, że dwie pierwsze postacie v_i są niemożliwe i w konsekwencji $v_i = x_1x_4x_3x_3^jx_2x_3^{i-j}$ w M_n. Jednak nietrudno sprawdzić, że kolumnową postacią kanoniczną elementu $x_1x_4x_3x_3^jx_2x_3^{i-j} \in M_n$ jest $x_4x_3x_1x_2x_3^i$, zaś kolumnową postacią kanoniczną elementu $x_2x_3^ix_4x_3x_1 \in M_n$ jest $x_4x_2x_1x_3^{i+1}$, sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że istnieje słowo $w \in F$, dla którego x_2x_1w reprezentuje ten sam element w M_n co v_i. Wtedy $v_i = x_2x_1x_3^jx_4x_3^{i-j+1}$ w M_n dla pewnego $0 \leq j \leq i+1$. Ponownie otrzymujemy sprzeczność, gdyż słowo $x_2x_1x_3^jx_4x_3^{i-j+1} \in F$ nie wyznacza ciągu posiadającego malejący podciąg długości 3.

Uwzględniając powyższe fakty wnioskujemy, że najmniejsze słowo $w \in F$ będące w tej samej klasie plaktycznej co v_i nie może zaczynać się ani od x_2 ani od x_2x_1. Wynika stąd, że w musi zaczynać się od x_2x_3. Ponieważ słowo w wyznacza ciąg posiadający podciąg malejący długości 3, to stwierdzamy, że w przyjmuje postać $x_2x_3^ix_4x_3x_1$, czyli $w = v_i$. Kończy to dowód własności słowa v_i, a tym samym kończy dowód całego twierdzenia. $\square$

Ostatni wynik jest zaskakujący w zestawieniu z analogicznymi rezultatami uzyskanymi dla bardzo podobnie definiowanych monoidów i algebr chińskich (patrz [7]). Mianowicie wykazano dotychczas, że stowarzyszona z monoidem chińskim C_n rangi $n \geq 1$ algebra półgrupowa $K[C_n]$ nad ciałem K posiada skończoną bazę Gröbnera-Shirshova względem porządku stopniowo-leksykograficznego (patrz [11], [23]). Dodajmy tu, że algebra chińska $K[C_n]$ definiowana jest, tak jak algebra plaktyczna $K[M_n]$, za pomocą jednorodnych relacji półgrupowych stopnia 3 i posiada tę samą funkcję wzrostu co $K[M_n]$. Natomiast monoid chiński C_n, tak jak monoid plaktyczny M_n, dopuszcza istnienie formy kanonicznej elementów w postaci pewnych tabel (patrz [13]). Ponadto dla $n \leq 2$ zachodzi $C_n = M_n$.

Okazuje się również, że inna prezentacja algebry $K[M_n]$ powala otrzymać skończoną bazę Gröbnera-Shirshova względem porządku stopniowo-leksykograficznego. Mówiąc dokładniej, przypiszmy każdej kolumnie $w \in M_n$ generator x_w. Wtedy algebra $K[M_n]$ da się przedstawić jako iloraz algebry wolnej $K\langle X\rangle$, gdzie

$$X = \{x_w : w \in M_n \text{ jest kolumną}\}$$

przez ideał I o generatorach:

(1) $x_v x_u x_w - x_v x_w x_u$ dla wszystkich $u = x_i$, $v = x_j$ oraz $w = x_k$, gdzie $i < j \leq k$,

(2) $x_u x_w x_v - x_w x_u x_v$ dla wszystkich $u = x_i$, $v = x_j$ oraz $w = x_k$, gdzie $i \leq j < k$,

(3) $x_{w_1} \cdots x_{w_t} - x_w$ dla wszystkich kolumn $w, w_i \in M_n$ spełniających $w = w_1 \cdots w_t$.

Oczywiście generatory ideału $I \subseteq K\langle X\rangle$ typu (1) i (2) odpowiadają relacjom plaktycznym. Natomiast generatory typu (3) wprowadzają nowe relacje. Przy tak określonej prezentacji algebry $K[M_n]$ można wykazać (patrz [4], [6]), że elementy algebry wolnej $K\langle X\rangle$ postaci:

- $x_u x_v - x_w$ dla wszystkich kolumn $u, v, w \in M_n$, gdzie u nie dominuje v (w sensie Definicji 2.1.2) oraz $uv = w$,
- $x_u x_v - x_{w_1} x_{w_2}$ dla wszystkich kolumn $u, v, w_1, w_2 \in M_n$, gdzie u nie dominuje v oraz $w_1 w_2$ jest postacią kanoniczną elementu $uv \in M_n$,

stanowią bazę Gröbnera-Shirshova B algebry plaktycznej $K[M_n]$ względem naturalnego porządku stopniowo-leksykograficznego. Oczywiście baza ta jest skończona, a wręcz

$$|B| \leq d^2,$$

gdzie $d = |X| = 2^n - 1$ jest liczbą kolumn w M_n. Istotnie, każdy element bazy B wyznaczony jest przez parę kolumn $(u, v) \in M_n \times M_n$, gdzie u nie dominuje v oraz $uv = w \in M_n$ jest kolumną albo $uv = w_1 w_2$ dla pewnych kolumn $w_1, w_2 \in M_n$ spełniających $w_1 \rhd w_2$.

4.2 Tożsamości półgrupowe monoidów plaktycznych

Jednym z głównych powodów rozważań zagadnienia tożsamości spełnianych przez monoid plaktyczny jest ogólny program badań dotyczący tożsamości dla skończenie generowanych półgrup o wielomianowym wzroście. Istotnym wynikiem w tym kierunku jest uzyskany przez

Gromova i Grigorchuka rezultat mówiący, że skończenie generowana półgrupa skracalna o wielomianowym wzroście spełnia nietrywialną tożsamość (patrz [43]). Warto zaznaczyć, że założenie skracalności jest istotne, gdyż bez niego wynik ten przestaje być prawdziwy nawet w klasie półgrup liniowych (patrz [43], [48]).

W pracy [49], motywowanej problemem Sapira dotyczącym relatywnie wolnych półgrup o wielomianowym wzroście (patrz [51]), badane były liczne inne powiązania wielomianowego wzrostu z teorią rozmaitości półgrup. Ponieważ półgrupy proste wydają się być szczególnie ważne z punktu widzenia tej teorii, to warto zaznaczyć, że struktura monoidu plaktycznego jest również silnie determinowana strukturą pewnych monoidów prostych (patrz [27] oraz Propozycja 3.1.5). Monoidy te mogą być traktowane jako naturalne uogólnienia monoidu bicyklicznego $\mathbb{B}$. Ponieważ monoid $\mathbb{B}$ spełnia tożsamość Adjana (patrz [2])

$$xy^2xxyxy^2x = xy^2xyxxy^2x,$$

to tożsamość ta staje się punktem wyjścia do rozważań nad problemem tożsamości dla monoidu plaktycznego.

Udowodnimy poniżej, że monoid plaktyczny M_n rangi $n \leq 3$ spełnia tożsamość

$$wvvwvw = wvwvvw,$$

gdzie

$$v = xy^2xxyxy^2x, \qquad w = xy^2xyxxy^2x. \tag{4.2}$$

Zacznijmy od trywialnego stwierdzenia, że monoid M_1 spełnia tożsamość $xy = yx$. Przejdźmy do monoidu M_2. Dzięki Propozycji 2.1.7 mamy $M_2\langle x_2x_1\rangle^{-1} \cong M_2' \times \mathbb{Z}$. Ponadto izomorfizm $M_2' \cong \mathbb{B}$ oraz Propozycja 1.6.16 gwarantują, że monoid $M_2\langle x_2x_1\rangle^{-1}$ spełnia tożsamość Adjana. Ponieważ monoid M_2 zanurza się w $M_2\langle x_2x_1\rangle^{-1}$, to wnioskujemy, że M_2 również spełnia tożsamość Adjana.

Zajmijmy się teraz monoidem M_3 i rozpocznijmy od następującej obserwacji.

Lemat 4.2.1. *Niech w_1, w_2 będą słowami tego samego stopnia w monoidzie wolnym nad zbiorem $\{x, y\}$ oraz niech v, w będą słowami Adjana zdefiniowanymi w (4.2). Jeśli każda ewaluacja słów $w_1(v, w)$ oraz $w_2(v, w)$ w monoidzie $M_{3,1}$ prowadzi do elementów o tym samym wykładniku przy $x_3x_2x_1$ w postaci kanonicznej opisanej w Lemacie 3.1.1, to monoid $M_{3,1}$ spełnia tożsamość $w_1(v, w) = w_2(v, w)$.*

Dowód. Ustalmy elementy $a, b \in M_{3,1}$ i zapiszmy je w postaci kanonicznej gwarantowanej przez Lemat 3.1.1

$$a = (x_3x_2x_1)^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}x_1^{k_3}(x_3x_2)^{k_4}x_2^{k_5}x_3^{k_6},$$
$$b = (x_3x_2x_1)^{l_1}(x_2x_1)^{l_2}x_1^{l_3}(x_3x_2)^{l_4}x_2^{l_5}x_3^{l_6},$$

gdzie $k_i, l_i \geq 0$. Rozważmy teraz naturalne homomorfizmy

$$\phi_1 \colon M_{3,1} \to M_{3,1}/(x_2x_1 = x_1x_2), \qquad \phi_2 \colon M_{3,1} \to M_{3,1}/(x_3x_2 = x_2x_3).$$

Jeśli $\phi_i(a) = \phi_i(b)$ dla $i = 1, 2$, to uwzględniając izomorfizmy

$$M_{3,1}/(x_2x_1 = x_1x_2) \cong \langle x_1 \rangle \times \langle x_2, x_3 \rangle \cong \mathbb{N} \times M_2,$$
$$M_{3,1}/(x_3x_2 = x_2x_3) \cong \langle x_3 \rangle \times \langle x_1, x_2 \rangle \cong \mathbb{N} \times M_2$$

oraz wykorzystując postać kanoniczną elementów w M_2 nietrudno sprawdzić, że wtedy:

$$k_1 + k_2 + k_3 = l_1 + l_2 + l_3, \qquad k_1 + k_4 = l_1 + l_4, \qquad k_2 + k_5 = l_2 + l_5, \qquad k_6 = l_6,$$
$$k_1 + k_4 + k_6 = l_1 + l_4 + l_6, \qquad k_1 + k_2 = l_1 + l_2, \qquad k_4 + k_5 = l_4 + l_5, \qquad k_3 = l_3.$$

Otrzymany układ równań jest równoważny następującemu:

$$k_1 + k_2 = l_1 + l_2, \quad k_1 + k_4 = l_1 + l_4, \quad k_2 + k_5 = l_2 + l_5, \quad k_3 = l_3, \quad k_6 = l_6.$$

Stąd wniosek, że elementy a, b mogą być zapisane jako

$$a = (x_3x_2x_1)^{i+t}(x_2x_1)^{j}x_1^{k}(x_3x_2)^{l}x_2^{m+t}x_3^{n}, \tag{4.3}$$
$$b = (x_3x_2x_1)^{i}(x_2x_1)^{j+t}x_1^{k}(x_3x_2)^{l+t}x_2^{m}x_3^{n} \tag{4.4}$$

dla pewnych $i, j, k, l, m, n \geq 0$ oraz $t \geq 0$. W szczególności gdy wykładniki przy $x_3x_2x_1$ w postaci kanonicznej elementów a, b są równe (tzn. gdy $t = 0$), to wtedy $a = b$.

Uwzględniając powyższe stwierdzamy, że gdy ρ jest najmniejszą kongruencją w $M_{3,1}$ zawierającą parę $(x_3x_2x_2x_1, x_2x_1x_3x_2)$, to $\rho = \mathrm{Ker}(\phi_1) \cap \mathrm{Ker}(\phi_2)$ (1) oraz monoid $M_{3,1}/\rho$ zanurza się w produkt $M_{3,1}/(x_2x_1 = x_1x_2) \times M_{3,1}/(x_3x_2 = x_2x_3) \cong \mathbb{N} \times M_2 \times \mathbb{N} \times M_2$. Ponieważ monoid M_2 spełnia tożsamość Adjana $v = w$, to wynika stąd, że dla dowolnych $p, q \in M_{3,1}$ elementy $a = w_1(v(p,q), w(p,q))$ oraz $b = w_2(v(p,q), w(p,q))$ są postaci (4.3) oraz (4.4) odpowiednio. Wprost z założenia elementy te mają ten sam wykładnik przy $x_3x_2x_1$ w postaci kanonicznej, co jak wiemy implikuje $a = b$ i kończy dowód. □

(1) Przypomnijmy, że $\mathrm{Ker}(\phi_i) = \{(p,q) \in M_{3,1} \times M_{3,1} : \phi_i(p) = \phi_i(q)\}$ dla $i = 1, 2$.

W dowodzie głównego rezultatu użyteczny będzie również lemat dotyczący reprezentacji monoidu $M'_{3,1} \cong M_{3,1}/(x_3x_2x_1 = 1)$ pochodzącej z Propozycji 3.2.4 (dla $\lambda = \mu = 1$).

Lemat 4.2.2. *Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K o przeliczalnej bazie $\{e_{ij} : i, j \geq 0\}$. Niech działanie $x_1, x_2, x_3 \in M_{3,1}$ w V będzie określone formułami*

$$x_1 e_{ij} = e_{i,j+1}, \qquad x_2 e_{ij} = \begin{cases} e_{ij}, & \text{gdy } j = 0, \\ e_{i+1,j-1}, & \text{gdy } j > 0, \end{cases} \qquad x_3 e_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i = 0, \\ e_{i-1,j}, & \text{gdy } i > 0. \end{cases}$$

Wtedy powyższe działanie definiuje reprezentację monoidu $M_{3,1}$ w przestrzeni V indukującą wierną reprezentację monoidu $M'_{3,1}$.

Dowód. Stosując Propozycję 3.2.4 wnioskujemy, że określone w tezie działanie generatorów $x_1, x_2, x_3 \in M_{3,1}$ rozszerza się do reprezentacji monoidu $M_{3,1}$ w przestrzeni V. Ponieważ $x_3x_2x_1e_{ij} = e_{ij}$ dla dowolnych $i, j \geq 0$, to reprezentacja ta indukuje reprezentację monoidu $M'_{3,1}$ w przestrzeni V.

Pozostaje sprawdzić wierność ostatniej reprezentacji. Wybierzmy więc $a, b \in M'_{3,1}$ oraz załóżmy, że $ae_{ij} = be_{ij}$ dla dowolnych $i, j \geq 0$. Zapiszmy teraz a oraz b w postaci kanonicznej (patrz Lemat 3.1.1 oraz część dowodu Propozycji 3.2.10 dotycząca bazy B algebry R)

$$a = (x_2x_1)^{k_1} x_1^{k_2} (x_3x_2)^{k_3} x_2^{k_4} x_3^{k_5},$$
$$b = (x_2x_1)^{l_1} x_1^{l_2} (x_3x_2)^{l_3} x_2^{l_4} x_3^{l_5},$$

gdzie $k_i, l_i \geq 0$. Jeśli $k_5 < l_5$, to $ae_{k_5k_3} \neq 0$ ale $be_{k_5k_3} = 0$. Przez symetrię nie może również być $k_5 > l_5$. Stąd wniosek, że $k_5 = l_5$. Jeśli $k_3 < l_3$, to $ae_{k_3+k_5,0} \neq 0$ ale $be_{k_3+k_5,0} = 0$, zatem również $k_3 = l_3$. Teraz jeśli $i \geq \max\{k_5, l_5\}$ oraz $j \geq \max\{k_3 + k_4, l_3 + l_4\}$, to

$$ae_{ij} = e_{i+k_1+k_4-k_5, j+k_2-k_3-k_4}, \qquad be_{ij} = e_{i+l_1+l_4-l_5, j+l_2-l_3-l_4},$$

a stąd po uwzględnieniu $k_3 = l_3$ oraz $k_5 = l_5$ otrzymujemy

$$k_1 + k_4 = l_1 + l_4, \qquad k_2 - k_4 = l_2 - l_4. \tag{4.5}$$

Teraz jeśli $k_4 \leq l_4$, to wtedy $ae_{k_5,k_3+k_4} = e_{k_1+k_4,k_2}$ oraz $be_{k_5,k_3+k_4} = e_{l_1+k_4,l_2}$, zatem musi być $k_1 = l_1$ oraz $k_2 = l_2$ i konsekwencji dzięki (4.5) również $k_4 = l_4$. Łącznie $k_i = l_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, 3, 4, 5$, co daje $a = b$ i kończy dowód. □

Zanim przejdziemy do sformułowania i dowodu Twierdzenia 4.2.3 wykonajmy pewne redukcje pozwalające zamienić problem tożsamości dla M_3 prostszym problemem tożsamości dla monoidów $M_{3,1}$, $M_{3,2}$ oraz $M'_{3,1}$, $M'_{3,2}$ zdefiniowanych w (3.2) oraz (3.3) odpowiednio.

Po pierwsze dzięki regularności centralnego elementu $z = x_3x_2x_1 \in M_3$ jest jasne, że dla dowolnych słów v, w w monoidzie wolnym F nad $\{x, y\}$ o równych stopniach względem każdego z generatorów x, y tożsamość $v = w$ zachodzi w M_3 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi ona w $M_3' = M_3/(z = 1)$.

Po drugie dzięki Propozycji 3.1.4 (patrz też dyskusja po Propozycji 3.1.4) wiemy, że monoid M_3 zanurza się w $M_{3,1} \times M_{3,2}$. W szczególności M_3' zanurza się w $M_{3,1}' \times M_{3,2}'$. Wiemy również, że monoidy $M_{3,1}'$ oraz $M_{3,2}'$ są antyizomorficzne (antyizomorfizm indukowany jest przez inwolucję ψ z Propozycji 2.1.10 (dla $n = 3$)). Ma to konsekwencje dla tożsamości przez nie spełnianych. Mówiąc dokładniej, gdy θ jest inwolucją monoidu F polegającą na czytaniu słów wspak, to dla dowolnych słów $w_1, w_2 \in F$ tożsamość $w_1 = w_2$ zachodzi w $M_{3,1}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy tożsamość $\theta(w_1) = \theta(w_2)$ zachodzi w $M_{3,2}'$. W szczególności gdy słowa $w_1, w_2 \in F$ mają tę własność, że $\{\theta(w_1), \theta(w_2)\} = \{w_1, w_2\}$, to tożsamość $w_1 = w_2$ jest spełniona w $M_{3,1}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona w $M_{3,2}'$.

Podsumowując powyższe uwagi, gdy słowa $w_1, w_2 \in F$ mają ten sam stopień względem każdego z generatorów x, y oraz $\{\theta(w_1), \theta(w_2)\} = \{w_1, w_2\}$, to albo $w_1 = w_2$ jest tożsamością spełnioną we wszystkich monoidach M_3, M_3', $M_{3,1}$, $M_{3,2}$, $M_{3,1}'$, $M_{3,2}'$ albo $w_1 = w_2$ nie jest tożsamością w żadnym z tych monoidów.

Twierdzenie 4.2.3. *Monoid plaktyczny M_3 spełnia tożsamość $wvvwvw = wvwvvw$, gdzie v, w są słowami Adjana zdefiniowanymi w (4.2).*

Dowód. Główną trudnością dowodu jest wykazanie, że monoid $M_{3,1}$ spełnia tożsamość $wvvwvw = wvwvvw$. Aby to wykazać wybierzmy $a, b \in M_{3,1}$ i niech $v = v(a, b) \in M_{3,1}$ oraz $w = w(a, b) \in M_{3,1}$. Tak jak w dowodzie Lematu 4.2.1 stwierdzamy, że zbiór $\{v, w\}$ składa się z elementów postaci (4.3) oraz (4.4). Zacznijmy od sytuacji gdy element w jest typu (4.3), zaś element v typu (4.4), tzn.

$$w = (x_3x_2x_1)^{i+t}(x_2x_1)^j x_1^k (x_3x_2)^l x_2^{m+t} x_3^n,$$
$$v = (x_3x_2x_1)^i (x_2x_1)^{j+t} x_1^k (x_3x_2)^{l+t} x_2^m x_3^n$$

dla pewnych $i, j, k, l, m, n \geq 0$ oraz $t \geq 0$. W tym przypadku wykażemy, że $wvwv = vwwv$ oraz $vwvw = wvvw$ lub $wvwv = wvvw$ oraz $vwvw = vwwv$. Ponieważ równości te są parami symetryczne względem w oraz v, to pozostaną one prawdziwe także w przypadku, gdy w jest typu (4.4), zaś v typu (4.3).

Dla skrócenia zapisu niech $r = (x_2x_1)^j x_1^k$ oraz $s = (x_3x_2)^l x_2^m x_3^n$. Wtedy

$$w = (x_3x_2x_1)^{i+t} r x_2^t s, \qquad v = (x_3x_2x_1)^i r (x_2x_1)^t (x_3x_2)^t s.$$

Rozważmy cztery przypadki:

1. $n \leq j$ oraz $l \leq k$,
2. $n \leq j$ oraz $l > k$,
3. $n > j$ oraz $l \leq k$,
4. $n > j$ oraz $l > k$.

Łatwo zauważyć, że element sr jest podzielny w $M_{3,1}$ przez: $(x_3x_2x_1)^{l+n}$ w przypadku 1, $(x_3x_2x_1)^{k+n+\min\{j-n,l-k\}}$ w przypadku 2, $(x_3x_2x_1)^{j+l}$ w przypadku 3 oraz przez $(x_3x_2x_1)^{j+k}$ w przypadku 4. Stąd wniosek, że w postaci kanonicznej elementów $wvwv$, $vwwv$, $vwvw$ oraz $wvvw$ centralny element regularny $x_3x_2x_1$, pochodzący z iloczynów sr, pojawia się tyle samo razy. Ponadto pierwszy z elementów r oraz ostatni z elementów s pojawiających się w elementach $wvwv$, $vwwv$, $vwvw$ oraz $wvvw$ nie ma wpływu na wykładnik przy $x_3x_2x_1$ w postaci kanonicznej tych elementów. Usuwając zatem z r oraz s czynniki produkujące maksymalną potęgę $x_3x_2x_1$ w elemencie sr możemy założyć, że elementy r, s przybierają następującą postać (odpowiadającą przypadkom 1–4 wypisanym powyżej):

1. $r = (x_2x_1)^j x_1^k$ oraz $s = x_2^m$,
2. $r = (x_2x_1)^j$ oraz $s = (x_3x_2)^l x_2^m$,
3. $r = x_1^k$ oraz $s = x_2^m x_3^n$,
4. $r = 1$ oraz $s = (x_3x_2)^l x_2^m x_3^n$.

Zauważmy, że gdy $j > 0$ oraz $l > 0$ w przypadku 2, to usuwając element regularny $x_3x_2x_1$ pochodzący z iloczynu sr zmniejszamy wykładniki j oraz l o jeden. Sukcesywne zastosowanie takiej redukcji sprowadza przypadek 2 do jednego z przypadków 1 lub 4. Możemy więc założyć, usuwając $x_3x_2x_1$ w stosownej potędze z w oraz v odpowiednio, że elementy w, v są postaci (odpowiadającej przypadkom 1, 4 oraz 3):

(1) $w = (x_2x_1)^j x_1^k x_2^{m+t}$ oraz $v = (x_2x_1)^{j+t} x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m$,

(2) $w = (x_3x_2)^l x_2^{m+t} x_3^n$ oraz $v = (x_2x_1)^t (x_3x_2)^{l+t} x_2^m x_3^n$,

(3) $w = x_1^k x_2^{m+t} x_3^n$ oraz $v = (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n$.

W poniższych obliczeniach wielokrotnie stosować będziemy Propozycję 2.1.5 oraz korzystać z relacji zachodzących w $M_{3,1}$ nie zaznaczając tego wyraźnie. Dodatkowo pozostały fragment dowodu podzielimy na trzy części, odpowiadające przypadkom (1), (2) oraz (3).

(1) Ta część dowodu oparta będzie o Lemat 4.2.2. Wykażemy najpierw, że zachodzi równość $vwvw = wvvw$. Aby dowieść tej równości wystarczy sprawdzić, że

$$vwvwe_{pq} = wvvwe_{pq} \tag{4.6}$$

dla dowolnych $p, q \geq 0$, gdzie $\{e_{pq} : p, q \geq 0\}$ jest bazą modułu V z Lematu 4.2.2. Istotnie, reprezentacja ta jest wierna na $M'_{3,1}$, zatem równość (4.6) dla wszystkich $p, q \geq 0$ zapewnia, że obrazy elementów $vwvw$ oraz $wvvw$ w $M'_{3,1}$ są równe. Ponieważ elementy te mają ten sam stopień, to muszą być równe. Natomiast w celu wykazania (4.6) wystarczy sprawdzić, że dla dowolnych $p, q \geq 0$ mamy

$$vwvwe_{pq} \neq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } wvvwe_{pq} \neq 0. \tag{4.7}$$

Rzeczywiście, wykorzystując nietrudne do zweryfikowania równości

$$x_2^t e_{pq} = e_{p+\min\{q,t\},q-\min\{q,t\}}$$

oraz

$$(x_2x_1)^t(x_3x_2)^t e_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } p+q < t, \\ e_{p+\min\{q,t\},q-\min\{q,t\}}, & \text{gdy } p+q \geq t \end{cases}$$

stwierdzamy, że jeśli $(x_2x_1)^t(x_3x_2)^t e_{pq} \neq 0$, to $(x_2x_1)^t(x_3x_2)^t e_{pq} = x_2^t e_{pq}$. Ponieważ mamy $w = rx_2^t s$ oraz $v = r(x_2x_1)^t(x_3x_2)^t s$, gdzie $r = (x_2x_1)^j x_1^k$ oraz $s = x_2^m$, to wnioskujemy, że gdy elementy $vwvwe_{pq}$ oraz $wvvwe_{pq}$ są niezerowe, to muszą być równe.

Zanim przejdziemy do dowodu równoważności (4.7) zacznijmy od prostych obserwacji. Zauważmy po pierwsze, że $we_{pq} \neq 0$ dla dowolnych $p, q \geq 0$. Ponadto $ve_{pq} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_3x_2)^t x_2^m e_{pq} = 0$. Ponieważ, jak nietrudno sprawdzić, mamy

$$(x_3x_2)^t x_2^m e_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } p+q < t, \\ e_{p-t+\min\{q,m+t\},q-\min\{q,m+t\}}, & \text{gdy } p+q \geq t, \end{cases}$$

to $ve_{pq} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p + q < t$. Odnotujmy też, że elementy x_2x_1 oraz x_1 przy działaniu na e_{pq} powiększają sumę $p + q$ dokładnie o jeden. Element x_3x_2 albo zeruje e_{pq} albo pomniejsza sumę $p + q$ dokładnie o jeden, natomiast element x_2 nie zmienia sumy $p + q$. Stąd wniosek, że gdy $e_{p'q'} = we_{pq}$ lub $e_{p'q'} = ve_{pq} \neq 0$, to $p + q \leq p' + q'$.

W celu wykazania (4.7) możemy założyć, że jeden z elementów $vwvwe_{pq}$ lub $wvvwe_{pq}$ jest niezerowy. Wtedy koniecznie $vwe_{pq} \neq 0$. Oznaczmy $e_{p_1q_1} = we_{pq} \neq 0$, $e_{p_2q_2} = ve_{p_1q_1} \neq 0$ oraz $e_{p_3q_3} = we_{p_2q_2} \neq 0$. W tej sytuacji musi być $p_1 + q_1 \leq p_2 + q_2 \leq p_3 + q_3$. Gdyby $ve_{p_2q_2} = 0$, to dzięki $p_1 + q_1 \leq p_2 + q_2 < t$ otrzymalibyśmy również $ve_{p_1q_1} = 0$, sprzeczność. Niech więc $e_{p_3'q_3'} = ve_{p_2q_2} \neq 0$. Wykorzystując nierówność $p_2 + q_2 \leq p_3 + q_3$ stwierdzamy, że także $ve_{p_3q_3} \neq 0$. Teraz

$$vwvwe_{pq} = vwve_{p_1q_1} = vwe_{p_2q_2} = ve_{p_3q_3} \neq 0,$$
$$wvvwe_{pq} = wvve_{p_1q_1} = wve_{p_2q_2} = we_{p_3'q_3'} \neq 0,$$

co dowodzi (4.7) i w konsekwencji gwarantuje, że $vwvw = wvvw$. W analogiczny sposób można też wykazać, że $vwwve_{pq} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $wvwve_{pq} \neq 0$, a zatem także $vwwv = wvwv$.

(2) W tym przypadku możemy wykorzystać inwolucję ε w $M_{3,1}$ wyznaczoną przez $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \varepsilon(w) &= \varepsilon(x_2^{m+t}(x_3x_2)^l x_3^n) & \qquad \varepsilon(v) &= \varepsilon((x_2x_1)^t(x_3x_2)^{l+t}x_2^m x_3^n) \\ &= x_1^n(x_2x_1)^l x_2^{m+t} & &= x_1^n x_2^m (x_2x_1)^{l+t}(x_3x_2)^t \\ &= (x_2x_1)^l x_1^n x_2^{m+t}, & &= (x_2x_1)^{l+t} x_1^n (x_3x_2)^t x_2^m, \end{aligned}$$

co pozwala zredukować sytuację do przypadku (1). Stąd wniosek, że prawdziwe są równości $vwvw = vwwv$ oraz $wvvw = wvwv$.

(3) Ta część dowodu oparta będzie o Lemat 4.2.1. Ponadto w celu stwierdzenia, że dany element nie zawiera w postaci kanonicznej elementu $x_3x_2x_1$ z wykładnikiem większym niż zaznaczono, wielokrotnie wykorzystywać będziemy Propozycję 2.1.5.

Zacznijmy od sytuacji, w której $k \leq n$ oraz rozważmy trzy podprzypadki:

(3.1) $t \leq k \leq n$,

(3.2) $k \leq t \leq n$,

(3.3) $k \leq n \leq t$.

Jeśli zachodzi przypadek (3.1), to wtedy

$$wv = x_1^k x_2^{m+t} x_3^n (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n = (x_3x_2x_1)^t s_1,$$
$$vw = (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n x_1^k x_2^{m+t} x_3^n = (x_3x_2x_1)^t s_2$$

dla pewnych $s_1, s_2 \in M_{3,1} \setminus x_3x_2x_1M_{3,1}$. W takiej sytuacji Propozycja 2.1.5 gwarantuje, że $wv, vw \in (x_3x_2x_1)^tM_{3,1} \setminus (x_3x_2x_1)^{t+1}M_{3,1}$, a wtedy Lemat 4.2.1 implikuje $wv = vw$.

Jeśli zachodzi przypadek (3.2), to prostym rachunkiem sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} wv &= x_1^k x_2^{m+t} x_3^n (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n \\ &= (x_3x_2x_1)^t (x_2x_1)^k x_1^k (x_3x_2)^t x_2^{m-k+t} x_3^{n-t} x_2^m x_3^n \\ &= (x_3x_2x_1)^t (x_2x_1)^k x_1^k s_1, \end{aligned}$$

gdzie $s_1 \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Stąd

$$vwv = r_1(x_3x_2)^t x_3^n (x_3x_2x_1)^t x_1^k (x_2x_1)^k s_1 = (x_3x_2x_1)^{2k+t} r_1 s_2,$$

gdzie $r_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ oraz $s_2 \in \langle x_2, x_3 \rangle$, czyli $vwv \in (x_3x_2x_1)^{2k+t}M_{3,1} \setminus (x_3x_2x_1)^{2k+t+1}M_{3,1}$. Analogiczne rachunki pokazują też, że

$$\begin{aligned} vw &= (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n x_1^k x_2^{m+t} x_3^n \\ &= (x_3x_2x_1)^k (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^{t-k} x_2^m x_3^n x_2^{m+t} x_3^n \\ &= (x_3x_2x_1)^k (x_2x_1)^t x_1^k s_3, \end{aligned}$$

gdzie $s_3 \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Stąd

$$vvw = r_1(x_3x_2)^t x_3^n (x_3x_2x_1)^k x_1^k (x_2x_1)^t s_3 = (x_3x_2x_1)^{2k+t} r_1 s_4,$$

gdzie $s_4 \in \langle x_2, x_3 \rangle$, czyli $vvw \in (x_3x_2x_1)^{2k+t}M_{3,1} \setminus (x_3x_2x_1)^{2k+t+1}M_{3,1}$. Pozostaje zauważyć, że w tej sytuacji Lemat 4.2.1 gwarantuje $vwv = vvw$. Podobnie można wykazać, że

$$\begin{aligned} wwv &= x_1^k x_2^{m+t} x_3^n (x_3x_2x_1)^t (x_2x_1)^k x_1^k s_1 \in (x_3x_2x_1)^{k+t}M_{3,1} \setminus (x_3x_2x_1)^{k+t+1}M_{3,1}, \\ wvw &= x_1^k x_2^{m+t} x_3^n (x_3x_2x_1)^k (x_2x_1)^t x_1^k s_3 \in (x_3x_2x_1)^{k+t}M_{3,1} \setminus (x_3x_2x_1)^{k+t+1}M_{3,1}. \end{aligned}$$

W tej sytuacji Lemat 4.2.1 implikuje $wwv = wvw$. Łącznie w przypadku (3.2) spełnione są równości $wvvw = wvwv$ oraz $vwvw = vwwv$.

Jeśli natomiast zachodzi przypadek (3.3), to można sprawdzić, że

$$\begin{aligned} wv &= x_1^k x_2^{m+t} x_3^n (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n \\ &= x_1^k x_2^{m+t} (x_3x_2x_1)^n (x_2x_1)^{t-n} x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n \\ &= (x_3x_2x_1)^n (x_2x_1)^{k-n+t} x_1^k (x_3x_2)^t x_2^{2m-k+t} x_3^n \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}vw &= (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n x_1^k x_2^{m+t} x_3^n\\ &= (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2x_1)^k (x_3x_2)^{t-k} x_2^m x_3^n x_2^{m+t} x_3^n\\ &= (x_3x_2x_1)^k (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^{n-k+t} x_2^{2m-n+t} x_3^n.\end{aligned}$$

Nietrudne rachunki z wykorzystaniem relacji zachodzących w $M_{3,1}$ wykazują, że

$$\begin{aligned}wvvw &= (x_3x_2x_1)^n (x_2x_1)^{k-n+t} x_1^k (x_3x_2)^t x_2^{2m-k+t} x_3^n (x_3x_2x_1)^k (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^{n-k+t} x_2^{2m-n+t} x_3^n\\ &= (x_3x_2x_1)^{k+n} r_1 (x_3x_2)^t x_3^n (x_2x_1)^t x_1^k s_1\\ &= (x_3x_2x_1)^{k+2n} r_1 (x_3x_2)^t (x_2x_1)^{t-n} x_1^k s_1\\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+2n} r_1 (x_3x_2)^{t-k} (x_2x_1)^{t-n} s_1\\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+n+t} r_1 (x_3x_2)^{n-k} x_2^{t-n} s_1\\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+n+t} r_1 s_2,\end{aligned}$$

gdzie $r_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ oraz $s_1, s_2 \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Podobne przeliczenia dają też

$$\begin{aligned}wvwv &= (x_3x_2x_1)^n (x_2x_1)^{k-n+t} x_1^k (x_3x_2)^t x_2^{2m-k+t} x_3^n (x_3x_2x_1)^n (x_2x_1)^{k-n+t} x_1^k (x_3x_2)^t x_2^{2m-k+t} x_3^n\\ &= (x_3x_2x_1)^{2n} r_1 (x_3x_2)^t x_3^n (x_2x_1)^{k-n+t} x_1^k s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{k+2n} r_1 (x_3x_2)^{t-k} x_3^n (x_2x_1)^{k-n+t} s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+2n} r_1 (x_3x_2)^{t-k} x_3^{n-k} (x_2x_1)^{t-n} s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+n+t} r_1 (x_3x_2)^{n-k} x_3^{n-k} x_2^{t-n} s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+n+t} r_1 s_4,\end{aligned}$$

gdzie $s_3, s_4 \in \langle x_2, x_3 \rangle$. W tej sytuacji Lemat 4.2.1 gwarantuje $wvvw = wvwv$. Analogicznie można udowodnić, że

$$\begin{aligned}vwwv &= (x_3x_2x_1)^k (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^{n-k+t} x_2^{2m-n+t} x_3^n (x_3x_2x_1)^n (x_2x_1)^{k-n+t} x_1^k (x_3x_2)^t x_2^{2m-k+t} x_3^n\\ &= (x_3x_2x_1)^{k+n} r_2 (x_3x_2)^{n-k+t} x_3^n (x_2x_1)^{k-n+t} x_1^k s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+n} r_2 (x_3x_2)^{n-k+t} x_3^{n-k} (x_2x_1)^{t-n} x_1^k s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{3k+n} r_2 (x_3x_2)^{n-2k+t} x_3^{n-k} (x_2x_1)^{t-n} s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{3k+t} r_2 (x_3x_2)^{2n-2k} x_3^{n-k} x_2^{t-n} s_3\\ &= (x_3x_2x_1)^{3k+t} r_2 s_5,\end{aligned}$$

gdzie $r_2 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ oraz $s_5 \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Podobnie

$$\begin{aligned} vwvw &= (x_3x_2x_1)^k(x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^{n-k+t} x_2^{2m-n+t} x_3^n (x_3x_2x_1)^k (x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^{n-k+t} x_2^{2m-n+t} x_3^n \\ &= (x_3x_2x_1)^{2k} r_2 (x_3x_2)^{n-k+t} x_3^n (x_2x_1)^t x_1^k s_1 \\ &= (x_3x_2x_1)^{2k+n} r_2 (x_3x_2)^{n-k+t} (x_2x_1)^{t-n} x_1^k s_1 \\ &= (x_3x_2x_1)^{3k+n} r_2 (x_3x_2)^{n-2k+t} (x_2x_1)^{t-n} s_1 \\ &= (x_3x_2x_1)^{3k+t} r_2 (x_3x_2)^{2n-2k} x_2^{t-n} s_1 \\ &= (x_3x_2x_1)^{3k+t} r_2 s_6, \end{aligned}$$

gdzie $s_6 \in \langle x_2, x_3 \rangle$. W tej sytuacji Lemat 4.2.1 gwarantuje, że $vwvw = vwwv$.

Dla zakończenia dowodu pozostaje rozważyć przypadek (3) przy założeniu $k > n$. W tej sytuacji stosując inwolucję ε (zdefiniowaną w dowodzie przypadku (2)) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon(w) &= \varepsilon(x_1^k x_2^{m+t} x_3^n) & \varepsilon(v) &= \varepsilon((x_2x_1)^t x_1^k (x_3x_2)^t x_2^m x_3^n) \\ &= x_1^n x_2^{m+t} x_3^k, & &= x_1^n x_2^m (x_2x_1)^t x_3^k (x_3x_2)^t \\ & & &= (x_2x_1)^t x_1^n (x_3x_2)^t x_2^m x_3^k, \end{aligned}$$

co pozwala zredukować sytuację do przypadku (3) z założeniem $k < n$. Wykorzystując udowodniony już wynik stwierdzamy, że w tej sytuacji $vwwv = wvwv$ oraz $vwvw = wvvw$.

Podsumowując, dla dowolnych $a, b \in M_{3,1}$ wiemy już, że elementy $w = w(a, b) \in M_{3,1}$ oraz $v = v(a, b) \in M_{3,1}$ spełniają przynajmniej jedną z par równości

$$vwwv = wvwv, \qquad vwvw = wvvw, \tag{4.8}$$

$$wvvw = wvwv, \qquad vwvw = vwwv. \tag{4.9}$$

Stosując równości (4.8) stwierdzamy, że $wv(vwvw) = wv(wvvw)$, natomiast wykorzystując równości (4.9) otrzymujemy $(wvvw)vw = (wvwv)vw$. Innymi słowy, w obu przypadkach zachodzi $wvvwvw = wvwvvw$, co dowodzi tezy dla $M_{3,1}$.

Na koniec zauważmy, że inwolucja θ polegająca na czytaniu słów wspak zamienia słowa v, w (traktowane jako elementy monoidu wolnego nad $\{x, y\}$) między sobą. Ta obserwacja prowadzi do wniosku, że inwolucja θ zamienia równości (traktowane jako tożsamości) (4.8) na (4.9). Uwzględniając dyskusję poprzedzającą twierdzenie konkludujemy, że monoid $M_{3,2}$ również spełnia tożsamość z tezy. Ponieważ monoid M_3 zanurza się w $M_{3,1} \times M_{3,2}$, to M_3 także spełnia tożsamość $wvvwvw = wvwvvw$. Kończy to dowód twierdzenia. $\square$

Dzięki rozumowaniu z początku podrozdziału wiemy, że monoid plaktyczny M_n rangi $n \leq 2$ spełnia tożsamość Adjana. Interesującą i zarazem naturalną wydaje się więc kwestia rozstrzygnięcia problemu spełniania tej tożsamości przez M_3. Zagadnienie to wydaje się ciekawe również z innego powodu. Mianowicie w pracy [20] wykazano, że silnie związany z monoidem plaktycznym, zdefiniowany w [7] monoid chiński C_n rangi $n \geq 1$ da się zanurzyć w produkt $\mathbb{B}^k \times \mathbb{Z}^l$ dla pewnych $k, l \geq 0$ (oczywiście zależnych od n). W szczególności monoid chiński C_n spełnia tożsamość Adjana dla dowolnego $n \geq 1$.

W przypadku monoidu M_3 mamy jednak zaskakujący wynik.

Propozycja 4.2.4. *Monoid plaktyczny M_3 rangi 3 nie spełnia tożsamości Adjana.*

Dowód. Niech $a = x_1^3 x_3 \in M_3$ oraz $b = x_2 x_1 (x_3 x_2)^2 x_2 \in M_3$. Mamy wtedy

$$ab = x_3 x_2 x_1 x_1^3 (x_3 x_2)^2 x_2, \qquad ba = (x_3 x_2 x_1)^2 (x_2 x_1)^2 x_3$$

oraz

$$ab^2 a = x_3 x_2 x_1 x_1^3 (x_3 x_2)^2 x_2 (x_3 x_2 x_1)^2 (x_2 x_1)^2 x_3 = (x_3 x_2 x_1)^5 x_1^3 x_2^3 x_3.$$

Niech v, w będą słowami Adjana zdefiniowanymi w (4.2). Wtedy nietrudnym rachunkiem sprawdzamy, że

$$\begin{aligned}
w(a,b) &= (x_3x_2x_1)^5 x_1^3 x_2^3 x_3 x_3 x_2 x_1 x_1^3 (x_3x_2)^2 x_2 (x_3x_2x_1)^5 x_1^3 x_2^3 x_3 \\
&= (x_3x_2x_1)^{11} x_1^3 x_2^3 x_3 x_1^3 (x_3x_2)^2 x_2 x_1^3 x_2^3 x_3 \\
&= (x_3x_2x_1)^{11} x_1^3 x_2^3 x_1^3 (x_3x_2)^3 x_1^3 x_2^3 x_3 \\
&= (x_3x_2x_1)^{14} (x_2x_1)^3 x_1^3 x_2^3 x_3, \\
v(a,b) &= (x_3x_2x_1)^5 x_1^3 x_2^3 x_3 (x_3x_2x_1)^2 (x_2x_1)^2 x_3 (x_3x_2x_1)^5 x_1^3 x_2^3 x_3 \\
&= (x_3x_2x_1)^{12} x_1^3 x_2^3 x_3 (x_2x_1)^2 x_3 x_1^3 x_2^3 x_3 \\
&= (x_3x_2x_1)^{13} x_1^3 x_2 x_1 x_2^3 x_3 x_1^3 x_2^3 x_3 \\
&= (x_3x_2x_1)^{13} (x_2x_1)^4 x_1^3 x_3 x_2 x_2^2 x_3.
\end{aligned}$$

Ponieważ elementy $w(a,b) \in M_3$ oraz $v(a,b) \in M_3$, zapisane w postaci kanonicznej, mają inne wykładniki przy $x_3x_2x_1$ (14 oraz 13 odpowiednio), to są one różne. $\square$

Dodajmy, że dla elementów $w = w(a,b)$ oraz $v = v(a,b)$ z Propozycji 4.2.4 mamy także $wv \neq vw$. Mianowicie można sprawdzić, że elementy wv oraz vw, zapisane w postaci kanonicznej, mają inne wykładniki przy $x_3x_2x_1$ (28 oraz 29 odpowiednio). Jednak zachodzi $wvvw = vwvw$ oraz $vwwv = wvwv$.

Wobec powyższych rezultatów można zadać pytanie: czy monoid plaktyczny dowolnej rangi $n \geq 1$ spełnia nietrywialną tożsamość? Znalezienie odpowiedzi może okazać się jednak trudne, bo w przeciwieństwie do sytuacji znanej dla monoidu chińskiego (patrz [20]) stopień tożsamości wzrasta przy przejściu od M_1 do M_2 oraz od M_2 do M_3 i można się spodziewać, że jeśli istnieją nietrywialne tożsamości spełniane przez monoidy plaktyczne wyższej rangi, to ich stopień wzrasta wraz z n. Ponadto metoda zastosowana w Twierdzeniu 4.2.3 w istotny sposób wykorzystuje znajomość pewnych ważnych obrazów homomorficznych monoidu M_3, a nie jest jasne czy ich odpowiedniki dadzą się zbudować dla dowolnego M_n.

Rozdział

5 Algebra plaktyczna rangi 4

W rozdziale tym wyznaczono minimalne ideały pierwsze algebry plaktycznej $K[M_4]$ rangi 4 nad ciałem K. Pokazano, że istnieją dokładnie cztery takie ideały oraz, że każdy z nich pochodzi od jednorodnej kongruencji w monoidzie M_4. Podkreślmy, że uzyskane wyniki są, jakościowo, tego samego typu co dla algebry plaktycznej rangi 3. Udowodniono również, że radykał pierwszy $\mathcal{B}(K[M_4])$ algebry $K[M_4]$ jest nilpotentny. Dodajmy, że stosowana w tym rozdziale strategia prowadząca do wyznaczenia minimalnych ideałów pierwszych pochodzi z rozdziału 3. Przypomnijmy jeszcze, że rozdział 5 powinien być traktowany jako dodatek mający zobrazować trudności pojawiające się przy przejściu od algebry $K[M_3]$ do $K[M_4]$.

5.1 Minimalne ideały pierwsze

Niech M_4 będzie monoidem plaktycznym rangi 4. Wtedy Twierdzenie 2.1.3 implikuje, że każdy element monoidu M_4 może być jednoznacznie zapisany w jednej z postaci:

$$\begin{aligned}
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_4x_3x_1)^{l_4}(x_4x_3x_2)^{l_5}(x_3x_2)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}(x_4x_3)^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_4x_3x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_4x_1)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}(x_4x_3)^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_4x_3x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_3x_2)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}(x_4x_3)^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_2x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_4x_1)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}(x_4x_3)^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_2x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_3x_2)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}(x_4x_3)^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_4x_3x_1)^{l_4}(x_4x_3x_2)^{l_5}(x_3x_2)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}x_2^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_4x_3x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_4x_1)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}x_2^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_4x_3x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_3x_2)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}x_2^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_2x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_4x_1)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}x_2^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_2x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_3x_2)^{l_6}(x_4x_2)^{l_7}x_2^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_4x_3x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_4x_1)^{l_6}x_1^{l_7}x_2^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},\\
&(x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_4x_2x_1)^{l_3}(x_2x_1)^{l_4}(x_3x_1)^{l_5}(x_4x_1)^{l_6}x_1^{l_7}x_2^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}},
\end{aligned}\tag{5.1}$$

gdzie $l_i \geq 0$. Ponadto wiemy (patrz Propozycja 2.1.6), że element $z = x_4x_3x_2x_1 \in M_4$ jest centralny i regularny w algebrze plaktycznej $K[M_4]$ nad ciałem K — fakt ten będzie wielokrotnie wykorzystywany w tym rozdziale.

Dowód Twierdzenia 2.1.13 zapewnia, że algebra plaktyczna $K[M_4]$ nad ciałem K nie jest pierwsza oraz $(x_4x_3x_2x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_2)K[M_4](x_4x_1 - x_1x_4) = 0$. Stąd wniosek, że każdy ideał pierwszy algebry $K[M_4]$ zawiera element $x_4x_3x_2x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_2$ lub $x_4x_1 - x_1x_4$. Uwzględniając tę informację oraz sugerując się własnościami minimalnych ideałów pierwszych algebry plaktycznej rangi 3 wydaje się, że dobrym punktem startu przy próbie wyznaczenia minimalnych ideałów pierwszych algebry $K[M_4]$ jest poszukiwanie ideałów pierwszych pochodzących od kongruencji w monoidzie M_4. Próby oparte na tej strategii, wraz z zastosowaniem inwolucji ϕ oraz ψ (dla $n = 4$) z Propozycji 2.1.9 i 2.1.10, w naturalny sposób prowadzą do ideałów:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (x_3x_1 - x_1x_3, x_4x_1 - x_1x_4, x_4x_2 - x_2x_4),\\
I_2 &= (x_4x_3x_2x_4x_2x_1 - x_4x_2x_1x_4x_3x_2,\\
&\qquad x_4x_3x_2x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_2, x_4x_3x_1x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_1),\\
I_3 &= (x_4x_1 - x_1x_4, x_4x_2 - x_2x_4,\\
&\qquad x_4x_3x_2x_4x_2x_1 - x_4x_2x_1x_4x_3x_2, x_4x_3x_2x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_2),\\
I_4 &= (x_3x_1 - x_1x_3, x_4x_1 - x_1x_4,\\
&\qquad x_4x_3x_2x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_2, x_4x_3x_1x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_1).
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Zacznijmy od ważnej obserwacji dotyczącej tych ideałów.

Propozycja 5.1.1. *Jeśli I_1, I_2, I_3, I_4 są ideałami algebry plaktycznej $K[M_4]$ rangi 4 nad ciałem K zdefiniowanymi w (5.2), to $I_3I_4I_2I_1I_2I_3I_4 = 0$. W szczególności każdy minimalny ideał pierwszy algebry $K[M_4]$ zawiera jeden z ideałów I_1, I_2, I_3, I_4.*

Dowód. Zdefiniujemy elementy:

$$
\begin{aligned}
a &= x_3x_1 - x_1x_3, \qquad & a' &= x_4x_3x_2x_4x_2x_1 - x_4x_2x_1x_4x_3x_2,\\
b &= x_4x_1 - x_1x_4, \qquad & b' &= x_4x_3x_2x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_2,\\
c &= x_4x_2 - x_2x_4, \qquad & c' &= x_4x_3x_1x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_1
\end{aligned}
$$

algebry $K[M_4]$. Przy tak przyjętych oznaczeniach mamy

$$
I_1 = (a, b, c), \qquad I_2 = (a', b', c'), \qquad I_3 = (a', b, b', c), \qquad I_4 = (a, b, b', c').
$$

Pierwszym krokiem dowodu jest wykazanie, że zachodzą równości:

$$
\begin{array}{lll}
(1)\quad a'K[M_4]a = 0, & (4)\quad a'K[M_4]b = 0, & (6)\quad cK[M_4]b' = 0, \\
(2)\quad b'K[M_4]a = 0, & (5)\quad bK[M_4]c' = 0, & (7)\quad cK[M_4]c' = 0. \\
(3)\quad b'K[M_4]b = 0, & &
\end{array}
$$

Wykorzystując postać kanoniczną (5.1) elementów monoidu M_4 i fakt, że b komutuje z x_4x_1, $x_4x_2x_1$ i $x_4x_3x_1$, natomiast b' komutuje z x_2 i x_3 oraz uwzględniając proste do sprawdzenia relacje

$$
x_2b = x_3b = x_4b = 0,
$$
$$
b'x_1 = b'x_2x_1 = b'x_3x_1 = b'x_3x_2x_1 = b'x_4x_2x_1 = b'x_4x_3x_1 = 0
$$

stwierdzamy, że $b'K[M_4]b = 0$, co dowodzi (3). Podobne obserwacje prowadzą do dowodu (1) oraz (2). Natomiast równości (4), (5), (6) oraz (7) mogą być uzyskane z (1) oraz (2) przez zastosowanie pewnych antymonomorfizmów. Zacznijmy od inwolucji ϕ z Propozycji 2.1.9 (dla $n = 4$). Jeśli $xK[M_4]y = 0$ dla pewnych $x, y \in K[M_4]$, to również $\phi(y)K[M_4]\phi(x) = 0$. Uwzględniając teraz:

$$
\phi(a) = c, \qquad \phi(b) = b, \qquad \phi(c) = a,
$$
$$
\phi(a') = c', \qquad \phi(b') = b', \qquad \phi(c') = a'
$$

oraz stosując ϕ do (1) otrzymujemy (7), natomiast stosując ϕ do (2) otrzymujemy (6). Rozważmy następnie antymonomorfizm $\psi\colon K[M_4] \to K[M_4]$ (porównaj z Propozycjami 2.1.10 oraz 3.2.2) wyznaczony przez

$$
\psi(x_1) = x_4x_3x_2, \qquad \psi(x_2) = x_4x_3x_1, \qquad \psi(x_3) = x_4x_2x_1, \qquad \psi(x_4) = x_3x_2x_1.
$$

Jeśli $xK[M_4]y = 0$ dla pewnych $x, y \in K[M_4]$, to także $\psi(y)\psi(K[M_4])\psi(x) = 0$. Ponadto gdy $z = x_4x_3x_2x_1 \in M_4$, to jak nietrudno się przekonać $\psi(\psi(x_i)) = z^2x_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Dlatego dla dowolnego elementu $w \in M_4$ stopnia $n \geq 0$ zachodzi $\psi(\psi(w)) = z^{2n}w$. Stąd wniosek, że

$$
z^{2n}\psi(y)w\psi(x) = \psi(y)\psi(\psi(w))\psi(x) \in \psi(y)\psi(K[M_4])\psi(x) = 0,
$$

co dzięki regularności elementu z w algebrze $K[M_4]$ gwarantuje $\psi(y)w\psi(x) = 0$. Ostatecznie konkludujemy, że $\psi(y)K[M_4]\psi(x) = 0$. Wykorzystując tę informację oraz uwzględniając:

$$
\psi(a) = a', \qquad \psi(b) = b', \qquad \phi(c) = c',
$$
$$
\psi(a') = z^2a, \qquad \psi(b') = z^2b, \qquad \psi(c') = z^2c
$$

stwierdzamy, że równości (4) oraz (5) mogą być otrzymane z (2) oraz (6) odpowiednio przez zastosowanie antymonomorfizmu ψ. Kończy to dowód równości (1)–(7).

Aby zakończyć dowód propozycji wystarczy sprawdzić, że

$$a_3 M_4 a_4 M_4 a_2 M_4 a_1 M_4 b_2 M_4 b_3 M_4 b_4 = 0 \tag{5.3}$$

dla dowolnych $a_1 \in \{a, b, c\}$, $a_2, b_2 \in \{a', b', c'\}$, $a_3, b_3 \in \{a', b, b', c\}$ oraz $a_4, b_4 \in \{a, b, b', c'\}$. Dowód równości (5.3) sprowadza się do wielokrotnego zastosowania równości (1)–(7). Dla przykładu gdy $a_3 = b$, to (5) implikuje (5.3) dla $a_4 = c'$. Możemy więc ograniczyć się do sytuacji, w której $a_4 \in \{a, b, b'\}$. Rozważmy przypadek gdy $a_4 = a$. Wtedy ponownie równość (5) pozwala ograniczyć się do sytuacji, w której $a_2 \in \{a', b'\}$. Załóżmy, że $a_2 = a'$. W tej sytuacji (1) oraz (4) redukują dowód (5.3) do przypadku gdy $a_1 = c$. Dalej (5) oraz (6) pozwalają założyć, że $b_2 = a'$. Kolejno (4) oraz (6) redukują dowód (5.3) do sytuacji, w której $b_3 \in \{c, a'\}$. Gdy przykładowo $b_3 = c$, to stosując równości (1), (4), (6) oraz (7) uzyskujemy (5.3) dla $b_4 = a$, $b_4 = b$, $b_4 = b'$ oraz $b_4 = c'$ odpowiednio. Sprawdzenie pozostałych przypadków jest równie proste, choć żmudne i dlatego zostanie pominięte. Kończy to dowód propozycji. $\square$

Sugerując się, kolejny raz, własnościami minimalnych ideałów pierwszych w algebrze plaktycznej rangi 3 stwierdzamy, że przy poszukiwaniu minimalnych ideałów pierwszych algebry $K[M_4]$ naturalnym wydaje się zacząć od ideałów $P \subseteq K[M_4]$, dla których element centralny $z = x_4x_3x_2x_1 \in M_4$ pozostaje regularny w $K[M_4]/P$. Takie postępowanie, po uwzględnieniu Propozycji 5.1.1 i nietrudnych do sprawdzenia równości (poniżej stosujemy oznaczenia wprowadzone w Propozycji 5.1.1)

$$\begin{aligned} z^2(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2) &= x_4^2(x_3x_2x_1)^2(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2) \\ &= x_4^2(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2)(x_3x_2x_1)^2 \\ &= (x_4x_3x_2x_4x_2x_1 - x_4x_2x_1x_4x_3x_2)(x_3x_2x_1)^2 \\ &= a'(x_3x_2x_1)^2 \in I_2 \cap I_3, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} z^2(x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3) &= (x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3)(x_4x_3x_2)^2x_1^2 \\ &= (x_4x_3x_2)^2(x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3)x_1^2 \\ &= (x_4x_3x_2)^2(x_4x_3x_1x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_1) \\ &= (x_4x_3x_2)^2c' \in I_2 \cap I_4 \end{aligned} \tag{5.5}$$

oraz

$$\begin{aligned} z(x_2x_4x_3x_1 - x_2x_1x_4x_3) &= x_4x_2x_1(x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3)x_1, \\ z(x_4x_2x_2x_1 - x_2x_1x_4x_2) &= x_4(x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2)x_4x_2x_1, \\ z(x_4x_3x_3x_1 - x_3x_1x_4x_3) &= x_4x_3x_1(x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3)x_1, \end{aligned} \tag{5.6}$$

prowadzi do ideałów

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_3x_1 - x_1x_3, x_4x_1 - x_1x_4, x_4x_2 - x_2x_4), \\ P_2 &= \{a \in K[M_4] : az^n \in I_2 \text{ dla pewnego } n \geq 0\} \end{aligned} \tag{5.7}$$

oraz

$$\begin{aligned} P_3 &= (x_4x_1 - x_1x_4, x_4x_2 - x_2x_4, x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2), \\ P_4 &= (x_3x_1 - x_1x_3, x_4x_1 - x_1x_4, x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Naszym najbliższym celem jest dowód, że ideały P_1, P_2, P_3, P_4 są jedynymi minimalnymi ideałami pierwszymi algebry $K[M_4]$. Zauważmy, że każdy z ideałów P_1, P_2, P_3, P_4 pochodzi od jednorodnej kongruencji w monoidzie M_4. W związku z tym w dowodzie pierwszości tych ideałów użytecznym okazuje się rozważenie stowarzyszonych z nimi monoidów. Niech więc

$$\begin{aligned} M_{4,1} &= M_4/(x_3x_1 = x_1x_3, x_4x_1 = x_1x_4, x_4x_2 = x_2x_4), \\ M_{4,3} &= M_4/(x_4x_1 = x_1x_4, x_4x_2 = x_2x_4, x_3x_2x_2x_1 = x_2x_1x_3x_2). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Oczywiście monoidy $M_{4,1}$, $M_{4,3}$ zdefiniowane są za pomocą relacji jednorodnych względem każdego z generatorów x_1, x_2, x_3, x_4. W szczególności algebry $K[M_{4,1}] \cong K[M_4]/P_1$ oraz $K[M_{4,3}] \cong K[M_4]/P_3$ posiadają naturalne gradacje wyznaczone przez stopień względem x_1, x_2, x_3, x_4 odpowiednio.

Zanim przejdziemy do opisu postaci elementów w monoidach $M_{4,1}$ oraz $M_{4,3}$ umówmy się, tak jak to miało miejsce w rozważaniach z rozdziału 3, używać tych samych symboli do zapisu generatorów monoidu wolnego oraz monoidu plaktycznego i jego homomorficznych obrazów.

Lemat 5.1.2. *Każdy element monoidu $M_{4,1}$ może być jednoznacznie zapisany w postaci*

$$(x_4x_3x_2x_1)^{k_1}(x_3x_2x_1)^{k_2}(x_2x_1)^{k_3}x_1^{k_4}(x_4x_3x_2)^{k_5}(x_3x_2)^{k_6}x_2^{k_7}(x_4x_3)^{k_8}x_3^{k_9}x_4^{k_{10}},$$

gdzie $k_i \geq 0$. Ponadto element $x_4x_3x_2x_1 \in M_{4,1}$ jest centralny i regularny w algebrze $K[M_{4,1}]$ nad ciałem K.

Dowód. Ponieważ w monoidzie $M_{4,1}$ mamy $x_3x_1 = x_1x_3$, $x_4x_1 = x_1x_4$ oraz $x_4x_2 = x_2x_4$, to wykorzystując postać kanoniczną (5.1) elementów monoidu M_4 oraz postać kanoniczną monoidów $\langle x_1, x_2, x_3\rangle/(x_3x_1 = x_1x_3) \cong M_{3,1}$, $\langle x_2, x_3, x_4\rangle/(x_4x_2 = x_2x_4) \cong M_{3,1}$, daną przez Lemat 3.1.1, nietrudno sprawdzić, że każdy element monoidu $M_{4,1}$ może być zapisany w powyższej formie. Twierdzimy, że zapis ten jest jednoznaczny.

Na początek, analogicznie jak w dowodzie Lematu 3.1.1, każdemu słowu w monoidu wolnego nad $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ przypiszmy liczbę naturalną $n(w)$ stosując indukcję względem stopnia $\deg(w)$. Jeśli $w = 1$, to niech $n(w) = 0$. Gdy natomiast $w \neq 1$ oraz liczba $n(v)$ została zdefiniowana dla dowolnego słowa v spełniającego $\deg(v) < \deg(w)$, to postępujemy jak następuje. Jeżeli w nie zawiera podsłowa postaci $x_4w_3x_3w_2x_2w_1x_1$ dla pewnych słów w_1, w_2, w_3, to przyjmijmy $n(w) = 0$. Gdy zaś w zawiera takie podsłowo, to zapiszmy w jako $w = v_0x_1w_0$ dla pewnych słów v_0, w_0, gdzie v_0 jest słowem minimalnego stopnia, które zawiera podsłowo $x_4ux_3u'x_2$ dla pewnych słów u, u'. Kolejno zapiszmy v_0 jako $v_0 = v_1x_2w_1$ dla pewnych słów v_1, w_1, gdzie w_1 jest minimalnego stopnia. Dalej niech $v_1 = v_2x_3w_2$ dla pewnych słów v_2, w_2, gdzie słowo w_2 jest minimalnego stopnia. W końcu niech $v_2 = w_4x_4w_3$ dla pewnych słów w_3, w_4, gdzie słowo w_3 jest możliwie najmniejszego stopnia. W tej sytuacji mamy $w = w_4x_4w_3x_3w_2x_2w_1x_1w_0$. Jeśli teraz $\overline{w} = w_4w_3w_2w_1w_0$, to oczywiście zachodzi $\deg(\overline{w}) < \deg(w)$, co pozwala zdefiniować $n(w) = n(\overline{w}) + 1$.

Dzięki Propozycji 2.1.5 wiemy, że dla dowolnego słowa w, traktowanego jako element M_4, liczba $n(w)$ równa jest największej z liczb $n \geq 0$ spełniających $w \in (x_4x_3x_2x_1)^nM_4$. Oznacza to, że $n(w)$ jest niezmiennikiem klasy słowa w w M_4. Twierdzimy, że $n(w)$ jest również niezmiennikiem klasy słowa w w $M_{4,1}$. Aby tego dowieść wystarczy sprawdzić, że gdy v jest słowem otrzymanym z w przez jednokrotne zastosowanie jednej z relacji $x_3x_1 = x_1x_3$, $x_4x_1 = x_1x_4$ lub $x_4x_2 = x_2x_4$, to $n(v) = n(w)$. Zauważmy, że gdy $n(w) = 0$, to również $n(v) = 0$. Gdy zaś $n(w) > 0$, to nietrudno się przekonać, że słowo $\overline{v}$, powstałe ze słowa v zgodnie z opisaną procedurą, jest równe $\overline{w}$. Stąd już $n(v) = n(\overline{v}) + 1 = n(\overline{w}) + 1 = n(w)$.

Niech teraz

$$u = (x_4x_3x_2x_1)^{k_1}(x_3x_2x_1)^{k_2}(x_2x_1)^{k_3}x_1^{k_4}(x_4x_3x_2)^{k_5}(x_3x_2)^{k_6}x_2^{k_7}(x_4x_3)^{k_8}x_3^{k_9}x_4^{k_{10}} \in M_{4,1},$$
$$v = (x_4x_3x_2x_1)^{l_1}(x_3x_2x_1)^{l_2}(x_2x_1)^{l_3}x_1^{l_4}(x_4x_3x_2)^{l_5}(x_3x_2)^{l_6}x_2^{l_7}(x_4x_3)^{l_8}x_3^{l_9}x_4^{l_{10}} \in M_{4,1}$$

dla pewnych $k_i, l_i \geq 0$. Jeśli obrazy elementów u, v względem homomorfizmów naturalnych

$$M_{4,1} \to M_{4,1}/(x_2x_1 = x_1x_2) \cong \langle x_1\rangle \times \langle x_2, x_3, x_4\rangle \cong \mathbb{N} \times M_{3,1},$$
$$M_{4,1} \to M_{4,1}/(x_4x_3 = x_3x_4) \cong \langle x_4\rangle \times \langle x_1, x_2, x_3\rangle \cong \mathbb{N} \times M_{3,1}$$

są równe, to wykorzystując postać kanoniczną elementów monoidu $M_{3,1}$ z Lematu 3.1.1 otrzymujemy:

$$\begin{gathered} k_3 = l_3, \quad k_4 = l_4, \quad k_7 = l_7, \quad k_8 = l_8, \quad k_9 = l_9, \quad k_{10} = l_{10}, \\ k_1 + k_2 = l_1 + l_2, \quad k_1 + k_5 = l_1 + l_5, \quad k_2 + k_6 = l_2 + l_6, \quad k_5 + k_6 = l_5 + l_6. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Jeśli teraz $u = v$ w $M_{4,1}$, to $k_1 = n(u) = n(v) = l_1$ i dzięki równaniom (5.10) otrzymujemy $k_i = l_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, 10$. Pozostaje zauważyć, że w tej sytuacji ostatnia część tezy jest oczywista. $\square$

Lemat 5.1.3. *Każdy element monoidu $M_{4,3}$ może być jednoznacznie zapisany w jednej z postaci:*

$$\begin{gathered} x_1^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}(x_3x_1)^{k_4}(x_3x_2x_1)^{k_5}x_3^{k_7}(x_4x_3x_1)^{k_8}(x_4x_3x_2x_1)^{k_9}(x_4x_3x_2)^{k_{10}}(x_4x_3)^{k_{11}}x_4^{k_{12}}, \\ x_1^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}(x_3x_1)^{k_4}(x_3x_2x_1)^{k_5}(x_3x_2)^{k_6}x_3^{k_7}(x_4x_3x_2)^{k_{10}}(x_4x_3)^{k_{11}}x_4^{k_{12}}, \\ x_1^{k_1}(x_2x_1)^{k_2}x_2^{k_3}(x_3x_2)^{k_6}x_3^{k_7}(x_4x_3x_2)^{k_{10}}(x_4x_3)^{k_{11}}x_4^{k_{12}}, \end{gathered}$$

gdzie $k_i \geq 0$. Ponadto element $x_4x_3x_2x_1 \in M_{4,3}$ jest centralny i regularny w algebrze $K[M_{4,3}]$ nad ciałem K.

Dowód. Znów użyjemy Diamond Lemma. Rozważmy porządek stopniowo-leksykograficzny w monoidzie wolnym nad $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ wyznaczony przez relacje $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Niech S będzie zbiorem redukcji w algebrze wolnej $K\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ złożonym z par:

(1)	(x_4x_1, x_1x_4),	(12)	$(x_4x_4x_3, x_4x_3x_4)$,
(2)	(x_4x_2, x_2x_4),	(13)	$(x_3x_2x_1x_2, x_2x_1x_3x_2)$,
(3)	$(x_2x_1x_1, x_1x_2x_1)$,	(14)	$(x_2x_3x_2x_1, x_2x_1x_3x_2)$,
(4)	$(x_2x_2x_1, x_2x_1x_2)$,	(15)	$(x_4x_3x_1x_3, x_3x_4x_3x_1)$,
(5)	$(x_2x_3x_1, x_2x_1x_3)$,	(16)	$(x_4x_3x_2x_3, x_3x_4x_3x_2)$,
(6)	$(x_3x_1x_1, x_1x_3x_1)$,	(17)	$(x_3x_2x_1x_3x_1, x_3x_1x_3x_2x_1)$,
(7)	$(x_3x_1x_2, x_1x_3x_2)$,	(18)	$(x_4x_3x_2x_1x_3, x_3x_4x_3x_2x_1)$,
(8)	$(x_3x_2x_2, x_2x_3x_2)$,	(19)	$(x_4x_3x_4x_3x_1, x_4x_3x_1x_4x_3)$,
(9)	$(x_3x_3x_1, x_3x_1x_3)$,	(20)	$(x_4x_3x_4x_3x_2, x_4x_3x_2x_4x_3)$,
(10)	$(x_3x_3x_2, x_3x_2x_3)$,	(21)	$(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1, x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1)$
(11)	$(x_4x_3x_3, x_3x_4x_3)$,		

oraz

$$(22) \quad (x_2x_3^nx_4x_3x_1, x_2x_1x_3^nx_4x_3),$$
$$(23) \quad (x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1, x_2x_1x_3^nx_4x_3x_2)$$

dla $n \geq 0$. Oczywiście zdefiniowany wyżej porządek spełnia DCC i jest zgodny ze zbiorem redukcji S. Wykorzystując fakt, że każdy element monoidu M_4 może być zapisany w jednej z postaci (5.1) nietrudno sprawdzić, że wypisane w tezie elementy, traktowane jako słowa monoidu wolnego, stanowią zbiór wszystkich słów zredukowanych względem S. Zauważmy również, że relacje pochodzące od par (1)–(13) definiują monoid $M_{4,3}$, zaś pozostałe relacje związane z parami (14)–(23) są w nim spełnione, co daje $K\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle/\mathcal{I}(S) \cong K[M_{4,3}]$. Ponieważ ostatnia część tezy wynika prosto z części pierwszej, to wystarczy sprawdzić, że wszystkie niejednoznaczności zbioru redukcji S są rozwiązywalne. Istnieje dokładnie 114 typów niejednoznaczności:

1. $(x_2x_2x_1)x_1 = x_2(x_2x_1x_1)$,
2. $(x_2x_3x_1)x_1 = x_2(x_3x_1x_1)$,
3. $(x_2x_3x_1)x_2 = x_2(x_3x_1x_2)$,
4. $(x_3x_2x_2)x_1 = x_3(x_2x_2x_1)$,
5. $(x_3x_3x_1)x_1 = x_3(x_3x_1x_1)$,
6. $(x_3x_3x_1)x_2 = x_3(x_3x_1x_2)$,
7. $(x_3x_3x_2)x_2 = x_3(x_3x_2x_2)$,
8. $(x_4x_2)x_1x_1 = x_4(x_2x_1x_1)$,
9. $(x_4x_2)x_2x_1 = x_4(x_2x_2x_1)$,
10. $(x_4x_2)x_3x_1 = x_4(x_2x_3x_1)$,
11. $(x_4x_3x_3)x_1 = x_4(x_3x_1x_1)$,
12. $(x_4x_3x_3)x_2 = x_4(x_3x_3x_2)$,
13. $(x_4x_4x_3)x_3 = x_4(x_4x_3x_3)$,
14. $(x_3x_2x_2)x_1x_1 = x_3x_2(x_2x_1x_1)$,

15. $(x_2x_3x_2x_1)x_1 = x_2x_3(x_2x_1x_1)$,
16. $(x_3x_1x_2)x_1x_1 = x_3x_1(x_2x_1x_1)$,
17. $(x_3x_1x_2)x_2x_1 = x_3x_1(x_2x_2x_1)$,
18. $(x_3x_1x_2)x_3x_1 = x_3x_1(x_2x_3x_1)$,
19. $(x_3x_2x_2)x_3x_1 = x_3x_2(x_2x_3x_1)$,
20. $(x_3x_3x_2)x_1x_1 = x_3x_3(x_2x_1x_1)$,
21. $(x_3x_3x_2)x_1x_2 = x_3(x_3x_2x_1x_2)$,
22. $(x_3x_3x_2)x_2x_1 = x_3x_3(x_2x_2x_1)$,
23. $(x_3x_3x_2)x_3x_1 = x_3x_3(x_2x_3x_1)$,
24. $(x_4x_2)x_3x_2x_1 = x_4(x_2x_3x_2x_1)$,
25. $(x_4x_3x_2x_3)x_1 = x_4x_3(x_2x_3x_1)$,
26. $(x_4x_3x_3)x_1x_1 = x_4x_3(x_3x_1x_1)$,
27. $(x_4x_3x_3)x_1x_2 = x_4x_3(x_3x_1x_2)$,
28. $(x_4x_3x_3)x_2x_2 = x_4x_3(x_3x_2x_2)$,
29. $(x_4x_4x_3)x_1x_1 = x_4x_4(x_3x_1x_1)$,
30. $(x_4x_4x_3)x_1x_2 = x_4x_4(x_3x_1x_2)$,
31. $(x_4x_4x_3)x_1x_3 = x_4(x_4x_3x_1x_3)$,
32. $(x_4x_4x_3)x_2x_2 = x_4x_4(x_3x_2x_2)$,
33. $(x_4x_4x_3)x_2x_3 = x_4(x_4x_3x_2x_3)$,
34. $(x_4x_4x_3)x_3x_1 = x_4x_4(x_3x_3x_1)$,
35. $(x_4x_4x_3)x_3x_2 = x_4x_4(x_3x_3x_2)$,
36. $(x_2x_3x_2x_1)x_3x_1 = x_2(x_3x_2x_1x_3x_1)$,
37. $(x_3x_1x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_1(x_2x_3x_2x_1)$,

38. $(x_3x_2x_1x_2)x_1x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_2x_1)$,

39. $(x_3x_2x_1x_2)x_2x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_2x_1)$,

40. $(x_3x_2x_1x_2)x_3x_1 = x_3x_1x_2(x_2x_3x_1)$,

41. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_1 = x_3x_2x_1(x_3x_1x_1)$,

42. $(x_3x_2x_1x_3x_1)x_2 = x_3x_2x_1(x_3x_1x_2)$,

43. $(x_3x_2x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_2(x_2x_3x_1x_2)$,

44. $(x_3x_3x_2)x_1x_3x_1 = x_3(x_3x_2x_1x_3x_1)$,

45. $(x_3x_3x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_3(x_2x_3x_1x_2)$,

46. $(x_4x_3x_1x_3)x_1x_1 = x_4x_3x_1(x_3x_1x_1)$,

47. $(x_4x_3x_1x_3)x_1x_2 = x_4x_3x_1(x_3x_1x_2)$,

48. $(x_4x_3x_1x_3)x_2x_2 = x_4x_3x_1(x_3x_2x_2)$,

49. $(x_4x_3x_1x_3)x_3x_1 = x_4x_3x_1(x_3x_3x_1)$,

50. $(x_4x_3x_1x_3)x_3x_2 = x_4x_3x_1(x_3x_3x_2)$,

51. $(x_4x_3x_2x_3)x_1x_1 = x_4x_3x_2(x_3x_1x_1)$,

52. $(x_4x_3x_2x_3)x_1x_2 = x_4x_3x_2(x_3x_1x_2)$,

53. $(x_4x_3x_2x_3)x_2x_1 = x_4x_3(x_2x_3x_2x_1)$,

54. $(x_4x_3x_2x_3)x_2x_2 = x_4x_3x_2(x_3x_2x_2)$,

55. $(x_4x_3x_2x_3)x_3x_1 = x_4x_3x_2(x_3x_3x_1)$,

56. $(x_4x_3x_2x_3)x_3x_2 = x_4x_3x_2(x_3x_3x_2)$,

57. $(x_4x_3x_3)x_2x_1x_2 = x_4x_3(x_3x_2x_1x_2)$,

58. $(x_4x_3x_4x_3x_1)x_1 = x_4x_3x_4(x_3x_1x_1)$,

59. $(x_4x_3x_4x_3x_1)x_2 = x_4x_3x_4(x_3x_1x_2)$,

60. $(x_4x_3x_4x_3x_1)x_3 = x_4x_3(x_4x_3x_1x_3)$,

61. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_2 = x_4x_3x_4(x_3x_2x_2)$,

62. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_3 = x_4x_3(x_4x_3x_2x_3)$,

63. $(x_4x_4x_3)x_2x_1x_2 = x_4x_4(x_3x_2x_1x_2)$,

64. $(x_4x_4x_3)x_2x_1x_3 = x_4(x_4x_3x_2x_1x_3)$,

65. $(x_4x_4x_3)x_4x_3x_1 = x_4(x_4x_3x_4x_3x_1)$,

66. $(x_4x_4x_3)x_4x_3x_2 = x_4(x_4x_3x_4x_3x_2)$,

67. $(x_3x_2x_1x_2)x_3x_2x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_3x_2x_1)$,

68. $(x_4x_3x_1x_3)x_2x_1x_2 = x_4x_3x_1(x_3x_2x_1x_2)$,

69. $(x_4x_3x_2x_1x_3)x_1x_1 = x_4x_3x_2x_1(x_3x_1x_1)$,

70. $(x_4x_3x_2x_1x_3)x_1x_2 = x_4x_3x_2x_1(x_3x_1x_2)$,

71. $(x_4x_3x_2x_1x_3)x_2x_2 = x_4x_3x_2x_1(x_3x_2x_2)$,

72. $(x_4x_3x_2x_1x_3)x_3x_1 = x_4x_3x_2x_1(x_3x_3x_1)$,

73. $(x_4x_3x_2x_1x_3)x_3x_2 = x_4x_3x_2x_1(x_3x_3x_2)$,

74. $(x_4x_3x_2x_3)x_2x_1x_2 = x_4x_3x_2(x_3x_2x_1x_2)$,

75. $(x_4x_3x_3)x_2x_1x_3x_1 = x_4x_3(x_3x_2x_1x_3x_1)$,

76. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_1x_1 = x_4x_3x_4x_3(x_2x_1x_1)$,

77. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_1x_2 = x_4x_3x_4(x_3x_2x_1x_2)$,

78. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_1x_3 = x_4x_3(x_4x_3x_2x_1x_3)$,

79. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_2x_1 = x_4x_3x_4x_3(x_2x_2x_1)$,

80. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_3x_1 = x_4x_3x_4x_3(x_2x_3x_1)$,

81. $(x_4x_4x_3)x_2x_1x_3x_1 = x_4x_4(x_3x_2x_1x_3x_1)$,

82. $(x_4x_3x_1x_3)x_2x_1x_3x_1 = x_4x_3x_1(x_3x_2x_1x_3x_1)$,

83. $(x_4x_3x_2x_1x_3)x_2x_1x_2 = x_4x_3x_2x_1(x_3x_2x_1x_2)$,

84. $(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1)x_1 = x_4x_3x_2x_1x_4(x_3x_1x_1)$,
85. $(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1)x_2 = x_4x_3x_2x_1x_4(x_3x_1x_2)$,
86. $(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1)x_3 = x_4x_3x_2x_1(x_4x_3x_1x_3)$,
87. $(x_4x_3x_2x_3)x_2x_1x_3x_1 = x_4x_3x_2(x_3x_2x_1x_3x_1)$,
88. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_1x_3x_1 = x_4x_3x_4(x_3x_2x_1x_3x_1)$,
89. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_3x_2x_1 = x_4x_3x_4x_3(x_2x_3x_2x_1)$,
90. $(x_4x_4x_3)x_2x_1x_4x_3x_1 = x_4(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1)$,
91. $(x_4x_3x_2x_1x_3)x_2x_1x_3x_1 = x_4x_3x_2x_1(x_3x_2x_1x_3x_1)$,
92. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_1x_4x_3x_1 = x_4x_3(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1)$,
93. $(x_2x_3^nx_4x_3x_1)x_1 = x_2x_3^nx_4(x_3x_1x_1)$,
94. $(x_2x_3^nx_4x_3x_1)x_2 = x_2x_3^nx_4(x_3x_1x_2)$,
95. $(x_2x_3^nx_4x_3x_1)x_3 = x_2x_3^n(x_4x_3x_1x_3)$,
96. $(x_4x_2)x_3^nx_4x_3x_1 = x_4(x_2x_3^nx_4x_3x_1)$,
97. $(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)x_1 = x_2x_3^nx_4x_3(x_2x_1x_1)$,
98. $(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)x_2 = x_2x_3^nx_4(x_3x_2x_1x_2)$,
99. $(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)x_3 = x_2x_3^n(x_4x_3x_2x_1x_3)$,
100. $(x_3x_1x_2)x_3^nx_4x_3x_1 = x_3x_1(x_2x_3^nx_4x_3x_1)$,
101. $(x_3x_2x_2)x_3^nx_4x_3x_1 = x_3x_2(x_2x_3^nx_4x_3x_1)$,
102. $(x_3x_3x_2)x_3^nx_4x_3x_1 = x_3x_3(x_2x_3^nx_4x_3x_1)$,
103. $(x_4x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 = x_4(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)$,
104. $(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)x_3x_1 = x_2x_3^nx_4(x_3x_2x_1x_3x_1)$,
105. $(x_3x_1x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 = x_3x_1(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)$,
106. $(x_3x_2x_1x_2)x_3^nx_4x_3x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_3^nx_4x_3x_1)$,

107. $(x_3x_2x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 = x_3x_2(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)$,

108. $(x_3x_3x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 = x_3x_3(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)$,

109. $(x_4x_3x_2x_3)x_3^nx_4x_3x_1 = x_4x_3(x_2x_3^{n+1}x_4x_3x_1)$,

110. $(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)x_4x_3x_1 = x_2x_3^n(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1)$,

111. $(x_3x_2x_1x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 = x_3x_2x_1(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)$,

112. $(x_4x_3x_2x_3)x_3^nx_4x_3x_2x_1 = x_4x_3(x_2x_3^{n+1}x_4x_3x_2x_1)$,

113. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_3^nx_4x_3x_1 = x_4x_3x_4x_3(x_2x_3^nx_4x_3x_1)$,

114. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 = x_4x_3x_4x_3(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)$,

gdzie $n \geq 0$. Weryfikacja rozwiązalności wypisanych wyżej niejednoznaczności choć jest nieskomplikowana, to uciążliwa i zajmuje wiele miejsca. Z tego powodu podamy tu dowód rozwiązalności tylko kilku, reprezentatywnych, typów niejednoznaczności. Jeśli przez $\xrightarrow{(i)}$ oznaczymy redukcję algebry $K\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ związaną z elementem zbioru S typu (i) (lub czasem wielokrotne jej złożenie), to przykładowo dla niejednoznaczności typu: 4, 12, 20, 25, 34, 50, 76, 84, 99, 108 i 114 mamy odpowiednio:

4. $(x_3x_2x_2)x_1 \xrightarrow{(8)} x_2x_3x_2x_1 \xrightarrow{(14)} x_2x_1x_3x_2$,
   $x_3(x_2x_2x_1) \xrightarrow{(4)} x_3x_2x_1x_2 \xrightarrow{(13)} x_2x_1x_3x_2$,

12. $(x_4x_3x_3)x_2 \xrightarrow{(11)} x_3x_4x_3x_2$,
    $x_4(x_3x_3x_2) \xrightarrow{(10)} x_4x_3x_2x_3 \xrightarrow{(16)} x_3x_4x_3x_2$,

20. $(x_3x_3x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(10)} x_3x_2x_3x_1x_1 \xrightarrow{(6)} x_3x_2x_1x_3x_1 \xrightarrow{(17)} x_3x_1x_3x_2x_1$,
    $x_3x_3(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(3)} x_3x_3x_1x_2x_1 \xrightarrow{(9)} x_3x_1x_3x_2x_1$,

25. $(x_4x_3x_2x_3)x_1 \xrightarrow{(16)} x_3x_4x_3x_2x_1$,
    $x_4x_3(x_2x_3x_1) \xrightarrow{(5)} x_4x_3x_2x_1x_3 \xrightarrow{(18)} x_3x_4x_3x_2x_1$,

34. $(x_4x_4x_3)x_3x_1 \xrightarrow{(12)} x_4x_3x_4x_3x_1 \xrightarrow{(19)} x_4x_3x_1x_4x_3$,
    $x_4x_4(x_3x_3x_1) \xrightarrow{(9)} x_4x_4x_3x_1x_3 \xrightarrow{(12)} x_4x_3x_4x_1x_3 \xrightarrow{(1)} x_4x_3x_1x_4x_3$,

50. $(x_4x_3x_1x_3)x_3x_2 \xrightarrow{(15)} x_3x_4x_3x_1x_3x_2 \xrightarrow{(15)} x_3x_3x_4x_3x_1x_2$
    $\xrightarrow{(7)} x_3x_3x_4x_1x_3x_2 \xrightarrow{(1)} x_3x_3x_1x_4x_3x_2 \xrightarrow{(9)} x_3x_1x_3x_4x_3x_2$,
    $x_4x_3x_1(x_3x_3x_2) \xrightarrow{(10)} x_4x_3x_1x_3x_2x_3 \xrightarrow{(15)} x_3x_4x_3x_1x_2x_3$
    $\xrightarrow{(7)} x_3x_4x_1x_3x_2x_3 \xrightarrow{(1)} x_3x_1x_4x_3x_2x_3 \xrightarrow{(16)} x_3x_1x_3x_4x_3x_2$,

76. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_1x_1 \xrightarrow{(20)} x_4x_3x_2x_4x_3x_1x_1 \xrightarrow{(6)} x_4x_3x_2x_4x_1x_3x_1$
$\xrightarrow{(1)} x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 \xrightarrow{(21)} x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1,$
$x_4x_3x_4x_3(x_2x_1x_1) \xrightarrow{(3)} x_4x_3x_4x_3x_1x_2x_1 \xrightarrow{(7)} x_4x_3x_4x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(1)} x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1,$

84. $(x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1)x_1 \xrightarrow{(21)} x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1x_1 \xrightarrow{(3)} x_4x_3x_1x_4x_3x_1x_2x_1$
$\xrightarrow{(7)} x_4x_3x_1x_4x_1x_3x_2x_1 \xrightarrow{(1)} x_4x_3x_1x_1x_4x_3x_2x_1$
$\xrightarrow{(6)} x_4x_1x_3x_1x_4x_3x_2x_1 \xrightarrow{(1)} x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1,$
$x_4x_3x_2x_1x_4(x_3x_1x_1) \xrightarrow{(6)} x_4x_3x_2x_1x_4x_1x_3x_1 \xrightarrow{(1)} x_4x_3x_2x_1x_1x_4x_3x_1$
$\xrightarrow{(3)} x_4x_3x_1x_2x_1x_4x_3x_1 \xrightarrow{(7)} x_4x_1x_3x_2x_1x_4x_3x_1$
$\xrightarrow{(1)} x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 \xrightarrow{(21)} x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1,$

99. $(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1)x_3 \xrightarrow{(23)} x_2x_1x_3^nx_4x_3x_2x_3 \xrightarrow{(16)} x_2x_1x_3^{n+1}x_4x_3x_2,$
$x_2x_3^n(x_4x_3x_2x_1x_3) \xrightarrow{(18)} x_2x_3^{n+1}x_4x_3x_2x_1 \xrightarrow{(23)} x_2x_1x_3^{n+1}x_4x_3x_2,$

108. $(x_3x_3x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 \xrightarrow{(10)} x_3x_2x_3^{n+1}x_4x_3x_2x_1 \xrightarrow{(23)} x_3x_2x_1x_3^{n+1}x_4x_3x_2,$
$x_3x_3(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1) \xrightarrow{(23)} x_3x_3x_2x_1x_3^nx_4x_3x_2$
$\xrightarrow{(10)} x_3x_2x_3x_1x_3^nx_4x_3x_2 \xrightarrow{(5)} x_3x_2x_1x_3^{n+1}x_4x_3x_2,$

114. $(x_4x_3x_4x_3x_2)x_3^nx_4x_3x_2x_1 \xrightarrow{(20)} x_4x_3x_2x_4x_3x_3^nx_4x_3x_2x_1 \xrightarrow{(11)} x_4x_3x_2x_3^nx_4x_3x_4x_3x_2x_1$
$\xrightarrow{(20)} x_4x_3x_2x_3^nx_4x_3x_2x_4x_3x_1 \xrightarrow{(22)} x_4x_3x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1x_4x_3$
$\xrightarrow{(23)} x_4x_3x_2x_1x_3^nx_4x_3x_2x_4x_3 \xrightarrow{(18)} x_3^nx_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4x_3,$
$x_4x_3x_4x_3(x_2x_3^nx_4x_3x_2x_1) \xrightarrow{(23)} x_4x_3x_4x_3x_2x_1x_3^nx_4x_3x_2 \xrightarrow{(18)} x_4x_3x_3^nx_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2$
$\xrightarrow{(11)} x_3^nx_4x_3x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 \xrightarrow{(20)} x_3^nx_4x_3x_2x_4x_3x_1x_4x_3x_2$
$\xrightarrow{(22)} x_3^nx_4x_3x_2x_1x_4x_3x_4x_3x_2 \xrightarrow{(20)} x_3^nx_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4x_3.$

Kończy to dowód lematu. □

Znając bazy liniowe algebr $K[M_{4,1}]$ oraz $K[M_{4,3}]$ oraz wiedząc, że $z = x_4x_3x_2x_1$ jest w nich elementem regularnym jesteśmy gotowi by przejść do dowodów głównych twierdzeń tego podrozdziału.

Twierdzenie 5.1.4. *Niech $K[M_4]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 4 nad ciałem K. Wtedy ideały P_1 oraz P_2 zdefiniowane w (5.7) są ideałami pierwszymi algebry $K[M_4]$.*

Dowód. Załóżmy na chwilę, że ideał P_1 jest pierwszy. Wtedy algebra $K[M_{4,1}] \cong K[M_4]/P_1$ jest pierwsza. Na podstawie Lematu 5.1.2 obraz elementu centralnego $z = x_4x_3x_2x_1 \in M_4$ w algebrze $K[M_{4,1}]$ jest regularny, zatem dzięki Propozycji 1.4.8 algebra $K[M_{4,1}]\langle z\rangle^{-1}$ jest również pierwsza. Uwzględniając izomorfizm $K[M_4]\langle z\rangle^{-1} \cong K[M_4'][x, x^{-1}]$ z Propozycji 2.1.7

stwierdzamy, że $K[M_{4,1}]\langle z\rangle^{-1} \cong K[M'_{4,1}][x, x^{-1}]$, gdzie $M'_{4,1} = M_{4,1}/(z = 1)$. Stąd wniosek, że algebra $K[M'_{4,1}]$ jest pierwsza. Niech teraz $M_{4,2}$ będzie monoidem pochodzącym od ideału P_2 ([1]) oraz $M'_{4,2} = M_{4,2}/(z = 1)$. Jeśli przez P'_1, P'_2 oznaczymy naturalne obrazy ideałów P_1, P_2 w algebrze $K[M'_4]$ odpowiednio, to wprost z definicji (5.7) ideałów P_1, P_2 wnosimy, że $P'_2 = \psi(P'_1)$, gdzie ψ jest inwolucją z Propozycji 2.1.10 (dla $n = 4$). Stąd wniosek, że ψ indukuje antyizomorfizm algebr $K[M'_{4,1}] \cong K[M'_4]/P'_1$ oraz $K[M'_{4,2}] \cong K[M'_4]/P'_2$, zatem algebra $K[M'_{4,2}]$ jest pierwsza. Ponieważ obraz elementu centralnego $z = x_4x_3x_2x_1 \in M_4$ w algebrze $K[M_{4,2}]$ jest regularny, to powołując się znów na izomorfizm z Propozycji 2.1.7 stwierdzamy, że centralna lokalizacja $K[M_{4,2}]\langle z\rangle^{-1} \cong K[M'_{4,2}][x, x^{-1}]$ jest algebrą pierwszą. W tej sytuacji Propozycja 1.4.8 implikuje pierwszość algebry $K[M_{4,2}]$, a ponieważ mamy $K[M_{4,2}] \cong K[M_4]/P_2$, to ideał P_2 jest pierwszy.

Aby zakończyć dowód musimy pokazać, że algebra $K[M_{4,1}] \cong K[M_4]/P_1$ jest pierwsza. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $aK[M_{4,1}]b = 0$ dla pewnych $0 \neq a, b \in K[M_{4,1}]$. Wykorzystując gradacje algebry $K[M_{4,1}]$ możemy dodatkowo założyć, że elementy a oraz b są jednorodne względem każdego z generatorów x_1, x_2, x_3, x_4. Niech $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$, gdzie $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in M_{4,1}$ są parami różne. Oznaczmy przez $k_{ij} \geq 0$ wykładniki występujące w postaci kanonicznej elementu w_i danej przez Lemat 5.1.2. Jeśli $k_{i2} \geq 1$ dla pewnego i, to

$$x_4w_i = (x_4x_3x_2x_1)^{k_{i1}+1}(x_3x_2x_1)^{k_{i2}-1}(x_2x_1)^{k_{i3}}x_1^{k_{i4}}(x_4x_3x_2)^{k_{i5}}(x_3x_2)^{k_{i6}}x_2^{k_{i7}}(x_4x_3)^{k_{i8}}x_3^{k_{i9}}x_4^{k_{i10}}.$$

Ponadto gdy $k_{i2} = 0$, to wykładnik przy $x_3x_2x_1$ w elemencie x_4w_i jest nadal równy zeru. Stąd wniosek, że gdy $k_{i2} \geq 2$ dla pewnego i, to $x_4a \neq 0$ oraz maksymalny z wykładników przy $x_3x_2x_1$ elementów $\mathrm{Supp}(x_4a)$ jest mniejszy niż maksymalny z wykładników k_{i2}. Zamieniając element a na x_4a oraz powtarzając tę procedurę skończenie wiele razy, możemy założyć, że $k_{i2} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Podobnie gdy $k_{i3} \geq 1$ dla pewnego i, to

$$x_4x_3w_i = (x_4x_3x_2x_1)^{k_{i1}+1}(x_3x_2x_1)^{k_{i2}}(x_2x_1)^{k_{i3}-1}x_1^{k_{i4}}(x_4x_3x_2)^{k_{i5}}(x_3x_2)^{k_{i6}}x_2^{k_{i7}}(x_4x_3)^{k_{i8}}x_3^{k_{i9}}x_4^{k_{i10}}$$

oraz gdy $k_{i3} = 0$, to wykładnik przy x_2x_1 w elemencie $x_4x_3w_i$ jest wciąż równy zeru. Dlatego jeśli $k_{i3} \geq 2$ dla pewnego i, to $x_4x_3a \neq 0$ oraz maksymalny z wykładników przy x_2x_1 elementów $\mathrm{Supp}(x_4x_3a)$ jest mniejszy niż maksymalny z wykładników k_{i3}. Podobnie jak poprzednio możemy więc założyć, że $k_{i3} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Analogiczne postępowanie oparte na lewostronnym mnożeniu przez $x_4x_3x_2$ pozwala także założyć, że $k_{i4} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. W końcu powołując się na regularność elementu $x_4x_3x_2x_1$ w algebrze $K[M_{4,1}]$, wykazaną w Lemacie 5.1.2, możemy ograniczyć się do sytuacji,

([1]) Tzn. $M_{4,2} = M_4/\rho_{P_2}$, gdzie ρ_{P_2} jest kongruencją w M_4 wyznaczoną przez P_2 (patrz Definicja 1.1.15).

w której $k_{i1} = 0$ dla pewnego i. Ponieważ element a jest jednorodny względem x_1, to musi wtedy być $\deg_{x_1}(a) \leq 3$. Dodatkowo wśród elementów $a \in K[M_{4,1}]$ spełniających wszystkie powyższe warunki możemy wybrać element najmniejszego stopnia. Analogiczne rozumowanie dla elementu $b \in K[M_{4,1}]$ pozwala założyć, że ma on dokładnie te same własności co a.

Poniżej rozważymy wszystkie cztery możliwości, gdy stopień $\deg_{x_1}(a)$ jest równy 3, 2, 1 oraz 0 odpowiednio. Rozważania te podzielimy na przypadki w zależności od zachowania się pewnych elementów. Dodatkowo we wszystkich tych przypadkach stosować będziemy redukcje polegające na zastępowaniu elementów innymi, prostszymi elementami oraz na usuwaniu regularnego czynnika. Rozumowania oparte na tej technice będą przeprowadzane dość często bez szczegółowych komentarzy, gdyż metoda ta została już dokładnie opisana w dowodzie Twierdzenia 3.1.3.

Zacznijmy od przypadku $\deg_{x_1}(a) = 3$. W tej sytuacji element a ma postać

$$\begin{aligned} a = (x_4x_3x_2x_1)^3a_1 &+ (x_4x_3x_2x_1)^2x_3x_2x_1a_2 + (x_4x_3x_2x_1)^2x_2x_1a_3 + (x_4x_3x_2x_1)^2x_1a_4 \\ &+ x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_2x_1a_5 + x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_1a_6 \\ &+ x_4x_3x_2x_1x_2x_1x_1a_7 + x_3x_2x_1x_2x_1x_1a_8, \end{aligned}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_2, x_3, x_4\rangle]$. Gdyby $a_8 = 0$, to $a = x_4x_3x_2x_1a'$ dla pewnego $a' \in K[M_{4,1}]$. Wykorzystując regularność elementu $x_4x_3x_2x_1$ w $K[M_{4,1}]$ moglibyśmy zamienić a na a' otrzymując sprzeczność z minimalnością stopnia elementu a. Ponadto musi być $x_4x_3a = 0$, bo w przeciwnym przypadku $0 \neq x_4x_3a = x_4x_3x_2x_1a'$ dla pewnego $a' \in K[M_{4,1}]$. Podobnie jak wcześniej zamiana a na a' prowadziłaby do sprzeczności. Zauważmy, że równość

$$\begin{aligned} 0 = x_4x_3a = (x_4x_3x_2x_1)^3x_4x_3a_1 + (x_4x_3x_2x_1)^3x_3a_2 + (x_4x_3x_2x_1)^3a_3& \\ + (x_4x_3x_2x_1)^2x_1x_4x_3a_4 + (x_4x_3x_2x_1)^2x_3x_2x_1a_5& \\ + (x_4x_3x_2x_1)^2x_1x_3a_6 + (x_4x_3x_2x_1)^2x_1a_7& \\ + x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_1a_8& \end{aligned}$$

gwarantuje $a_8 = 0$. Istotnie, na początek odnotujmy, że dzięki Lematowi 5.1.2 relacja $x_4x_3x_2x_1x_2x_1x_1a_8 \in (x_4x_3x_2x_1)^2K[M_{4,1}]$ zachodzi tylko wtedy, gdy $x_4x_3x_2x_1x_2x_1x_1a_8 = 0$. Następnie równość $x_4x_3x_2x_1x_2x_1x_1a_8 = 0$ w połączeniu z regularnością elementu $x_4x_3x_2x_1$ implikuje $x_2x_1x_1a_4 = 0$. Mnożąc lewostronnie ostatnią równość przez x_4x_3 oraz korzystając z regularności elementu $x_4x_3x_2x_1$ otrzymujemy $x_1a_4 = 0$, zaś mnożąc tę równość z lewej strony przez $x_4x_3x_2$ i ponownie wykorzystując regularność elementu $x_4x_3x_2x_1$ dostajemy w końcu $a_8 = 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\deg_{x_1}(a) \leq 2$. Analogicznie $\deg_{x_1}(b) \leq 2$.

Załóżmy więc, że $\deg_{x_1}(a) = 2$. Wtedy element a ma postać

$$\begin{aligned} a = (x_4x_3x_2x_1)^2a_1 &+ x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1a_2 + x_4x_3x_2x_1x_2x_1a_3 \\ &+ x_4x_3x_2x_1x_1a_4 + x_3x_2x_1x_2x_1a_5 \\ &+ x_3x_2x_1x_1a_6 + x_2x_1x_1a_7, \end{aligned}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_2, x_3, x_4\rangle]$. Rozważmy teraz element

$$\begin{aligned} x_4x_3a = (x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3a_1 + (x_4x_3x_2x_1)^2x_3a_2 &+ (x_4x_3x_2x_1)^2a_3 \\ &+ x_4x_3x_2x_1x_1x_4x_3a_4 + x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1a_5 \\ &+ x_4x_3x_2x_1x_1x_3a_6 + x_4x_3x_2x_1x_1a_7. \end{aligned}$$

Gdyby $x_4x_3a \neq 0$, to zastępując a elementem x_4x_3a i skracając element regularny $x_4x_3x_2x_1$ otrzymalibyśmy niezerowy element stopnia mniejszego niż a, sprzeczność. Musi więc być $x_4x_3a = 0$. Dzięki Lematowi 5.1.2 otrzymujemy w szczególności $x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1a_5 = 0$ oraz $x_4x_3x_2x_1x_1a_7 = 0$, co po uwzględnieniu regularności elementu $x_4x_2x_2x_1$ prowadzi do $x_3x_2x_1a_5 = 0$ oraz $x_1a_7 = 0$. Mnożąc pierwszą równość z lewej strony przez x_4, natomiast drugą przez $x_4x_3x_2$ i ponownie korzystając z regularności elementu $x_4x_3x_2x_1$ otrzymujemy w końcu $a_5 = a_7 = 0$. W tej sytuacji element a przyjmuje postać

$$\begin{aligned} a = (x_4x_3x_2x_1)^2a_1 &+ x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1a_2 + x_4x_3x_2x_1x_2x_1a_3 \\ &+ x_4x_3x_2x_1x_1a_4 + x_3x_2x_1x_1a_6. \end{aligned}$$

Ponadto musi być $a_6 \neq 0$, gdyż w przeciwnym wypadku $a \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,1}]$ i skracając czynnik regularny $x_4x_3x_2x_1$ otrzymalibyśmy sprzeczność z minimalnością stopnia elementu a. Mając tę uwagę w myśli rozważmy element

$$\begin{aligned} x_3x_2a = (x_4x_3x_2x_1)^2x_3x_2a_1 &+ x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_3x_2a_2 + x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_2a_3 \\ &+ x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1a_4 + (x_3x_2x_1)^2a_6 \end{aligned}$$

oraz towarzyszące dwie możliwości.

(1) Jeśli $x_3x_2a \neq 0$, to również $x_4x_3x_2a \neq 0$. Istotnie, gdyby

$$\begin{aligned} 0 = x_4x_3x_2a = (x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2a_1 + (x_4x_3x_2x_1)^2x_3x_2a_2 &+ (x_4x_3x_2x_1)^2x_1a_3 \\ &+ (x_4x_3x_2x_1)^2a_4 + x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1a_6, \end{aligned}$$

to dzięki Lematowi 5.1.2 również $x_4x_3x_2x_1x_3x_1x_1a_6 = 0$ i w konsekwencji $a_6 = 0$, co jak wiemy jest niemożliwe. Zamiana elementu a na $x_4x_3x_2a$ i usunięcie elementu regularnego $x_4x_3x_2x_1$ prowadzi do sprzeczności z minimalnością stopnia elementu a.

(2) Jeśli natomiast $x_3x_2a = 0$, to ponowne wykorzystanie Lematu 5.1.2 prowadzi do $(x_3x_2x_1)^2a_6 = 0$, co po lewostronnym wymnożeniu przez x_4^2 i skróceniu elementu $(x_4x_3x_2x_1)^2$ daje ostatecznie $a_6 = 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że musi zachodzić $\deg_{x_1}(a) \leq 1$. Analogicznie stwierdzamy, że także $\deg_{x_1}(b) \leq 1$.

Niech więc $\deg_{x_1}(a) = 1$. W tej sytuacji element a przyjmuje postać

$$a = x_4x_3x_2x_1a_1 + x_3x_2x_1a_2 + x_2x_1a_3 + x_1a_4, \tag{5.11}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_2, x_3, x_4\rangle]$. Rozważmy teraz element

$$x_2a = x_4x_3x_2x_1x_2a_1 + x_3x_2x_1x_2a_2 + x_2x_1x_2a_3 + x_2x_1a_4 \tag{5.12}$$

i odpowiadające mu podprzypadki.

(3) Jeśli $x_2a \neq 0$, to zamieniając a na x_2a możemy założyć, że w zapisie elementu a w postaci (5.11) mamy $a_4 = 0$. Wtedy element a ma postać

$$a = x_4x_3x_2x_1a_1 + x_3x_2x_1a_2 + x_2x_1a_3.$$

Przyjrzyjmy się elementowi

$$x_3x_2a = x_4x_3x_2x_1x_3x_2a_1 + x_3x_2x_1x_3x_2a_2 + x_3x_2x_1x_2a_3 \tag{5.13}$$

i rozpatrzmy towarzyszące mu podprzypadki.

(3.1) Jeśli $x_3x_2a \neq 0$, to zastępując a elementem x_3x_2a możemy założyć, że element a zapisany w postaci (5.12) spełnia $a_3 = a_4 = 0$. Wtedy albo $x_4a = x_4x_3x_2x_1(x_4a_1 + a_2) = 0$, co prowadzi do $x_4a_1 + a_2 = 0$ i w konsekwencji $a = (x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)a_1$, albo zachodzi $x_4a = x_4x_3x_2x_1(x_4a_1 + x_2) \neq 0$ i skrócenie $x_4x_3x_2x_1$ prowadzi do elementu z $K[\langle x_2, x_3, x_4\rangle]$, tzn. $\deg_{x_1}(a) = 0$ (zauważmy, że tym razem wymieniając a na x_4a nie moglibyśmy powołać się na minimalność stopnia oryginalnego elementu a, gdyż kolejne wymiany zwiększyły jego stopień o 4).

(3.2) Przejdźmy do drugiej możliwości w (5.13), tzn. $x_3x_2a = 0$. Wtedy Lemat 5.1.2 daje $x_3x_2a_1 = 0$ oraz $x_3x_2x_1(x_3x_2a_2 + x_2a_3) = 0$. Mnożąc pierwszą równość z lewej strony przez x_4 i wykorzystując regularność elementu $x_4x_3x_2$ w algebrze $K[\langle x_2, x_3, x_4\rangle] \cong K[M_{3,1}]$ (patrz Lemat 3.1.1) otrzymujemy $a_1 = 0$. Następnie mnożąc z lewej strony drugą z uzyskanych równości przez x_4 i usuwając element $x_4x_3x_2x_1$ dostajemy $x_3x_2a_2 + x_2a_3 = 0$. Mnożąc tę równość lewostronnie przez x_4x_3 uzyskujemy $x_4x_3x_2(x_3a_2 + a_3) = 0$, co w konsekwencji prowadzi do $x_3a_2 + a_3 = 0$ oraz $a = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)a_2$.

(4) Wróćmy teraz do równości (5.12) i rozważmy przypadek, w którym $x_2a = 0$. W tej sytuacji Lemat 5.1.2 gwarantuje, że $x_2a_1 = 0$, $x_3x_2x_1x_2a_2 = 0$ oraz $x_2x_1(x_2a_3 + a_4) = 0$. Regularność elementu $x_4x_3x_2x_1$ oraz elementu $x_4x_3x_2$ w $K[\langle x_2, x_3, x_4\rangle] \cong K[M_{3,1}]$ implikuje wtedy $a_1 = a_2 = 0$ oraz $x_2a_3 + a_4 = 0$, czyli $a = (x_2x_1 - x_1x_2)a_3$.

Podsumowując, w każdym z przypadków (3.1), (3.2) oraz (4) element a jest postaci $a = ua'$, gdzie $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4, x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3, x_2x_1 - x_1x_2\}$, natomiast element $a' \in K[\langle x_2, x_3, x_4\rangle]$ jest jednorodny względem x_2, x_3 oraz x_4. Jeśli dalej dopuścimy sytuację, w której $u = 1$, to włączymy do rozważań opuszczony dotychczas przypadek $\deg_{x_1}(a) = 0$. Przy tak przyjętych oznaczeniach pozostaje do rozpatrzenia kilka możliwości.

(5) Niech $a(x_3x_2)^t \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 0$. Ponieważ dla pewnego $t \geq 0$ mamy $a'(x_3x_2)^t = (x_4x_3x_2)^t a''$, gdzie element $a'' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ jest jednorodny względem x_2, x_3, to zastępując element a przez $a(x_3x_2x_1)^t$ oraz usuwając $(x_4x_3x_2x_1)^t$ możemy dalej założyć, że $a = ua''$. Rozważmy następujące podprzypadki.

(5.1) Załóżmy, że $ax_2^t \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 0$. Ponieważ $a''x_2^t \in K[\langle x_3x_2, x_2\rangle]$ dla pewnego $t \geq 0$, to dzięki jednorodności a'' możemy przyjąć, że $a''x_2^t = (x_3x_2)^n x_2^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. Zastępując więc a elementem ax_2^t redukujemy do sytuacji, w której $a = u(x_3x_2)^n x_2^m$.

(5.2) Jeśli $ax_2^{t+1} = 0$ oraz $ax_2^t \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$, to zastępując a elementem ax_2^t możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $ax_2 = 0$. W tej sytuacji Lemat 5.1.2 gwarantuje, że $a''x_2 = 0$ co, jak nietrudno sprawdzić, pozwala zapisać $a'' = a'''(x_3x_2 - x_2x_3)$ dla pewnego $a''' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Ponieważ $x_3(x_3x_2 - x_2x_3) = 0$, to dzięki jednorodności a''' względem x_2, x_3 możemy założyć, że element a''' jest postaci $(x_3x_2)^n x_2^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. Łącznie $a = u(x_3x_2)^n x_2^m (x_3x_2 - x_2x_3)$.

(6) Niech teraz, w przeciwieństwie do (5), $a(x_3x_2)^{t+1} = 0$ oraz $a(x_3x_2)^t \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$. Zamieniając a na $a(x_3x_2)^t$ możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $ax_3x_2 = 0$. W tej sytuacji Lemat 5.1.2 gwarantuje, że $a'x_3x_2 = 0$. Zapiszmy $a' = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$, gdzie $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in \langle x_2, x_3, x_4\rangle$ są parami różne i oznaczmy przez k_{ij} wykładniki występujące w postaci kanonicznej elementu w_i danej przez Lemat 5.1.2. Jeśli $k_{i8} \geq 2$ lub $k_{i10} \geq 2$ dla pewnego i, to $a'x_3x_2 \neq 0$ (stosujemy tu argumenty analogiczne do tych z początku dowodu, służących do redukcji stopnia elementu a względem x_1). Musi więc być $k_{i8}, k_{i10} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Ponadto możemy założyć, że $k_{i5} = 0$ dla pewnego i. Istotnie, gdy $k_{i5} \geq 1$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, to zastępując a elementem ax_1 i usuwając $x_4x_3x_2x_1$ otrzymamy nowy element, w którym wykładniki k_{i5} dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$ są o jeden mniejsze niż w elemencie wyjściowym. Powtarzając tę procedurę skończenie wiele razy osiągniemy to,

czego chcieliśmy. Stąd wniosek, że $\deg_{x_4}(a') \leq 2$. Dodatkowo gdyby $\deg_{x_4}(a') = 0$, to wtedy $a'x_3x_2 \neq 0$, czyli $\deg_{x_4}(a') \in \{1, 2\}$. Jeśli $\deg_{x_4}(a') = 2$, to element a' ma postać

$$a' = a'_1(x_4x_3x_2)^2 + a'_2x_4x_3x_2x_4x_3 + a'_3x_4x_3x_2x_4 + a'_4x_4x_3x_4,$$

gdzie $a'_i \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. W tej sytuacji równość

$$0 = a'x_3x_2 = a'_1x_3x_2(x_4x_3x_2)^2x_3 + a'_2x_3(x_4x_3x_2)^2 + a'_3(x_4x_3x_2)^2 + a'_4x_4x_3x_2x_4x_3$$

w połączeniu z Lematem 5.1.2 implikuje $a'_1x_3x_2 + a'_2x_3 + a'_3 = 0$ oraz $a'_4 = 0$. Zamieniając więc a na ax_1 oraz usuwając $x_4x_3x_2x_1$ redukujemy do przypadku, gdy $\deg_{x_4}(a') = 1$. W tej sytuacji mamy $a' = a'_1x_4x_3x_2 + a'_2x_4x_3 + a'_3x_4$ dla pewnych $a'_i \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$. Zauważmy, że równość $a'x_3x_2 = 0$ gwarantuje

$$0 = a'x_3x_2x_1 = (a'_1x_3x_2 + a'_2x_3 + a'_1)x_4x_3x_2x_1,$$

co po uwzględnieniu regularności elementu $x_4x_3x_2x_1$ daje $a'_1x_3x_2 + a'_2x_3 + a'_3 = 0$, a stąd

$$a = ua'_1(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4) + ua'_2(x_4x_3 - x_3x_4).$$

Rozpatrzmy teraz element

$$ax_2 = u(a'_1x_2 + a'_2)(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4) \tag{5.14}$$

i odpowiadające mu podprzypadki.

(6.1) Jeśli $ax_2 \neq 0$, to zamieniając element a na ax_2 możemy założyć, że $a'_2 = 0$. Wtedy element a ma postać $a = ua'_1(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4)$. Zauważmy, że $a'_1x_2^t \in K[\langle x_3x_2, x_2\rangle]$ dla pewnego $t \geq 0$. Jeśli $ax_2^t \neq 0$, to dzięki jednorodności możemy założyć, że $a'_1x_2^t = (x_3x_2)^nx_2^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. W tej sytuacji zamiana elementu a na ax_2^t prowadzi do redukcji $a = u(x_3x_2)^nx_2^m(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4)$. Jeśli natomiast istnieje takie $t \geq 0$, że $ax_2^{t+1} = 0$ oraz $ax_2^t \neq 0$, to wymieniając a na ax_2^t możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $ax_2 = 0$. W tej sytuacji równość

$$0 = ax_2 = ua'_1x_2(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4)$$

w połączeniu z Lematem 5.1.2 gwarantuje, że $a'_1x_2 = 0$. W takim przypadku, dokładnie tak samo jak w (5.2), stwierdzamy, że można przyjąć $a'_1 = (x_3x_2)^nx_2^m(x_3x_2 - x_2x_3)$ dla pewnych $n, m \geq 0$. Otrzymujemy więc $a = u(x_3x_2)^nx_2^m(x_3x_2 - x_2x_3)(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4)$.

(6.2) Wróćmy do (5.14) i załóżmy teraz, że $ax_2 = 0$. Wtedy Lemat 5.1.2 implikuje $a'_1x_2 + a'_2 = 0$, czyli element a jest postaci $a = ua'_1(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4 + x_2x_3x_4 - x_2x_4x_3)$.

Analogiczne rozumowanie pozwala uzyskać dokładnie te same informacje o możliwych postaciach elementu b. Aby zakończyć dowód wystarczy teraz pokazać, że gdy elementy a, b są postaci opisanej w (5.1), (5.2), (6.1) oraz (6.2), to równość $aK[M_{4,1}]b = 0$ nie może zachodzić. W tym celu wystarczy rozważyć sytuację, w której elementy a, b są postaci:

$$u(x_3x_2)^n x_2^m (x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4), \tag{5.15}$$

$$uc(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4 + x_2x_3x_4 - x_2x_4x_3), \tag{5.16}$$

$$u(x_3x_2)^n x_2^m (x_3x_2 - x_2x_3)(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4), \tag{5.17}$$

gdzie $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4, x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3, x_2x_1 - x_1x_2\}$, element $c \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ jest jednorodny względem x_2, x_3 oraz $n, m \geq 0$. Zacznijmy od przypadku, gdy a jest typu (5.15) z $u = x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4$ oraz $n, m \geq 0$, natomiast b jest typu (5.17) z $u = x_2x_1 - x_1x_2$ oraz $n', m' \geq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} ax_3b &= (x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)(x_3x_2)^n x_2^m (x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4)x_3 \\ &\qquad (x_2x_1 - x_1x_2)(x_3x_2)^{n'} x_2^{m'} (x_3x_2 - x_2x_3)(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4) \\ &= (x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)(x_3x_2x_1x_4x_3x_2 - x_4x_3x_2x_1x_3x_2) \\ &\qquad (x_3x_2)^{n+n'} x_2^{m+m'} (x_3x_2 - x_2x_3)(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4) \\ &= (x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1x_4x_3x_2 - (x_4x_3x_2x_1)^2 x_3x_2)(x_3x_2)^{n+n'} x_2^{m+m'} \\ &\qquad (x_3x_2x_4x_3x_2 - x_2x_3x_4x_3x_2 - x_3x_2x_3x_2x_4 + x_2x_3x_2x_3x_4). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Na podstawie (5.18) oraz Lematu 5.1.2 wnioskujemy, że ax_3b zawiera cztery różne elementy z $(x_4x_3x_2x_1)^2 M_{4,1}$ w swoim nośniku. W szczególności $ax_3b \neq 0$, sprzeczność. Zajmijmy się teraz przypadkiem, gdy a oraz b są typu (5.16) z $u = x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3$ oraz $c, c' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ odpowiednio. Wtedy dla ustalonych $k, n, m \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} ax_1(x_3x_2)^k x_2^n x_3^m x_4 b &= uc(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4 + x_2x_3x_4 - x_2x_4x_3)x_1(x_3x_2)^k x_2^n x_3^m \\ &\qquad x_4(x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)c'(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4 + x_2x_3x_4 - x_2x_4x_3) \\ &= uc(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4 + x_2x_1x_3x_4 - x_2x_1x_4x_3)(x_3x_2)^k x_2^n x_3^m \\ &\qquad (x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3)c'(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4 + x_2x_3x_4 - x_2x_4x_3). \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że część elementu $ax_1(x_3x_2)^k x_2^n x_3^m x_4 b$ leżąca w $(x_4x_3x_2x_1)^2 M_{4,1}$ jest równa

$$(x_4x_3x_2x_1)^2 uc(x_3x_2)^n x_2^n x_3^m c'(x_4x_3x_2 - x_3x_2x_4 + x_2x_3x_4 - x_2x_4x_3). \tag{5.19}$$

Skoro $ax_1(x_3x_2)^k x_2^n x_3^m x_4 b = 0$, to również element (5.19) musi być równy zeru. W tej sytuacji nietrudno się przekonać, że Lemat 5.1.2 prowadzi do równości $c(x_3x_2)^k x_2^n x_3^m c' = 0$. Ponieważ liczby $k, n, m \geq 0$ są dowolne, to ostatnia równość implikuje $cK[\langle x_2, x_3 \rangle]c' = 0$, zatem z pierwszości algebry $K[\langle x_2, x_3 \rangle] \cong K[M_2]$ (patrz Propozycja 2.2.1) uzyskujemy $c = 0$ lub $c' = 0$ i w konsekwencji $a = 0$ lub $b = 0$ odpowiednio, sprzeczność. Analogiczne rozumowanie w pozostałych przypadkach również prowadzi do sprzeczności, a ponieważ argumenty użyte w celu otrzymania tych sprzeczności są zupełnie analogiczne do dwóch zaprezentowanych powyżej, to zostaną one pominięte. Kończy to dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 5.1.5. *Niech $K[M_4]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 4 nad ciałem K. Wtedy ideały P_3 oraz P_4 zdefiniowane w (5.8) są ideałami pierwszymi algebry $K[M_4]$.*

Dowód. Załóżmy na chwilę, że ideał P_3 jest pierwszy. Wtedy wykorzystując inwolucję ϕ z Propozycji 2.1.9 (dla $n = 4$) i uwzględniając łatwe do sprawdzenia równości

$$\phi(x_4x_1 - x_1x_3) = x_4x_1 - x_1x_4,$$
$$\phi(x_4x_2 - x_2x_4) = x_3x_1 - x_1x_3,$$
$$\phi(x_3x_2x_2x_1 - x_1x_2x_3x_2) = x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_3x_4$$

stwierdzamy, że $P_4 = \phi(P_3)$. Stąd wniosek, że ideał P_4 również jest pierwszy.

Aby zakończyć dowód musimy pokazać, że algebra $K[M_{4,3}] \cong K[M_4]/P_3$ jest pierwsza. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $aK[M_{4,3}]b = 0$ dla pewnych $0 \neq a, b \in K[M_{4,3}]$. Wykorzystując gradacje algebry $K[M_{4,3}]$ możemy dodatkowo założyć, że elementy a oraz b są jednorodne względem każdego z generatorów x_1, x_2, x_3, x_4. Niech $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$, gdzie $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in M_{4,3}$ są parami różne. Oznaczmy przez $k_{ij} \geq 0$ wykładniki występujące w postaci kanonicznej elementu w_i danej przez Lemat 5.1.3. Jeśli $k_{i12} \geq 1$ dla pewnego i, to element $w_ix_3x_2x_1$ jest równy

$$x_1^{k_{i1}}(x_2x_1)^{k_{i2}}(x_3x_1)^{k_{i4}}(x_3x_2x_1)^{k_{i5}}x_3^{k_{i7}}(x_4x_3x_1)^{k_{i8}}(x_4x_3x_2x_1)^{k_{i9}+1}(x_4x_3x_2)^{k_{i10}}(x_4x_3)^{k_{i11}}x_4^{k_{i12}-1}$$

lub (zakładając, że $k_{i6} \geq 1$)

$$x_1^{k_{i1}}(x_2x_1)^{k_{i2}}(x_3x_1)^{k_{i4}}(x_3x_2x_1)^{k_{i5}+1}(x_3x_2)^{k_{i6}-1}x_3^{k_{i7}}(x_4x_3x_2)^{k_{i10}+1}(x_4x_3)^{k_{i11}}x_4^{k_{i12}-1}$$

lub (zakładając, że $k_{i3} \geq 1$)

$$x_1^{k_{i1}}(x_2x_1)^{k_{i2}+1}x_2^{k_{i3}-1}(x_3x_2)^{k_{i6}}x_3^{k_{i7}}(x_4x_3x_2)^{k_{i10}+1}(x_4x_3)^{k_{i11}}x_4^{k_{i12}-1},$$

w zależności od typu elementu w_i (tu i dalej w dowodzie mówimy o trzech typach elementów monoidu $M_{4,3}$ występujących w Lemacie 5.1.3). Ponadto gdy $k_{i12} = 0$, to wykładnik przy

x_4 w elemencie $w_i x_3 x_2 x_1$ jest nadal równy zeru. Stąd wniosek, że gdy $k_{i12} \geq 2$ dla pewnego i, to $a x_3 x_2 x_1 \neq 0$ oraz maksymalny z wykładników przy x_4 elementów $\mathrm{Supp}(a x_3 x_2 x_1)$ jest mniejszy niż maksymalny z wykładników k_{i12}. Zastępując element a elementem $a x_3 x_2 x_1$ oraz powtarzając tę procedurę skończenie wiele razy, możemy założyć, że $k_{i12} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Analogiczne rozumowanie oparte na mnożeniu z prawej strony przez $x_2 x_1$ redukuje do sytuacji, w której $k_{i8}, k_{i11} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. W końcu prawostronne mnożenie przez x_1 pozwala zakładać, że $k_{i10} \in \{0, 1\}$, gdy w_i jest elementem pierwszego typu. Natomiast gdy w_i jest typu drugiego lub trzeciego oraz $k_{i10} \geq 2$, to $a x_1 \neq 0$. Obserwacje te pozwalają założyć, że $\deg_{x_4}(a) \leq 4$. Istotnie, gdy $\deg_{x_4}(a) > 4$, to dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$ mamy $k_{i9} \geq 1$, gdy w_i jest typu pierwszego oraz $k_{i10} > 2$, gdy w_i jest typu drugiego lub trzeciego. W tej sytuacji, gdy $\mathrm{Supp}(a)$ nie zawiera elementów typu dwa lub trzy, to skracając $x_4 x_3 x_2 x_1$ zmniejszamy stopień elementu a względem x_4. Jeżeli natomiast $\mathrm{Supp}(a)$ zawiera elementy typu dwa lub trzy, to $a x_1 \neq 0$, zatem zamieniając a na $a x_1$ i skracając $x_4 x_3 x_2 x_1$ otrzymujemy element mniejszego stopnia względem x_4. Dodatkowo wśród elementów $a \in K[M_{4,3}]$ spełniających opisane powyżej warunki możemy wybrać element najmniejszego stopnia. Analogiczne rozumowanie dla elementu $b \in K[M_{4,3}]$ pozwala założyć, że ma on dokładnie te same własności co a.

Dalej rozważymy wszystkie pięć możliwości, gdy stopień $\deg_{x_4}(a)$ jest równy 4, 3, 2, 1 oraz 0 odpowiednio. Rozważania te podzielimy na przypadki w zależności od zachowania się pewnych elementów. Ponadto tak jak w Twierdzeniu 5.1.4 stosować będziemy rozumowania oparte o redukcję polegającą na zastępowaniu elementów innymi, prostszymi elementami oraz na usuwaniu regularnego czynnika.

Zacznijmy od przypadku $\deg_{x_4}(a) = 4$. W tej sytuacji element a ma postać

$$\begin{aligned} a = a_1(x_4x_3x_2x_1)^3 &+ a_2(x_4x_3x_2x_1)^3x_4x_3x_1 + a_3(x_4x_3x_2x_1)^3x_4x_3x_2 \\ &+ a_4(x_4x_3x_2x_1)^3x_4x_3 + a_5(x_4x_3x_2x_1)^3x_4 \\ &+ a_6(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1x_4x_3x_2 + a_7(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1x_4x_3 \\ &+ a_8(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2x_4x_3 + a_9(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1x_4 \\ &+ a_{10}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2x_4 + a_{11}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_4 \\ &+ a_{12}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_4x_3 + a_{13}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_4 \\ &+ a_{14}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_4 + a_{15}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4x_3x_4 \\ &+ a_{16}x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_4x_3x_4, \end{aligned} \tag{5.20}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_1, x_2, x_3 \rangle]$. Gdyby $a_{16} = 0$, to $a = x_4 x_3 x_2 x_1 a'$ dla pewnego $0 \neq a' \in K[M_{4,3}]$

i wymieniając a na a' otrzymalibyśmy sprzeczność z minimalnością stopnia elementu a. Stąd wniosek, że $a_{16} \neq 0$. Ponadto uwzględniając postać (5.20) elementu a nietrudno sprawdzić, że składniki elementu $ax_3x_2x_1$ zawierające $a_1, \dots, a_{15}$ są elementami zbioru $(x_4x_3x_2x_1)^2K[M_{4,3}]$. Zauważmy też, że $ax_3x_2x_1 = 0$. Istotnie, w przeciwnym przypadku uzyskalibyśmy $0 \neq ax_3x_2x_1 = x_4x_3x_2x_1a'$ dla pewnego $a' \in K[M_{4,3}]$ i wymiana a na a' prowadziłaby do sprzeczności. W tej sytuacji równość $ax_3x_2x_1 = 0$ gwarantuje, że zachodzi $a_{16}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4x_3x_2x_4 \in (x_4x_3x_2x_1)^2K[M_{4,3}]$, co dzięki Lematowi 5.1.3 jest możliwe tylko wtedy, gdy $a_{16}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4x_3x_2x_4 = 0$. Usuwając element regularny $x_4x_3x_2x_1$ wnosimy, że $a_{16}x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_4x_3 = 0$, co po wymnożeniu przez $x_2x_1x_1$ oraz skróceniu $(x_4x_3x_2x_1)^2$ implikuje $a_{16}x_4x_3x_1 = 0$. Pozostaje powołać się ponownie na Lemat 5.1.3 aby stwierdzić, że ostatnia równość gwarantuje $a_{16} = 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że musi być $\deg_{x_4}(a) \leq 3$. Analogicznie $\deg_{x_4}(b) \leq 3$.

Załóżmy więc, że $\deg_{x_4}(a) = 3$. Wtedy element a ma postać

$$\begin{aligned} a = a_1(x_4x_3x_2x_1)^3 &+ a_2(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1 + a_3(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2 \\ &+ a_4(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3 + a_5(x_4x_3x_2x_1)^2x_4 \\ &+ a_6x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2 + a_7x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3 \\ &+ a_8x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4x_3 + a_9x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4 \\ &+ a_{10}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4 + a_{11}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_4 \\ &+ a_{12}x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_4x_3 + a_{13}x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_4 \\ &+ a_{14}x_4x_3x_1x_4x_3x_4 + a_{15}x_4x_3x_2x_4x_3x_4, \end{aligned} \tag{5.21}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_1, x_2, x_3 \rangle]$. Teraz (5.21) gwarantuje, że $ax_2x_1 \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$, zatem musi być $ax_2x_1 = 0$. Istotnie, w przeciwnym wypadku skrócenie $x_4x_3x_2x_1$ prowadziłoby do elementu stopnia mniejszego niż stopień elementu a, a to jest niemożliwe. Uwzględniając

$$\begin{aligned} 0 = ax_2x_1 = a_1x_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^3 &+ a_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^3x_4x_3x_1 + a_3x_2(x_4x_3x_2x_1)^3 \\ &+ a_4(x_4x_3x_2x_1)^3 + a_5x_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^2x_4 \\ &+ a_6x_1(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2 + a_7(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1 \\ &+ a_8(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2 + a_9x_1(x_4x_3x_2x_1)^2x_4 \\ &+ a_{10}x_2(x_4x_3x_2x_1)^2x_4 + a_{11}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4 \\ &+ a_{12}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2 + a_{13}x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4 \\ &+ a_{14}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4 + a_{15}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_4 \end{aligned}$$

i korzystając z Lematu 5.1.3 wnioskujemy, że w szczególności $a_7(x_4x_3x_2x_1)^3x_4x_2x_1 = 0$, $a_{12}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2 = 0$ oraz $a_{14}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4 = 0$. Równości te, po pomnożeniu przez odpowiednie elementy, a następnie usunięciu $x_4x_3x_2x_1$ w stosownej potędze, prowadzą do $a_7x_4x_3x_1 = 0$, $a_{12}x_4x_3x_1 = 0$ oraz $a_{14}x_4x_3x_1 = 0$. Pozostaje raz jeszcze skorzystać z Lematu 5.1.3 aby przekonać się, że równości te implikują $a_7 = a_{12} = a_{14} = 0$. Ponieważ w tej sytuacji $ax_1 \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$, to opierając się na minimalności stopnia elementu a stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} 0 = ax_1 = a_1x_1(x_4x_3x_2x_1)^3 &+ a_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1 + a_3(x_4x_3x_2x_1)^3 \\ &+ a_4(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1 + a_5x_1(x_4x_3x_2x_1)^2x_4 \\ &+ a_6(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1 + a_8(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3 \\ &+ a_9x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4 + a_{10}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4 \\ &+ a_{11}x_4x_3x_2x_1x_4x_4x_3x_1x_4 + a_{13}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4 \\ &+ a_{15}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_4, \end{aligned}$$

co z kolei gwarantuje $a_8(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3 = 0$ oraz $a_{15}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_4 = 0$ i w konsekwencji daje $a_8 = a_{15} = 0$. Teraz $ax_3x_2x_1 \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$, zatem znów musi być

$$\begin{aligned} 0 = ax_3x_2x_1 = a_1x_3x_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^3 &+ a_2x_3x_1(x_4x_3x_2x_1)^3 + a_3x_3x_2(x_4x_3x_2x_1)^3 \\ &+ a_4x_3(x_4x_3x_2x_1)^3 + a_5(x_4x_3x_2x_1)^3 \\ &+ a_6x_3x_2(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1 + a_9(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_1 \\ &+ a_{10}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2 + a_{11}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3 \\ &+ a_{13}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2, \end{aligned}$$

co daje $a_{10}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2 = 0$, $a_{11}(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3 = 0$ i $a_{13}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2 = 0$. Stosując Lemat 5.1.3 uzyskujemy ostatecznie $a_{10} = a_{11} = a_{13} = 0$.

Podsumowując, otrzymaliśmy łącznie $a_i = 0$ dla $i \in \{7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Stąd wniosek, że element a zapisany w postaci (5.20) leży w zbiorze $x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$, zatem da się zapisać jako $a = x_4x_3x_2x_1a'$ dla pewnego $0 \neq a' \in K[M_{4,3}]$. Wymiana a na a' prowadzi w tej sytuacji do sprzeczności z minimalnością stopnia elementu a i tym samym gwarantuje, że musi być $\deg_{x_4}(a) \leq 2$. Analogicznie $\deg_{x_4}(b) \leq 2$.

Niech więc $\deg_{x_4}(a) = 2$. Wtedy element a można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} a = a_1(x_4x_3x_2x_1)^2 &+ a_2x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 + a_3x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 + a_4x_4x_3x_2x_1x_4x_3 \\ &+ a_5x_4x_3x_2x_1x_4 + a_6x_4x_3x_1x_3x_4x_3x_2 + a_7x_4x_3x_1x_4x_3 \\ &+ a_8x_4x_3x_2x_4x_3 + a_9x_4x_3x_1x_4 + a_{10}x_4x_3x_2x_4 + a_{11}x_4x_3x_4, \end{aligned} \tag{5.22}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle]$. Na początek zauważmy, że $ax_2x_1 \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$. Ze względu na minimalność stopnia elementu a musi więc być

$$\begin{aligned}0 = ax_2x_1 = a_1x_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^2 &+ a_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^2 + a_3x_2(x_4x_3x_2x_1)^2\\&+ a_4(x_4x_3x_2x_1)^2 + a_5x_2x_1x_4x_3x_2x_1x_4\\&+ a_6x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 + a_7x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1\\&+ a_8x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 + a_9x_1x_4x_3x_2x_1x_4\\&+ a_{10}x_2x_4x_3x_2x_1x_4 + a_{11}x_4x_3x_2x_1x_4.\end{aligned}$$

Stąd, dzięki Lematowi 5.1.3, uzyskujemy $(a_1x_2x_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4)(x_4x_3x_2x_1)^2 = 0$ oraz $a_7x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 = 0$. Usunięcie elementu $(x_4x_3x_2x_1)^2$ z pierwszej równości daje

$$a_1x_2x_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4 = 0. \tag{5.23}$$

Natomiast pozbywając się elementu $x_4x_3x_2x_1$ w równości drugiej uzyskujemy $a_7x_4x_3x_1 = 0$. Stosując Lemat 5.1.3 konkludujemy, że $a_7 = 0$. Ponownie powołując się na minimalność stopnia elementu a stwierdzamy, że relacja $ax_3x_2x_1 \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$ gwarantuje

$$\begin{aligned}0 = ax_3x_2x_1 = a_1x_3x_2x_1(x_4x_3x_2x_1)^2 &+ a_2x_3x_1(x_4x_3x_2x_1)^2 + a_3x_3x_2(x_4x_3x_2x_1)^2\\&+ a_4x_3(x_4x_3x_2x_1)^2 + a_5(x_4x_3x_2x_1)^2\\&+ a_6x_3x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 + a_8x_3x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2\\&+ a_9x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 + a_{10}x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2\\&+ a_{11}x_4x_3x_2x_1x_4x_3.\end{aligned}$$

Po uwzględnieniu Lematu 5.1.3 ostatnia równość daje $(a_6x_3x_1 + a_8x_3 + a_{10})x_4x_3x_2x_1 = 0$, $a_9x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 = 0$ oraz $a_{11}x_4x_3x_2x_1x_4x_3 = 0$. Usuwając element regularny $x_4x_3x_2x_1$ otrzymujemy

$$a_6x_3x_1 + a_8x_3 + a_{10} = 0, \tag{5.24}$$

$a_9x_4x_3x_1 = 0$ oraz $a_{11}x_4x_3 = 0$. Druga z tych równości po zastosowaniu Lematu 5.1.3 prowadzi do $a_9 = 0$, natomiast trzecia do $a_{11}x_4x_3x_2x_1 = 0$, co implikuje $a_{11} = 0$. W tej sytuacji postać (5.22) elementu a oraz uzyskane równości $a_7 = a_9 = a_{11} = 0$ gwarantują, że $ax_1 \in x_4x_3x_2x_1 \in K[M_{4,3}]$ i tym samym

$$\begin{aligned}0 = ax_1 = a_1x_1(x_4x_3x_2x_1)^2 &+ a_2x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 + a_3(x_4x_3x_2x_1)^2\\&+ a_4x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 + a_5x_1x_4x_3x_2x_1x_4\\&+ a_6x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 + a_8x_4x_3x_2x_1x_4x_3\\&+ a_{10}x_4x_3x_2x_1x_4.\end{aligned}$$

Stąd zaś, znów powołując się na Lemat 5.1.3, uzyskujemy $(a_1x_1 + a_3)(x_4x_3x_2x_1)^2 = 0$, $(a_2x_1 + a_4 + a_6)x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_1 = 0$ oraz $a_8x_4x_3x_2x_1x_4x_3 = 0$, co dalej prowadzi do

$$a_1x_1 + a_3 = 0, \tag{5.25}$$

$$a_2x_1 + a_4 + a_6 = 0 \tag{5.26}$$

oraz $a_8 = 0$. Mając na uwadze otrzymane wcześniej równości rozważmy element

$$\begin{aligned} ax_3x_2 = a_1x_3x_2(x_4x_3x_2x_1)^2 &+ a_2x_3x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 + a_3x_3x_2x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 \\ &+ a_4x_3x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 + a_5x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2 \\ &+ a_6x_3x_1(x_4x_3x_2)^2 + a_{10}(x_4x_3x_2)^2. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Ponieważ $a_8 = 0$, to równość (5.24) zapewnia, że $a_6x_3x_1 + a_{10} = 0$, zatem (5.27) daje $ax_3x_2 \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$, co dzięki minimalności stopnia elementu a wymusza $ax_3x_2 = 0$. W tej sytuacji Lemat 5.1.3 oraz postać (5.27) elementu ax_3x_2 gwarantują, że zachodzi $a_1x_3x_2 = 0$. Mnożąc uzyskaną równość prawostronnie przez x_1 i pozbywając się elementu regularnego $x_3x_2x_1$ w algebrze $K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle] \cong K[M_{3,2}]$ (patrz Lemat 3.1.2) dostajemy $a_1 = 0$. W tym przypadku równość (5.25) zapewnia, że $a_3 = 0$. Dzięki $a_1 = a_3 = 0$ równość (5.23) redukuje się do $a_2x_1 + a_4 = 0$, co w połączeniu z (5.26) daje $a_6 = 0$. Pozostaje zauważyć, że $a_6 = a_8 = 0$ oraz (5.24) implikują $a_{10} = 0$. Podsumowując, otrzymaliśmy $a_i = 0$ dla $i \in \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Wracając do postaci (5.22) elementu a konkludujemy, że $a \in x_4x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$, co prowadzi do sprzeczności z minimalnością stopnia elementu a. Tym samym musi być $\deg_{x_4}(a) \leq 1$ i podobnie $\deg_{x_4}(b) \leq 1$.

Przejdźmy zatem do przypadku, w którym $\deg_{x_4}(a) = 1$. Wtedy można napisać

$$a = a_1x_4x_3x_2x_1 + a_2x_4x_3x_1 + a_3x_4x_3x_2 + a_4x_4x_3 + a_5x_4, \tag{5.28}$$

gdzie $a_i \in K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle]$. Rozważmy teraz element

$$ax_3 = a_1x_3x_4x_3x_2x_1 + a_2x_3x_4x_3x_1 + a_3x_3x_4x_3x_2 + a_4x_3x_4x_3 + a_5x_4x_3 \tag{5.29}$$

i towarzyszące dwie możliwości.

(1) Jeśli $ax_3 \neq 0$, to zamieniając a na ax_3 możemy założyć, że w zapisie elementu a w postaci (5.28) mamy $a_5 = 0$. Wtedy element a ma postać

$$a = a_1x_4x_3x_2x_1 + a_2x_4x_3x_1 + a_3x_4x_3x_2 + a_4x_4x_3. \tag{5.30}$$

Przyjrzyjmy się elementowi

$$ax_3x_2 = a_1x_3x_2x_4x_3x_2x_1 + a_2x_3x_1x_4x_3x_2 + a_3x_3x_2x_4x_3x_2 + a_4x_3x_4x_3x_2 \tag{5.31}$$

i rozważmy odpowiadające mu podprzypadki.

(1.1) Jeśli $ax_3x_2 \neq 0$, to zastępując a elementem ax_3x_2 możemy założyć, że element a zapisany w postaci (5.30) spełnia $a_2 = a_4 = 0$. Wtedy albo $ax_1 = (a_1x_1 + a_2)x_4x_3x_2x_1 = 0$, co prowadzi do $a_1x_1 + a_2 = 0$ i w konsekwencji $a = a_1(x_4x_3x_2x_1 - a_1x_4x_3x_2)$, albo zachodzi $ax_1 = (a_1x_1 + x_2)x_4x_3x_2x_1 \neq 0$ i skrócenie $x_4x_3x_2x_1$ prowadzi do elementu z $K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle]$, tzn. $\deg_{x_4}(a) = 0$ (zauważmy, że tym razem wymieniając a na ax_1 nie moglibyśmy powołać się na minimalność stopnia oryginalnego elementu a, gdyż kolejne wymiany zwiększyły jego stopień o 4).

(1.2) Gdy natomiast w (5.31) mamy $ax_3x_2 = 0$, to Lemat 5.1.3 daje $a_1x_3x_2x_4x_3x_2x_1 = 0$ oraz $(a_2x_3x_1 + a_3x_3x_2 + a_4x_3)x_4x_3x_2 = 0$. Usuwając element regularny $x_4x_3x_2x_1$ z pierwszej równości, a następnie mnożąc prawostronnie tak otrzymaną równość przez x_1 i korzystając z regularności elementu $x_3x_2x_1$ w algebrze $K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle] \cong K[M_{3,2}]$ (patrz Lemat 3.1.2) dostajemy $a_1 = 0$. Następnie mnożąc prawostronnie drugą z uzyskanych równości przez x_1 oraz usuwając element regularny $x_4x_3x_2x_1$ otrzymujemy $a_2x_1 + a_3x_2 + a_4 = 0$. Łącznie $a = a_2(x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3) + a_3(x_4x_3x_2 - x_2x_4x_3)$. Ponadto

$$ax_1 = a_3(x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3).$$

Jeśli $ax_1 \neq 0$, to zastępując a elementem ax_1 redukujemy do sytuacji, w której element a jest postaci $a = a_3(x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3)$. Jeśli natomiast $ax_1 = 0$, to dzięki Lematowi 5.1.3 musi wtedy być $a_3 = 0$ i w konsekwencji $a = a_2(x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3)$.

(2) Wróćmy do (5.29) i rozważmy teraz przypadek $ax_3 = 0$. W tej sytuacji Lemat 5.1.3 gwarantuje $a_1x_3x_4x_3x_2x_1 = 0$, $a_2x_3x_4x_3x_1 = 0$, $a_3x_3x_4x_3x_2 = 0$ oraz $(a_4x_3+a_5)x_4x_3 = 0$. Po wymnożeniu tych równości z prawej strony przez stosowne elementy i usunięciu elementu regularnego $x_4x_3x_2x_1$ dostajemy $a_1x_3 = a_2x_3 = a_3x_3 = 0$ oraz $a_4x_3 + a_5 = 0$. Pozostaje zauważyć, że mnożąc z prawej strony pierwsze trzy równości przez x_2x_1 i usuwając element regularny $x_3x_2x_1$ w $K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle]$ uzyskujemy $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Konkludujemy, że element a jest wtedy postaci $a = a_4(x_4x_3 - x_3x_4)$.

Podsumowując, we wszystkich przypadkach z (1) oraz (2) element a da się zapisać jako $a = au'$, gdzie element $a' \in K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle]$ jest jednorodny względem x_1, x_2 oraz x_3, zaś $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3, x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2, x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3, x_4x_3 - x_3x_4\}$. Jeśli dalej dopuścimy sytuację, w której $u = 1$, to włączymy do rozważań opuszczony przypadek $\deg_{x_4}(a) = 0$. Przy tak przyjętych oznaczeniach pozostaje do rozpatrzenia kilka możliwości.

(3) Niech $x_2^t a \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 0$. Ponieważ, jak nietrudno sprawdzić, dla pewnego $t \geq 0$ zachodzi $x_2^t a' = (x_2x_1)^t a''$, gdzie element $a'' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ jest jednorodny względem

x_2, x_3, to zastępując element a przez $(x_4x_3x_2)^t a$ oraz usuwając $(x_4x_3x_2x_1)^t$ możemy dalej założyć, że $a = a''u$. Rozważmy następujące podprzypadki.

(3.1) Załóżmy, że $x_3^t a \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 0$. Ponieważ $x_3^t a'' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ dla pewnego $t \geq 0$, to dzięki jednorodności a'' możemy przyjąć, że $x_3^t a'' = (x_3x_2)^n x_3^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. Zastępując więc a elementem $x_3^t a$ redukujemy do sytuacji, w której $a = (x_3x_2)^n x_3^m u$.

(3.2) Jeśli $x_3^{t+1}a = 0$ oraz $x_3^t a \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$, to zastępując a elementem $x_3^t a$ możemy przyjąć, że $t = 0$, tzn. $x_3 a = 0$. Jeśli $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2, x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3\}$, to $x_2 u = 0$ i dzięki jednorodności a'' względem x_2, x_3 możemy założyć, że $a'' = x_3^n$ dla pewnego $n \geq 0$. Wtedy $x_3 a = x_3^{n+1}u \neq 0$. Otrzymana sprzeczność zapewnia, że musi być $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3, x_4x_3 - x_3x_4, 1\}$. W tej sytuacji Lemat 5.1.3 daje $x_3 a'' = 0$, co pozwala zapisać $a'' = (x_3x_2 - x_2x_3)a'''$ dla pewnego $a''' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$, a ponieważ mamy $(x_3x_2 - x_2x_3)x_2 = 0$, to dzięki jednorodności elementu a''' względem x_2, x_3 możemy przyjąć, że a''' jest postaci $a''' = (x_3x_2)^n x_3^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. Wtedy element a zapisuje się jako $a = (x_3x_2 - x_2x_3)(x_3x_2)^n x_3^m u$. Ponieważ $x_4^n a x_1^n = (x_4x_3x_2x_1)^n (x_3x_2 - x_2x_3) x_3^n u$, to zamiana a na $x_4^n a x_1^n$ oraz skrócenie $(x_4x_3x_2x_1)^n$ pozwala zakładać, że $n = 0$, tzn. $a = (x_3x_2 - x_2x_3)x_3^m u$.

(4) Przypuśćmy, przeciwnie niż w (3), że $x_2^{t+1}a = 0$ oraz $x_2^t a \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$. Zamieniając a na $x_2^t a$ możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $x_2 a = 0$. Dalej rozumowanie podzielimy na dwa podprzypadki. Pierwszy, gdy $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2, x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3\}$, natomiast drugi, gdy $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3, x_4x_3 - x_3x_4, 1\}$.

(4.1) Niech $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2, x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3\}$. Zapiszmy $a' = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$, gdzie $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in \langle x_1, x_2, x_3\rangle \subseteq M_{4,3}$ są parami różne. Ponieważ $x_2 u = x_3x_2 u = 0$, to możemy założyć, każdy element w_i jest pierwszego typu (patrz Lemat 5.1.3). Jeśli przez k_{ij} oznaczymy wykładniki występujące w postaci kanonicznej elementu w_i, to w tej sytuacji równość $x_2 a = 0$ gwarantuje, że $k_{i1}, k_{i2}, k_{i4} \in \{0, 1\}$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$. Ponadto jeśli $k_{i5} \geq 1$ dla dowolnego i, to zamiana a na $x_4 a$ oraz usunięcie $x_4x_3x_2x_1$ pozwala zmniejszyć te wykładniki o jeden. Możemy więc założyć, że $k_{i5} = 0$ dla pewnego i. Dlatego, dzięki jednorodności elementu a' względem x_1, musi zachodzić $\deg_{x_1}(a') \leq 3$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 3$, to element a' jest postaci

$$\begin{aligned} a' = (x_3x_2x_1)^3 a'_1 + x_3x_1(x_3x_2x_1)^2 a'_2 + x_2x_1(x_3x_2x_1)^2 a'_3 \\ + x_1(x_3x_2x_1)^2 a'_4 + x_2x_1x_3x_1x_3x_2x_1 a'_5 \\ + x_1x_3x_1x_3x_2x_1 a'_6 + x_1x_2x_1x_3x_2x_1 a'_7 + x_1x_2x_1x_3x_1 a'_8, \end{aligned} \tag{5.32}$$

gdzie $a_i' \in K[\langle x_3 \rangle]$. W tej sytuacji równość

$$\begin{aligned}0 = x_2a = x_2x_1(x_3x_2x_1)^2x_3a_2'u + x_2x_1(x_3x_2x_1)^2a_4'u + (x_2x_1)^2x_3x_2x_1x_3a_5'u \\ + x_2x_1x_3x_1x_3x_2x_1a_6'u + (x_2x_1)^2x_3x_2x_1a_7'u \\ + (x_2x_1)^2x_3x_1a_8'u\end{aligned}$$

w połączeniu z Lematem 5.1.3 implikuje $(x_2x_1)^2x_3x_1a_8'u = 0$, co z kolei prowadzi do $a_8' = 0$. Uwzględniając postać (5.32) elementu a' stwierdzamy, że $a' \in x_3x_2x_1K[\langle x_1, x_2, x_3 \rangle]$, zatem zastępując a elementem x_4a oraz pozbywając się czynnika regularnego $x_4x_3x_2x_1$ redukujemy do sytuacji, w której $\deg_{x_1}(a') = 2$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 2$, to element a' można zapisać jako

$$\begin{aligned}a' = (x_3x_2x_1)^2a_1' + x_3x_1x_3x_2x_1a_2' + x_2x_1x_3x_2x_1a_3' + x_1x_3x_2x_1a_4' \\ + x_2x_1x_3x_1a_5' + x_1x_3x_1a_6' + x_1x_2x_1a_7',\end{aligned} \tag{5.33}$$

gdzie $a_i' \in K[\langle x_3 \rangle]$. W tym przypadku równość

$$\begin{aligned}0 = x_2a = x_2x_1x_3x_2x_1x_3a_2'u + x_2x_1x_3x_2x_1a_4'u \\ + (x_2x_1)^2x_3a_5'u + x_2x_1x_3x_1a_6'u + (x_2x_1)^2a_7'u\end{aligned}$$

i Lemat 5.1.3 gwarantują $(x_2x_1)^2(x_3a_5' + a_7')u = 0$ oraz $x_2x_1x_3x_1a_6'u = 0$. Pierwsza równość, po pomnożeniu z lewej strony przez $(x_4x_3)^2$ i usunięciu elementu regularnego $(x_4x_3x_2x_1)^2$ daje $(x_3a_5' + a_7')u = 0$, co po zastosowaniu Lematu 5.1.3 implikuje

$$x_3a_5' + a_7' = 0. \tag{5.34}$$

Natomiast druga z uzyskanych równości po pomnożeniu z lewej strony przez $x_4x_3x_2x_4x_3$ oraz usunięciu $(x_4x_3x_2x_1)^2$ gwarantuje $x_3a_6'u = 0$, co po kolejnym zastosowaniu Lematu 5.1.3 prowadzi do $a_6' = 0$. Rozważmy teraz element x_3a i odnotujmy, że

$$\begin{aligned}x_3a = (x_3x_2x_1)^2x_3a_1'u + x_3x_1x_3x_2x_1x_3a_2'u + (x_3x_2x_1)^2a_3'u \\ + x_3x_1x_3x_2x_1a_4'u + x_3x_1x_3x_2x_1a_5'u + x_1x_3x_2x_1a_7'u.\end{aligned} \tag{5.35}$$

Jeśli $x_3a \neq 0$, to dzięki $x_3a \in x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$ również $x_4x_3a \neq 0$. Zamieniając element a na x_4x_3a i usuwając $x_4x_3x_2x_1$ redukujemy do sytuacji, w której $\deg_{x_1}(a') = 1$. Jeśli zaś $x_3a = 0$, to równość (5.35) i Lemat 5.1.3 gwarantują, $x_1x_3x_2x_1a_7'u = 0$, co po drobnych zabiegach (analogicznych do tych, które wykonaliśmy kilka linijek wyżej) prowadzi do $a_7' = 0$. W tej sytuacji (5.34) daje $x_3a_5' = 0$ i w konsekwencji $a_5' = 0$. Uwzględniając postać (5.33) elementu

a stwierdzamy, że $a \in x_3x_2x_1K[M_{4,3}]$. Zastępując więc a elementem x_4a i pozbywając się $x_4x_3x_2x_1$ redukujemy do sytuacji, w której $\deg_{x_1}(a') = 1$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 1$, to element a' można zapisać jako

$$a' = x_3x_2x_1a'_1 + x_3x_1a'_2 + x_2x_1a'_3 + x_1a'_4, \tag{5.36}$$

gdzie $a'_i \in K[\langle x_3\rangle]$. W tej sytuacji dzięki

$$0 = x_2a = x_2x_1x_3a'_2u + x_2x_1a'_4u$$

oraz Lematowi 5.1.3 uzyskujemy $x_2x_1(x_3a'_2 + a'_4)u = 0$, co prowadzi do

$$x_3a'_2 + a'_4 = 0. \tag{5.37}$$

Przyjrzyjmy się teraz elementowi

$$x_3a = x_3x_2x_1x_3a'_1u + x_3x_1x_3a'_2u + x_3x_2x_1a'_3u + x_3x_1a'_4u = x_3x_2x_1(x_3a'_1 + a'_3)u. \tag{5.38}$$

Jeśli $x_3a \neq 0$, to zamieniając a na x_4x_3a oraz redukując $x_4x_3x_2x_1$ sprowadzamy do sytuacji, w której $\deg_{x_1}(a') = 0$. Jeśli natomiast $x_3a = 0$, to równość (5.38) wraz z Lematem 5.1.3 daje $x_3a'_1 + a'_3 = 0$ i wobec (5.37) mamy

$$a' = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)a'_1 + (x_3x_1 - x_1x_3)a'_2.$$

Ponieważ element a' jest jednorodny względem x_2, to $a'_1 = 0$ albo $a'_2 = 0$. Jeśli $a'_1 = 0$, to uwzględniając jednorodność elementu a'_2 możemy założyć, że $a'_2 = x_3^n$ dla pewnego $n \geq 0$. W tej sytuacji $a = (x_3x_1 - x_1x_3)x_3^nu$. Gdy natomiast $a'_2 = 0$, to dzięki jednorodności a'_1 możemy założyć, że $a'_1 = x_3^n$ dla pewnego $n \geq 0$ i wtedy $a = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_3^nu$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 0$, to $a' \in K[\langle x_3\rangle]$. Dzięki jednorodności a' możemy założyć, że $a' = x_3^n$ dla pewnego $n \geq 0$ i wtedy $a = x_3^nu$.

(4.2) Zajmijmy się teraz sytuacją, w której $u \in \{x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3, x_4x_3 - x_3x_4, 1\}$. Wykorzystując Lemat 5.1.3 stwierdzamy, że równość $x_2a = 0$ jest możliwa tylko wtedy, gdy $x_2a' = 0$. Zapiszmy $a' = \sum_{i=1}^n \lambda_iw_i$, gdzie $0 \neq \lambda_i \in K$ oraz $w_i \in \langle x_1, x_2, x_3\rangle \subseteq M_{4,3}$ są parami różne. Oznaczmy przez k_{ij} wykładniki występujące w postaci kanonicznej elementu w_i danej przez Lemat 5.1.3. Jeśli $k_{i1} \geq 2$ lub $k_{i2} \geq 2$ lub $k_{i4} \geq 2$ dla pewnego i, to $x_2a' \neq 0$ (stosujemy tu argumenty analogiczne do tych z podpunktu (4.1)). Musi więc być $k_{i1}, k_{i2}, k_{i4} \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Ponadto możemy założyć, że $k_{i5} = 0$ dla pewnego i. Stąd wniosek, że $\deg_{x_1}(a') \leq 3$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 3$, to element a' jest postaci

$$\begin{aligned} a' = (x_3x_2x_1)^3a_1' + x_3x_1(x_3x_2x_1)^2a_2' + x_2x_1(x_3x_2x_1)^2a_3' \\ + x_1(x_3x_2x_1)^2a_4' + x_2x_1x_3x_1x_3x_2x_1a_5' \\ + x_1x_3x_1x_3x_2x_1a_6' + x_1x_2x_1x_3x_2x_1a_7' + x_1x_2x_1x_3x_1a_8', \end{aligned} \tag{5.39}$$

gdzie $a_i' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$. Rzeczywiście, $\deg_{x_1}(a') = 3$ implikuje, że w $\mathrm{Supp}(a')$ pojawiają się tylko elementy dwóch pierwszych typów z Lematu 5.1.3. W tej sytuacji równość

$$\begin{aligned} 0 = x_2a' = x_2x_1(x_3x_2x_1)^2x_3x_2a_1' + x_2x_1(x_3x_2x_1)^2x_3a_2' + (x_2x_1)^2x_3x_2x_1x_3x_2a_3' \\ + x_2x_1(x_3x_2x_1)^2a_4' + (x_2x_1)^2x_3x_2x_1x_3a_5' \\ + x_2x_1x_3x_1x_3x_2x_1a_6' + (x_2x_1)^2x_3x_2x_1a_7' \\ + (x_2x_1)^2x_3x_1a_8' \end{aligned}$$

w połączeniu z Lematem 5.1.3 implikuje $(x_2x_1)^2x_3x_1a_8' = 0$. Mnożąc otrzymaną równość lewostronnie przez $(x_4x_3)^2$ i usuwając element regularny $(x_4x_3x_2x_1)^2$ dostajemy $x_3x_1a_8' = 0$. Pozostaje zauważyć, że dzięki $a_8' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ ostatnia równość zapewnia, że $a_8' = 0$. Uwzględniając postać (5.39) elementu a' stwierdzamy, że $a' \in x_3x_2x_1K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle]$, zatem zastępując a elementem x_4a oraz pozbywając się $x_4x_3x_2x_1$ redukujemy do sytuacji, w której $\deg_{x_1}(a') = 2$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 2$, to element a' można zapisać jako

$$\begin{aligned} a' = (x_3x_2x_1)^2a_1' + x_3x_1x_3x_2x_1a_2' + x_2x_1x_3x_2x_1a_3' + x_1x_3x_2x_1a_4' \\ + x_2x_1x_3x_1a_5' + x_1x_3x_1a_6' + x_1x_2x_1a_7', \end{aligned} \tag{5.40}$$

gdzie tym razem $a_1', \ldots, a_6' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ oraz $a_7' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ (patrz Lemat 5.1.3). W tym przypadku równość

$$\begin{aligned} 0 = x_2a' = x_2x_1x_3x_2x_1x_3x_2a_1' + x_2x_1x_3x_2x_1x_3a_2' + (x_2x_1)^2x_3x_2a_3' + x_2x_1x_3x_2x_1a_4' \\ + (x_2x_1)^2x_3a_5' + x_2x_1x_3x_1a_6' + (x_2x_1)^2a_7' \end{aligned}$$

i Lemat 5.1.3 dają $x_2x_1x_3x_2x_1(x_3x_2a_1' + x_3a_2' + a_4') = 0$ oraz $x_2x_1x_3x_1a_6' = 0$. Pierwsza równość, po pomnożeniu z lewej strony przez $x_4x_4x_3$ i pozbyciu się elementu regularnego $(x_4x_3x_2x_1)^2$ prowadzi do

$$x_3x_2a_1' + x_3a_2' + a_4' = 0. \tag{5.41}$$

Natomiast druga z uzyskanych równości gwarantuje $x_3x_1a_6' = 0$, co po wymnożeniu z lewej strony przez $x_4x_3x_2$ i wyeliminowaniu $x_4x_3x_2x_1$ daje $x_3a_6' = 0$. Ponieważ $a_6' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$, to ostatnia równość gwarantuje $a_6' = 0$. Rozważmy teraz element

$$\begin{aligned} x_3a' = (x_3x_2x_1)^2x_3a_1' + x_3x_1x_3x_2x_1x_3a_2' + (x_3x_2x_1)^2a_3' \\ + x_3x_1x_3x_2x_1a_4' + x_3x_1x_3x_2x_1a_5' + x_1x_3x_2x_1a_7'. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Jeśli $x_3a \neq 0$, to dzięki $x_3a' \in x_3x_2x_1K[\langle x_1, x_2, x_3\rangle]$ również $x_4x_3a \neq 0$. Zamieniając element a na x_4x_3a i usuwając $x_4x_3x_2x_1$ redukujemy do sytuacji, w której $\deg_{x_1}(a') = 1$. Jeśli zaś $x_3a = 0$, to Lemat 5.1.3 gwarantuje, że wtedy $x_3a' = 0$, co po uwzględnieniu postaci (5.42) elementu x_3a' prowadzi do $(x_3x_2x_1)^2(x_3a_1' + a_3') = 0$, $x_3x_1x_3x_2x_1(x_3a_2' + a_4' + a_5') = 0$ oraz $x_1x_3x_2x_1a_7' = 0$, a następnie (po drobnych zabiegach, analogicznych do tych, które wykonaliśmy kilka linijek wyżej) do

$$x_3a_1' + a_3' = 0, \qquad x_3a_2' + a_4' + a_5' = 0 \tag{5.43}$$

oraz $a_7' = 0$. Rozważmy teraz element x_3x_1a i zauważmy, że

$$\begin{aligned} x_3x_1a' = x_3x_1(x_3x_2x_1)^2a_1' + (x_3x_1)^2x_3x_2x_1a_2' + x_1(x_3x_2x_1)^2a_3' \\ + x_1x_3x_1x_3x_2x_1a_4' + x_1x_3x_1x_3x_2x_1a_5'. \end{aligned}$$

Gdyby $x_3x_1a = 0$, to dzięki Lematowi 5.1.3 również $x_3x_1a' = 0$, co z kolei prowadziłoby do $a_1' = a_2' = a_3' = 0$ oraz $a_4' + a_5' = 0$. W tej sytuacji równość (5.41) implikowałaby $a_4' = 0$ i w konsekwencji $a_5' = 0$, czyli $a' = 0$. Stąd wniosek, że $x_3x_1a \neq 0$ i również $x_4x_3x_1a \neq 0$. Zamieniając a na $x_4x_3x_1a$ i usuwając $x_4x_3x_2x_1$, a następnie wykorzystując (5.41) i (5.43) sprowadzamy element a do postaci

$$a = (x_3x_1 - x_1x_3)(x_3x_2x_1a_1' + x_3x_1a_2')u.$$

Dodatkowo jednorodność elementów $a_1', a_2' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ pozwala przyjąć, że zachodzi $a_1' = \lambda_1(x_3x_2)^n x_3^{m+1}$ oraz $a_2' = -\lambda_2(x_3x_2)^{n+1}x_3^m$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ oraz $n, m \geq 0$ (gdy $\lambda_1 = 0$, to dopuszczamy $n = -1$, natomiast gdy $\lambda_2 = 0$, to dopuszczamy $m = -1$). Prowadzi to do $a = (x_3x_1 - x_1x_3)(\lambda_1x_3x_2x_3x_1 - \lambda_2x_3x_1x_3x_2)(x_3x_2)^n x_3^m u$. Ponieważ $x_3x_2ux_1 = x_3x_2x_1u$, to

$$x_4^n a x_1^n = (x_4x_3x_2x_1)^n(x_3x_1 - x_1x_3)(\lambda_1x_3x_2x_3x_1 - \lambda_2x_3x_1x_3x_2)x_3^m u$$

i Lemat 5.1.3 gwarantuje, że $x_4^n a x_1^n \neq 0$. Zamieniając więc a na $x_4^n a x_1^n$ i skracając element $(x_4x_3x_2x_1)^n$ sprowadzamy a do postaci $a = (x_3x_1 - x_1x_3)(\lambda_1x_3x_2x_3x_1 - \lambda_2x_3x_1x_3x_2)x_3^m u$. Rozważmy osobno przypadki $u = x_4x_3 - x_3x_4$ oraz $u = x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3$.

(4.2.1) Gdy $u = x_4x_3 - x_3x_4$, to

$$\begin{aligned} x_4^m a(x_2x_1)^{m+1} = (x_4x_3x_2x_1)^m(x_3x_1 - x_1x_3) \\ (\lambda_1x_3x_2x_3x_1 - \lambda_2x_3x_1x_3x_2)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4) \end{aligned}$$

i Lemat 5.1.3 gwarantuje $x_4^m a(x_2x_1)^{n+1} \neq 0$. Zastępując więc a elementem $x_4^m a(x_2x_1)^{m+1}$, a następnie usuwając czynnik regularny $(x_4x_3x_2x_1)^m$ sprowadzamy element a do postaci $a = (x_3x_1 - x_1x_3)(\lambda_1 x_3x_2x_3x_1 - \lambda_2 x_3x_1x_3x_2)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)$. Teraz

$$x_4ax_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)x_4x_3x_2x_1x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4).$$

Jeśli $x_4ax_1 \neq 0$, to zastępując a elementem x_4ax_1 oraz skracając czynnik $(\lambda_1 - \lambda_2)x_4x_3x_2x_1$ redukujemy do przypadku, gdy $a = x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)$. Jeśli natomiast $x_4ax_1 = 0$, to koniecznie $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, co pozwala zredukować do przypadku, w którym $a = (x_3x_1 - x_1x_3)(x_3x_2x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)$.

(4.2.2) Gdy $u = x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3$, to

$$\begin{aligned} x_4ax_1 = {} & (\lambda_1 - \lambda_2)(x_4x_3x_2x_1)^2 x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m \\ & + x_4x_3x_2x_1x_3x_2x_1(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(\lambda_1 x_4x_3x_1 - \lambda_2 x_1x_4x_3) \end{aligned}$$

i Lemat 5.1.3 gwarantuje, że $x_4ax_1 \neq 0$. W tej sytuacji zamiana a na x_4ax_1 i pozbycie się $x_4x_3x_2x_1$ redukuje postać a do

$$\begin{aligned} a = {} & (\lambda_1 - \lambda_2)x_4x_3x_2x_1x_3x_1(x_3x_1 - x_3x_1)x_3^m \\ & - x_3x_2x_1(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(\lambda_1 x_4x_3x_1 - \lambda_2 x_1x_4x_3). \end{aligned}$$

Teraz

$$x_4a = -\lambda_2 x_4x_3x_2x_1(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3).$$

Jeśli $x_4a \neq 0$, to zastępując a elementem x_4a i skracając $-\lambda_2 x_4x_3x_2x_1$ możemy założyć, że $a = (x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3)$. Gdy natomiast $x_4a = 0$, to wtedy $\lambda_2 = 0$, co pozwala założyć, że $a = (x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(x_4x_3x_1x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_1)$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 1$, to element a' można zapisać jako

$$a' = x_3x_2x_1a_1' + x_3x_1a_2' + x_2x_1a_3' + x_1a_4', \tag{5.44}$$

gdzie $a_1', a_2' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ oraz $a_3', a_4' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ (patrz Lemat 5.1.3). Rozważmy dwa podprzypadki.

(4.2.3) Załóżmy najpierw, że $x_3^t a \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 0$. Ponieważ

$$x_3a' = x_3x_2x_1x_3a_1' + x_3x_1x_3a_2' + x_3x_2x_1a_3' + x_3x_1a_4'$$

oraz $x_3^t a_3', x_3^t a_4' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ dla pewnego $t \geq 0$, to wymieniając a na pewne $x_3^t a$ możemy przyjąć, że w zapisie (5.44) elementu a' zachodzi $a_3' = a_4' = 0$. Zauważmy, że taka wymiana dalej pozwala zakładać, że $x_2a = 0$. Istotnie, ponieważ $x_3x_2a = 0$ (element x_3x_2 komutuje z x_3), to również $0 = x_4x_2x_1x_3x_2a = x_4x_3x_2x_1x_2a$, co po usunięciu $x_4x_3x_2x_1$ daje żądany wynik. W takim razie, pamiętając, że w naszym przypadku $x_2a = 0$ implikuje $x_2a' = 0$, otrzymujemy $0 = x_2a' = x_2x_1(x_3x_2a_1' + x_3a_2')$, co gwarantuje $x_3x_2a_1' + x_3a_2' = 0$. W tej sytuacji jednorodność elementów $a_1', a_2' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ pozwala przyjąć $a_1' = (x_3x_2)^n x_3^{m+1}$ i $a_2' = -(x_3x_2)^{n+1}x_3^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$, co daje $a = (x_3x_2x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2)(x_3x_2)^n x_3^m u$. Ponieważ $x_3x_2ux_1 = x_3x_2x_1u$, to $x_4^n a x_1^n = (x_4x_3x_2x_1)^n(x_3x_2x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2)x_3^m u$, zatem skracając $(x_4x_3x_2x_1)^n$ otrzymujemy $a = (x_3x_2x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2)x_3^m u$.

(4.2.4) Jeżeli natomiast $x_3^{t+1}a = 0$ oraz $x_3^t a \neq 0$ dla pewnego $t \geq 0$, to wymieniając a na $x_3^t a$ możemy założyć, że $t = 0$, tzn. $x_3a = 0$. Wtedy Lemat 5.1.3 implikuje $x_3a' = 0$, mamy więc $x_2a' = x_3a' = 0$. Wracając do postaci (5.44) elementu a' zapiszmy $a_i' = a_{i1}' + x_2a_{i2}'$ dla $i = 3, 4$, gdzie elementy $a_{i1}' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ oraz $a_{i2}' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ są jednorodne względem x_2, x_3. Teraz równość

$$\begin{aligned} 0 = x_3a' &= x_3x_2x_1a_1' + x_3x_1a_2' + x_3x_2x_1a_3' + x_3x_1a_4' \\ &= x_3x_2x_1(x_3a_1' + a_{31}') + x_3x_1(x_3a_2' + a_{41}') + x_2x_1x_3x_2a_{32}' + x_1x_3x_2a_{42}' \end{aligned}$$

wraz z Lematem 5.1.3 implikuje $x_3a_1' + a_{31}' = 0$, $x_3a_2' + a_{41}' = 0$ oraz $a_{32}' = a_{42}' = 0$. Stąd wniosek, że $a_i' = a_{i1}' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ dla $i = 3, 4$ oraz $a_3' = -x_3a_1'$ i $a_4' = -x_3a_2'$. Wykorzystując uzyskane równości możemy napisać

$$a' = (x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)a_1' + (x_3x_1 - x_1x_3)a_2'.$$

Ponieważ $0 = x_2a' = x_2x_1(x_3x_2 - x_2x_3)a_1'$, to stąd $(x_3x_2 - x_2x_3)a_1' = 0$, a następnie dzięki $a_1' \in K[\langle x_3x_2, x_3\rangle]$ stwierdzamy, że $a_1' = 0$. Dalej jednorodność elementu a_2' pozwala przyjąć $a_2' = (x_3x_2)^n x_3^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$ i tym samym $a = (x_3x_1 - x_1x_3)(x_3x_2)^n x_3^m u$. Podobnie jak poprzednio, wykorzystując $x_3x_2ux_1 = x_3x_2x_1u$ możemy zredukować do przypadku, gdzie $n = 0$, tzn. $a = (x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m u$.

Gdy $\deg_{x_1}(a') = 0$, to $x_2a' = 0$ pozwala zapisać a' w postaci $a' = (x_3x_2 - x_2x_3)a''$, gdzie element $a'' \in K[\langle x_2, x_3\rangle]$ jest jednorodny względem x_2, x_3. Ponieważ mamy jednak $(x_3x_2 - x_2x_3)x_2 = 0$, to możemy założyć, że $a'' = (x_3x_2)^n x_3^m$ dla pewnych $n, m \geq 0$. W tej sytuacji $a = (x_3x_2 - x_2x_3)(x_3x_2)^n x_3^m u$ i znów zamieniając a na $x_4^n a x_1^n$ oraz skracając $(x_4x_3x_2x_1)^n$ redukujemy do $a = (x_3x_2 - x_2x_3)x_3^m u$.

Analogiczne rozumowanie pozwala uzyskać dokładnie te same informacje o możliwych postaciach elementu b. Aby zakończyć dowód wystarczy teraz pokazać, że gdy elementy a, b są postaci opisanej w punktach (3) oraz (4), to równość $aK[M_{4,1}]b = 0$ prowadzi do sprzeczności. Uwzględniając proste tożsamości $x_3x_1(x_3x_2 - x_2x_3) = (x_3x_1 - x_1x_3)x_3x_2$ oraz $x_3^m(x_4x_3 - x_3x_4)(x_2x_1)^{m+1} = (x_3x_2x_1)^m(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)$ dla $m \geq 0$ stwierdzamy, że wystarczy rozważyć sytuację, w której elementy a, b są postaci:

$$(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^n(x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3), \tag{5.45}$$

$$(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^n(x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2), \tag{5.46}$$

$$(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^n(x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3), \tag{5.47}$$

$$(x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_3^n(x_4x_3x_1 - x_1x_4x_3), \tag{5.48}$$

$$x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4), \tag{5.49}$$

$$(x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3)x_3^n(x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2), \tag{5.50}$$

$$(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^n(x_4x_3x_1x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4x_3x_1), \tag{5.51}$$

$$(x_3x_2x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2)x_3^n(x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3), \tag{5.52}$$

$$(x_3x_1 - x_1x_3)(x_3x_2x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4), \tag{5.53}$$

gdzie $n \geq 0$. Przykładowo gdy a jest postaci (5.46) z $n \geq 0$, zaś b jest postaci (5.47) z $m \geq 0$, to wykorzystując $(x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2)x_2x_1 = x_2x_1(x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2)$ dostajemy

$$\begin{aligned} 0 = a(x_2x_1)^n b &= (x_3x_1 - x_1x_3)(x_3x_2x_1)^n(x_4x_3x_2x_1 - x_1x_4x_3x_2) \\ &\qquad (x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3) \\ &= x_4x_3x_2x_1(x_3x_2x_1)^n x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3). \end{aligned}$$

Powyższa równość po pomnożeniu z lewej strony przez x_4^n oraz skróceniu $(x_4x_3x_2x_1)^{n+1}$ prowadzi do

$$0 = x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)x_3^m(x_4x_3x_2x_1 - x_2x_1x_4x_3) = x_3x_1b,$$

co stoi w sprzeczności z Lematem 5.1.3. Przypuśćmy teraz, że a jest postaci (5.49), zaś b jest postaci (5.53). Wtedy

$$\begin{aligned} ax_4b &= x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4)x_4 \\ &\qquad (x_3x_1 - x_1x_3)(x_3x_2x_3x_1 - x_3x_1x_3x_2)(x_4x_3x_2x_1 - x_3x_2x_1x_4) \\ &= x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)[x_3x_1x_3(x_4x_3x_2x_1)^3 - x_1x_3^2(x_4x_3x_2x_1)^3 \\ &\qquad - (x_3x_1)^2(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2 + x_1x_3x_1x_3(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3x_2 \\ &\qquad - x_3x_2x_1x_3x_4x_3x_1(x_4x_3x_2x_1)^2 + x_1x_3x_2x_1x_3(x_4x_3x_2x_1)^2x_4x_3 \\ &\qquad + x_3x_1x_3x_2x_1x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_1 - x_1x_3x_2x_1x_3x_4x_3x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2]. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$x_3x_1(x_3x_1 - x_1x_3)(x_3x_1x_3 - x_1x_3^2)(x_4x_3x_2x_1)^3$$
$$= (x_3x_1)^3x_3(x_4x_3x_2x_1)^3 - x_1(x_3x_1)^2x_3^2(x_4x_3x_2x_1)^3 \neq 0,$$

to również $ax_4b \neq 0$, sprzeczność. Analogiczne rozumowanie w pozostałych przypadkach także prowadzi do sprzeczności. Należy jednak dodać, że sprawdzenie wszystkich możliwości, to zadanie żmudne i pracochłonne, a ponieważ używane argumenty są podobne do tych zaprezentowanych wyżej, to zostaną one tu pominięte. Kończy to dowód twierdzenia. □

Wniosek 5.1.6. *Niech $K[M_4]$ będzie algebrą plaktyczną rangi 4 nad ciałem K. Wtedy ideały P_1, P_2, P_3, P_4 zdefiniowane w (5.7) i (5.8) są jedynymi minimalnymi ideałami pierwszymi tej algebry. Ponadto radykał pierwszy $\mathcal{B}(K[M_4])$ algebry $K[M_4]$ jest nilpotentny indeksu ≤ 7.*

Dowód. Na początku odnotujmy, że Twierdzenia 5.1.4 oraz 5.1.5 gwarantują pierwszość ideałów P_1, P_2, P_3, P_4. Kolejnym krokiem w dowodzie jest wykazanie, że

$$P_3P_4P_2P_1P_2P_3P_4 = 0. \tag{5.54}$$

Aby dowieść równości (5.54) posłużymy się Propozycją 5.1.1 (używając wprowadzonych tam oznaczeń). Zauważmy najpierw, że $P_1 = I_1$. Ponadto, wprost z definicji (5.7), wiemy, że dla dowolnych $a_2, a_2' \in P_2$ istnieje takie $n \geq 0$, że $a_2z^n \in I_2$ oraz $a_2'z^n \in I_2$. Natomiast równości (5.4) i (5.5) implikują $z^2P_3 \subseteq I_3$ oraz $z^2P_4 \subseteq I_4$. Stąd wniosek, że dla dowolnych $a_1 \in P_1$, $a_3, a_3' \in P_3$ oraz $a_4, a_4' \in P_4$ mamy

$$z^{2n+8}a_3a_4a_2a_1a_2'a_3'a_4' = (z^2a_3)(z^2a_4)(z^na_2)a_1(z^na_2')(z^2a_3')(z^2a_4') \in I_3I_4I_2I_1I_2I_3I_4 = 0,$$

co po uwzględnieniu regularności elementu $z \in M_4$ w algebrze $K[M_4]$ gwarantuje, że $a_3a_4a_2a_1a_2'a_3'a_4' = 0$ i tym samym dowodzi (5.54).

Jeśli P jest minimalnym ideałem pierwszym algebry $K[M_4]$, to wobec równości (5.54) oraz pierwszości ideałów P_1, P_2, P_3, P_4 stwierdzamy, że $P = P_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ponadto nietrudno się przekonać, że:

$$x_3x_1 - x_1x_3 \in (P_1 \cap P_4) \setminus (P_2 \cup P_3),$$
$$x_4x_2 - x_2x_4 \in (P_1 \cap P_3) \setminus (P_2 \cup P_4),$$
$$x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2 \in (P_2 \cap P_3) \setminus (P_1 \cup P_4),$$
$$x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3 \in (P_2 \cap P_4) \setminus (P_1 \cup P_3).$$

Stąd wniosek, że ideały P_1, P_2, P_3, P_4 są nieporównywalne w sensie inkluzji, co prowadzi do konkluzji, że P_1, P_2, P_3, P_4 są jedynymi minimalnymi ideałami pierwszymi algebry $K[M_4]$. Pozostaje zauważyć, że dzięki $\mathcal{B}(K[M_4]) = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$ oraz równości (5.54) mamy

$$\mathcal{B}(K[M_4])^7 \subseteq P_3P_4P_2P_1P_2P_3P_4 = 0,$$

co kończy dowód. □

Na zakończenie dodajmy, że wydaje się, iż ideał P_2 może być wyznaczony jawnie, tzn. przez podanie generatorów. Jednak stosowne dowody są na tyle długie oraz złożone, że zostały wyłączone z pracy. Zamiast tego podamy krótki szkic postępowania prowadzącego, jak się wydaje, do opisu generatorów ideału P_2. Mianowicie rozważmy ideał $P \subseteq K[M_4]$ generowany przez elementy:

$$\begin{gathered} x_2x_4x_3x_1 - x_2x_1x_4x_3, \\ x_3x_2x_2x_1 - x_2x_1x_3x_2, \\ x_4x_2x_2x_1 - x_2x_1x_4x_2, \\ x_4x_3x_3x_1 - x_3x_1x_4x_3, \\ x_4x_3x_3x_2 - x_3x_2x_4x_3. \end{gathered}$$

Wykorzystując równości (5.4), (5.5) oraz (5.6) stwierdzamy, że $P \subseteq P_2$. Wyznaczając bazę Gröbnera-Shirshova ideału P (zaznaczmy, że jej elementy podzielić można na 43 rodziny, wśród których dwie są nieskończone i indeksowane za pomocą par liczb naturalnych, zaś człony wiodące wielomianów tej bazy prowadzą do ponad 360-ciu typów niejednoznaczności) można opisać postać kanoniczną elementów monoidu $M = M_4/\rho_P$ pochodzącego od ideału P (dodajmy, że jest to nietrywialne zadanie). Aby wykazać równość $P = P_2$, a tym samym opisać generatory ideału P_2, wystarczy sprawdzić, mając do dyspozycji postać kanoniczną elementów monoidu M, że element $z = x_4x_3x_2x_1 \in M$ jest regularny w algebrze $K[M]$.

Bibliografia

[1] W.W. Adams, P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics 3, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994.

[2] S.I. Adjan, *Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **85** (1966), 3–123.

[3] G.M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Advances in Mathematics **29** (1978), 178–218.

[4] L.A. Bokut, Y. Chen, W. Chen, J. Li, *Gröbner-Shirshov bases for plactic monoids*, preprint (2014), `arXiv:1106.4753v2`.

[5] L.A. Bokut, K.P. Shum, *Gröbner and Gröbner-Shirshov bases in algebra: An elementary approach*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics **29** (2005), 227–252.

[6] A.J. Cain, R. Gray, A. Malheiro, *Finite Gröbner-Shirshov bases for plactic algebras and biautomatic structures for plactic monoids*, preprint (2013), `arXiv:1205.4885v2`.

[7] J. Cassaigne, M. Espie, D. Krob, J.-C. Novelli, F. Hivert, *The Chinese monoid*, International Journal of Algebra and Computation **11** (2001), 301–334.

[8] F. Cedó, E. Jespers, J. Okniński, *Retractability of set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation*, Advances in Mathematics **224** (2010), 2472–2484.

[9] F. Cedó, J. Okniński, *Plactic algebras*, Journal of Algebra **274** (2004), 97–117.

[10] F. Cedó, J. Okniński, *Minimal spectrum and the radical of Chinese algebras*, Algebras and Representation Theory **16** (2013), 905–930.

[11] Y. Chen, J. Qiu, *Gröbner-Shirshov basis for the Chinese monoid*, Journal of Algebra and its Applications **7** (2008), 623–628.

[12] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, tom 1, Mathematical Surveys 7, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[13] G. Duchamp, D. Krob, *Plactic-growth-like monoids* w książce *Words, Languages and Combinatorics II*, 124–142, World Scientific, Singapore, 1994.

[14] P. Etingof, T. Schedler, A. Soloviev, *Set-theoretical solutions of the quantum Yang-Baxter equation*, Duke Mathematical Journal **100** (1999), 169–209.

[15] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press, New York, 1997.

[16] T. Gateva-Ivanova, *A combinatorial approach to set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation*, Journal of Mathematical Physics **45** (2004), 3828–3858.

[17] T. Gateva-Ivanova, M. Van den Bergh, *Semigroups of I-type*, Journal of Algebra **206** (1998), 97–112.

[18] Z. Izhakian, S.W. Margolis, *Semigroup identities in the monoid of two-by-two tropical matrices*, Semigroup Forum **80** (2010), 191–218.

[19] J. Jaszuńska, J. Okniński, *Chinese algebras of rank* 3, Communications in Algebra **34** (2006), 2745–2754.

[20] J. Jaszuńska, J. Okniński, *Structure of Chinese algebras*, Journal of Algebra **346** (2011), 31–81.

[21] E. Jespers, J. Okniński, *Monoids and groups of I-type*, Algebras and Representation Theory **8** (2005), 709–729.

[22] E. Jespers, J. Okniński, *Noetherian Semigroup Algebras*, Algebra and Applications 7, Springer-Verlag, Dordrecht, 2007.

[23] E.G. Karpuz, *Complete rewriting system for the Chinese monoid*, Applied Mathematical Sciences **4** (2010), 1081–1087.

[24] D.E. Knuth, *Permutations, matrices and generalized Young tableaux*, Pacific Journal of Mathematics **34** (1970), 709–727.

[25] G.R. Krause, T.H. Lenagan, *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, Graduate Studies in Mathematics 22, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[26] Ł. Kubat, J. Okniński, *Gröbner-Shirshov bases for plactic algebras*, praca przyjęta do publikacji w Algebra Colloquium, preprint (2010), `arXiv:1010.3338v1`.

[27] Ł. Kubat, J. Okniński, *Plactic algebra of rank* 3, Semigroup Forum **84** (2012), 241–266.

[28] Ł. Kubat, J. Okniński, *Identities of the plactic monoid*, praca przyjęta do publikacji w Semigroup Forum.

[29] T.Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics 189, Springer-Verlag, New York, 1999.

[30] T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics 131, Springer-Verlag, New York, 2001.

[31] T.Y. Lam, *Exercises in Classical Ring Theory*, Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.

[32] A. Lascoux, B. Leclerc, J.-Y. Thibon, *The plactic monoid* w książce *Algebraic Combinatorics on Words*, 164–196, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[33] A. Lascoux, M.P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique* w książce *Noncommutative Structures in Algebra and Geometric Combinatorics*, 129–156, Marcel Dekker, Naples, 1978.

[34] C. Lecouvey, *Schensted-type correspondence, plactic monoid, and jeu de taquin for type* C_n, Journal of Algebra **247** (2002), 295–331.

[35] C. Lecouvey, *Schensted-type correspondences and plactic monoids for types* B_n *and* D_n, Journal of Algebraic Combinatorics **18** (2003), 99–133.

[36] H. Li, *Noncommutative Gröbner Bases and Filtered-Graded Transfer*, Lecture Notes in Mathematics 1795, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[37] P. Littelmann, *A plactic algebra for semisimple Lie algebras*, Advances in Mathematics **124** (1986), 312–331.

[38] J.-L. Loday, T. Popov, *Parastatistics algebra, Young tableaux and the super plactic monoid*, preprint (2008), `arXiv:0810.0844v1`.

[39] C. Malvenuto, *P-partitions and the plactic congruence*, Graphs and Combinatorics **9** (1993), 63–73.

[40] T. Mora, *Gröbner bases for non-commutative polynomial rings* w publikacji *Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes 3*, Lecture Notes in Computer Science 229, 353–362, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[41] T. Mora, *An introduction to commutative and non-commutative Gröbner bases*, Theoretical Computer Science **134** (1994), 131–173.

[42] J. Okniński, *Semigroup Algebras*, Pure and Applied Mathematics 138, Mercel Dekker, New York, 1991.

[43] J. Okniński, *Semigroups of Matrices*, World Scientific, Singapore, 1998.

[44] D.S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1977.

[45] D.S. Passman, *A Course in Ring Theory*, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[46] L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Pure and Applied Mathematics 84, Academic Press, New York, 1980.

[47] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canadian Journal of Mathematics **13** (1961), 179–191.

[48] L.M. Shneerson, *Identities in finitely generated semigroups of polynomial growth*, Journal of Algebra **154** (1993), 67–85.

[49] L.M. Shneerson, *Polynomial growth in semigroup varieties*, Journal of Algebra **320** (2008), 2218–2279.

[50] M.P. Schützenberger, *Pour le monoïde plaxique*, Mathématiques Informatique et Sciences Humaines **140** (1997), 5–10.

[51] L.N. Shevrin, *The Sverdlovsk Notebook: Unsolved problems of the theory of semigroups*, Ural State University, Sverdlovsk, 1989.

[52] A. Smoktunowicz, *Some results in noncommutative ring theory* w publikacji *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, 2006, tom 2, *Invited Talks*, 259–269, European Mathematical Society, Zürich, 2007.

[53] J. Tate, M. Van den Bergh, *Homological properties of Sklyanin algebras*, Inventiones Mathematicae **124** (1996), 619–647.

[54] V.A. Ufnarovskii, *Combinatorial and Asymptotic Methods of Algebra* w książce *Encyclopedia of Mathematical Sciences* 57, 1–196, Springer-Verlag, Berlin, 1995.