MICHAŁ KRZESZOWIEC

Analiza składek ubezpieczeniowych w oparciu o teorię skumulowanej perspektywy Kahnemana-Tversky'ego

Praca doktorska napisana
w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk
pod kierunkiem dr. hab. Marka Kałuszki, prof. PŁ.

Warszawa, maj 2013 r.

Spis treści

Spis oznaczeń i umów przyjętych w pracy

w całej pracy zakładamy, że wszystkie zmienne losowe określone są na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;

$\sup X = \inf \{t : P(X \leq t) = 1\}$ $-$ istotny kres górny zmiennej losowej X (zakładamy, że $\sup \emptyset = -\infty$);

$\inf X = -\sup(-X)$ $-$ istotny kres dolny zmiennej losowej X;

$X_+ = \max\{0, X\}$;

$X =_d Y$ $-$ równość rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych X i Y;

F_X^{-1} $-$ $F_X^{-1}(p) = \inf\{t \in \mathbb{R} : p \leq F_X(t)\}$ dla $p \in (0,1)$ $-$ dolny kwantyl rzędu p;

$\mathcal{U}$ $-$ rodzina funkcji wartości, tzn. funkcji $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rosnących, ciągłych i takich, że $u(0) = 0$;

$\mathcal{U}_0$ $-$ podrodzina $\mathcal{U}$ składająca się z funkcji postaci $u(x) = cx$, $u(x) = (1 - e^{-cx})/d$, $u(x) = (e^{cx} - 1)/d$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i pewnych $c, d > 0$;

$\mathcal{G}$ $-$ rodzina funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo, tzn. funkcji $g : [0,1] \to [0,1]$ niemalejących oraz takich, że $g(0) = 0$ i $g(1) = 1$;

$\mathcal{X}_2$ $-$ rodzina zmiennych losowych takich, że $P(X = 0) = 1 - q$, $P(X = s) = q$, gdzie $s > 0$ oraz $q \in [0,1]$;

$X = Y$ $-$ równość p.w. P, tzn. $P(X = Y) = 1$;

$X \leq Y$ - nierówność p.w. P, tzn. $P(X \leq Y) = 1$;

$f(x+)$, $f(x-)$ $-$ granice prawostronna i lewostronna funkcji f w punkcie x;

W1, W2, ..., W9 $-$ własności, odpowiednio, uogólnionej całki Choqueta (patrz Lemat 2.1 na stronie 12).

1 Wstęp

Z praktycznego punktu widzenia, przy wyznaczaniu składek ubezpieczeniowych zdefiniowanych w ujęciu teorii oczekiwanej użyteczności zakłada się domyślnie, że ludzie używają funkcji użyteczności przy podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka i niepewności oraz potrafią właściwie ocenić prawdopodobieństwa zysków i strat. Pratt (1964) oraz inni matematycy i ekonomiści badają własności składek ubezpieczeniowych w teorii oczekiwanej użyteczności przy założeniu wypukłości lub wklęsłości oraz dwukrotnej różniczkowalności funkcji użyteczności. W rzeczywistości te założenia prowadzą do wniosków sprzecznych z badaniami empirycznymi, co potwierdza teoria skumulowanej perspektywy Kahnemana-Tversky'ego.

Celem tej pracy jest wprowadzenie i analiza nowych typów składek ubezpieczeniowych dostosowanych do teorii skumulowanej perspektywy. Aby móc jak najwierniej uwzględnić czynniki behawioralne w sposobie wyznaczenia składek, w naszych rozważaniach będziemy przyjmowali możliwie słabe założenia określające funkcje, za pomocą których dane składki są zdefiniowane. Przeprowadzona w tej pracy analiza składek ubezpieczeniowych jest uogólnieniem wyników przedstawionych przez Gerbera (1979), Goovaertsa i innych (1984), Rolskiego i innych (1999), Van der Hoeka i Sherrisa (2001), Luana (2001) i Heilperna (2003) oraz stanowi kontynuację badań prowadzonych przez matematyków i ekonomistów (np. Hardy i inni, 1952, Wang i inni, 1997) nad funkcjonałami występującymi w matematyce ubezpieczeniowej.

Układ dalszej części pracy jest następujący. W rozdziale 2 znajduje się rys historyczny oraz współczesne teorie dotyczące podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności. Rozdział 3 poświęcony jest składkom ubezpieczeniowym, ich najważniejszym przykładom oraz własnościom. W rozdziale 4 definiujemy składkę mean-value w ujęciu teorii skumulowanej perspektywy. Podajemy także jawne wzory na składki dla pewnych funkcji wartości i funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo oraz analizujemy własności wprowadzonej składki. W badaniach nie zakładamy różniczkowalności, wklęsłości ani wypukłości funkcji wartości oraz, o ile to możliwe, odrzucamy założenia o różniczkowalności, ciągłości, wklęsłości oraz wypukłości funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo. Osłabienie wspomnianych założeń powoduje, że sposób dowodzenia twierdzeń bazuje na rozwiązywaniu równań funkcyjnych oraz równań różniczkowych z pochodną jednostronną, a nie równań różniczkowych, co miało miejsce we wcześniejszych pracach. Rozwiązanie równań funkcyjnych nierozważanych do tej pory w literaturze, a także rozwiązanie równań funkcyjnych przy słabszych założeniach niż w innych pracach (np. Lax, 2008), pozwala wzbogacić wiedzę w tym zakresie. W rozdziale 5 analizujemy składkę zerowej użyteczności w teorii skumulowanej perspektywy. Wyniki przedstawione w niniejszej pracy są zawarte w znacznej większości w pracach Kałuszki i Krzeszowca (2012 a, 2012 b, 2013 a, 2013 b).

Podziękowania Pragnę podziękować promotorowi mojej rozprawy doktorskiej za opiekę i owocną współpracę. Dziękuję również opiekunowi studiów doktoranckich profesorowi Łukaszowi Stettnerowi za życzliwość i opiekę w trakcie trwania studiów doktoranckich.

Dziękuję za wsparcie finansowe uzyskane od Narodowego Centrum Nauki w ramach projektu badawczego pt. "Analiza składek ubezpieczeniowych w teorii Kahnemana-Tversky'ego" o numerze 2011/01/N/HS4/05627. Dziękuję również za dofinansowanie badań uzyskane z dotacji na zadania służące rozwojowi młodych naukowców w ramach finansowania działalności statutowej Wydziału Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej.

2 Teorie wyborów w warunkach ryzyka i niepewności

2.1 Funkcja użyteczności

Za prekursora matematycznej teorii wyborów w warunkach ryzyka i niepewności uznaje się Daniela Bernoulliego (1700-1782), który w rozwiązaniu problemu postawionego przez swojego stryja Nicolasa Bernoulliego, jako pierwszy wprowadził do literatury pojęcie użyteczności. Nicolas Bernoulli na początku XVIII wieku dostrzegł pewną słabość niesformalizowanej wówczas teorii prawdopodobieństwa zapoczątkowanej przez Cardano, Fermata oraz Pascala. W 1713 roku w liście do Pierre'a Raymonda de Montmort przedstawił tzw. paradoks petersburski, w którym podany jest nieskomplikowany przykład gry losowej o nieskończonej wartości oczekiwanej wygranej. Skoro wartość oczekiwana wygranej jest nieskończona, to z teoretycznego punktu widzenia osoba podejmująca ryzyko powinna zgodzić się na zapłacenie dowolnie dużej kwoty za przystąpienie do gry. Jednakże w praktyce niewiele osób zgodziłoby się na uczestnictwo w tej grze nawet za 25 dolarów (patrz Martin, 2004). Daniel Bernoulli (1738) zaproponował natępujący sposób rozwiązania paradoksu. Zauważył on, że "Wyznaczanie wartości przedmiotu nie może być oparte na jego cenie, ale raczej na użyteczności jaką ze sobą niesie... Nie ulega wątpliwości, że zysk tysiąca dukatów jest bardziej znaczący dla biedaka niż dla osoby zamożnej, mimo iż w obu przypadkach zysk jest taki sam". Bernoulli zasugerował, aby decyzja o cenie za przystąpienie do gry była wyznaczana przy wykorzystaniu logarytmicznej funkcji użyteczności, która zależy od wartości posiadanego przez decydenta majątku.

Przełomowym wydarzeniem w teorii podejmowania decyzji w obecności ryzyka i niepewności było opublikowanie przez von Neumanna i Morgensterna (1947) układu aksjomatów, które według nich charakteryzują racjonalnego decydenta. Wspomniane aksjomaty określają relację porządkującą $\preceq$ na zbiorze dopuszczalnych zmiennych losowych (każda ze zmiennych utożsamiana jest z ryzykiem na jakie jesteśmy narażeni w danej sytuacji). Dla dowolnych zmiennych L, M, N relacja ta:

- jest zupełna: $L \preceq M$ lub $M \preceq L$;
- jest przechodnia: jeżeli $L \preceq M$ i $M \preceq N$, to $L \preceq N$;
- jest ciągła: jeżeli $L \preceq M \preceq N$, to istnieje $p \in [0,1]$ takie, że $pL + (1-p)\,N = M$;
- spełnia aksjomat niezależności: jeśli $L \preceq M$, to dla dowolnego ryzyka N oraz $p \in (0,1]$ mamy $pL + (1-p)\,N \preceq pM + (1-p)\,N$.

Okazuje się, że relacja $\preceq$ spełnia wspomniane aksjomaty wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemalejąca funkcja u taka, że $X \preceq Y \iff \int u(X)\,dP \leq \int u(Y)\,dP$. Funkcja u jest wyznaczona w sposób jednoznaczny z dokładnością do dodatnich przekształceń afinicznych.

Teoria oczekiwanej użyteczności von Neumanna i Morgensterna była oparta o aksjomaty, co prowadziło do powszechnego przekonania, że jest to jedyny prawidłowy model służący do opisu podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności. Przekonanie to jest dodatkowo wzmocnione faktem, że kształt funkcji użyteczności pozwala zaklasyfikować decydentów do jednej z trzech grup: skłonnych lub niechętnych do podejmowania ryzyka oraz obojętnych na ryzyko. Wklęsła funkcja użyteczności opisuje osobę stroniącą od ryzyka, zaś wypukła funkcja użyteczności charakteryzuje decydenta lubiącego podejmować ryzyko. Począwszy od lat czterdziestych XX wieku powstały liczne prace, w których starano się wyznaczyć kształt funkcji użyteczności tak, aby w najlepszym stopniu odzwierciedlała ona zachowanie ludzi przy podejmowaniu decyzji. Friedman i Savage (1948) proponują funkcje użyteczności, które są różniczkowalne, ale mają dwa punkty przegięcia. Markowitz (1952), który krytykuje taki pomysł, uważa za stosowne wykorzystywanie funkcji użyteczności, które mają tylko jeden punkt przegięcia znajdujący się w pobliżu obecnego majątku decydenta. Pod wpływem wspomnianych dwóch koncepcji, Gillen i Markowitz (2010) sugerują klasę funkcji użyteczności, które są różniczkowalne, ale są kawałkami wklęsłe i wypukłe. Analiza pewnych podrodzin tego typu funkcji pozwala na ustalenie wpływu majątku na decyzje podejmowane przez inwestora oraz na scharakteryzowanie jego skłonności bądź awersji do ryzyka. Schmidt i Zank (2007) stosują kawałkami liniową, a więc nieróżniczkowalną funkcję użyteczności w problemach matematyki finansowej i ubezpieczeniowej.

W przełomowej pracy stanowiącej początki teorii perspektywy, Kahneman i Tversky (1979), po przeprowadzeniu licznych eksperymentów potwierdzają fakt, że przy podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka i niepewności ludzie używają funkcji, która wynikom finansowym przypisuje pewne wirtualne wartości, ale dodatkowo ustalają punkt referencyjny i wyniki finansowe od niego mniejsze postrzegają jako straty, zaś te wyższe jako zyski. Kahneman i Tversky sugerują zastąpienie funkcji użyteczności, która mierzy bezwzględną wartość majątku, funkcją wartości, która zależy od względnej wielkości majątku oraz mierzy zyski i straty. Sugerują oni używanie funkcji użyteczności, które są wypukłe dla argumentów ujemnych i wklęsłe dla argumentów dodatnich oraz $u'_+(0) < u'_-(0)$, gdzie u'_+ i u'_- oznaczają odpowiednio prawo- i lewostronną pochodną funkcji u.

W uzupełnieniu do tych obserwacji, Kőszegi i Rabin (2007) zauważają, że podejmowanie decyzji w warunkach niepewności zwiększa awersję do ryzyka, gdy jest ono oczekiwane. Punkty referencyjne, których może być kilka, wpływające na podjęcie decyzji przez decydenta, są wyznaczone w oparciu o jego przekonania dotyczące możliwości uzyskania danego wyniku finansowego i mogą być one wyznaczone w sposób stochastyczny. Decyzja podejmowana jest poprzez maksymalizację funkcjonału $E_F \int v(w|r)\, dG(r)$, gdzie v jest funkcją wartości zaproponowaną przez Kahnemana i Tversky'ego, w jest zmienną losową o rozkładzie F opisującą wartość majątku, zaś G jest dystrybuantą dyskretnej zmiennej losowej R o skończonym nośniku. Przy tych założeniach możemy mieć do czynienia z funkcją wartości postaci $v(w) = \int v(w|r)\, dG(r)$, która ma bardzo nieregularne kształty, a w szczególności może nie być różniczkowalna w wielu punktach. Schmidt i inni (2008) rozwijają koncepcję zaproponowaną przez Tversky'ego i Kahnemana i w swoim modelu, oprócz założenia o zniekształcaniu prawdopodobieństw przy podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka i niepewności, porównują również konsekwencje, które wynikają z podjęcia przez osobę konkretnej decyzji. W badanym przez nich przypadku funkcje użyteczności są kawałkami wklęsłe i wypukłe i mają wiele punktów nieróżniczkowalności.

Wciąż pozostaje kwestią nierozstrzygniętą, jaki typ funkcji użyteczności najlepiej odpowiada ludzkiemu zachowaniu przy podejmowaniu decyzji. Wobec tego rozważając modele matematyczne uwzględniające w swoich założeniach funkcję wartości i chcąc otrzymać wyniki dla możliwie dużej klasy tych funkcji, powinniśmy przyjmować możliwie najsłabsze założenia je opisujące.

2.2 Teoria skumulowanej perspektywy

Równolegle do dyskusji o kształcie funkcji użyteczności, liczni naukowcy zastanawiali się nad prawdziwością aksjomatów przyjętych przez von Neumanna i Morgensterna. Znane paradoksy (np. Allais, 1953, Ellsberg, 1961, Yaari, 1987, Rabin, 2000) ukazują słabość teorii oczekiwanej użyteczności i pokazują, że zachowanie ludzi w warunkach ryzyka i niepewności nie jest zgodne z jej założeniami. Kahneman i Tversky (1979) w sposób empiryczny zbadali, że ludzie zniekształcają prawdopodobieństwa przy podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka i niepewności. Odkrycie to stanowiło motywację dla ekonomistów, którzy zbadali to zjawisko i uzasadnili je proponując osłabienie aksjomatu niezależności i zastąpienie go innymi warunkami (patrz Quiggin, 1982, Yaari, 1987, Green i Jullien, 1988, Segal, 1989, Puppe, 1991, Wakker, 1994, Abdellaoui, 2002).

W oparciu o przeprowadzone eksperymenty, Tversky i Kahneman (1992) udoskonalają teorię oczekiwanej użyteczności i tworzą teorię skumulowanej perspektywy. Zakłada się w niej, że prawdopodobieństwa zysków i strat są zniekształcane, każde z nich w inny sposób. Zaproponowali oni, by wykorzystać uogólnioną całkę Choqueta do opisu podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności (pojęcie uogólnionej całki Choqueta jest wprowadzone w podrozdziale 2.3). Po drugie, Tversky i Kahneman zauważyli, że decydenci ustalają pewien punkt referencyjny w i wyniki finansowe większe bądź równe od tej wartości traktują jako zyski, zaś rezultaty mniejsze od w - jako straty. Po trzecie, sugerują oni, by używać opisanej wcześniej funkcji wartości, która jest nieróżniczkowalna w zerze, zamiast funkcji użyteczności. Przy założeniach teorii skumulowanej perspektywy, zarówno funkcja wartości jak i funkcja zniekształcająca prawdopodobieństwo nie muszą być różniczkowalne, wklęsłe czy wypukłe (patrz Wang, 1996, Kőszegi i Rabin, 2007, Schmidt i inni, 2008). W uznaniu za swoje osiągnięcia, Daniel Kahneman został w 2002 roku laureatem Nagrody im. Alfreda Nobla z ekonomii. Amos Tversky zmarł w roku 1996.

Teoria skumulowanej perspektywy była w ciągu ostatnich lat szeroko omawiana i stosowana w ekonomii (np. Schmidt i inni, 2008, Teitelbaum, 2007). Powstały również prace, w których autorzy wykorzystują tę teorię w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej (patrz De Giorgi i Hens, 2006, Schmidt i Zank, 2007, De Giorgi i inni, 2009, Bernard i Ghossoub, 2010).

2.3 Całka Choqueta

Giuseppe Vitali w 1925 roku wprowadził pojęcie całki, która jest szczególnym przypadkiem później wprowadzonej całki Choqueta przy założeniu, że występujące tam miary są addytywne. Gustave Choquet w obszernej pracy z 1954 r. stworzył narzędzie matematyczne, dzięki któremu można obliczać całki względem pojemności, tzn. niemalejącej i nieujemnej funkcji zbioru spełniającej pewne warunki ciągłości. Miała ona znaleźć zastosowanie w mechanice statystycznej oraz teorii potencjałów. Wraz z upływem czasu, całka Choqueta zaczęła być wykorzystywana przez matematyków i ekonomistów do opisu modeli dotyczących podejmowania decyzji. Spostrzeżenia Kahnemana i Tversky'ego o zniekształcaniu przez ludzi prawdopodobieństw można opisać w pewnym modelu matematycznym. W teorii dualnej ryzyka Yaari (1987) wprowadził aksjomat komonotonicznej niezależności, który doprowadził do stworzenia modelu *rank-dependent utility,* który m.in. eliminuje problem przeszacowywania bardzo małych prawdopodobieństw (patrz np. Quiggin, 1982, Green i Jullien, 1988, Segal, 1989). Zakłada się w nim, że relacja preferencji $\preceq$ jest określona za pomocą całki Choqueta postaci $\int u(X)\, d(g \circ P)$, gdzie $g : [0,1] \to [0,1]$ jest funkcją niemalejącą taką, że $g(0) = 0$ i $g(1) = 1$, nazywaną funkcją zniekształcającą prawdopodobieństwo (patrz np. Segal, 1989, Denneberg, 1994). Niech $\mathcal{G}$ oznacza klasę wszystkich funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo. Dla ustalonego $g \in \mathcal{G}$ i dowolnej zmiennej losowej X całkę Choqueta oznaczamy poprzez $E_g X$ i możemy ją obliczyć ze wzoru

$$E_g X := \int_{-\infty}^{0} \left(g \left(P \left(X > t \right) \right) - 1 \right) dt + \int_{0}^{\infty} g \left(P \left(X > t \right) \right) dt,$$

o ile obie całki są skończone (patrz Chateauneuf i inni, 1997, Chateauneuf i Cohen, 2000). Gdy X przyjmuje skończoną liczbę wartości $x_1 < x_2 < ... < x_n$ z prawdopodobieństwami $P(X = x_i) = p_i > 0$, to

$$E_g X = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(q_i)(x_{i+1} - x_i),$$

gdzie $q_i = \sum_{k=i+1}^{n} p_k$; w szczególności dla $n = 2$ mamy

$$E_g X = x_1 (1 - g(p_2)) + g(p_2) x_2.$$

Całka Choqueta jest addytywna dla zmiennych losowych komonotonicznych, dodatnio jednorodna, monotoniczna (tzn. $E_g X \geq E_g Y$ gdy $X \geq Y$) oraz $E_g(c) = c$ dla $c \in \mathbb{R}$. Ponadto

$$E_g(-X) = -E_{\overline{g}} X,$$

gdzie funkcja $\overline{g}(x) = 1 - g(1 - x)$ jest nazywana dualną funkcją zniekształcającą prawdopodobieństwo. W literaturze możemy znaleźć następujące przykłady funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo:

$$g(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}}, \qquad g(p) = \frac{p^\gamma}{p^\gamma + (1-p)^\gamma},$$

$$g(p) = \exp\left(-(-\ln p)^\gamma\right), \qquad g(p) = p + \gamma\left(p - p^2\right),$$

gdzie $\gamma \in (0, 1)$ jest ustalone (patrz Tversky i Kahneman, 1992, Goldstein i Einhorn, 1987, Prelec, 1998, Sereda i inni, 2010, Wang, 1995, 1996, Diecidue i inni, 2009). O zastosowaniu całki Choqueta w praktyce dotyczącej podejmowania decyzji piszą Heilpern (2002) i Wakker (2010).

Tversky i Kahneman (1992) użyli dla zmiennej losowej typu dyskretnego pojęcie uogólnionej całki Choqueta, dzięki której prawdopodobieństwa zysków i strat mogą być zniekształcane różnymi funkcjami. Dla $g, h \in \mathcal{G}$ i dowolnej zmiennej losowej X, definiujemy uogólnioną całkę Choqueta wzorem

$$E_{gh}X = E_g X_+ - E_h (-X)_+ ,$$

o ile obie całki Choqueta są skończone. Kształty funkcji g i h są zwykle do siebie podobne, a różnią się wartościami współczynników występujących w ich wzorach. Ponadto, gdy $h(p) = \overline{g}(p) = 1 - g(1-p)$, to $E_{g\overline{g}}X = E_g X$.

W poniższym lemacie podajemy najważniejsze własności uogólnionej całki Choqueta. Poza standardowymi własnościami, podajemy również własności, które są nieznane w literaturze aktuarialnej (W8 i W9).

Lemat 2.1 *Uogólniona całka Choqueta ma następujące własności:*
W1 $E_{gh}\mathbf{1}_A = g(P(A))$*;*
W2 $E_{gh}(cX) = cE_{gh}X$ *dla wszystkich* $c \geq 0$*;*
W3 $E_{gh}(-X) = -E_{hg}X$*;*
W4 jeśli $X \leq Y$*, to* $E_{gh}X \leq E_{gh}Y$*;*
W5 jeśli $g(x) \geq x$ *i* $h(x) \leq x$ *dla* $x \in [0,1]$*, to* $E_{gh}X \geq EX$*;*
W5' jeśli $g(x) \leq x$ *i* $h(x) \geq x$ *dla* $x \in [0,1]$*, to* $E_{gh}X \leq EX$*;*
W6 jeśli $g(x) = h(x) = x$*, to* $E_{gh}X = EX$*;*
W7 $E_{gh}c = c$ *dla wszystkich* $c \in \mathbb{R}$*;*
W8 dla wszystkich $c \in \mathbb{R}$ *prawdziwe są wzory*

$$E_{gh}(X+c) = E_{gh}X + c + \int_0^c \left[h(P(-X>s)) - \overline{g}(P(-X>s))\right] ds, \tag{2.1}$$

$$E_{gh}(X+c) = E_{gh}X + c + \int_0^{-c} \left[\,\overline{h}(P(X \geq s)) - g(P(X \geq s))\right] ds; \tag{2.2}$$

W9 nierówność Jensena: jeśli $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest niemalejąca, wklęsła i* $u(0) = 0$*, to dla* $g, h \in \mathcal{G}$ *i dowolnej zmiennej losowej* X *takiej, że* $E_{gh}X$ *istnieje, mamy*

$$E_{gh}u(X) \leq u(m) + \int_0^{u'(m)m - u(m)} \left[\,\overline{h}(P(u'(m)X \geq s)) - g(P(u'(m)X \geq s))\right] ds, \tag{2.3}$$

gdzie $m = E_{gh}X$ *oraz* u' *jest prawostronną pochodną funkcji* u*. Ponadto, jeśli* $\overline{h}(x) \geq g(x)$ *lub* $X \geq 0$*, to* $E_{gh}u(X) \leq u(E_{gh}X)$*.*

Dowód Dowody własności W1, W3 i W6 są oczywiste. Własności W2, W5, W5' i W7 wynikają z definicji uogólnionej całki Choqueta, całki Choqueta i własności całki Choqueta.

Ad W4 Jeśli $X \leq Y$, to $P(X > t) \leq P(Y > t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Stąd

$$E_g X_+ = \int_0^\infty g(P(X > t))\, dt \leq \int_0^\infty g(P(Y > t))\, dt = E_g Y_+.$$

Ponadto, jeśli $X \leq Y$, to $-Y \leq -X$ i $P(-Y > t) \leq P(-X > t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Zatem $E_h(-X)_+ \geq E_h(-Y)_+$.

Ad W8 Jako pierwszy udowodnimy wzór (2.1). Mamy

$$\begin{aligned}
E_{gh}(X + c) &= \int_0^\infty g(P(X > t - c))\, dt - \int_0^\infty h(P(-X > t + c))\, dt \\
&= \int_{-c}^\infty g(P(X > t))\, dt - \int_c^\infty h(P(-X > t))\, dt \\
&= E_{gh}X + \int_{-c}^0 g(P(X > t))\, dt - \int_c^0 h(P(-X > t))\, dt \\
&= E_{gh}X + \int_0^c g(P(-X < s))\, ds + \int_0^c h(P(-X > s))\, ds \\
&= E_{gh}X + c + \int_0^c \left[h(P(-X > s)) - \overline{g}(P(-X > s))\right] ds,
\end{aligned}$$

gdyż modyfikacja funkcji podcałkowej w przeliczalnej liczbie punktów nie zmienia wartości całki. Wzór (2.2) otrzymujemy ze wzoru (2.1) po wykonaniu elementarnych przekształceń.

Ad W9 Oczywiście $u(x) \leq u(m) + u'(m)(x - m)$ dla wszystkich x, gdzie u' jest prawostronną pochodną funkcji u. Stąd, z W2, W4 i (2.2) mamy

$$\begin{aligned}
E_{gh}u(X) &\leq E_{gh}\left[u(m) - u'(m)m + u'(m)X\right] \\
&= u(m) + \int_0^{u'(m)m - u(m)} \left[\overline{h}(P(u'(m)X \geq s)) - g(P(u'(m)X \geq s))\right] ds,
\end{aligned}$$

co daje (2.3). Ponadto, $u'(m)m - u(m) \leq 0$ i $u(0) = 0$, więc jeśli $\overline{h} \geq g$, to $E_{gh}u(X) \leq u(E_{gh}X)$. Gdy $X \geq 0$, to $P(u'(m)X \geq s) = 1$, a zatem $E_{gh}u(X) \leq u(E_{gh}X)$. ■

3 Składki ubezpieczeniowe

Składką ubezpieczeniową nazywamy kwotę, za jaką firma ubezpieczeniowa jest skłonna sprzedać ubezpieczenie na wypadek ryzyka X, które jest zmienną losową. Kwota ta nie może być za wysoka, co mogłoby zniechęcić potencjalnych klientów do ubezpieczania się lub skłonić do ubezpieczenia się w innej firmie. Składka nie może być również za niska, gdyż wówczas ubezpieczyciel narażony jest na potencjalnie duże straty.

Z matematycznego punktu widzenia, zasadą wyznaczania składek ubezpieczeniowych nazywamy funkcjonał H, który dowolnej zmiennej losowej X z pewnej rodziny $\mathcal{X}$ przyporządkowuje liczbę $H(X)$ zwaną składką za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X, lub w skrócie: składką. W dalszej części pracy słowo "składka" będzie używane również w odniesieniu do funkcjonału H. Wartość $H(X) - EX$ nazywamy narzutem bezpieczeństwa na składkę netto.

Aby wybrać składkę ubezpieczeniową najlepiej pasującą do danej sytuacji, korzysta się zazwyczaj z jednej z trzech opisanych dalej metod. Pierwsza z nich, wybór składki *ad hoc*, polega na ustaleniu racjonalnej składki ubezpieczeniowej, zbadaniu jej własności i sprawdzeniu, które z pożądanych własności są spełnione (np. składka wartości oczekiwanej jest z reguły postrzegana jako składka wyznaczona *ad hoc* i spełnia większość pożądanych własności). Drugim ze sposobów, trudniejszym w implementacji, jest metoda charakteryzacji. Polega ona na utworzeniu listy własności jakich oczekujemy od składki ubezpieczeniowej, a następnie na wyznaczeniu składki lub składek, które je spełniają. Ostatnim ze sposobów wyznaczania odpowiedniej składki jest tzw. metoda ekonomiczna. Polega ona na przyjęciu przez aktuariusza pewnej teorii ekonomicznej i wyznaczeniu na jej podstawie odpowiedniej składki.

Niektóre ze składek mogą być otrzymane w oparciu o dwa lub trzy zaprezentowane sposoby. Na przykład, składkę proporcjonalnego hazardu wprowadził Wang (1995), który szukał składki spełniającej warunek przedziałowej addytywności (ang. *layer additivity*), a więc użył metody charakteryzacji. Wang i inni (1997) pokazali później, że składka ta jako jedyna spełnia układ pewnych postulatów. Ponadto okazuje się, że składka proporcjonalnego hazardu może zostać uzyskana w oparciu o metodę ekonomiczną (patrz Yaari, 1987).

3.1 Wybrane składki ubezpieczeniowe

Poniżej przedstawiamy najpopularniejsze rodzaje wyznaczania składek ubezpieczeniowych. Zakładamy, że X jest całkowalną zmienną losową, zaś $\theta > 0$ jest pewną ustaloną liczbą.

S1 Składka netto: $H(X) = EX$. Jest to jeden z najprostszych przykładów składki ubezpieczeniowej. Mimo iż składka netto nie zawiera narzutu bezpieczeństwa, to jest powszechnie używana w literaturze aktuarialnej, gdyż zakłada się, że ryzyko jest zasadniczo pomijalne w przypadku, gdy firma ubezpieczeniowa sprzeda dużą ilość niezależnych polis o tym samym rozkładzie (patrz Boyle i Schwartz, 1977, Bacinello i Ortu, 1993, Aase i Persson, 1994, Nielsen i Sandmann, 1995).

S2 Składka wartości oczekiwanej: $H(X) = (1+\theta) EX$. Składka ta powstała w oparciu o składkę netto i zawiera proporcjonalny narzut bezpieczeństwa. Jest ona powszechnie wykorzystywana w teorii ryzyka (patrz Bowers i inni, 1997).

S3 Składka wariancji: $H(X) = EX + \theta VarX$. Jest ona sumą składki netto oraz dodatkowego składnika, który jest proporcjonalny do wariancji ryzyka. Bühlmann (1970) omówił szczegółowo własności tej składki. Okazuje się, że składka wariancji jest również dobrym przybliżeniem składki zerowej użyteczności.

S4 Składka odchylenia standardowego: $H(X) = EX + \theta\sqrt{VarX}$. Bazuje ona na składce netto z uwzględnieniem narzutu bezpieczeństwa, który jest wprost proporcjonalny do odchylenia standardowego ryzyka. Własności tej składki badał Bühlmann (1970), który zauważył, że często używa się jej w ubezpieczeniach majątkowych. Schweizer (2001) i Moller (2001) omawiają jak zastosować składki wariancji i odchylenia standardowego do wyceny ryzyka w dynamicznych modelach finansowych. Denneberg (1990) argumentuje, że składka odchylenia standardowego powinna zostać zastąpiona przez składkę odchylenia przeciętnego od mediany.

S5 Składka odchylenia przeciętnego od mediany: $H(X) = EX + \theta E\left|X - MedX\right|$, gdzie $MedX$ jest medianą ryzyka X. Składkę tę oraz jej własności omawia Denneberg (1990).

S6 Składka wykładnicza: $H(X) = \frac{1}{\theta}\ln\left(Ee^{\theta X}\right)$. Jest to szczególny przypadek składki zerowej użyteczności, gdy funkcja użyteczności jest wykładnicza (patrz Gerber, 1974 a). Składka wykładnicza ma szereg pożądanych własności, włącznie z addytywnością dla zmiennych losowych niezależnych. Musiela i Zariphopoulou (2002) wykorzystali tę składkę w wycenie finansowych instrumentów zabezpieczających na rynkach niezupełnych. Young i Zariphopoulou (2002), Moore i Young (2002) oraz Young (2003) użyli składki wykładniczej do wyceny różnych produktów ubezpieczeniowych w modelach dynamicznych.

S7 Składka Esschera: $H(X) = \frac{E\left(Xe^{Z}\right)}{Ee^{Z}}$, gdzie Z jest pewną zmienną losową. Składka została wprowadzona przez Bühlmanna (1980, 1984), który badał wymianę ryzyka. W tym przypadku Z jest dodatnią wielokrotnością zagregowanego ryzyka, które ma zostać wymienione. Gerber i Shiu (1994, 1996) wykorzystują składkę Esschera w matematyce finansowej. Heilmann (1989) omawia przypadek szczególny, w którym $Z = f(X)$ dla pewnej funkcji f, zaś Kamps (1998) analizuje składkę Esschera przy $e^Z = 1 - e^{-\lambda X}$ dla pewnego $\lambda > 0$. Niektóre źródła podają definicję tej składki z $Z = hX$ dla $h > 0$.

S8 Składka mean-value jest rozwiązaniem równania

$$u(w - H(X)) = Eu(w - X), \tag{3.1}$$

gdzie $w \geq 0$ jest ustalone, zaś $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą i rosnącą funkcją. Wartość $H(X)$ można interpretować jako maksymalną składkę, za którą potencjalny klient firmy ubezpieczeniowej jest skłonny kupić polisę na wypadek ryzyka X, zaś w jako majątek decydenta. Po lewej stronie równania (3.1) mamy użyteczność majątku decydenta, który decyduje się na zakup polisy za kwotę $H(X)$, zaś prawa strona równania (3.1) to oczekiwana użyteczność tego majątku w przypadku, gdy nie zakupi polisy ubezpieczeniowej. Wartość $H(X)$ jest zatem ceną, wobec której decydent jest obojętny na przyjęcie lub odrzucenie ryzyka X (cenę taką nazywa się również ceną obojętności, ang. *reservation price*). Składka mean-value ma tę zaletę, że może zawsze zostać wyznaczona w sposób jawny:

$$H(X) = w - u^{-1}(Eu(w - X)).$$

Po raz pierwszy quasi-liniowy funkcjonał mean-value $u^{-1}(Eu(X))$ badali Kołmogorow (1930) oraz Hardy i inni (1952).

S9 Składka zerowej użyteczności (równoważnej użyteczności) jest rozwiązaniem równania

$$u(w) = Eu(w + H(X) - X), \tag{3.2}$$

gdzie $w \geq 0$ jest ustalone, zaś $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnącą i wklęsłą funkcją, nazywaną funkcją użyteczności. Jest to odpowiednik składki mean-value z punktu widzenia firmy ubezpieczeniowej. Po lewej stronie równania (3.2) występuje użyteczność majątku ubezpieczyciela, który nie sprzedaje ubezpieczenia na wypadek ryzyka X, zaś po prawej stronie mamy oczekiwaną użyteczność majątku firmy, która decyduje się na pokrycie strat wynikłych z ryzyka X w zamian za kwotę $H(X)$. Wartość $H(X)$ jest w tym przypadku również ceną obojętności. Gdy funkcja użyteczności jest liniowa, to składka zerowej użyteczności jest składką netto, zaś gdy u jest funkcją wykładniczą, to $H(X)$ jest składką wykładniczą. Aktuarialne odniesienia do teorii oczekiwanej użyteczności podają Borch

(1963, 1968) oraz Gerber i Pafumi (1998). Pratt (1964) analizował jak cena obojętności zmienia się wraz ze zmianą awersji do ryzyka wyrażonego poprzez odpowiedni kształt funkcji użyteczności. Wykazał on, że jeżeli wartości ryzyka X są małe, to składka zerowej użyteczności jest aproksymowana przez składkę wariancji z $\theta = -\frac{u''(w)}{2u'(w)}$. Wówczas θ jest równa połowie miary bezwzględnej awersji do ryzyka. Więcej informacji na temat awersji do ryzyka podaje Arrow (1971).

S10 Składka Wanga:

$$H(X) = \int_{-\infty}^{0} \left(g\left(P\left(X > t\right)\right) - 1\right) dt + \int_{0}^{\infty} g\left(P\left(X > t\right)\right) dt,$$

gdzie $g : [0,1] \to [0,1]$ jest ciągłą, rosnącą i wklęsłą funkcją, nazywaną funkcją zniekształcającą prawdopodobieństwo. Składka Wanga wywodzi się z dualnej teorii ryzyka Yaari'ego (1987) i jest powiązana z ideą koherentnych miar ryzyka (patrz Artzner i inni, 1999, Wirch i Hardy, 1999). Idee wyznaczania składek Wanga oraz zerowej użyteczności można ze sobą połączyć, otrzymując nowe klasy składek ubezpieczeniowych, w których prawdopodobieństwa strat są zniekształcane (patrz Quiggin, 1982, Gilboa, 1987, Schmeidler, 1989). Young (1999) oraz Wang (2000) uzyskali pewne wyniki dla składki Wanga dla rodzin zmiennych losowych z parametrem położenia i skali. Landsman i Sherris (2001) zaproponowali składkę alternatywną do składki Wanga. Wang i inni (1997) podają, w jaki sposób można uzyskać składkę Wanga metodą charakteryzacji.

S11 Składka proporcjonalnego hazardu:

$$H(X) = \int_{-\infty}^{0} \left(\left[P\left(X > t\right)\right]^{c} - 1\right) dt + \int_{0}^{\infty} \left[P\left(X > t\right)\right]^{c} dt,$$

gdzie $c \in (0,1)$ jest ustalone. Jest to szczególny przypadek składki Wanga, który badał jej własności (patrz Wang, 1995). Składkę proporcjonalnego hazardu można uzyskać metodą charakteryzacji (patrz Wang i inni, 1997).

S12 Składka szwajcarska jest rozwiązaniem równania

$$u\left(X - cH\left(X\right)\right) = u\left(\left(1 - c\right) H\left(X\right)\right),$$

gdzie $c \in [0,1]$ jest ustalone, zaś u jest pewną rosnącą i wypukłą funkcją. Składka ta jest pewnym uogólnieniem składki zerowej użyteczności i składki mean-value przy $w = 0$.

Składkę szwajcarską wprowadzili Bühlmann i inni (1977), zaś jej własności badali De Vylder i Goovaerts (1979), Goovaerts i De Vylder (1979), Goovaerts i inni (1980) oraz Beyer i Riedel (1993).

S13 Składka holenderska: $H(X) = EX + aE\left[(X - bEX)_+\right]$, gdzie $a \geq 1$ i $b \in (0,1]$ są ustalone. Składkę tę wprowadzili Van Heerwaarden i Kaas (1992), zaś uogólnił ją Hürlimann (1994).

S14 Składka VaR (składka wartości zagrożonej): $H(X) = F_X^{-1}(p)$, gdzie $p \in (0,1)$, zaś $F_X^{-1}(p)$ jest dolnym kwantylem rzędu p zmiennej losowej X. Początków metody VaR można dopatrywać się w pracy Baumola (1963), choć sama nazwa przyjęła się w latach dziewięćdziesiątych XX wieku. Choć w głównej mierze VaR funkcjonuje jako miara ryzyka finansowego i rynkowego, to można znaleźć jej zastosowania również w ubezpieczeniach (patrz Dowd i Blake, 2006). Jej popularność zaczęła rosnąć po kryzysie giełdowym, który nastąpił w 1987 roku. Nowa Umowa Kapitałowa Basel II opublikowana w 2004 uznaje VaR jako preferowaną miarę ryzyka rynkowego. Taleb (1997) i Hoppe (1998) oraz wielu innych naukowców krytykuje VaR jako koncepcję zbyt naiwną i zbyt trudną w dokładnej implementacji.

S15 Składka TVaR (wartości zagrożonej na ogonie rozkładu): $H(X) = F_X^{-1}(p) + \frac{1}{1-p}E\left(X - F_X^{-1}(p)\right)_+$, gdzie F_X^{-1} jest uogólnioną funkcją odwrotną do dystrybuanty zmiennej X. TVaR, podobnie jak VaR, funkcjonuje głównie jako miara ryzyka. W dyrektywie Solvency II wydanej przez Unię Europejską w 2009 roku TVaR jest rekomendowaną miarą ryzyka finansowego i ubezpieczeniowego.

Analizę większości z zaprezentowanych składek można znaleźć również w monografiach: Bühlmann (1970), Gerber (1979), Goovaerts i inni (1984), Rolski i inni (1999).

W miarę rozwoju matematyki finansowej i ubezpieczeniowej, coraz ważniejszą rolę zaczęły odgrywać miary ryzyka. Podobnie jak składki ubezpieczeniowe, są to funkcjonały rzeczywiste zdefiniowane na pewnej ustalonej przestrzeni zmiennych losowych. Powstaje wobec tego jest pytanie, jaka jest różnica pomiędzy składkami ubezpieczeniowymi a miarami ryzyka? Odpowiedź na to pytanie zmieniała się z czasem. Goovaerts i inni (2003) twierdzą, że w pewnym sensie miary ryzyka stanowią szersze pojęcie od składek ubezpieczeniowych, od których z reguły wymaga się, by były wyrażone w wartościach pieniężnych. Wobec tego np. $P(X \geq EX)$ jest miarą ryzyka, ale nie jest składką. Argumentują oni również, że rodzina składek ubezpieczeniowych zawiera w sobie klasę jednorodnych miar ryzyka.

Goovaerts i inni (2010 b) twierdzą, że miary ryzyka są to funkcjonały wyznaczone w oparciu o pewną aksjomatyczną charakteryzację. Jej celem jest uwzględnienie pożądanych założeń, jakie ma spełniać miara ryzyka i właściwe opisanie parametrów lub funkcji ją definiujących. Miara ryzyka jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją aksjomaty ją charakteryzujące. Aksjomatyczna charakteryzacja tych funkcjonałów pozwala na sprawdzenie i uzasadnienie czy dana miara ryzyka jest odpowiednia w konkretnej sytuacji. Przy zaprezentowanym podejściu, składka ubezpieczeniowa jest pojęciem pochodnym od miary ryzyka. Zasada wyznaczania składek ubezpieczeniowych polega zwykle na rozwiązaniu jakiegoś zagadnienia optymalizacyjnego (np. minimalizacja całkowitego ryzyka mierzonego za pomocą ustalonej wcześniej miary ryzyka lub wybór składki na takim poziomie, aby prawdopodobieństwo ruiny było mniejsze od jakiejś liczby) lub oparta jest na zasadzie równoważności (np. składka zerowej użyteczności, składka mean-value). Choć z matematycznego punktu widzenia zarówno miary ryzyka jak i składki ubezpieczeniowe są funkcjonałami rzeczywistymi zdefiniowanymi na przestrzeni zmiennych losowych, to uzasadnienie i wyprowadzenie tych dwóch pojęć jest różne.

3.2 Własności składek ubezpieczeniowych

W tej części przedstawimy najważniejsze własności składek ubezpieczeniowych, które zbadamy w następnych dwóch rozdziałach dla nowych rodzajów składek. Załóżmy, że X, X_1, ..., X_n, Y są dowolnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi takimi, że $H(X)$, $H(X_1)$, ..., $H(X_n)$ i $H(Y)$ są skończone.

P1 Niezmienniczość ze względu na rozkład: składka $H(X)$ zależy jedynie od rozkładu zmiennej losowej X. Własność ta oznacza, że składka nie zależy od sposobu, w jaki dojdzie do szkody, a wpływ na jej wielkość ma jedynie wysokość ewentualnej szkody i prawdopodobieństwo, z jakim może zajść. W szczególności, gdy $X =_d Y$, to $H(X) = H(Y)$.

P2 Monotoniczność: $H(X) \leq H(Y)$, gdy $X \leq Y$. Jeżeli strata X jest mniejsza bądź równa od straty Y, to składka $H(X)$ nie powinna być większa od $H(Y)$.

P3 Brak nieuzasadnionego ładowania bezpieczeństwa: $H(a) = a$ dla $a \in \mathbb{R}$. Gdy jesteśmy narażeni na pewne ryzyko w wysokości a, wówczas nie ma niepewności co do wielkości wypłaty, a więc pobrana składka powinna być równa stracie.

P4 Brak nadmiernego i zbyt małego ładowania bezpieczeństwa: $\inf X \leq H(X) \leq \sup X$. Rozsądnym jest, aby zebrana składka była większa od minimalnej, ale jednocześnie mniejsza od maksymalnej straty. Jeżeli spełnione są własności P1, P2 i P3, to własność P4 również zachodzi.

P5 Zgodność (niezmienniczość ze względu na translację): $H(X+b) = H(X) + b$ dla $b \in \mathbb{R}$. Własność ta mówi, że składka za ryzyko powiększone o pewną stałą wartość powinna być równa składce za wyjściowe ryzyko powiększonej o tę samą wartość. Analizę zgodności dla wybranych składek ubezpieczeniowych podaje Reich (1984 a).

P6 Proporcjonalność (dodatnia jednorodność): $H(aX) = aH(X)$ dla $a \geq 0$. Z własności tej możemy wywnioskować, że składka za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka $2X$ powinna być dwa razy większa od składki za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X. Przy założeniu o braku arbitrażu możemy wyjaśnić zasadność tej własności. Gdyby składka $H(2X)$ była ponad dwukrotnie większa od $H(X)$, wówczas decydent mógłby ubezpieczyć się dwukrotnie na wypadek ryzyka X u różnych ubezpieczycieli lub zakupić dwie różne polisy u jednego sprzedawcy. Podobnie, gdyby $H(2X)$ była mniej niż dwukrotnie większa od $H(X)$, to można ubezpieczyć się na wypadek ryzyka $2X$ i sprzedać z osobna każde z ubezpieczeń na wypadek ryzyka X, osiągając w ten sposób arbitrażowy zysk. Proporcjonalność nie jest jednak pożądaną własnością, gdy ryzyko X jest duże i firma ubezpieczeniowa lub rynek ubezpieczeniowy są obciążone dodatkowymi kosztami w przypadkach ubezpieczania na wypadek ryzyka o dużej wartości. Wówczas należy się spodziewać, że składka $H(2X)$ będzie ponad dwukrotnie większa od $H(X)$. Własność proporcjonalności szczegółowo analizował Reich (1984 b).

P7 Addytywność dla zmiennych losowych komonotonicznych: $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$ dla komonotonicznych zmiennych losowych X i Y.

Definicja 3.1 *Zmienne losowe X_1, ..., X_n nazywamy komonotonicznymi, gdy istnieje zmienna losowa Z oraz niemalejące funkcje $v_1, ..., v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że wektory losowe $(X_1, ..., X_n)$ i $(v_1(Z), ..., v_n(Z))$ mają ten sam rozkład.*

Poniższe twierdzenie podaje charakteryzację zmiennych losowych komonotonicznych.

Twierdzenie 3.1 *Załóżmy, że F_i jest dystrybuantą zmiennej losowej X_i dla $i = 1, ..., n$. Następujące warunki są równoważne:*
(i) zmienne losowe X_1, ..., X_n są komonotoniczne;
(ii) $P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) = \min\{P(X_1 \leq x_1), ..., P(X_n \leq x_n)\}$ dla $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$;
(iii) wektory $(X_1, ..., X_n)$ i $\left(F_1^{-1}(U), ..., F_n^{-1}(U)\right)$ mają taki sam rozkład, gdzie U jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$.

Dowód Twierdzenia 3.1 podają Dhaene i inni (2002a).

Gdy zmienne losowe X i Y są komonotoniczne, to są nieujemnie skorelowane, a więc nie ma w tym przypadku możliwości wzajemnej osłony przed ryzykiem. Na rynku konkurencyjnym rozsądnym jest przyjmowanie założenia o addytywności składki ubezpieczeniowej w celu uniknięcia systematycznych okazji do arbitrażu (patrz Venter, 1991). Jednakże addytywność składki ubezpieczeniowej nie wyjaśnia efektu grupowania różnych klas ryzyka w celu zwiększenia zysków bądź zmniejszenia łącznego ryzyka (ang. *pooling*), co jest istotą rynku ubezpieczeniowego (patrz Albrecht, 1992). Dlatego też postuluje się słabszą formę addytywności, obejmującą jedynie zmienne losowe komonotoniczne. Jeżeli X i Y są komonotonicznymi zmiennymi losowymi oraz $Z = X + Y$, to z powodu braku możliwości wzajemnej osłony przed ryzykiem, składka $H(Z)$ powinna być niemniejsza od $H(X)+H(Y)$. Z drugiej strony, składka $H(Z)$ nie może przekraczać $H(X) + H(Y)$, gdyż w przeciwnym razie można by było zakupić dwie osobne polisy ubezpieczeniowe. Praktyczne zastosowanie zmiennych losowych komonotonicznych w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej podają Dhaene i inni (2002 a, b) oraz Goovaerts i inni (2010 a).

P8 Addytywność dla zmiennych losowych niezależnych: $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$ dla niezależnych zmiennych losowych X i Y. Własność ta jest pożądana na rynku ubezpieczeniowym i reasekuracyjnym, na co uwagę zwrócił już Borch (1962). Uzasadnia on, że naturalnym jest wymaganie, by firma ubezpieczeniowa otrzymała tę samą składkę niezależnie od tego, czy zaakceptuje ona dwa różne portfele osobno, czy w pojedynczej transakcji. Własność addytywności składki dla zmiennych losowych niezależnych badał również Gerber (1974 a, 1985). Goovaerts i inni (2004) podali aksjomatyzację składek ubezpieczeniowych, które są addytywne dla zmiennych losowych niezależnych.

P9 Subaddytywność: $H(X + Y) \leq H(X) + H(Y)$. Z jednej strony można twierdzić, że jest to dobra własność składki ubezpieczeniowej na rynku, w którym nie ma możliwości arbitrażu. Gdyby bowiem suma składek za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X i Y osobno była mniejsza bądź równa od składki za ubezpieczenie się na wypadek jednego dużego ryzyka, to bardziej opłacalnym byłoby zakupienie dwóch osobnych kontraktów ubezpieczeniowych. Z drugiej jednak strony przy braku arbitrażu na rynku, założenie, że $H(X + Y)$ nie może być mniejsze niż $H(X) + H(Y)$ jest nieprawdziwe, gdyż podmiot kupujący kontrakt ubezpieczający na wypadek ryzyka $X + Y$ nie może go sprzedać w postaci dwóch osobnych kontraktów − odpowiednio dla ryzyka X i Y.

P10 Zachowanie pierwszego porządku stochastycznego: $H(X) \leq H(Y)$, gdy $X \leq_{ST} Y$.

Definicja 3.2 *Mówimy, że zmienna losowa X jest mniejsza od zmiennej losowej Y w* *pierwszym porządku stochastycznym, co oznaczamy* $X \leq_{ST} Y$*, gdy* $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$ *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}$*.*

Poniższe twierdzenie charakteryzuje pierwszy porządek stochastyczny.

Twierdzenie 3.2 *Następujące warunki są równoważne:*
(i) $X \leq_{ST} Y$*;*
(ii) $Ev(X) \leq Ev(Y)$ *dla dowolnej funkcji rosnącej* $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takiej, że* $Ev(X)$ *i* $Ev(Y)$ *istnieją;*
(iii) istnieje przestrzeń probabilistyczna (Ω', A', P') *i zmienne losowe* X', Y' *określone na tej przestrzeni takie, że* $X =_d X'$ *i* $Y =_d Y'$ *oraz* $P'(X' \leq Y') = 1$*.*

Dowód Twierdzenia 3.2 podają Goovaerts i inni (1990), Rolski i inni (1999) oraz Shaked i Shanthikumar (2007).

Jeżeli spełnione są własności P1 i P2, to zachodzi również własność P10 (patrz Wang i inni, 1997).

P11 Zachowanie porządku stop-loss: $H(X) \leq H(Y)$, gdy $X \leq_{SL} Y$.

Definicja 3.3 *Mówimy, że zmienna losowa* X *jest mniejsza od zmiennej losowej* Y *w porządku stop-loss, co oznaczamy* $X \leq_{SL} Y$*, gdy* $E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+$ *dla każdego* $d \in \mathbb{R}$*.*

Poniższe twierdzenie podaje charakteryzację porządku stop-loss.

Twierdzenie 3.3 *Następujące warunki są równoważne:*
(i) $X \leq_{SL} Y$*;*
(ii) $Ew(X) \leq Ew(Y)$ *dla dowolnej rosnącej i wypukłej funkcji* $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takiej, że* $Ew(X)$ *i* $Ew(Y)$ *istnieją;*
(iii) istnieje przestrzeń probabilistyczna (Ω', A', P') *i zmienne losowe* X', Y' *określone na tej przestrzeni takie, że* $X =_d X'$ *i* $Y =_d Y'$ *oraz* $P'(X' \leq E(Y'|X')) = 1$*;*
(iv) $\int_x^\infty P(X > t)\,dt \leq \int_x^\infty P(Y > t)\,dt$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*.*

Podamy teraz dwa twierdzenia, dzięki którym można sprawdzić czy $X_{\leq SL} Y$.

Twierdzenie 3.4 *(kryterium jednego przecięcia dla dystrybuant) Jeżeli* X *i* Y *są zmiennymi losowymi takimi, że* $EX \leq EY$ *oraz istnieje* $x_0 \in \mathbb{R}$ *takie, że* $P(X \leq x) \leq P(Y \leq x)$ *dla* $x < x_0$ *i* $P(X \leq x) \geq P(Y \leq x)$ *dla* $x > x_0$*, to* $X \leq_{SL} Y$*.*

Twierdzenie 3.5 *(kryterium dwóch przecięć dla gęstości) Jeżeli X i Y są zmiennymi losowymi o gęstościach f_X i f_Y takimi, że $EX \leq EY$ oraz istnieją stałe $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ takie, że $f_X(x) \leq f_Y(x)$ dla $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_1, \infty)$ i $f_X(x) \geq f_Y(y)$ dla $x \in (x_0, x_1)$, to $X \leq_{SL} Y$.*

Dowody Twierdzeń 3.3- 3.5 podają Goovaerts i inni (1990), Rolski i inni (1999) oraz Shaked i Shanthikumar (2007). Z zachowania porządku stop-loss wynika własność P10 (patrz Rothschild i Stiglitz, 1970). Własności P10 i P11 są używane w matematyce aktuarialnej, gdyż pozwalają one na uporządkowanie różnych grup decydentów (patrz Van Heervaarden, 1991, Kaas i inni, 1994). Hürlimann (1998) analizował porządek stop-loss dla składki Wanga.

P12 Warunek zysku netto: $H(X) \geq EX$. Warunek ten jest pożądany, a wręcz i niezbędny patrząc z punktu widzenia firmy ubezpieczeniowej. W przeciwnym wypadku w dłuższej perspektywie czasu ubezpieczyciel średnio ponosiłby stratę.

P13 Iteracyjność: $H(X) = H(H(X|Y))$ dla dowolnych zmiennych losowych X i Y, dla których składki te istnieją. Według naszej wiedzy pojęcie iteracyjności pojawia się po raz pierwszy w książce Bühlmanna (1970), który wyjaśnia różnicę między składką indywidualną a składką kolektywną. Załóżmy, że $H(X)$ jest składką za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X. W celu wyznaczenia składki indywidualnej, firma ubezpieczeniowa bierze pod uwagę możliwie jak najwięcej cech opisujących dane ryzyko i potencjalnego ubezpieczonego. Jeżeli parametr y opisujący te cechy jest znany, wówczas $H(X|y)$ jest składką za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X o charakterystyce y. Z reguły jednak ta specyficzna cecha y jest realizacją pewnej zmiennej losowej Y. Wobec tego składka kolektywna powinna być wyznaczona w dwóch krokach. Najpierw należy wyznaczyć składkę $H(X|Y)$, która jest pewną zmienną losową zależną od Y, a następnie obliczyć $H(H(X|Y))$. Ponieważ składka $H(X)$ jest w większości przypadków różna od $H(H(X|Y))$, więc powstaje pytanie przy jakich założeniach wspomniane dwie wartości są równe. Bühlmann (1970) i Gerber (1974 b) zauważają analogię pomiędzy iteracyjnością, a metodą wyznaczania składek wiarygodności.

Gerber (1974 b) dowodzi, że składka ubezpieczeniowa, która spełnia pewien warunek ciągłości jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy jest składką mean-value wyznaczoną przy $w = 0$. Uogólnienie wyniku Gerbera zostało podane przez Goovaertsa i de Vyldera (1979). Wykazują oni, że składka szwajcarska jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy redukuje się ona do składki mean-value lub składki zerowej użyteczności z liniową lub wykładniczą funkcją użyteczności. Gerber (1979) zauważa również, że jeśli $S = X_1 + ... + X_N$ jest sumą o losowej liczbie składników, zaś składka $H(X)$ jest addytywna i iteracyjna, to $H(S) = H(H(S|N)) = H(H(X) \cdot N)$. Goovaerts i inni (2010 a) podają również charakteryzację warunku iteracyjności dla pewnej klasy składek ubezpieczeniowych.

4 Składka mean-value w teorii skumulowanej perspektywy

4.1 Definicja składki

Zdefiniujemy składkę mean-value dostosowaną do teorii skumulowanej perspektywy. Załóżmy, że X jest dowolną zmienną losową (w szczególności może ona przyjmować wartości ujemne). Wówczas X możemy interpretować jako całkowitą szkodę ubezpieczonego pomniejszoną o ewentualny zysk z inwestycji. Umożliwia nam to analizę produktów ubezpieczeniowych uwzględniających możliwość inwestowania kapitału, np. ubezpieczenia na życie z funduszem inwestycyjnym czy tzw. renty zmienne (ang. *variable annuity*). W przypadku ubezpieczeń majątkowych uzasadnione jest badanie jedynie nieujemnych zmiennych losowych.

Rozważmy klienta, który podejmuje decyzje w oparciu o punkt referencyjny $w \in \mathbb{R}$ i chce zakupić polisę ubezpieczeniową wypłacającą pieniężną równowartość losowej straty. W dalszej części wartości $(X-w)_+$ będziemy nazywali stratami, zaś $(w-X)_+$ zyskami. Gdy $X \geq 0$, to $(X-w)_+$ oraz $(w-X)_+$ oznaczają odpowiednio stratę katastroficzną i niekatastroficzną. W tym drugim przypadku występuje bezpośrednia analogia do sposobu reasekuracji stop-loss. Załóżmy, że $u_1, u_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ są niemalejącymi funkcjami wartości, przy czym u_1 mierzy zyski, zaś u_2 straty. Niech g i h będą funkcjami zniekształcającymi prawdopodobieństwa, odpowiednio, zysków i strat. Składkę mean-value $H(X)$ w teorii skumulowanej perspektywy za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X w ujęciu teorii skumulowanej perspektywy definiujemy jako rozwiązanie równania

$$u_1\left((w-H(X))_+\right) - u_2\left((H(X)-w)_+\right) = E_g u_1\left((w-X)_+\right) - E_h u_2\left((X-w)_+\right). \quad (4.1)$$

Zauważmy, że wzór (4.1) możemy zapisać w postaci

$$u(w-H(X)) = E_{gh} u(w-X), \quad (4.2)$$

gdzie $u(x) = u_1(x_+) - u_2\left((-x)_+\right)$ jest niemalejącą funkcją wartości dla $x \in \mathbb{R}$. Gerber (1979) rozważa składkę $H(X)$ wyznaczoną ze wzoru (4.2) przy założeniu, że funkcja wartości jest wklęsła, zaś prawdopodobieństwa nie są zniekształcane, tzn. $g(p) = h(p) = p$. W uogólnionym modelu, Luan (2001) zakłada, że $h = \overline{g}$, g jest wypukła, zaś u jest wklęsła. Van der Hoek i Sherris (2001) badają funkcjonał $H(X)$ z różnymi funkcjami zniekształcającymi prawdopodobieństwo dla zysków i strat. Jednakże analizują oni tylko przypadek, gdy funkcja wartości jest liniowa. Al-Nowaihi i inni (2008), dzięki rozwiązaniu pewnych równań funkcyjnych, podają charakteryzację jednorodności preferencji i awersji do ryzyka w ujęciu teorii skumulowanej perspektywy. W szczególności dowodzą oni, że w analizowanym przez nich przypadku funkcje zniekształcające prawdopodobieństwo dla zysków i strat są jednakowe.

Określimy teraz minimalne założenia dotyczące funkcji u, przy których składka wyznaczona ze wzoru (4.2) istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie. Powszechnie akceptowanym jest założenie, że funkcja u jest niemalejąca. Gdyby jednak u była stała na pewnym przedziale, to składka mogłaby nie być wyznaczona jednoznacznie. Wobec tego zakładamy, że u jest rosnąca. Okazuje się, że u powinna być również ciągła. W przeciwnym przypadku równanie (4.2) może nie mieć rozwiązań. Bez straty ogólności możemy założyć, że $u(0) = 0$. Zatem będziemy rozważali ciągłe i rosnące funkcje u takie, że $u(0) = 0$. W dalszym ciągu będziemy pisali $u \in \mathcal{U}$, gdy funkcja u spełnia te trzy warunki. Oznaczamy również $u \in \mathcal{U}_0$, jeśli $u(x) = cx$, $u(x) = (1 - e^{-cx})/d$ lub $u(x) = (e^{cx} - 1)/d$ dla $x \in \mathbb{R}$ i pewnych $c, d > 0$.

4.2 Przykłady

W poniższych dwóch przykładach wyznaczymy składkę $H(X)$ w przypadku, gdy $u \in \mathcal{U}_0$.

Przykład 4.1 *Jeśli $u(x) = cx$, to równanie (4.2) możemy zapisać jako*

$$c(w - H(X)) = cE_{gh}(w - X) = c\left(w - E_{hg}X + \int_0^w [h(P(X > s)) - \overline{g}(P(X > s))]\, ds\right).$$

Korzystając z z (2.1), W2, W3 (patrz Lemat 2.1) mamy

$$H(X) = E_{hg}X + \int_0^w [\overline{g}(P(X > s)) - h(P(X > s))]\, ds. \tag{4.3}$$

Przykład 4.2 *Dla $u(x) = (1 - e^{-cx})/d$ z (2.1) i W3, równanie (4.2) ma postać*

$$\begin{aligned} 1 - e^{-c(w-H(X))} &= 1 - E_h\left(e^{-cw}e^{cX}\right) \\ &\quad + \int_0^1 \left[h\left(P\left(e^{-c(w-X)} > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(e^{-c(w-X)} > s\right)\right)\right] ds. \end{aligned}$$

Stąd i z W2 mamy

$$e^{cH(X)} + e^{cw} \int\limits_0^1 \left[h\left(P\left(e^{cX} > se^{cw}\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(e^{cX} > se^{cw}\right)\right)\right] ds = E_{hg}e^{cX}.$$

Zatem

$$H(X) = \frac{1}{c} \ln \left[E_h e^{cX} + \int\limits_0^{\exp(cw)} \left[\overline{g}\left(P\left(e^{cX} > t\right) - h\left(P\left(e^{cX} > t\right)\right)\right)\right] dt \right]. \tag{4.4}$$

W podobny sposób wyznaczamy wzór na $H(X)$, gdy $u(x) = (e^{cx} - 1)/d$.

W kolejnych przykładach pokażemy, że przy pewnych założeniach składka wyznaczona ze wzoru (4.2) redukuje się do składek rozważanych już w literaturze aktuarialnej.

Przykład 4.3 *Niech $u \in \mathcal{U}$ oraz $g(x) = h(x) = x$ dla $x \in [0,1]$. Wtedy składka $H(X)$ jest składką mean-value. W szczególności, gdy $u(x) = x$, to z (4.3) mamy $H(X) = E_{gh}X = EX$, a więc otrzymana składka jest składką netto. Jeśli zaś $u(x) = \left(1 - e^{-\theta x}\right)/\theta$ dla pewnego $\theta > 0$, to z (4.4) mamy $H(X) = \frac{1}{\theta}\ln\left(Ee^{\theta X}\right)$, a więc otrzymaliśmy składkę wykładniczą.*

Przykład 4.4 *Gdy $u(x) = x$ oraz $g \in \mathcal{G}$, $h(x) = \overline{g}(x)$ dla $x \in [0,1]$, to*

$$H(X) = E_{hg}X = E_{\overline{g}}X = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\overline{g}\left(P\left(X > t\right)\right) - 1\right) dt + \int\limits_0^{\infty} \overline{g}\left(P\left(X > t\right)\right) dt,$$

a więc otrzymana składka jest składką Wanga. W szczególności, gdy $\overline{g}(x) = x^c$, gdzie $c \in (0,1)$ jest ustalone, to $H(X)$ jest składką proporcjonalnego hazardu.

Przykład 4.5 *Niech $u(x) = x$,*

$$g(x) = \begin{cases} (1-\theta)\,x \text{ dla } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (1+\theta)\,x - \theta \text{ dla } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

gdzie $\theta \in (0,1)$ jest ustalone oraz

$$h(x) = \overline{g}(x) = \begin{cases} (1+\theta)\,x \text{ dla } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \theta + (1-\theta)\,x \text{ dla } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Jeśli $\inf X \leq 0 \leq \sup X$ *oraz* $MedX$ *oznacza medianę zmiennej* X*, to*

$$\begin{aligned}
H(X) &= E_{\overline{g}}X = \int_{\max(0,MedX)}^{\sup X} (1+\theta) P(X>t)\,dt + \int_{0}^{\max(0,MedX)} [\theta + (1-\theta) P(X>t)]\,dt \\
&+ \int_{\min(0,MedX)}^{0} [(1+\theta) P(X>t) - 1]\,dt + \int_{\inf X}^{\min(0,MedX)} [\theta + (1-\theta) P(X>t) - 1]\,dt \\
&= \int_{0}^{\sup X} P(X>t)\,dt + \theta \left(\int_{\max(0,MedX)}^{\sup X} P(X>t)\,dt + \int_{0}^{\max(0,MedX)} P(X\leq t)\,dt \right) \\
&- \int_{\inf X}^{0} P(X\leq t)\,dt + \theta \left(\int_{\min(0,MedX)}^{0} P(X>t)\,dt + \int_{\inf X}^{\min(0,MedX)} P(X\leq t)\,dt \right) \\
&= EX + \theta \left(\int_{MedX}^{\sup X} P(X>t)\,dt + \int_{\inf X}^{MedX} P(X\leq t)\,dt \right) = EX + \theta E\left|X - MedX\right|,
\end{aligned}$$

a więc otrzymana składka jest składką odchylenia przeciętnego od mediany.

Przykład 4.6 *Niech* $u(x) = x$ *oraz* $g(x) = \mathbf{1}_{[\alpha,1]}(x)$ *oraz* $h(x) = \overline{g}(x) = \mathbf{1}_{(1-\alpha,1]}(x)$*, gdzie* $\alpha \in (0,1)$ *jest ustalone. Wówczas*

$$\begin{aligned}
H(X) &= E_{hg}X = E_{\overline{g}}X = \int_{0}^{\infty} \overline{g}(P(X>t))\,dt + \int_{-\infty}^{0} (\overline{g}(P(X>t)) - 1)\,dt \\
&= \int_{\max(\inf X,0)}^{\max\left(F_X^{-1}(\alpha),0\right)} 1dt - \int_{\min\left(F_X^{-1}(\alpha),0\right)}^{\min(\sup X,0)} 1dt \\
&= \max\left(F_X^{-1}(\alpha),0\right) + \min\left(F_X^{-1}(\alpha),0\right) - \max(\inf X,0) - \min(\sup X,0) \\
&= F_X^{-1}(\alpha) - \max(\inf X,0) - \min(\sup X,0).
\end{aligned}$$

Jeżeli $\inf X \leq 0 \leq \sup X$*, to* $H(X) = F_X^{-1}(\alpha)$*, która jest składką VaR.*

Przykład 4.7 *Niech* $u(x) = x$*,*

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ } dla \text{ } x \in [0,p) \\ \frac{x-p}{1-p} \text{ } dla \text{ } x \in [p,1] \end{cases},$$

gdzie $p \in (0,1)$ *jest ustalone oraz*

$$h(x) = \overline{g}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-p} \text{ dla } x \in [0, 1-p] \\ 1 \text{ dla } x \in (1-p, 1] \end{cases}.$$

Załóżmy, że $\inf X \leq 0 \leq F^{-1}(p) \leq \sup X$. *Wtedy*

$$\begin{aligned} H(X) &= E_{\overline{g}} X = \int_{F_X^{-1}(p)}^{\sup X} \frac{P(X>t)}{1-p} dt + \int_0^{F^{-1}(p)} 1dt \\ &= \frac{1}{1-p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{\sup X} P(X>t)\, dt + F_X^{-1}(p) \\ &= F_X^{-1}(p) + \frac{1}{1-p} E\left(X : X > F_X^{-1}(p)\right) - \frac{1}{1-p} F_X^{-1}(p)\, P\left(X > F_X^{-1}(p)\right) \\ &= F_X^{-1}(p) + \frac{1}{1-p} E\left(X - F_X^{-1}(p)\right)_+ . \end{aligned}$$

Składka $H(X)$ *jest zatem składką TVaR.*

Przykład 4.8 *Niech* $u(x) = x$. *Załóżmy, że* $g(x) = c + dx$, $h(x) = a + bx$ *dla* $x \in (0,1)$, *gdzie* $b, d \geq 0$, $a, c \geq 0$, $a + b \leq 1$ *i* $c + d \leq 1$. *Wówczas* g *i* h *są neo-addytywnymi funkcjami wagowymi (patrz Wakker, 2010, str. 208). Jeśli* $\inf X \leq 0 \leq \sup X$, *to z (4.3) mamy*

$$\begin{aligned} H(X) &= \int_0^{\sup X} [a + bP(X>s)]\, ds - \int_0^{-\inf X} [c + dP(-X>s)]\, ds \\ &\quad + \int_0^{w(X)} [(1-a-c-d) + (d-b)\, P(X>s)]\, ds \\ &= (1-a-c-d)\, w(X) + (d-b) \int_0^{w(X)} P(X>s)\, ds \qquad (4.5) \\ &\quad + a \sup X + c \inf X + bEX_+ - dE(-X)_+ , \end{aligned}$$

gdzie $w(X) = \min(\max(\inf X, w), \sup X)$. *Jeżeli* $c = 0$, $0 \leq d < 1$, $\inf X = 0$ *oraz* $\sup X = w$, *to* $H(X) = EX + (1-d)(\sup X - EX)$. *Składkę tej postaci badali Kałuszka i Okolewski (2008). Jeśli* $w = 0$, $b = 1 - a$ *i* $d = 1 - c$, *to z równania (4.5) otrzymujemy*

$$H(X) = EX + a(\sup X_+ - EX_+) - c\left(\sup(-X)_+ - E(-X)_+\right).$$

Gdy $\inf X \leq w \leq \sup X$ *i* $b = d$, *to z (4.5) mamy*

$$H(X) = (1 - a - c - d)\, w + a \sup X + c \inf X + dEX.$$

4.3 Własności składki mean-value w teorii skumulowanej perspektywy

W rozdziale tym zajmiemy się analizą własności składki ubezpieczeniowej $H(X)$ będącej rozwiązaniem równania (4.2).

P1 Niezmienniczość ze względu na rozkład.
Własność jest spełniona dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$, co wynika z definicji uogólnionej całki Choqueta oraz wzoru (4.2).

P2 Monotoniczność.
Własność ta jest spełniona dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$, co jest konsekwencją W4 i W7.

P3 Brak nieuzasadnionego ładowania bezpieczeństwa.
Z W7 wynika, że warunek ten zachodzi dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$.

P4 Brak zbyt małego i nadmiernego ładowania bezpieczeństwa.
Własność ta jest spełniona dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$, ponieważ zachodzą własności P1, P2 i P3.

P5 Zgodność.

Twierdzenie 4.1 *Niech* $u \in \mathcal{U}_0$ *i* $g, h \in \mathcal{G}$. *Wtedy* $H(X)$ *jest zgodna wtedy i tylko wtedy, gdy* $h = \overline{g}$.

Dowód Niech $u(x) = cx$. Z (4.3) i W8 mamy

$$\begin{aligned} H(X+b) &= E_{hg}X + b + \int_0^b \left[h\left(P\left(-X > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(-X > s\right)\right)\right] ds \\ &\quad + \int_0^w \left[\overline{g}\left(P\left(X > s - b\right)\right) - h\left(P\left(X > s - b\right)\right)\right] ds. \end{aligned}$$

Stąd $H(X+b) = H(X) + b$ dla $b \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^b \left[h\left(P\left(-X > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(-X > s\right)\right)\right] ds \tag{4.6}$$
$$= \int_0^w \left[\overline{g}\left(P\left(X > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(X > s-b\right)\right) - \left(h\left(P\left(X > s\right)\right) - h\left(P\left(X > s-b\right)\right)\right)\right] ds.$$

Oczywiście, jeśli $h = \overline{g}$, to $H(X)$ jest zgodna. Załóżmy teraz, że $h(z) \neq \overline{g}(z)$ dla pewnego z. Niech $b > w \geq 0$, zaś X będzie zmienną losową taką, że $P(X = -s_0) = z = 1 - P(X = 0)$, gdzie $b - w < s_0 < b$. Wówczas równanie (4.6) możemy zapisać jako

$$\left[h(z) - \overline{g}(z)\right] s_0 = \int_{-s_0}^{w-b} \left[h(1-z) - \overline{g}(1-z)\right] dt = \left(h(1-z) - \overline{g}(1-z)\right)\left(w - b + s_0\right).$$

Ponieważ $\left(h(z) - \overline{g}(z)\right) s_0 \neq 0$, otrzymujemy sprzeczność z tym, że b jest dowolne, takie że $\max(s_0, w) < b < s_0 + w$. Dla $w < 0$ niech $b < w$, zaś X będzie zmienną losową taką, że $P(X = s_0) = z = 1 - P(X = 0)$, gdzie $0 < w - b < s_0 < -b$. Wtedy (4.6) możemy zapisać jako

$$s_0\left(\overline{g}(1-z) - h(1-z)\right) = \left(s_0 - w + b\right)\left(h(z) - \overline{g}(z)\right),$$

co przeczy temu, że b jest dowolne, takie że $w - s_0 < b < \min(-s_0, w)$.

Niech $u(x) = \left(1 - e^{-cx}\right)/a$. Z (4.4) przy $b > w \geq 0$ mamy

$$H(X+b) = \frac{1}{c} \ln\left[E_h e^{cX} + \int_0^{\exp(c(w-b))} \left[\overline{g}\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right) - h\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right)\right] ds\right] + b. \tag{4.7}$$

Jeśli $h = \overline{g}$, to $H(X+b) = H(X) + b$ dla wszystkich $b \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że $\overline{g}(z) \neq h(z)$ dla pewnego z. Niech X będzie takie, że $P(X = s_0) = 1 - z = 1 - P(X = 0)$, gdzie $s_0 < w - b < 0$. Wtedy

$$\int_0^{\exp(c(w-b))} \left[\overline{g}\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right) - h\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right)\right] ds = \left(\overline{g}(z) - h(z)\right)\left(e^{cs_0} - e^{c(w-b)}\right) \neq 0$$

oraz z (4.7) i (4.4) wynika, że $H(X)$ nie jest zgodna. Analogiczny dowód można przeprowadzić w przypadku, gdy $u(x) = \left(e^{cx} - 1\right)/d$. ∎

Twierdzenie 4.2 *Niech $u \in \mathcal{U}_0$, $g, h \in \mathcal{G}$ i $b \geq 0$. Wówczas $H(X+b) = H(X) + b$ dla nieujemnych zmiennych losowych X wtedy i tylko wtedy, gdy $h = \overline{g}$ lub $w \leq 0$.*

Dowód Ponieważ $P(X > t) = 1$ dla $t < 0$ i $\overline{g}(1) = h(1) = 1$, więc dla $b \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned}\int_0^w [\overline{g}(P(X > s-b)) - h(P(X > s-b))]\, ds &= \int_{-b}^{w-b} [\overline{g}(P(X > t)) - h(P(X > t))]\, dt \\ &= \int_0^{w-b} [\overline{g}(P(X > t)) - h(P(X > t))]\, dt.\end{aligned}$$

Zauważmy, że $E_{hg}(X+b) = E_{hg}X + b$, ponieważ $X + b \geq 0$. Zatem dla $u(x) = cx$ z (4.3) wynika, że

$$H(X+b) = H(X) + b + \int_{(w-b)_+}^{w} [h(P(X > s)) - \overline{g}(P(X > s))]\, ds. \tag{4.8}$$

Z (4.8) wnioskujemy, że jeśli $w \leq 0$ lub $\overline{g} = h$, to $H(X+b) = H(X) + b$. Załóżmy, że $w > 0$ i $\overline{g}(z) \neq h(z)$ dla pewnego z. Niech $b > w$ i X będą takie, że $P(X = s_0) = z = 1 - P(X = 0)$, gdzie $0 < s_0 < w$. Wtedy

$$\int_{(w-b)_+}^{w} [h(P(X > s)) - \overline{g}(P(X > s))]\, ds = s_0 (h(z) - \overline{g}(z)) \neq 0,$$

co oznacza, że $H(X)$ nie jest zgodna.

Gdy $u(x) = (1 - e^{-cx})/d$, to z (4.4) i (4.7) dla $b > 0$ mamy

$$H(X+b) = \frac{1}{c} \ln \left[E_h e^{cX} + \int_0^{e^{c(w-b)}} \left[\overline{g}\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right) - h\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right)\right] ds \right] + b.$$

Jeśli $w \leq 0$ lub $\overline{g} = h$, to $H(X)$ jest zgodna, ponieważ $e^{c(w-b)} < 1$ dla $b \geq 0$ oraz $e^{cX} \geq 1$. Niech $w > 0$ i $\overline{g}(z) \neq h(z)$ dla jakiegoś z. Dla zmiennej losowej X takiej, że $P(X = s_0) = z = 1 - P(X = 0)$, gdzie $0 < s_0 < w - b$, otrzymujemy

$$\int_0^{e^{c(w-b)}} \left[\overline{g}\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right) - h\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right)\right] ds = \left(e^{cs_0} - 1\right)(\overline{g}(z) - h(z)) \neq 0,$$

co oznacza, że $H(X)$ nie jest zgodna. Analogiczny dowód przeprowadzamy, gdy $u(x) = (e^{cx}-1)/d$. ■

Twierdzenie 4.3 *Niech $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$ będą ciągłe. Jeśli $H(X+b) = H(X) + b$ dla $b \geq 0$ oraz dla $w = 0$ i pewnego $w > 0$, to $u \in \mathcal{U}_0$ i $h = \overline{g}$.*

Dowód Załóżmy, że $H(X+b) = H(X) + b$ dla wszystkich $b \geq 0$. Rozważmy $X \in \mathcal{X}_2$. Wtedy z (4.2) przy $w = 0$ mamy

$$u(-H(X)) = E_{gh}u(-X) = -E_h(-u(-X))_+ = u(-s)\,h(q).$$

Stąd

$$h(q) = \frac{u(-H(X))}{u(-s)}. \tag{4.9}$$

Ponieważ $H(X) = 0$ dla $q = 0$ oraz $H(X) = s$ dla $q = 1$, więc z monotoniczności i ciągłości u i h wynika, że $H(X)$ jest ciągłą i niemalejącą funkcją zmiennej q, a zatem przyjmuje wszystkie wartości ze zbioru $[0, s]$. Ze zgodności $H(X)$, równanie (4.2) dla zmiennej $X + b$ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} u(-H(X) - b) &= E_{gh}u(-X-b) = -E_h(-u(-X-b))_+ \\ &= u(-b)(1 - h(q)) + u(-s-b)\,h(q). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Wstawiając (4.9) do (4.10), oznaczając $x = -H(X)$, $y = -b$ i dzieląc obie strony otrzymanego równania przez $u(x)\,u(-s)$ otrzymujemy

$$f(x, y) = f(-s, y) \tag{4.11}$$

dla wszystkich $y \leq 0$, $s > 0$ oraz $-s \leq x \leq 0$, gdzie $f(x,y) = (u(x+y) - u(y))/u(x)$. Kładąc $s = 1$ w (4.11) mamy

$$f(x, y) = f(-1, y) \tag{4.12}$$

dla $y \leq 0$, $-1 \leq x \leq 0$. Wstawiając $x = -1$ do (4.11) dostajemy

$$f(-s, y) = f(-1, y) \tag{4.13}$$

dla $y \leq 0$ i $-s \leq -1$. Z (4.12) i (4.13) mamy $f(x,y) = f(-1,y)$ dla $x, y \leq 0$. Stąd dla ustalonego y mamy

$$u(x+y) = c(y)\,u(x) + u(y) \tag{4.14}$$

dla $x \leq 0$, gdzie $c(y)$ jest pewną funkcją. Z symetrii występującej w równaniu (4.14) otrzymujemy

$$c(y)\,u(x) + u(y) = c(x)\,u(y) + u(x)$$

dla $x, y \leq 0$, co jest równoważne temu, że

$$(c(y) - 1)\,u(x) = (c(x) - 1)\,u(y) \tag{4.15}$$

dla $x, y \leq 0$. Jeżeli $c(y) \neq 1$ dla $y < 0$, to

$$\frac{u(x)}{c(x) - 1} = \frac{u(y)}{c(y) - 1}$$

dla $x, y \leq 0$. Stąd $u(x) = d\,(c(x) - 1)$ dla pewnego $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a więc z (4.14) dostajemy, że

$$c(x + y) = c(x)\,c(y) \tag{4.16}$$

dla $x, y \leq 0$. Ponieważ $u(x) = d\,(c(x) - 1)$ oraz $u \in \mathcal{U}$, więc funkcja c jest ciągła. Wobec tego jedynym rozwiązaniem równania (4.16) jest $c(x) = e^{ax}$ dla $x \leq 0$ i pewnego $a \in \mathbb{R}$ (patrz Kuczma, 2009, str. 349). Stąd funkcja u ma postać $u(x) = d\,(e^{ax} - 1)$ dla $x < 0$ i pewnych $a \in \mathbb{R}$ i $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ponieważ u jest funkcją rosnącą, więc jedynymi rozwiązaniami równania (4.14) są funkcje $u(x) = (e^{ax} - 1)/d$ dla $x \leq 0$ i pewnych $a, d > 0$ oraz $u(x) = (1 - e^{-ax})/d$ dla $x < 0$ i pewnych $a, d > 0$. Jeśli $c(y) = 1$ dla jakiegoś y, to z równania (4.15) wynika, że $c(x) = 1$ dla $x \leq 0$. Z (4.14) i ciągłości funkcji u wnioskujemy, że $u(x) = ax$ dla wszystkich $x \leq 0$.

Udowodnimy, że u jest liniowa lub wykładnicza na $\mathbb{R}$ oraz $h = \overline{g}$. Zapisując równanie (4.2) dla $X \in \mathcal{X}_2$ i korzystając ze zgodności $H(X)$ mamy

$$u(w - H(X) - b) = u(w - b)\,g(1 - q) + u(w - s - b)\,h(q) \tag{4.17}$$

o ile $b \leq w \leq b + s$ oraz

$$u(w - H(X) - b) = u(w - b)\,(1 - h(q)) + u(w - s - b)\,h(q) \tag{4.18}$$

dla $b \geq w$. Niech $u(x) = cx$ dla $x < 0$. Gdy $b > w$, to z (4.18) mamy $H(X) = sh(q)$. Dla $q_0 \in (0, 1)$ takiego, że $h(q_0) = 1/2$, $s = 2(w - b)$ oraz $H(X) = sh(q_0)$, z równania (4.17) otrzymujemy $u(x) = c_1 x$ dla $x > 0$, gdzie $c_1 = c/(2g(1 - q_0))$. Kładąc $s = w - b$ w (4.17), dostajemy $\overline{g} = h$ oraz $c_1 = c$. Niech teraz $u(x) = (1 - e^{-cx})/a$ dla $x < 0$. Z

(4.18) mamy $H(X) = \frac{1}{c}\ln\left(e^{cs}h(q) + (1-h(q))\right)$. Wstawiając $s = \ln\left(2e^{c(w-b)} - 1\right)/c$ oraz wzór na $H(X)$ z q_0 do równania (4.17), otrzymujemy $u(x) = \left(1-e^{-cx}\right)/a_1$ dla $x > 0$, gdzie $a_1 = 2ag(1-q_0)$. Aby udowodnić, że $u(x) = \left(1-e^{-cx}\right)/a$ dla $x \geq 0$ i $h = \overline{g}$, wykorzystujemy podobne rozumowanie jak w przypadku funkcji liniowej. Analogiczny dowód przeprowadza się dla $u(x) = \left(e^{cx}-1\right)/a$. ■

Uwaga 4.1 *W założeniach Twierdzenia 4.3 wystarczy sprawdzić zgodność składki jedynie dla $b \geq 0$, aby wywnioskować, że funkcja wartości jest liniowa lub wykładnicza na $\mathbb{R}$ oraz prawdopodobieństwa zysków i strat są zniekształcane w ten sam sposób.*

P6 Proporcjonalność.

Twierdzenie 4.4 *Niech $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$.*
(i) Niech $u(x) = cx$ dla pewnego $c > 0$. Jeśli $w = 0$ lub $h = \overline{g}$, to $H(aX) = aH(X)$ dla wszystkich $a > 0$.
(ii) Niech h będzie ciągła. Jeśli $X \geq 0$ oraz $H(X)$ jest proporcjonalna dla $w = 0$, to $u(x) = -c(-x)^d$ dla $x \leq 0$ i pewnego $c, d > 0$.
(iii) Niech g, h będą ciągłe. Jeśli $H(X)$ jest proporcjonalna dla $w = 0$ i wszystkich X, to $u(x) = -c(-x)^d$ dla $x \leq 0$ i pewnych $c, d > 0$ oraz $u(x) = ax^b$ dla $x > 0$ i pewnych $a, b > 0$.
(iv) Jeśli h jest ciągła i $H(X)$ jest proporcjonalna dla wszystkich $w \geq 0$, to $u(x) = cx$ dla pewnego $c > 0$ i wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz $\overline{g} = h$.

Dowód (i) Jeżeli $u(x) = cx$, to z (4.3) dla $a > 0$ mamy

$$\begin{aligned} H(aX) &= E_{hg}(aX) + \int_0^w \left[\overline{g}(P(X > s/a)) - h(P(X > s/a))\right] ds \\ &= aE_{hg}X + a\int_0^{w/a} \left[\overline{g}(P(X > s)) - h(P(X > s))\right] ds. \end{aligned}$$

Gdy $w = 0$ lub $h = \overline{g}$, to $H(X)$ jest proporcjonalna.
(ii) Załóżmy, że $H(aX) = aH(X)$. Dla $X \in \mathcal{X}_2$ z (4.2) przy $w = 0$ dostajemy

$$u(-ay) = h(q)\,u(-as) \tag{4.19}$$

dla wszystkich $a > 0$, gdzie $y = H(X)$. Kładąc $f(x) = -u(-x)$ i wyznaczając $h(q)$ z (4.19) przy $a = 1$, możemy zapisać równanie (4.19) w postaci

$$f(ay) = f(as)\frac{f(y)}{f(s)} \tag{4.20}$$

dla wszystkich $s > 0$ i $0 \leq y \leq s$. Wstawiając $s = 1$ do (4.20) i dzieląc obie strony tego równania przez $u(-1)$, otrzymujemy $z(ay) = z(a)\,z(y)$ dla $0 \leq y \leq 1$ i $a > 0$, gdzie $z(x) = f(x)/(-u(-1))$. Kładąc $y = 1$ w (4.20), mamy $z(a)\,z(s) = z(as)$ dla $s \geq 1$ i $a > 0$. Z ostatnich dwóch równań wynika, że $z(ax) = z(a)\,z(x)$ dla $x > 0$ i $a > 0$. Z ciągłości funkcji z dostajemy $z(x) = x^d$ dla wszystkich $x \geq 0$ i pewnego $d > 0$ (patrz Kuczma, 2009, str. 349). Stąd $u(x) = -c(-x)^d$ dla wszystkich $x \leq 0$ oraz pewnych $c = -u(-1) > 0$ i $d > 0$.
(iii) Wzór na $u(x)$ dla $x \leq 0$ wynika z (ii). Załóżmy, że $H(aX) = aH(X)$. Niech X będzie zmienną losową taką, że $P(X = -s) = q = 1 - P(X = 0)$, gdzie $s > 0$ i $q \in [0, 1]$ są dowolne. Z (4.2) przy $w = 0$ mamy

$$u(ay) = g(q)\,u(as) \tag{4.21}$$

dla wszystkich $a > 0$, gdzie $y = -H(X)$. Wyznaczając $g(q)$ z (4.21) przy $a = 1$ i wstawiając otrzymane wyrażenie do (4.21), ponownie otrzymujemy równanie (4.20) z $f(x) = u(x)$. Stąd $u(x) = ax^b$ dla $x \geq 0$ i pewnych $a, b > 0$.
(iv) Z proporcjonalności $H(X)$ i z (4.2) mamy

$$u(w - aH(X)) = u(w)\,g(1-q) + u(w - as)\,h(q), \tag{4.22}$$

gdy $a \geq w/s$ oraz

$$u(w - aH(X)) = u(w)\,g(1-q) + u(w - as)\,(1 - g(1-q)), \tag{4.23}$$

jeśli $0 \leq a < w/s$. Kładąc $as = 2w$ w (4.22) i wybierając $q_0 \in [0, 1]$ takie, że $H(X) = s/2$, z (ii) wynika, że $u(w) = cw^d h(q_0)/(1 - \overline{g}(q_0))$. Stąd $u(x) = c_1 x^d$ dla $x \geq 0$ i pewnego $c_1 > 0$. Wstawiając otrzymaną funkcję do (4.23), różniczkując obie strony równania (4.23) ze względu na a i kładąc $a = 0$, otrzymujemy $H(X) = s\overline{g}(q)$. Jeśli podstawimy $H(X) = s\overline{g}(q)$, $a = 1$ oraz $w = s$ do (4.23), to otrzymamy $(1 - \overline{g}(q))^d = (1 - \overline{g}(q))$. Stąd $d = 1$. Kładąc $w = 0$ do (4.22) mamy $H(X) = sh(q)$. Ponieważ $H(X) = s\overline{g}(q)$, więc $\overline{g} = h$. Z faktu, że $c_1 = ch(q_0)/(1 - \overline{g}(q_0))$ i $h(q_0) = 1/2$, dostajemy ostatecznie, że $c = c_1$. ■

P7 Addytywność dla zmiennych losowych komonotonicznych.

Twierdzenie 4.5 *(i) Niech* $u(x) = cx$. *Jeśli* $h = \overline{g} \in \mathcal{G}$, *to* $H(X)$ *jest addytywna dla zmiennych losowych komonotonicznych.*
(ii) Jeżeli $u \in \mathcal{U}$, $g, h \in \mathcal{G}$, *h jest ciągła i* $H(X)$, *która jest wyznaczona ze wzoru (4.2), jest addytywna dla zmiennych losowych komonotonicznych dla wszystkich* $w \geq 0$, *to* $u(x) = cx$ *oraz* $\overline{h} = g$.

Dowód (i) Niech $u(x) = cx$. Gdy $h = \overline{g}$, to $H(X) = E_g X$ i z addytywności całki Choqueta dla zmiennych losowych komonotonicznych otrzymujemy tezę.
(ii) Jeżeli składka $H(X)$ jest addytywna dla zmiennych losowych komonotonicznych, to jest proporcjonalna. Z twierdzenia 5.1 wynika, że $u(x) = cx$ i $\overline{h} = g$. ■

P8 Addytywność dla zmiennych losowych niezależnych.

Twierdzenie 4.6 *(i) Jeżeli* $g(p) = h(p) = p$ *i* $u \in \mathcal{U}$, *to składka* $H(X)$ *jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych wtedy i tylko wtedy, gdy* $u \in \mathcal{U}_0$.
(ii) Niech $u \in \mathcal{U}_0$, $g, h \in \mathcal{G}$ *będą takie, że* $h(0+) = 0$, $h(1-) = 1$ *oraz istnieje lewostronna pochodna funkcji h w* $x = 0$. *Jeżeli funkcjonał* $H(X)$ *jest addytywny dla zmiennych losowych niezależnych dla* $w = 0$ *i pewnego* $w > 0$, *to* $g(p) = h(p) = p$.

Zauważmy, że w Twierdzeniu 4.6 nie przyjmujemy dodatkowych założeń o funkcji g. Ponadto, z (ii) wynika, że w praktyce wystarczy sprawdzić addytywność dla zmiennych losowych niezależnych dla dwóch wartości w, aby otrzymać, że prawdopodobieństwa nie są zniekształcane.

W dowodzie Twierdzenia 4.6 będziemy korzystali z następującego lematu.

Lemat 4.1 *Jeżeli dziedziną funkcji u jest* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, *to rozwiązaniem równania*

$$u(2x) = 2u(x) \tag{4.24}$$

jest funkcja $u(x) = xh(\ln x)$, *gdzie h jest funkcją okresową o okresie* $\ln 2$ *oraz* $0 \cdot h(-\infty) = 0$. *Jeśli założymy dodatkowo, że u ma pochodną prawostronną w punkcie* $x = 0$ *(dopuszczamy przypadek* $u^+(0) = \infty$*), to jedynym rozwiązaniem jest* $u(x) = cx$ *dla pewnego* $c > 0$.

Dowód Kładąc $x = 0$ w (4.24) mamy $u(0) = 0$. Niech u będzie rozwiązaniem równania (4.24). Łatwo sprawdzić, że $h(t) = e^{-t}u(e^t)$ jest funkcją okresową o okresie $\ln 2$. Kładąc

$x = e^t$ mamy $u(x) = xh(\ln x)$ dla $x > 0$, gdzie h jest dowolną funkcją okresową o okresie $\ln 2$. Ponieważ u ma pochodną prawostronną w $x = 0$ oraz

$$u'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} h(\ln x),$$

więc h jest stała jako funkcja okresowa, która ma granicę w $-\infty$. ■

Uwaga 4.2 *Lemat 4.1 jest uogólnieniem wyniku w pracy Laxa (2008), w której równanie (4.24) jest rozwiązywane przy założeniu, że pochodna (obustronna) funkcji u w $x = 0$ jest skończona.*

Dowód Twierdzenia 4.6 (i) Dowód przeprowadzimy w oparciu o pomysł Gerbera (1979). Niech X będzie dowolną zmienną losową, zaś Y będzie stała, tzn. $P(Y = d) = 1$ dla pewnego $d > 0$. Ponieważ $H(X)$ spełnia warunek braku nieuzasadnionego ładowania bezpieczeństwa, więc z addytywności dla zmiennych losowych niezależnych wynika, że $H(X)$ jest zgodna. Z Twierdzenia 4.3 wynika, że $u \in \mathcal{U}_0$.

(ii) Niech $u(x) = cx$ i $w = 0$. Załóżmy, że $H(X)$ jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych. Niech $X, Y \in \mathcal{X}_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(X = 1) = p$, $P(Y = 1) = q$. Wtedy

$$H(X) = h(p), \; H(Y) = h(q), \tag{4.25}$$

$$H(X + Y) = h(p + q - pq) + h(pq). \tag{4.26}$$

Ponieważ $H(X)$ jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych, więc z (4.25) i (4.26) wynika, że

$$h(p + q - pq) + h(pq) = h(p) + h(q) \tag{4.27}$$

dla wszystkich $0 \leq p, q \leq 1$. Połóżmy $q = c - p$, gdzie $0 \leq c \leq 1$. Niech $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem takim, że $p_0 = \frac{c}{2}$ oraz $p_{n+1} = p_n(c - p_n)$. Wtedy $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem generowanym przez odwzorowanie logistyczne (patrz Polyanin i Manzhirov, 2007, str. 875). Z (4.27) we mamy

$$h(c - p_{n+1}) + h(p_{n+1}) = h(c - p_n) + h(p_n) = ... = 2h(c/2). \tag{4.28}$$

Ponieważ $p_{n+1}/c = c \cdot p_n/c \cdot (1 - p_n/c)$, gdzie $c \leq 1$, więc $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p_n}{c} = 0$. Stąd $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = 0$. Funkcja h jest prawostronnie ciągła w $x = 0$ i lewostronnie ciągła w $x = 1$, a więc przechodząc w granicy z $n \to \infty$ w (4.28) otrzymujemy $h(c) = 2h(c/2)$ dla wszystkich $0 \leq c \leq 1$. Ponieważ h ma prawostronną pochodną w $x = 0$ (dopuszczamy możliwość, że $h'(0) = \infty$), więc z Lematu 4.1 wynika, że $h(p) = p$. Wykażemy teraz, że $g(p) = p$. Niech $w > 0$ będzie takie, że składka $H(X)$ jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(X = 2w/3) = 1$, $P(Y = 2w/3) = q = 1 - P(Y = 0)$. Wtedy dla $h(x) = x$ z (4.3) dostajemy

$$H(X) = \frac{2}{3}w,\ H(Y) = \frac{2}{3}qw + \int_0^w [\overline{g}(q) - q]\, \mathbf{1}_{[0,2w/3]}(s)\, ds, \tag{4.29}$$

$$H(X+Y) = \frac{2}{3}w(1+q) + \int_0^w [\overline{g}(q) - q]\, \mathbf{1}_{[2w/3,4w/3]}(s)\, ds. \tag{4.30}$$

Z (4.29), (4.30) i addytywności $H(X)$ dla zmiennych losowych niezależnych mamy

$$\int_0^w [\overline{g}(q) - q]\, \mathbf{1}_{[0,2w/3]}(s)\, ds = \int_0^w [\overline{g}(q) - q]\, \mathbf{1}_{[2w/3,4w/3]}(s)\, ds.$$

Stąd $2w(\overline{g}(q) - q) = w(\overline{g}(q) - q)$. Zatem $\overline{g}(q) = q$ i ostatecznie $g(q) = q$.

Niech teraz $u(x) = (1 - e^{-cx})/d$ oraz X , $Y \in \mathcal{X}_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(X = s) = p$, $P(Y = s) = q$. Z (4.4) przy $w = 0$ dostajemy

$$H(X) = \frac{1}{c}\ln[1 - h(p) + h(p)e^{cs}],\ H(Y) = \frac{1}{c}\ln[1 - h(q) + h(q)e^{cs}],$$

$$H(X+Y) = \frac{1}{c}\ln\left[1 - h(p+q-pq) + e^{cs}(h(p+q-pq) - h(pq)) + h(pq)e^{2cs}\right].$$

Z addytywności $H(X)$ dla zmiennych losowych niezależnych mamy

$$\begin{aligned} & (1-h(p))(1-h(q)) + e^{cs}(h(p) + h(q) - 2h(p)h(q)) + e^{2cs}h(p)h(q) \\ = \ & 1 - h(p+q-pq) + e^{cs}(h(p+q-pq) - h(pq)) + h(pq)e^{2cs}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równość dwóch wielomianów zmiennej e^{cs}. Porównując współczynniki tych wielomianów dostajemy (4.27). Zatem $h(x) = x$. Niech $w > 0$ będzie takie, że $H(X)$ jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych. Dla $p = 1$ mamy

$$H(X) = s,\ H(Y) = \frac{1}{c}\ln\left[1 - q + qe^{cs} - \int_0^{e^{cw}} [q - \overline{g}(q)]\, \mathbf{1}_{[0,e^{cs}]}(t)\, dt\right], \tag{4.31}$$

$$H(X+Y)=\frac{1}{c}\ln\left[e^{cs}(1-q)+e^{2cs}q-\int_0^{e^{cw}}\left[q-\overline{g}(q)\right]\mathbf{1}_{[e^{cs},e^{2cs}]}(t)\,dt\right]. \tag{4.32}$$

Z (4.31), (4.32) i addytywności dla zmiennych losowych niezależnych wynika, że

$$\int_0^{e^{cw}}\left[q-\overline{g}(q)\right]\mathbf{1}_{[0,e^{cs}]}(t)\,dt=\int_0^{e^{cw}}\left[q-\overline{g}(q)\right]\mathbf{1}_{[e^{cs},e^{2cs}]}(t)\,dt.$$

Stąd $\overline{g}(q)=q$ i ostatecznie $g(q)=q$. Analogiczny dowód można przeprowadzić dla $u(x)=(e^{cx}-1)/d$. ■

P9 Subaddytywność.

Twierdzenie 4.7 *Niech $u(x)=cx$ dla pewnego $c>0$ i $h=\overline{g}$, gdzie $g\in\mathcal{G}$. Wówczas składka $H(X)$ jest subaddytywna wtedy i tylko wtedy, gdy g jest wypukła.*

Dowód Niech $u(x)=cx$. Z (4.3) mamy wówczas, że $H(X)=E_{\overline{g}}X$. Załóżmy, że g jest wypukła. Wiadomo, że $E_g(X+Y)\leq E_gX+E_gY$ wtedy i tylko wtedy, gdy g jest wklęsła (patrz Denneberg, 1994). Zatem dla $\overline{g}$, która jest wklęsła, mamy

$$H(X+Y)=E_{\overline{g}}(X+Y)\leq E_{\overline{g}}X+E_{\overline{g}}Y=H(X)+H(Y). \tag{4.33}$$

Załóżmy teraz, że $H(X)$ jest subaddytywna. Wtedy spełniona jest nierówność (4.33), a więc $\overline{g}$ jest wklęsła. ■

P10 Zachowanie pierwszego porządku stochastycznego

Własność ta jest spełniona dla wszystkich funkcji $u\in\mathcal{U}$ i $g,h\in\mathcal{G}$, ponieważ zachodzą własności P1 i P2.

P11 Zachowanie porządku stop-loss.

Twierdzenie 4.8 *Jeżeli $u\in\mathcal{U}$ jest wklęsła, $g,h\in\mathcal{G}$ są takie, że $\overline{g}=h$, g jest wypukła i $X\leq_{SL}Y$, to $H(X)\leq H(Y)$.*

Dowód Niech $\overline{g}=h$ i $X\leq_{SL}Y$. Wtedy $E_{\overline{g}}[-u(w-X)]\leq E_{\overline{g}}[-u(w-Y)]$. Stąd $E_g[u(w-X)]\geq E_g[u(w-Y)]$, ponieważ $E_{\overline{g}}[-u(X)]=-E_g[u(X)]$. Z definicji $H(X)$ mamy

$$u(w-H(Y))=E_g[u(w-Y)]\leq E_g[u(w-X)]=u(w-H(X)).$$

Z monotoniczności u dostajemy $H(Y) \geq H(X)$. ■

P12 Warunek zysku netto.

W ogólności warunek zysku netto jest spełniony, jeżeli

$$EX \leq w - u^{-1}\left(E_{gh} u (w - X)\right). \tag{4.34}$$

Ponieważ wyznaczenie prawej strony nierówności (4.34) jest z reguły trudne, więc podajemy warunki wystarczające, kiedy warunek zysku netto jest spełniony.

Twierdzenie 4.9 *Jeśli $u \in \mathcal{U}$ jest wklęsła, $w \geq 0$ i $g, h \in \mathcal{G}$ są takie, że $g(x) \leq \overline{h}(x) \leq x$ dla $0 \leq x \leq 1$, to $H(X) \geq EX$.*

Dowód Z W9 mamy

$$u(w - H(X)) = E_{gh}\left(u(w - X)\right) \leq u\left(E_{gh}(w - X)\right).$$

Stąd, z W3 i (2.1) otrzymujemy

$$H(X) \geq E_{hg}X + \int_0^w \left[\overline{g}\left(P(X > s)\right) - h\left(P(X > s)\right)\right] ds.$$

Ponieważ $\overline{g}(x) \geq h(x) \geq x$, z W5 wynika, że $H(X) \geq E_{hg}X \geq EX$. ■

Twierdzenie 4.10 *Załóżmy, że $u \in \mathcal{U}$, $g, h \in \mathcal{G}$, zaś X jest nieujemną, ograniczoną zmienną losową taką, że $0 \leq w < s = \sup X$. Wtedy warunek $H(X) \geq EX$ zachodzi, jeśli*

$$E(X) \leq w - u^{-1}\left[g\left(P(X < w)\right) u(w) + h\left(P(X = s)\right) u(w - s)\right]. \tag{4.35}$$

Gdy $P(X \in \{0, w, s\}) = 1$, to nierówność (4.35) jest równoważna temu, że $H(X) \geq EX$.

Dowód Połóżmy $Y = 0$, gdy $X < w$, $Y = w$, jeśli $w \leq X < s$ oraz $Y = s$, gdy $X = s$. Ponieważ $Y \leq X$, więc z W4 mamy

$$\begin{aligned} u(w - H(X)) &= E_{gh} u(w - X) \leq E_{gh} u(w - Y) \\ &= g\left(P(X < w)\right) u(w) + h\left(P(X = s)\right) u(w - s). \end{aligned}$$

Stąd i z (4.35) wynika, że $H(X) \geq EX$. ■

Twierdzenie 4.11 *Załóżmy, że $u \in \mathcal{U}$, $g \in \mathcal{G}$, $X \geq 0$ oraz $w \geq 0$. Wtedy $H(X) \geq EX$, jeśli*

$$EX \leq w - u^{-1}\left(u(w)\, g\left(P(X < w)\right)\right). \tag{4.36}$$

Jeżeli $P(X = 0) + P(X = w) = 1$, to nierówność (4.36) jest równoważna warunkowi $H(X) \geq EX$.

Dowód Połóżmy $Y = 0$, gdy $X < w$ oraz $Y = w$, jeśli $X \geq w$. Wówczas $X = Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(X = 0) + P(X = w) = 1$. Ponieważ $Y \leq X$, to z W4 mamy

$$\begin{aligned} u(w - H(X)) &= E_{gh}u(w - X) \leq E_g u(w - Y) \\ &= g(P(X < w))\, u(w). \end{aligned}$$

Stąd i z (4.36) mamy $H(X) \geq E(X)$. ■

Przykład 4.9 *Dla wybranych funkcji wartości i funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo możemy w sposób bezpośredni sprawdzić czy warunek zysku netto zachodzi. Niech $u(x) = x$, $g(p) = p + \gamma_1(p - p^2)$ i $h(p) = p + \gamma_2(p - p^2)$, gdzie $|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq 1$. Jeśli $\gamma_1 \leq 0$, to g jest wypukła, zaś dla $\gamma_1 \geq 0$ funkcja g jest wklęsła. Ponadto $\overline{g}(p) - h(p) = -p(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)$. Z (4.3) mamy*

$$\begin{aligned} H(X) &= \int_0^\infty \left[P(X > s) + \gamma_2 P(X > s)\, P(X \leq s)\right] ds \\ &\quad - (\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^w P(X > s)\, P(X \leq s)\, ds \\ &\quad - \int_0^\infty \left[P(-X \geq s) + \gamma_1 P(-X \geq s)\, P(-X < s)\right] ds \\ &= EX + \gamma_2 \int_w^\infty P(X > s)\, P(X \leq s)\, ds - \gamma_1 \int_{-\infty}^w P(X > s)\, P(X \leq s)\, ds. \end{aligned}$$

Stąd $H(X) \geq EX$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma_2 \int_w^\infty P(X > s)\, P(X \leq s)\, ds \geq \gamma_1 \int_{-\infty}^w P(X > s)\, P(X \leq s)\, ds.$$

Warunek ten jest spełniony na przykład, gdy $\gamma_2 \geq 0$ i $\gamma_1 \leq 0$. Niech $\overline{X} = \max(X, w)$

oraz $\underline{X}= \min(X,w)$. *Zauważmy, że jeśli* X *i* X' *są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, to*

$$\begin{aligned}\int\limits_w^\infty P(X>s)\,P(X\le s)\,ds &= E\int\limits_w^\infty \mathbf{1}(X'>s)\,\mathbf{1}(X\le s)\,ds\\ &= E\left(\overline{X'}-\overline{X}\right)_+ = \frac{1}{2}E\left|\overline{X'}-\overline{X}\right|,\end{aligned}$$

co jest znane jako współczynnik Giniego. W podobny sposób pokazujemy, że $\int\limits_{-\infty}^{w} P(X>s)\,P(X\le s)\,ds = \frac{1}{2}E\left|\underline{X'}-\underline{X}\right|$. *Ponieważ* $|x-y| = 2\max(x,y)-x-y$, *więc*

$$H(X) = EX + \gamma_2\left(E\overline{X}_{2:2}-E\overline{X}\right) - \gamma_1\left(E\underline{X}_{2:2}-E\underline{X}\right),$$

gdzie $\overline{X}_{2:2} = \max\left(\overline{X},\overline{X'}\right)$ *i* $\underline{X}_{2:2} = \max\left(\underline{X},\underline{X}'\right)$.

P13 Iteracyjność.

Definiujemy uogólnioną warunkową całkę Choqueta wzorem

$$E_{gh}(X|Y) = \int\limits_0^\infty g\left(P\left(X_+>s|Y\right)\right)ds - \int\limits_0^\infty h\left(P\left((-X)_+>s|Y\right)\right)ds, \tag{4.37}$$

pod warunkiem, że obie występujące we wzorze całki są skończone. Wówczas $H(X|Y)$ definiujemy jako rozwiązanie równania

$$u\left(w-H(X|Y)\right) = E_{gh}\left[u(w-X)\,|Y\right].$$

W celu podania charakteryzacji warunku iteracyjności, udowodnimy najpierw następujący Lemat.

Lemat 4.2 *Niech* X, Y *będą dowolnymi zmiennymi losowymi. Wówczas* $\sup\left(\sup(X|Y)\right) = \sup X$.

Dowód Lematu 4.2. Niech $\sup(X|Y) = \inf\{x : P(X>x|Y)=0\}$. Załóżmy, że $P(X>0)>0$. Ponieważ $X\le \sup X$, więc $X_+^k \le (\sup X)^k$ dla wszystkich $k\in\mathbb{N}$, gdzie $X_+^k = (X_+)^k$. Stąd $\left[E\left(X_+^k|Y\right)\right]^{1/k}\le \sup X$ dla wszystkich $k\in\mathbb{N}$ oraz

$$\sup(X|Y) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left[E\left(X_+^k|Y\right)\right]^{1/k}\le \sup X$$

Zatem $\sup(\sup(X|Y)) \leq \sup X$. Ponieważ $\sup Z = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(EZ_+^k\right)^{1/k}$ dla dowolnej zmiennej losowej Z (patrz Aliprantis i Border, 2007, str. 462), więc dla $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \sup(\sup(X|Y)) &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(E(\sup(X|Y))_+^k\right)^{1/k} \geq \left(E(\sup(X|Y))_+^k\right)^{1/k} \qquad (4.38) \\ &\geq \left[E\left(\left(E\left(X_+^k|Y\right)\right)^{1/k}\right)_+^k\right]^{1/k} = \left(EX_+^k\right)^{1/k}. \end{aligned}$$

Z (4.38) wynika, że $\sup(\sup(X|Y)) \geq \sup X$. Ostatecznie $\sup(\sup(X|Y)) = \sup X$. Gdy $P(X \leq 0) = 1$, możemy dodać $c > 0$ takie, że $P(X + c > 0) > 0$ i skorzystać z faktu, że $\sup(X + c) = \sup X + c$. ■

Załóżmy, że $H(X)$ jest składką wyznaczoną ze wzoru (4.2). Rozważmy następujące przypadki.

(i) Gdy $g(x) = h(x) = x$ dla $0 \leq x \leq 1$, to $E_{gh}X = EX$ i $H(X) = w - u^{-1}(Eu(w - X))$. Zatem $H(X)$ jest składką mean-value, która jest iteracyjna (patrz Gerber, 1979, Goovaerts i inni, 1984).

(ii) Gdy $g(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ i $h(x) = \overline{g}(x) = \mathbf{1}_{(0,1]}(x)$ dla $0 \leq x \leq 1$, to $E_{gh}X = \inf X$ i $H(X) = \sup X$. Z Lematu 4.2 wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna.

(iii) Gdy $g(x) = \mathbf{1}_{(0,1]}(x)$ i $h(x) = \overline{g}(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ dla $0 \leq x \leq 1$, to $E_{gh}X = \sup X$ i $H(X) = \inf X$. Ponieważ $\inf X = -\sup(-X)$, więc z (ii) mamy, że $\inf(\inf(X|Y)) = \inf X$.

(iv) Gdy $g(x) = h(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ dla $0 \leq x \leq 1$, to $E_{gh}X = (\inf X)_+ - (-\sup X)_+$ oraz

$$H(X) = \begin{cases} \sup X & \text{gdy } X \leq w \\ \inf X & \text{gdy } X \geq w \\ w & \text{gdy } \inf X \leq w \leq \sup X \end{cases}.$$

Jeżeli $H(X) = w$, to $H(X)$ jest iteracyjna. Stąd, z (ii) i (iii) wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna.

(v) Gdy $g(x) = x$ i $h(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ dla $0 \leq x \leq 1$, to $E_{gh}X = EX_+ - (-\sup X)_+$ oraz

$$H(X) = \begin{cases} w - u^{-1}(Eu(w - X)) & \text{gdy } X \leq w \\ \inf X & \text{gdy } X \geq w \\ w - u^{-1}\left(E[u(w - X)]_+\right) & \text{gdy } \inf X \leq w \leq \sup X \end{cases}.$$

Zauważmy, że $E[E(X_+|Y)]_+ = E[E(X_+|Y)] = EX_+$. Stąd, z (i) i (iii) wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna.

(vi) Gdy $g(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ i $h(x) = x$ dla $0 \le x \le 1$, to $E_{gh}X = (\inf X)_+ - E(-X)_+$ oraz

$$H(X) = \begin{cases} \sup X & \text{gdy } X \le w \\ w - u^{-1}(Eu(w-X)) & \text{gdy } X \ge w \\ w - u^{-1}\left(E[-u(w-X)]_+\right) & \text{gdy } \inf X \le w \le \sup X \end{cases}.$$

Z (i), (ii) i (v) mamy, że $H(X)$ jest iteracyjna.

Twierdzenie 4.12 *Niech $w \ge 0$ będzie ustalone. Załóżmy, że $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$. Wtedy składka $H(X)$, która jest rozwiązaniem równania (4.2), jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy $H(X)$ jest zdefiniowana w jednym z przypadków (i)-(vi).*

Dowód Dla ustalonego w, niech $v(x) := u(w-x)$. Wtedy $H(X) = v^{-1}(E_{gh}v(X))$. Ponadto,

$$H(X|Y) = v^{-1}(E_{gh}(v(X)|Y)) \tag{4.39}$$

oraz

$$v(H(H(X|Y))) = E_{gh}v(H(X|Y)). \tag{4.40}$$

Z (4.39) i (4.40) warunek $H(X) = H(H(X|Y))$ jest równoważny temu, że

$$v^{-1}(E_{gh}v(X)) = v^{-1}(E_{gh}v(H(X|Y))) = v^{-1}(E_{gh}(E_{gh}(v(X)|Y))),$$

co oznacza, że składka $H(X)$ jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$E_{gh}Z = E_{gh}(E_{gh}(Z|Y)), \tag{4.41}$$

gdzie $Z = v(X)$. Dowód pierwszej implikacji tego faktu wynika z (i)-(vi). Udowodnimy teraz implikację przeciwną.

Niech (Z, Y) będzie wektorem losowym o rozkładzie $P(Z=0, Y=1) = 1/4$, $P(Z=s, Y=1) = 1/4$, $P(Z=s, Y=2) = 1/4$, $P(Z=1, Y=2) = 1/4$, gdzie $0 < s < 1$ jest dowolne. Wtedy

$$E_{gh}Z = s(g(3/4) - g(1/4)) + g(1/4), \tag{4.42}$$

$$E_{gh}(Z|Y=1) = sg(1/2),$$

$$E_{gh}(Z|Y=2) = s(1 - g(1/2)) + g(1/2).$$

Ponieważ $E_{gh}(Z|Y=1) \leq E_{gh}(Z|Y=2)$, więc

$$E_{gh}(E_{gh}(Z|Y)) = s\left(2g(1/2) - 2(g(1/2))^2\right) + (g(1/2))^2 . \tag{4.43}$$

Z (4.41), (4.42) i (4.43) wynika, że składka $H(X)$ jest iteracyjna, gdy

$$s(g(3/4) - g(1/4)) + g(1/4) = s\left(2g(1/2) - 2(g(1/2))^2\right) + (g(1/2))^2$$

dla $0 < s < 1$. Otrzymaliśmy równość dwóch wielomianów zmiennej s. Porównując ich współczynniki mamy

$$\begin{cases} g(3/4) - g(1/4) = 2g(1/2) - 2(g(1/2))^2 \\ g(1/4) = (g(1/2))^2 \end{cases} . \tag{4.44}$$

Niech teraz wektor (Z, Y) ma rozkład $P(Z=0, Y=1) = 1/4$, $P(Z=1, Y=1) = 1/4$, $P(Z = g(1/2), Y=2) = 1/2$. Wówczas

$$E_{gh}Z = g(1/2)(g(3/4) - g(1/4)) + g(1/4) , \tag{4.45}$$

$$E_{gh}(Z|Y=1) = E_{gh}(Z|Y=2) = g(1/2)$$

oraz z W7 mamy

$$E_{gh}(E_{gh}(Z|Y)) = g(1/2) . \tag{4.46}$$

Z (4.41), (4.45) i (4.46) wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna, gdy $g(1/2)(g(3/4) - g(1/4)) + g(1/4) = g(1/2)$. Stąd i z (4.44) mamy $2(g(1/2))^3 - 3(g(1/2))^2 + g(1/2) = 0$. Zatem $g(1/2) = 0$, $g(1/2) = 1/2$ lub $g(1/2) = 1$.

Rozważmy wektor losowy (Z, Y) o rozkładzie $P(Z=s, Y=1) = 1/4 + c$, $P(Z=1, Y=1) = 1/4 - c$, $P(Z=s, Y=2) = 1/4 + d$, $P(Z=1, Y=2) = 1/4 - d$, gdzie $0 < s < 1$ jest dowolne oraz $0 \leq c, d \leq 1/4$. Wtedy

$$E_{gh}Z = s(1 - g(1/2 - c - d)) + g(1/2 - c - d) , \tag{4.47}$$

$$E_{gh}(Z|Y=1) = s(1 - g(1/2 - 2c)) + g(1/2 - 2c) ,$$

$$E_{gh}(Z|Y=2) = s(1 - g(1/2 - 2d)) + g(1/2 - 2d) .$$

Ponadto $E_{gh}(Z|Y=1) \leq E_{gh}(Z|Y=2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c \geq d$. Stąd

$$\begin{aligned} E_{gh}(E_{gh}(Z|Y)) &= [s(1-g(1/2-2c))+g(1/2-2c)](1-g(1/2)) \\ &\quad +[s(1-g(1/2-2d))+g(1/2-2d)]\,g(1/2) \end{aligned} \tag{4.48}$$

dla $0 \leq c \leq d \leq 1/4$ oraz

$$\begin{aligned} E_{gh}(E_{gh}(Z|Y)) &= [s(1-g(1/2-2d))+g(1/2-2d)](1-g(1/2)) \\ &\quad +[s(1-g(1/2-2c))+g(1/2-2c)]\,g(1/2), \end{aligned} \tag{4.49}$$

gdy $0 \leq d \leq c \leq 1/4$. Z (4.41), (4.47), (4.48) i (4.49) wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna, gdy

$$\begin{aligned} & s(1-g(1/2-c-d))+g(1/2-c-d) \\ =\ & [s(1-g(1/2-2c))+g(1/2-2c)](1-g(1/2)) \\ & +[s(1-g(1/2-2d))+g(1/2-2d)]\,g(1/2) \end{aligned} \tag{4.50}$$

dla $0 < s < 1$ i $0 \leq c \leq d \leq 1/4$ oraz

$$\begin{aligned} & s(1-g(1/2-c-d))+g(1/2-c-d) \\ =\ & [s(1-g(1/2-2d))+g(1/2-2d)](1-g(1/2)) \\ & +[s(1-g(1/2-2c))+g(1/2-2c)]\,g(1/2), \end{aligned} \tag{4.51}$$

gdy $0 < s < 1$ i $0 \leq d \leq c \leq 1/4$. Rozważmy następujące przypadki:

1° $g(1/2)=0$. Wtedy $g(x)=0$ dla $0 \leq x \leq 1/2$.

2° $g(1/2)=1/2$. Wówczas z (4.50) i (4.51) mamy

$$\begin{aligned} & 2s(1-g(1/2-c-d))+2g(1/2-c-d) \\ =\ & s(1-g(1/2-2c))+g(1/2-2c)+s(1-g(1/2-2d))+g(1/2-2d) \end{aligned}$$

dla $0 < s < 1$ oraz $0 \leq c, d \leq 1/4$. Porównując współczynniki powyższych wielomianów otrzymujemy

$$2g(1/2-c-d) = g(1/2-2c)+g(1/2-2d) \tag{4.52}$$

dla $0 \leq c, d \leq 1/4$. Niech $f(x) = g(1/2-2x)$. Wtedy (4.52) możemy zapisać jako $2f((c+d)/2) = f(c)+f(d)$ dla $0 \leq c, d \leq 1/4$, a więc dostaliśmy równanie funkcyjne Jensena. Ponieważ funkcja f jest mierzalna jako monotoniczna, więc f jest funkcją liniową

(patrz Kuczma, 2009, str. 354). Ponieważ $f(0) = g(1/2) = 1/2$ oraz $f(1/4) = g(0) = 0$, więc $f(x) = -2x + 1/2$ dla $0 \leq x \leq 1/4$. Ostatecznie $g(x) = x$ dla $0 \leq x \leq 1/2$.
3° $g(1/2) = 1$. Wówczas z (4.50) mamy

$$s(1 - g(1/2 - c - d)) + g(1/2 - c - d) = s(1 - g(1/2 - 2d)) + g(1/2 - 2d)$$

dla $0 < s < 1$ i $0 \leq d \leq c \leq 1/4$. Porównując współczynniki powyższych wielomianów mamy

$$g(1/2 - c - d) = g(1/2 - 2d) \tag{4.53}$$

dla $0 \leq d \leq c \leq 1/4$. Kładąc $d = 0$ otrzymujemy $g(1/2 - c) = g(1/2) = 1$ dla $0 \leq c \leq 1/4$. Stąd $g(x) = 1$ dla $1/4 \leq x \leq 1/2$. Kładąc $c = 1/4$ w (4.53) dostajemy $g(x) = g(2x)$ dla $0 \leq x \leq 1/4$. Ponieważ $g(1/2) = 1$, więc $g(1/2) = g(2/4) = g(1/4) = g(2/8) = g(1/8)$ i tak dalej. Stąd $g(x) = 1$ dla $0 < x \leq 1/2$.

Rozważmy wektor losowy (Z, Y) o rozkładzie $P(Z = s, Y = 1) = 1/4 - c$, $P(Z = 1, Y = 1) = 1/4 + c$, $P(Z = s, Y = 2) = 1/4 - d$, $P(Z = 1, Y = 2) = 1/4 + d$, gdzie $0 < s < 1$ jest dowolne oraz $0 \leq c, d \leq 1/4$. Wówczas rozumowanie analogiczne do zastosowanego wcześniej pokazuje, że $H(X)$ jest iteracyjna, gdy

$$\begin{aligned} & s(1 - g(1/2 + c + d)) + g(1/2 + c + d) \\ = \; & [s(1 - g(1/2 + 2c)) + g(1/2 + 2c)](1 - g(1/2)) \\ & + [s(1 - g(1/2 + 2d)) + g(1/2 + 2d)]\, g(1/2) \end{aligned} \tag{4.54}$$

dla $0 < s < 1$, gdy $0 \leq c \leq d \leq 1/4$ oraz

$$\begin{aligned} & s(1 - g(1/2 + c + d)) + g(1/2 + c + d) \\ = \; & [s(1 - g(1/2 + 2d)) + g(1/2 + 2d)](1 - g(1/2)) \\ & + [s(1 - g(1/2 + 2c)) + g(1/2 + 2c)]\, g(1/2), \end{aligned} \tag{4.55}$$

gdy $0 < s < 1$ i $0 \leq d \leq c \leq 1/4$. Rozważmy następujące przypadki:
1° $g(1/2) = 0$. Z (4.54) mamy

$$s(1 - g(1/2 + c + d)) + g(1/2 + c + d) = s(1 - g(1/2 + 2c)) + g(1/2 + 2c) \tag{4.56}$$

dla $0 \leq c \leq d \leq 1/4$. Porównując współczynniki wielomianów we wzorze (4.56) mamy

$$g\left(1/2 + c + d\right) = g\left(1/2 + 2c\right) \tag{4.57}$$

dla $0 \leq c \leq d \leq 1/4$. Kładąc $c = 0$ otrzymujemy $g\left(1/2 + d\right) = g\left(1/2\right) = 0$ dla $0 \leq d \leq 1/4$. Stąd $g\left(x\right) = 0$ dla $1/2 \leq x \leq 3/4$. Wstawiając $d = 1/4$ do wzoru (4.57) dostajemy

$$g\left(3/4 + c\right) = g\left(1/2 + 2c\right) \tag{4.58}$$

dla $0 \leq c \leq 1/4$. Kładąc $c = 1/8$ w (4.58) mamy $g\left(7/8\right) = g\left(3/4\right) = 0$. Stąd $g\left(x\right) = 0$ dla $1/2 \leq x \leq 7/8$. Wstawiając $c = 3/16$ do (4.58) otrzymujemy $g\left(15/16\right) = g\left(7/8\right) = 0$. Zatem $g\left(x\right) = 0$ dla $1/2 \leq x \leq 15/16$. Kontynuując to postępowanie mamy, że $g\left(x\right) = 0$ dla $1/2 \leq x < 1$.

2° $g\left(1/2\right) = 1/2$. Wtedy z (4.54) i (4.55) mamy

$$\begin{aligned} & 2s\left(1 - g\left(1/2 + c + d\right)\right) + 2g\left(1/2 + c + d\right) \\ = \; & s\left(1 - g\left(1/2 + 2c\right)\right) + g\left(1/2 + 2c\right) + s\left(1 - g\left(1/2 + 2d\right)\right) + g\left(1/2 + 2d\right) \end{aligned}$$

dla $0 < s < 1$ i $0 \leq c, d \leq 1/4$. Porównując współczynniki powyższych wielomianów mamy

$$2g\left(1/2 + c + d\right) = g\left(1/2 + 2c\right) + g\left(1/2 + 2d\right) \tag{4.59}$$

dla $0 \leq c, d \leq 1/4$. Niech $f\left(x\right) = g\left(1/2 + 2x\right)$. Wtedy możemy zapisać równanie (4.59) w postaci $2f\left(\left(c + d\right)/2\right) = f\left(c\right) + f\left(d\right)$ dla $0 \leq c, d \leq 1/4$. Ponieważ f jest mierzalna, więc jest liniowa (patrz Kuczma, 2009, str. 354). Z faktu, że $f\left(0\right) = g\left(1/2\right) = 1/2$ i $f\left(1/4\right) = g\left(1\right) = 1$ wynika, że $f\left(x\right) = 2x + 1/2$ dla $0 \leq x \leq 1/4$. Ostatecznie, $g\left(x\right) = x$ dla $1/2 \leq x \leq 1$.

3° $g\left(1/2\right) = 1$. Wtedy $g\left(x\right) = 1$ dla $1/2 \leq x \leq 1$.

Podsumowując, udowodniliśmy do tej pory, że jeśli składka $H\left(X\right)$ jest iteracyjna, to $g\left(x\right) = x$, $g\left(x\right) = \mathbf{1}_{\{1\}}\left(x\right)$ lub $g\left(x\right) = \mathbf{1}_{(0,1]}\left(x\right)$ dla $0 \leq x \leq 1$. Dalej wystarczy zauważyć, że $E_{gh}\left(-X\right) = -E_{hg}X$, aby wywnioskować, że $h\left(x\right) = x$, $h\left(x\right) = \mathbf{1}_{\{1\}}\left(x\right)$ lub $h\left(x\right) = \mathbf{1}_{(0,1]}\left(x\right)$ dla $0 \leq x \leq 1$ (patrz (4.41)). Otrzymujemy w ten sposób dziewięć różnych par funkcji g i h. Wykażemy, że dla trzech z tych par własność iteracyjności nie zachodzi. Załóżmy, że wektor $\left(Z, Y\right)$ ma rozkład $P\left(Z = -1, Y = 1\right) = 1/4$, $P\left(Z = 1, Y = 1\right) = 1/2$, $P\left(Z = -1, Y = 2\right) = 1/4$. Wtedy $E_{gh}Z = g\left(1/2\right) - h\left(1/2\right)$, $E_{gh}\left(Z|Y = 1\right) = g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right)$ oraz $E_{gh}\left(Z|Y = 2\right) = -1$. Ponieważ $E_{gh}\left(Z|Y = 1\right) \geq E_{gh}\left(Z|Y = 2\right)$, więc $E_{gh}\left(E_{gh}\left(Z|Y\right)\right) = \left(g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right)\right) g\left(3/4\right) - h\left(1/4\right)$ gdy $g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right) \geq 0$ oraz $E_{gh}\left(E_{gh}\left(Z|Y\right)\right) = \left(g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right)\right)\left(1 - h\left(1/4\right)\right) - h\left(1/4\right)$ dla $g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right) \leq 0$. Z (4.41) wynika, że $H\left(X\right)$ jest iteracyjna, gdy

$$g\left(1/2\right) - h\left(1/2\right) = \left(g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right)\right) g\left(3/4\right) - h\left(1/4\right) \tag{4.60}$$

dla $g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right) \geq 0$ oraz

$$g\left(1/2\right) - h\left(1/2\right) = \left(g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right)\right)\left(1 - h\left(1/4\right)\right) - h\left(1/4\right), \tag{4.61}$$

o ile $g\left(2/3\right) - h\left(1/3\right) < 0$. Z (4.60) i (4.61) wynika, że $H\left(X\right)$ nie jest iteracyjna, gdy $g\left(x\right) = \mathbf{1}_{(0,1]}\left(x\right)$ i $h\left(x\right) = x$, lub $g\left(x\right) = x$ i $h\left(x\right) = \mathbf{1}_{(0,1]}\left(x\right)$, lub $g\left(x\right) = h\left(x\right) = \mathbf{1}_{(0,1]}\left(x\right)$. ■

5 Składka zerowej użyteczności w teorii skumulowanej perspektywy

5.1 Definicja składki

W tym rozdziale zdefiniujemy składkę zerowej użyteczności w ujęciu teorii skumulowanej perspektywy. Niech X będzie dowolną zmienną losową. Rozważmy firmę ubezpieczeniową, która podejmuje decyzje w oparciu o punkt referencyjny $w \in \mathbb{R}$ (np. jej majątek początkowy). Załóżmy, że potencjalny klient tej firmy chce od niej kupić ubezpieczenie, które wypłaca pieniężną równowartość losowej straty X. Załóżmy, że $u_1, u_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ są niemalejącymi funkcjami wartości, przy czym u_1 mierzy zyski, zaś u_2 straty. Niech g i h będą funkcjami zniekształcającymi prawdopodobieństwa odpowiednio zysków i strat. Składkę zerowej użyteczności $H(X)$ w teorii skumulowanej perspektywy za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X definiujemy jako rozwiązanie równania

$$u_1(w_+) - u_2\left((-w)_+\right) = E_g u_1\left((w + H(X) - X)_+\right) - E_h u_2\left((X - w - H(X))_+\right). \quad (5.1)$$

Zauważmy, że wzór (5.1) możemy zapisać w postaci

$$u(w) = E_{gh} u(w + H(X) - X), \quad (5.2)$$

gdzie $u(x) = u_1(x_+) - u_2\left((-x)_+\right)$ jest pewną niemalejącą funkcją dla $x \in \mathbb{R}$. Gerber (1979) rozważa równanie na składkę $H(X)$ przy założeniach, że funkcja wartości u jest wklęsła, a prawdopodobieństwa nie są zniekształcane, tzn. $g(p) = h(p) = p$. W bardziej ogólnym modelu Heilpern (2003) zakłada, że $h = \overline{g}$, g jest wypukła, zaś funkcja wartości jest wklęsła. Goovaerts i inni (2010 a) badają addytywność miary ryzyka otrzymanej przez zastosowanie zasady równoważnej użyteczności w teorii perspektywy. Okazuje się, że rozważana przez nich miara ryzyka odpowiada składce $H(X)$ wyznaczonej z (5.1) przy $w = 0$. W pracy tej uogólniamy główne twierdzenie z ich pracy przy słabszych założeniach dotyczących funkcji wartości i funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo (patrz Twierdzenie 5.4).

Aby składka wyznaczona z równania (5.2) istniała i była wyznaczona jednoznacznie, podobnie jak w przypadku składki mean-value, należy przyjąć, że $u \in \mathcal{U}$.

5.2 Przykłady

W poniższych dwóch przykładach wyprowadzimy wzory jawne na składkę $H(X)$ będącą rozwiązaniem równania (5.2) w przypadku, gdy $u \in \mathcal{U}_0$.

Przykład 5.1 *Jeżeli $u(x) = cx$, to z (5.2) mamy*

$$cw = E_{gh}\left[c\left(w + H(X) - X\right)\right]. \tag{5.3}$$

Z W2, W3 i (2.1) wynika, że

$$w = -E_{hg}X + w + H(X) + \int_0^{w+H(X)} \left[h\left(P\left(X > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(X > s\right)\right)\right] ds. \tag{5.4}$$

Połóżmy $\varphi(t) = t + \int_0^t \left[h\left(P\left(X > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(X > s\right)\right)\right] ds$. Jeżeli X jest zmienną losową typu ciągłego i $h(q) + g(1-q) > 0$ dla $q \in [0,1]$, to $\varphi'(t) = 1 + h\left(P\left(X > t\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(X > t\right)\right) > 0$. Zatem φ^{-1} istnieje i

$$H(X) = \varphi^{-1}\left(w + E_{hg}X\right) - w.$$

Przykład 5.2 *Niech $u(x) = \left(1 - e^{-cx}\right)/a$. Z (5.2) i W2 mamy*

$$1 - e^{-cw} = E_{gh}\left(1 - e^{-c(w+H(X)-X)}\right).$$

Z (2.1) i W3 wynika, że

$$\begin{aligned} & 1 - e^{-cw} \\ = \; & 1 - E_h e^{-c(w+H(X)-X)} + \int_0^1 \left[h\left(P\left(e^{-c(w+H(X)-X)} > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(e^{-c(w+H(X)-X)} > s\right)\right)\right] ds. \end{aligned}$$

Stąd i z W2 dostajemy

$$e^{-c(w+H(X))}E_h e^{cX} = e^{-cw} + e^{-c(w+H(X))} \int_0^{\exp(c(w+H(X)))} \left[h\left(P\left(e^{cX} > t\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(e^{cX} > t\right)\right)\right] dt. \tag{5.5}$$

Zatem $\phi\left(e^{cH(X)}\right) = E_h e^{cX}$, *gdzie*

$$\phi(t) = t + \int\limits_0^{t\exp(cw)} \left[h\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(e^{cX} > s\right)\right)\right] ds.$$

Jeżeli X *jest zmienną losową typu ciągłego i* $h(q) + g(1-q) > 0$ *dla wszystkich* $q \in [0,1]$, *to* $\phi' > 0$. *Stąd*

$$H(X) = \frac{1}{c} \ln \phi^{-1}\left(E_h e^{cX}\right).$$

Dla $h = \overline{g}$ *otrzymujemy składkę zaproponowaną przez Heilperna (2003) i Tsanakasa (2009). W podobny sposób wyprowadzamy wzór na* $H(X)$, *gdy* $u(x) = (e^{cx} - 1)/a$.

Przykład 5.3 *Niech* $u \in \mathcal{U}$ *oraz* $g(x) = h(x) = x$ *dla* $x \in [0,1]$. *Wtedy składka* $H(X)$ *jest składką zerowej użyteczności. W szczególnym przypadku, gdy* $u(x) = x$, *to z (5.4) mamy* $H(X) = E_{gh}X = EX$, *a więc otrzymana składka jest składką netto. Jeśli zaś* $u(x) = \left(1 - e^{-\theta x}\right)/\theta$ *dla pewnego* $\theta > 0$, *to z (5.5) mamy* $H(X) = \frac{1}{\theta}\ln\left(Ee^{\theta X}\right)$, *a więc otrzymaliśmy składkę wykładniczą.*

Ze wzorów (4.3) i (5.4) wynika, że gdy $u(x) = x$ i $h = \overline{g}$, to wzór na składkę wyznaczoną z równania (5.2) jest identyczny ze wzorem na $H(X)$ wyznaczoną z równania (4.2). Oznacza to, że składki wyprowadzone w Przykładach 4.4-4.7 mogą zostać również otrzymane jako rozwiązanie równania (5.2) dla tych samych funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo, które występują we wspomnianych przykładach. W kolejnych przykładach pokażemy, że szczególnymi przypadkami składki wyznaczonej ze wzoru (5.2) są pewne znane składki.

Przykład 5.4 *Niech* $u(x) = x$. *Załóżmy, że* $h(p) = a + bp$, $g(p) = c + dp$ *dla* $p \in (0,1)$, *gdzie* $b, d > 0$, $a + b < 1$ *i* $c + d < 1$. *Jeżeli* $\inf X = 0$ *oraz* $X \leq w$, *to z (5.3) mamy*

$$\begin{aligned} H(X) &= E_{\overline{g}}X = \int\limits_0^{\sup X} \overline{g}\left(P(X > s)\right) ds = \int\limits_0^{\sup X} \left[(1 - c - d) - dP(X > s)\right] ds \\ &= EX + (1-d)(\sup X - EX) - c \sup X. \end{aligned}$$

Gdy $c = 0$ *i* $0 \leq d < 1$, *to* $H(X) = EX + (1-d)(\sup X - EX)$ *(porównaj Przykład 4.8).*

5.3 Własności składki zerowej użyteczności w ujęciu teorii skumulowanej perspektywy

W rozdziale tym zajmiemy się analizą składki ubezpieczeniowej $H(X)$ będącej rozwiązaniem równania (5.2).

P1 Niezmienniczość ze względu na rozkład.
Własność jest spełniona dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$, co wynika z definicji uogólnionej całki Choqueta oraz wzoru (5.2).

P2 Monotoniczność.
Własność ta jest spełniona dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$, co jest konsekwencją W4 i W7.

P3 Brak nieuzasadnionego ładowania bezpieczeństwa.
Z W7 wynika, że warunek ten zachodzi dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$.

P4 Brak zbyt małego i nadmiernego ładowania bezpieczeństwa.
Własność ta jest spełniona dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$, ponieważ zachodzą własności P1, P2 i P3.

P5 Zgodność.
Własność ta jest spełniona dla wszystkich $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$. Istotnie, z równania (5.2) mamy

$$E_{gh} u (w + H(X+b) - (X+b)) = u(w) = E_{gh} u (w + (H(X) + b) - (X+b)).$$

Stąd, z różnowartościowości funkcji u i jednoznaczności składki $H(X)$ mamy, że $H(X+b) = H(X) + b$ dla $b \in \mathbb{R}$.

P6 Proporcjonalność.

Twierdzenie 5.1 *(i) Niech $w = 0$, $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że istnieją $0 \leq q_0 < q_1 \leq 1$ takie, że $g(1-q)\,h(q) > 0$ dla $q \in (q_0, q_1)$. Wówczas składka $H(X)$ jest proporcjonalna wtedy i tylko wtedy, gdy $u(x) = c_1(-x)^d$ dla $x < 0$ oraz $u(x) = c_2 x^d$ dla $x > 0$, gdzie $d > 0$ i $c_1 < 0 < c_2$.*
(ii) Jeżeli dodatkowo (5.2) zachodzi dla pewnego $w > 0$, to $H(X)$ jest proporcjonalna wtedy i tylko wtedy, gdy $u(x) = cx$ dla $x \in \mathbb{R}$, pewnego $c > 0$ oraz $\overline{g} = h$.

Dowód (i) Niech $w = 0$. Łatwo sprawdzić, że z W2 wynika proporcjonalność składki $H(X)$ dla funkcji u podanej w tezie (i). Załóżmy teraz, że $H(X)$ jest proporcjonalna. Niech $X \in \mathcal{X}_2$. Dla $a > 0$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &= E_{gh}u(a(H(X) - X)) = E_g[u(a(H(X) - X))]_+ - E_h[-u(a(H(X) - X))]_+ \\ &= u(aH(X))\, g(1-q) + u(a(H(X) - s))\, h(q). \end{aligned}$$

Stąd

$$0 = u(aH(X))(1 - \overline{g}(q)) + u(a(H(X) - s))\, h(q), \tag{5.6}$$

przy czym z ciągłości g, h i u wynika, że $H(X)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(0, s)$. Wyznaczając $h(q)$ z (5.6) przy $a = 1$ i wstawiając tę wartość do (5.6) otrzymujemy

$$\frac{u(aH(X))}{u(H(X))} = \frac{u(a(H(X) - s))}{u(H(X) - s)} \tag{5.7}$$

dla wszystkich $a > 0$ i $0 < H(X) < s$. Kładąc $H(X) = 1$ i $s = 2$ do (5.7) dostajemy

$$u(a) = \frac{u(1)}{u(-1)} u(-a) \tag{5.8}$$

dla $a > 0$. Ponadto, z (5.7) dla $x = H(X)$ i $s = x + 1$ mamy

$$u(ax) = u(x)\frac{u(-a)}{u(-1)} = \frac{u(x)\, u(a)}{u(1)}$$

dla $a, x > 0$, gdzie skorzystaliśmy z (5.8). Z ostatniego równania otrzymujemy, że funkcja $\overline{u}(x) = \ln(u(e^x)/u(1))$ spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego

$$\overline{u}(b + y) = \overline{u}(b) + \overline{u}(y)$$

dla wszystkich $b, y \in \mathbb{R}$. Stąd $\overline{u}(x) = dx$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i pewnego $d > 0$ (patrz Kuczma, 2009, str. 129). Zatem $u(x) = c_2 x^d$ dla $x > 0$ i pewnych $d, c_2 > 0$. Z (5.8) wynika, że $u(x) = c_1(-x)^d$ dla $x < 0$ i pewnego $c_1 < 0$.

(ii) Załóżmy dodatkowo, że (5.2) zachodzi dla pewnego $w > 0$. Dla $w = 0$ z proporcjonalności $H(X)$ i z (5.2) mamy

$$w^d = (w + aH(X))^d g(1-q) + (w + a(H(X) - s))^d (1 - g(1-q)), \tag{5.9}$$

gdy $0 \le a \le \frac{w}{s-H(X)}$ oraz

$$c_2 w^d = c_2 (w + aH(X))^d g(1-q) + c_1 (-w - a(H(X) - s))^d h(q), \tag{5.10}$$

gdy $a \ge w/(s - H(X))$. Różniczkując obie strony równania (5.9) ze względu na a i kładąc $a = 0$ mamy $H(X) = s\overline{g}(q)$. Wstawiając tę zależność do (5.9) przy $a = \frac{w}{s(1-\overline{g}(q))}$ dostajemy $[g(1-q)]^{d-1} = 1$. Ponieważ q jest dowolne, więc $d = 1$. Równanie (5.10) dla $d = 1$ jest postaci

$$w(c_2\overline{g}(q) + c_1 h(q)) = as(1 - \overline{g}(q))(c_2\overline{g}(q) + c_1 h(q)).$$

Z dowolności s wynika, że lewa i prawa strona powyższego równania jest równa 0. Stąd $c_2\overline{g}(q) + c_1 h(q) = 0$ dla $q \in [0,1]$. Kładąc $q = 1$ dostajemy $c_1 = -c_2$ oraz $\overline{g}(q) = h(q)$. ■

Ponieważ pewne funkcje zniekształcające prawdopodobieństwo rozważane w literaturze nie są ciągłe, więc w poniższym twierdzeniu osłabiamy założenie o ciągłości g i h, ale nakładamy pewien dodatkowy warunek na funkcję u.

Twierdzenie 5.2 *Jeżeli $w = 0$, $u \in \mathcal{U}$ jest wklęsła i istnieje $q \in (0,1)$ takie, że $g(1-q)h(q) > 0$, to składka $H(X)$ jest proporcjonalna wtedy i tylko wtedy, gdy $u(x) = c_1 x$ dla $x < 0$ i $u(x) = c_2 x$ dla $x \ge 0$, gdzie $0 < c_2 \le c_1$. Jeśli dodatkowo równanie (5.2) zachodzi dla jakiegoś $w > 0$, to $u(x) = cx$ dla $x \in \mathbb{R}$ i pewnego $c > 0$.*

Dowód Z W2 dla kawałkami liniowej funkcji u mamy

$$E_{gh} u(a(H(X) - X)) = E_{gh}(au(H(X) - X)) = aE_{gh} u(H(X) - X) = 0,$$

a więc składka $H(X)$ jest proporcjonalna. Załóżmy teraz, że $u \in \mathcal{U}$ oraz $X \in \mathcal{X}_2$. Z (5.6) mamy

$$u(aH(X))(1 - \overline{g}(q)) = -u(a(H(X) - s))h(q). \tag{5.11}$$

Po lewej stronie równania (5.11) znajduje się funkcja wklęsła zmiennej a, zaś po prawej stronie mamy funkcję wypukłą zmiennej a. Wnioskujemy stąd, że u jest liniowa dla $x < 0$ i dla $x > 0$ z być może różnymi współczynnikami kierunkowymi. Dla $w > 0$ liniowość u otrzymujemy w sposób analogiczny do tego w Twierdzeniu 5.1. ■

P7 Addytywność dla zmiennych losowych komonotonicznych.

Ponieważ każda funkcja stała jest komonotoniczna z dowolną zmienną losową X, więc z W8 wynika, że warunek $E_{gh}(X + Y) = E_{gh}X + E_{gh}Y$ nie musi być spełniony dla komonotonicznych zmiennych losowych X i Y. W Twierdzeniu 5.3 podajemy charakteryzację addytywności dla zmiennych losowych komonotonicznych dla składki wyznaczonej z równania (5.2).

Twierdzenie 5.3 *(i) Jeżeli* $u(x) = cx$ *i* $h = \overline{g} \in \mathcal{G}$*, to składka* $H(X)$ *jest addytywna dla zmiennych losowych komonotonicznych.*
(ii) Jeżeli $u \in \mathcal{U}$*,* $g, h \in \mathcal{G}$ *są ciągłe oraz istnieją* $0 \leq q_1 < q_2 \leq 1$ *takie, że* $g(1-q)\,h(q) > 0$ *dla* $q \in (q_1, q_2)$*, równanie (5.2) zachodzi dla* $w = 0$ *i pewnego* $w > 0$*, zaś składka* $H(X)$ *jest addytywna dla zmiennych losowych komonotonicznych, to* $u(x) = cx$ *dla pewnego* $c > 0$ *oraz* $\overline{g} = h$*.*

Dowód (i) Gdy $h = \overline{g}$, to $H(X) = E_{\overline{g}}X$ i z addytywności całki Choqueta dla zmiennych losowych komonotonicznych otrzymujemy tezę.
(ii) Wiadomo, że jeśli składka jest addytywna dla zmiennych losowych komonotonicznych, to jest proporcjonalna. Z Twierdzenia 5.1 wnioskujemy, że $u(x) = cx$ oraz $\overline{g} = h$. ∎

P8 Addytywność dla zmiennych losowych niezależnych.

Twierdzenie 5.4 *Niech* $u \in \mathcal{U}$*.*
(i) Jeżeli $g(p) = h(p) = p$ *i* $u \in \mathcal{U}_0$*, to składka* $H(X)$ *jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych.*
(ii) Jeżeli $g(p) = h(p) = p$ *i składka* $H(X)$ *jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych przy* $w = 0$*, to* $u \in \mathcal{U}_0$*.*
(iii) Jeżeli $u \in \mathcal{U}_0$*,* $g, h \in \mathcal{G}$*,* g *jest prawostronnie ciągła w* $x = 0$*, lewostronnie ciągła w* $x = 1$*, ma pochodną lewostronną w* $x = 1$ *oraz* $g(1-q) + h(q) > 0$ *dla wszystkich* $q \in [0,1]$*, to* $H(X)$ *jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych dla dowolnego* $w \geq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $g(p) = h(p) = p$*.*

W celu wykazania Twierdzenia 5.4 udowodnimy następujące lematy.

Lemat 5.1 *Jeżeli* $u \in \mathcal{U}$*, to*
$$\lim_{x \to \infty} \frac{u(x+y)}{u(x)} = e^{ay}$$
dla pewnego $a > 0$*, o ile granica istnieje i jest skończona.*

Dowód Niech $z(y) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{u(x+y)}{u(x)}$. Wówczas dla $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$z(x+y) = \lim_{z \to \infty} \frac{u(z+x+y)}{u(z)} = \lim_{z+y \to \infty} \frac{u(z+y+x)}{u(z+y)} \cdot \lim_{z \to \infty} \frac{u(z+y)}{u(z)} = z(x)\,z(y).$$

Ponieważ funkcja z jest mierzalna jako granica funkcji ciągłych, więc jedynym rozwiązaniem otrzymanego równania jest $z(x) = e^{ax}$ (patrz Kuczma, 2009, str. 349-350). Funkcja u jest rosnąca, a więc $0 < u(x) < u(x+y)$ dla $x, y > 0$. Stąd $z(x) \geq 1$ dla $x \geq 0$ i ostatecznie $a > 0$. ■

Funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nazywamy symetryczną, gdy $f(x,y) = f(y,x)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Lemat 5.2 *Funkcja symetryczna $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia równanie*

$$f(x,y) - f(a,y) - f(x,b) + f(a,b) = 0 \tag{5.12}$$

dla wszystkich $a, b < 0 < x, y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x,y) = h(x) + h(y)$ dla $x,\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdzie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolna.

Dowód Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(x,y) = h(x) + h(y)$ spełnia warunek (5.12). Załóżmy, że wzór (5.12) zachodzi dla pewnej funkcji f. Połóżmy $h(x) = f(x,-1) - \frac{1}{2}f(-1,-1)$ dla $x > 0$ oraz $h(a) = f(a,1) - \frac{1}{2}f(1,1)$ dla $a < 0$. Zdefiniujmy $F(x,y) = h(x) + h(y)$ dla $x, y \neq 0$. Pokażemy, że $F = f$. Dla $x, y > 0$ z symetrii f mamy

$$F(x,y) = f(x,-1) + f(-1,y) - f(-1,-1). \tag{5.13}$$

Z (5.12) dla $b = a = -1$ dostajemy

$$f(x,y) = f(-1,y) + f(x,-1) - f(-1,-1). \tag{5.14}$$

Z (5.13) i (5.14) mamy $F(x,y) = f(x,y)$ dla $x, y > 0$. W podobny sposób, kładąc $x = y = 1$ otrzymujemy $F(a,b) = f(a,b)$ dla $a, b < 0$. Ponieważ F jest symetryczna, więc wystarczy udowodnić, że $F(x,a) = f(x,a)$ dla $x > 0$ i $a < 0$. Z (5.12) mamy $f(x,x) - f(x,a) - f(a,x) + f(a,a) = 0$. Zatem

$$f(x,a) = \frac{1}{2}(f(x,x) + f(a,a)) = \frac{1}{2}(F(x,x) + F(a,a)) = h(x) + h(a) = F(x,a).$$

■

Dowód Twierdzenia 5.4. (i) Niech $g(p) = h(p) = p$. Gdy $u \in \mathcal{U}_0$, to łatwo sprawdzić, że $H(X)$ jest addytywna dla zmiennych losowych niezależnych.

(ii) Załóżmy teraz, że $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$ dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych X i Y. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(X = s) =$

$q = 1 - P(X = 0)$, $P(Y = z) = p = 1 - P(Y = 0)$, gdzie $s, z > 0$ są dowolne oraz $p, q \in [0, 1]$. Oznaczmy $x = H(X)$, $y = H(Y)$. Z (5.2) dla $w = 0$ i zmiennych losowych X, Y, $X + Y$ mamy odpowiednio

$$0 = (1 - q)\, u(x) + qu(x - s)\,, \tag{5.15}$$

$$0 = (1 - p)\, u(y) + pu(y - z)\,, \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} 0 \;\; = \;\; & (1 - p)(1 - q)\, u(x + y) + p(1 - q)\, u(x + y - z) \\ & + q(1 - p)\, u(x + y - s) + pqu(x + y - s - z)\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Wyznaczając p i q z (5.15) i (5.16) oraz wstawiając te wartości do (5.17) mamy

$$\begin{aligned} 0 \;\; = \;\; & u(x - s)\, u(y - z)\, u(x + y) - u(y)\, u(x - s)\, u(x + y - z) \\ & - u(x)\, u(y - z)\, u(x + y - s) + u(x)\, u(y)\, u(x + y - s - z)\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Połóżmy $a = x - s$, $b = y - z$ i zdefiniujmy funkcję $f(x, y) = \frac{u(x+y)}{u(x)u(y)}$. Z (5.18) mamy

$$0 = f(x, y) - f(a, y) - f(x, b) + f(a, b) \tag{5.19}$$

dla wszystkich $a, b < 0 < x, y$. Z Lematu 5.2 dla pewnej funkcji s otrzymujemy

$$u(x + y) = u(x)\, u(y)\, (s(x) + s(y)) \tag{5.20}$$

dla $x, y \neq 0$. Dla $x = y = 1$ mamy stąd $s(1) = u(2) / (2u^2(1))$. Jeżeli położymy $y = 1$ we wzorze (5.20), to

$$s(x) = \frac{u(x + 1)}{u(x)\, u(1)} - \frac{u(2)}{2u^2(1)} \tag{5.21}$$

dla $x \neq 0$. Z (5.20) i (5.21) mamy

$$u(x + y) = u(y)\, \frac{u(x + 1)}{u(1)} + u(x)\, \frac{u(y + 1)}{u(1)} - \frac{u(2)}{u^2(1)} u(x)\, u(y) \tag{5.22}$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Z (5.22) wnioskujemy, że granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x+y)}{u(x)}$ istnieje i jest skończona dla wszystkich y wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x+1)}{u(x)}$ istnieje i jest skończona. Wstawiając $y = 2$

do (5.22) otrzymujemy

$$u(x+2)-\frac{u(2)}{u(1)}u(x+1)+\left(\left(\frac{u(2)}{u(1)}\right)^2-\frac{u(3)}{u(1)}\right)u(x)=0$$

dla $x\in\mathbb{R}$. Otrzymane równanie funkcyjne może mieć następujące rozwiązania:

$$u(x)=\varphi_1(x)e^{c_1x}+\varphi_2(x)e^{c_2x}, \tag{5.23}$$

$$u(x)=(\varphi_1(x)+x\varphi_2(x))e^{c_1x}, \tag{5.24}$$

$$u(x)=(\varphi_1(x)\cos\beta x+\varphi_2(x)\sin\beta x)e^{\gamma x},\ x\in\mathbb{R}, \tag{5.25}$$

gdzie c_1, c_2, β, γ są pewnymi stałymi, zaś φ_1, φ_2 są dowolnymi funkcjami okresowymi o okresie 1 (patrz Polyanin i Manzhirow, 2007, str. 894). Wykażemy, że funkcja u ze wzoru (5.25) nie jest monotoniczna. Dla $\theta(x)$ takiego, że $\sin\theta(x)=\varphi_1(x)/\sqrt{\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)}$ i $\cos\theta(x)=\varphi_2(x)/\sqrt{\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)}$ mamy

$$u(x)=\sqrt{\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)}\sin(\beta x+\theta(x))e^{\gamma x},$$

gdzie $\theta(x)$ jest dowolną funkcją okresową o okresie 1. Wobec tego istnieje $x_0>0$ takie, że $u(x_0)=0$, co oznacza, że u nie jest rosnąca.
Zauważmy, że dla funkcji u ze wzoru (5.23) mamy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x+1)}{u(x)}=e^{c_2}\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_1(x)e^{(c_1-c_2)(x+1)}+\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)e^{(c_1-c_2)x}+\varphi_2(x)}=e^{c_2}<\infty,$$

gdzie dla $c_1\le c_2$ skorzystaliśmy z faktu, że φ jest okresowa. Dla u z (5.24) mamy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x+1)}{u(x)}=e^{c_1}\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_1(x)+(x+1)\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)+x\varphi_2(x)}=e^{c_1}<\infty.$$

Dla funkcji u ze wzorów (5.23) i (5.24) granica $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u(x+y)}{u(x)}$ istnieje i jest skończona dla wszystkich y. Z Lematu 5.1 istnieje stała $c\ge 0$ taka, że

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x+y)}{u(x)}=e^{cy}. \tag{5.26}$$

Z Lematu 5.2, każde rozwiązanie równania (5.19) można zapisać w postaci $f(x,y)=p(x)+p(y)$. Stąd i z (5.26) mamy $e^{cy}/u(y)=p(\infty)+p(y)$, a więc $p(y)=e^{cy}/u(y)-\frac{d}{2}$, gdzie

$0 \leq d = 2p(\infty) < \infty$ (z (5.21) i (5.26) wynika, że $p(\infty) < \infty$). Z definicji funkcji f dostajemy

$$\frac{u(x+y)}{u(x)\,u(y)} = \frac{e^{cx}}{u(x)} + \frac{e^{cy}}{u(y)} - d.$$

Kładąc $v(x) = u(x)\,e^{-cx}$ mamy

$$v(x+y) = v(x) + v(y) - dv(x)\,v(y) \tag{5.27}$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Gdy $d = 0$, to jedynym rozwiązaniem równania (5.27) jest $v(x) = ax$. Stąd $u(x) = axe^{cx}$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a > 0$, $c \geq 0$ (porównaj Gerber, 1985). Dla $d > 0$, podstawiając $z(x) = 1 - dv(x)$, równanie (5.27) możemy zapisać w postaci $z(x+y) = z(x)\,z(y)$. Zatem $u(x) = e^{cx}(1 - e^{\gamma x})/d$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie γ, $c \in \mathbb{R}$ (patrz Kuczma, 2009, str. 349). Łatwo sprawdzić, że wśród następujących klas funkcji: $u(x) = axe^{cx}$ oraz $u(x) = e^{cx}(1 - e^{\gamma x})/d$, jedynymi rosnącymi są $u(x) = ax$, $a > 0$, $u(x) = (1 - e^{\gamma x})/d$, $\gamma < 0$, $d > 0$ oraz $u(x) = (e^{cx} - 1)/d$, $c, d > 0$.
(iii) Gdy $u(x) = cx$, to

$$H(X) + \int_0^{w+H(X)} \left[h(P(X > s)) - \overline{g}(P(X > s))\right] ds = E_{hg}X.$$

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(X = 1) = q = 1 - P(X = 0)$, $P(Y = 1) = p = 1 - P(Y = 0)$ dla $p, q \in [0, 1]$. Ponieważ $E_{hg}X = E_hX = h(q)$, więc

$$H(X) + \int_0^{w+H(X)} \left[h\left(q\mathbf{1}_{(0,1)}(s)\right) - \overline{g}\left(q\mathbf{1}_{(0,1)}(s)\right)\right] ds = h(q).$$

Stąd

$$H(X) + (h(q) - \overline{g}(q)) \min\{w + H(X), 1\} = h(q),$$

$$H(Y) + (h(p) - \overline{g}(p)) \min\{w + H(Y), 1\} = h(p).$$

Dla $w \geq 1$ mamy

$$H(X) = \overline{g}(q), \; H(Y) = \overline{g}(p). \tag{5.28}$$

Ponadto

$$H\left(X+Y\right)+\int\limits_{0}^{w+H(X+Y)}\Big[\left[h\left(p+q-pq\right)-\overline{g}\left(p+q-pq\right)\right]\mathbf{1}_{[0,1)}\left(t\right)$$
$$+\left[h\left(pq\right)-\overline{g}\left(pq\right)\right]\mathbf{1}_{[1,2)}\left(t\right)\Big]\,dt=E_{hg}\left(X+Y\right), \tag{5.29}$$

gdzie $E_{hg}\left(X+Y\right)=E_{h}\left(X+Y\right)=h\left(p+q-pq\right)+h\left(pq\right)$ oraz $H\left(X+Y\right)\leq 2$. Stąd dla $w\geq 2$ dostajemy

$$H\left(X+Y\right)=\overline{g}\left(p+q-pq\right)+\overline{g}\left(pq\right). \tag{5.30}$$

Dla $w\geq 2$ z addytywności $H\left(X\right)$, z (5.28) i (5.30) mamy

$$\overline{g}\left(p\right)+\overline{g}\left(q\right)=\overline{g}\left(p+q-pq\right)+\overline{g}\left(pq\right) \tag{5.31}$$

dla $p,q\in[0,1]$. W taki sam sposób jak w dowodzie Twierdzenia 4.6 wykazujemy, że $\overline{g}\left(p\right)=p$. Stąd $g\left(p\right)=p$. Wykażemy, że $h\left(p\right)=p$. Niech $w=1$. Gdy $H\left(X+Y\right)\leq 1$, to z (5.29) mamy

$$H\left(X+Y\right)=\frac{p+q-pq+h\left(pq\right)}{1+h\left(pq\right)-pq}.$$

Jeśli $p,q\in[0,1]$ są takie, że $p+q\leq 1$, to z addytywności $H\left(X\right)$ otrzymujemy, że $H\left(X+Y\right)\leq 1$ oraz

$$p+q=\frac{p+q-pq+h\left(pq\right)}{1+h\left(pq\right)-pq}$$

dla $p,q\in[0,1]$ i $p+q\leq 1$. Stąd $h\left(pq\right)=pq$. Kładąc $p=\frac{1}{2}$ dostajemy, że $h\left(q\right)=q$ dla $q\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$. Niech $w=0$. Wtedy

$$H\left(Y\right)=\frac{h\left(p\right)}{1+h\left(p\right)-p}, \tag{5.32}$$

zaś wzór na $H\left(X\right)$ otrzymujemy zmieniając p na q we wzorze (5.32). Ponadto

$$H\left(X+Y\right)=\frac{h\left(p+q-pq\right)+h\left(pq\right)}{1-p-q+pq+h\left(p+q-pq\right)}, \tag{5.33}$$

gdy $0\leq H\left(X+Y\right)\leq 1$. Jeśli położymy $p=1-q$, to $H\left(X+Y\right)=1$ i z addytywności $H\left(X\right)$ mamy

$$1=\frac{h\left(p\right)}{1+h\left(p\right)-p}+\frac{h\left(1-p\right)}{h\left(1-p\right)+p}. \tag{5.34}$$

Kładąc $p=1/2$ w (5.34) otrzymujemy $h\left(1/2\right)=1/2$. Ponadto z (5.34) wynika, że $h\left(p\right)=p$

dla $p \in [3/4, 1]$. Niech teraz $p = q \leq 1/2$. Ponieważ h jest niemalejąca, więc $h(p) \leq 1 - p$ dla $0 \leq p \leq 1/2$ oraz $H(X+Y) \leq 1$ dla $0 \leq p \leq 1/2$. Z addytywności $H(X)$, z (5.32) i (5.33) mamy

$$\frac{2h(p)}{1+h(p)-p} = \frac{h(2p-p^2)+h(p^2)}{1+h(2p-p^2)-(2p-p^2)}. \tag{5.35}$$

Ponieważ $h(p) = p$ dla $0 \leq p \leq 1/4$, więc $h(2p-p^2) = 2p - p^2$ dla $0 \leq p \leq 1/4$. Stąd $h(p) = p$ dla $0 \leq p \leq 1/2 - 1/16 = 7/16$. Z (5.35) dla $0 \leq p \leq 7/16$ mamy $h(2p-p^2) = 2p - p^2$ dla $0 \leq p \leq \frac{7}{16} \cdot \frac{25}{16} = \frac{175}{256}$. Z faktu, że $175/256 > 1/2$, dostajemy, że $h(p) = p$ dla $0 \leq p \leq 1/2$. Z (5.34) wynika, że $h(p) = p$ dla $p \in [0,1]$.

Niech teraz $u(x) = (1 - e^{-cx})/a$. Wówczas

$$e^{cH(X)} + \int_0^{\exp(c(w+H(X)))} \left[h\left(P\left(e^{cX} > t\right)\right) - \overline{g}\left(P\left(e^{cX} > t\right)\right)\right] dt = E_{hg}e^{cX}.$$

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(X = s) = q = 1 - P(X = 0)$, $P(Y = s) = p = 1 - P(Y = 0)$. Wtedy $E_{hg}e^{cX} = E_h e^{cX} = e^{cs}h(q) + 1 - h(q)$ oraz

$$E_h e^{c(X+Y)} = 1 - h(p+q-pq) + e^{cs}\left(h(p+q-pq) - h(pq)\right) + e^{2cs}h(pq).$$

Ponieważ $P\left(e^{cX} > t\right) = \mathbf{1}_{[0,1)}(t) + q\mathbf{1}_{[1,e^{cs})}(t)$, więc

$$e^{cH(X)} + \int_1^{\exp(c(w+H(X)))} \left[h(q) - \overline{g}(q)\right] \mathbf{1}_{[1,e^{cs})}(t)\, dt = e^{cs}h(q) + 1 - h(q).$$

Stąd

$$e^{cH(X)} + \left(h(q) - \overline{g}(q)\right)\left[\min\left\{e^{c(w+H(X))}, e^{cs}\right\} - 1\right] = e^{cs}h(q) + 1 - h(1).$$

Jeżeli $w \geq s$, to

$$e^{cH(X)} = e^{cs}\overline{g}(q) + 1 - \overline{g}(q).$$

Zatem

$$H(X) = \frac{1}{c}\ln\left(e^{cs}\overline{g}(q) + 1 - \overline{g}(q)\right),$$

$$H(Y) = \frac{1}{c}\ln\left(e^{cs}\overline{g}(p) + 1 - \overline{g}(p)\right).$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
H(X+Y) &= e^{cH(X+Y)} \\
&+ \int\limits_{1}^{\exp(c(w+H(X+Y)))} \Big[\left[h(p+q-pq) - \overline{g}(p+q-pq)\right] \mathbf{1}_{[1,e^{cs})}(t) \\
&+ \left[h(pq) - \overline{g}(pq)\right] \mathbf{1}_{[e^{cs},e^{2cs}]}(t) \Big] \, dt.
\end{aligned}$$

Gdy $w \geq 2s$, to

$$\begin{aligned}
& e^{cH(X+Y)} + \left(h(p+q-pq) - \overline{g}(p+q-pq)\right)\left(e^{cs} - 1\right) + \left(h(pq) - \overline{g}(pq)\right)\left(e^{2cs} - e^{cs}\right) \\
= \; & 1 - h(p+q-pq) + e^{cs}\left(h(p+q-pq) - h(pq)\right) + e^{2cs} h(pq).
\end{aligned}$$

Z addytywności $H(X)$ otrzymujemy równość dwóch wielomianów zmiennej e^{cs}. Ponieważ s jest dowolne, więc porównując współczynniki przy e^{2cs} wnioskujemy, że $\overline{g}(p)\,\overline{g}(q) = \overline{g}(pq)$ dla $p, q \in [0,1]$. Korzystając z tego faktu i porównując współczynniki wielomianów przy e^{cs}, otrzymujemy ponownie równanie (5.31). Stąd $g(p) = p$ dla $p \in [0,1]$. Udowodnimy, że $h(p) = p$. Niech $w = 0$. Wtedy

$$H(X) = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{e^{cs} h(q) + 1 - q}{1 + h(q) - q}\right). \tag{5.36}$$

Zmieniając q na p w (5.36) otrzymujemy wzór na $H(Y)$. Ponadto

$$H(X+Y) = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{(1-p-q+pq) + e^{cs}\left(h(p+q-pq) - h(pq)\right) + e^{2cs} h(pq)}{1 + h(p+q-pq) - (p+q-pq)}\right),$$

gdy $0 \leq H(X+Y) \leq s$ oraz

$$H(X+Y) = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{(1-p-q+pq) + e^{cs}(p+q-2pq) + e^{2cs} h(pq)}{1 + h(pq) - pq}\right),$$

jeśli $s \leq H(X+Y) \leq 2s$. Z addytywności $H(X)$ mamy

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-p-q+pq) + e^{cs}\left(h(p+q-pq) - h(pq)\right) + e^{2cs} h(pq)}{1 + h(p+q-pq) - (p+q-pq)} \\
= \; & \frac{(1-p-q+pq) + e^{cs}\left(h(p)(1-q) + h(q)(1-p)\right) + e^{2cs} h(p) h(q)}{(1 + h(q) - q)(1 + h(p) - p)},
\end{aligned} \tag{5.37}$$

gdy $0 \leq H(X+Y) \leq s$ oraz

$$\begin{aligned} & \frac{(1-p-q+pq)+e^{cs}(p+q-2pq)+e^{2cs}h(pq)}{1+h(pq)-pq} \\ = \quad & \frac{(1-p-q+pq)+e^{cs}(h(p)(1-q)+h(q)(1-p))+e^{2cs}h(p)h(q)}{(1+h(q)-q)(1+h(p)-p)} \end{aligned} \tag{5.38}$$

dla $s \leq H(X) \leq 2s$. Ponieważ we wzorach (5.37) i (5.38) s jest dowolne, więc otrzymujemy równość dwóch wielomianów zmiennej e^{cs}. Porównując wyrazy wolne wielomianów w (5.37) i (5.38) otrzymujemy

$$1+h(p+q-pq)-(p+q-pq)=(1+h(q)-q)(1+h(p)-p),$$

$$1+h(pq)-pq=(1+h(q)-q)(1+h(p)-p), \tag{5.39}$$

co oznacza, że mianowniki po lewych i prawych stronach równości (5.37) i (5.38) są równe. Porównując teraz w obu przypadkach współczynniki przy e^{2cs} dostajemy $h(p)h(q)=h(pq)$ dla $p,q \in [0,1]$. Ponieważ h jest niemalejąca, więc jest mierzalna, a zatem $h(p)=p^d$ dla $p \in [0,1]$ i pewnego $d \in \mathbb{R}$ (patrz Kuczma, 2009, str. 345-350). Kładąc $p=q=1/2$ w (5.39) mamy $(1/2)^d=1/2$. Stąd $d=1$. Dowód w przypadku, gdy $u(x)=(e^{cx}-1)/a$ jest analogiczny. ■

Goovaerts i inni (2010 a) wprowadzają funkcjonał

$$\pi(X)=\int_{-\infty}^{0}(g(P(X>x))-1)\,du(x)+\int_{0}^{\infty}g(P(X>x))\,du(x) \tag{5.40}$$

i miarę ryzyka ρ zmiennej losowej X, która jest rozwiązaniem równania

$$0=\pi(X-\rho). \tag{5.41}$$

Przekształcając prawą stronę równania (5.40) otrzymujemy

$$\pi(X)=\int_{-\infty}^{0}(g(P(u(X)>y))-1)\,dy+\int_{0}^{\infty}g(P(u(X)>y))\,dy=E_g u(X). \tag{5.42}$$

Połóżmy $\widetilde{u}(x)=-u(-x)$. Z (5.41) i (5.42) wynika, że miara ryzyka ρ odpowiada składce $H(X)$, która jest rozwiązaniem równania $E_{\overline{g}}\widetilde{u}(H(X)-X)=0$. Poprzez przyjęcie słabszych założeń dotyczących funkcji wartości i funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo oraz fakt, że prawdopodobieństwa zysków i strat mogą być zniekształcane w inny sposób, Twierdzenie 5.4 jest uogólnieniem głównego wyniku podanego przez Goovaertsa i innych (2010 a).

P9 Subaddytywność.

Twierdzenie 5.5 *Niech $u(x) = cx$ dla pewnego $c > 0$, zaś $g, h \in \mathcal{G}$ będą takie, że $h = \overline{g}$. Wtedy $H(X)$ jest subaddytywna wtedy i tylko wtedy, gdy g jest wypukła.*

Dowód Niech $u(x) = cx$. Wtedy $H(X) = E_{\overline{g}}X$. Załóżmy, że g jest wypukła. Wiadomo, że $E_g(X+Y) \le E_gX + E_gY$ wtedy i tylko wtedy, gdy g jest wklęsła (patrz Denneberg, 1994). Zatem dla $\overline{g}$, która jest wklęsła, mamy

$$H(X+Y) = E_{\overline{g}}(X+Y) \le E_{\overline{g}}X + E_{\overline{g}}Y = H(X) + H(Y). \tag{5.43}$$

Załóżmy teraz, że $H(X)$ jest subaddywtywna. Wtedy warunek (5.43) jest spełniony, a więc $\overline{g}$ jest wklęsła. ■

P10 Zachowanie pierwszego porządku stochastycznego

Własność ta spełniona jest dla wszystkich funkcji $u \in \mathcal{U}$ i $g, h \in \mathcal{G}$, ponieważ zachodzą własności P1 i P2.

P11 Zachowanie porządku stop-loss.

Twierdzenie 5.6 *Jeżeli $u \in \mathcal{U}$ jest wklęsła, $g, h \in \mathcal{G}$ są takie, że $\overline{g} = h$, g jest wypukła oraz $X \le_{SL} Y$, to $H(X) \le H(Y)$.*

Dowód Twierdzenia 5.6 podaje Heilpern (2003).

P12 Warunek zysku netto.

Twierdzenie 5.7 *Jeżeli $u \in \mathcal{U}$ jest wklęsła, $g, h \in \mathcal{G}$ są takie, że $g(p) \le \overline{h}(p) \le p$ dla wszystkich $0 \le p \le 1$ oraz $X \ge 0$, to $H(X) \ge EX$.*

Dowód Z W9 mamy

$$u(w) = E_{gh}u(w + H(X) - X) \le u(E_{gh}(w + H(X) - X)).$$

Stąd, z W3 i (2.1) dostajemy

$$w \leq w + H(X) - E_{hg}X + \int_0^{w+H(X)} \left[h(P(X > s)) - \overline{g}(P(X > s))\right] ds.$$

Ponieważ $X \geq 0$, więc

$$H(X) \geq E_h X + \int_0^{w+H(X)} \left[\overline{g}(P(X > s)) - h(P(X > s))\right] ds.$$

Z faktu, że $\overline{g}(p) \geq h(p) \geq p$ oraz z W5 otrzymujemy $H(X) \geq E_h X \geq EX$. ∎

Twierdzenie 5.8 *Jeśli* $u \in \mathcal{U}$ *jest wklęsła,* $g, h \in \mathcal{G}$, $X < s = \sup X$, $h(P(X = s)) \geq 1 - g(P(X < s))$, $0 < w < s$ *oraz*

$$EX \leq (\overline{g}(P(X \geq w)) - \overline{g}(P(X = s)))\, w + \overline{g}(P(X = s))\, s,$$

to $EX \leq H(X)$.

Dowód Niech $Y = 0$, gdy $X < w$, $Y = w$ dla $w \leq X < s$ oraz $Y = s$ gdy $X = s$. Wtedy $Y \leq X$. Rozważmy następujące przypadki.
1° $0 \leq w + H(X) - s$. Wówczas

$$\begin{aligned}
u(w) &\leq E_g u(w + H(X) - Y) \\
&= u(w - s + H(X))(1 - g(P(X < s))) \\
&\quad + (g(P(X < s)) - g(P(X < w)))\, u(H(X)) + g(P(X < w))\, u(w + H(X)).
\end{aligned}$$

2° $w + H(X) - s < 0$. Ponieważ $h(P(X = s)) \geq 1 - g(P(X < s))$, więc

$$\begin{aligned}
u(w) &\leq E_{gh} u(w + H(X) - Y) \\
&= u(H(X))(g(P(X < s)) - g(P(X < w))) + u(w + H(X))\, g(P(X < w)) \\
&\quad + h(P(X = s))\, u(w + H(X) - s) \\
&\leq u(w - s + H(X))(1 - g(P(X < s))) \\
&\quad + (g(P(X < s)) - g(P(X < w)))\, u(H(X)) + g(P(X < w))\, u(w + H(X)).
\end{aligned}$$

Z nierówności Jensena mamy

$$\begin{aligned} H(X) &\geq w(g(P(X<s))-g(P(X<w)))+s(1-g(P(X<s))) \\ &= (\overline{g}(P(X\geq w))-\overline{g}(P(X=s)))\,w+\overline{g}(P(X=s))\,s. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 5.9 *Jeśli $u\in\mathcal{U}$ jest wklęsła na $[0,\infty)$, $g,h\in\mathcal{G}$, $w\geq 0$ oraz*

$$EX\leq w(1-g(P(X<w))),$$

to $H(X)\geq EX$.

Dowód Połóżmy $Y=0$, gdy $X<w$ oraz $Y=w$, gdy $X\geq w$. Wtedy $Y\leq X$. Z monotoniczności uogólnionej całki Choqueta mamy

$$\begin{aligned} u(w) &\leq E_{gh}u(w+H(X)-Y)=E_g u(w+H(X)-Y) \\ &= u(H(X))(1-g(P(X<w)))+u(w+H(X))\,g(P(X<w)) \\ &\leq u(wg(P(X<w))+H(X)), \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że u jest wklęsła na $[0,\infty)$. Stąd $H(X)\geq w(1-g(P(X<w)))$, co kończy dowód. ■

W Twierdzeniu 5.9 zakładamy wklęsłość funkcji u tylko dla dodatnich argumentów. Klasa funkcji wartości zaproponowana przez Kahnemana i Tversky'ego spełnia te założenia, choć takie funkcje nie muszą być wklęsłe na $\mathbb{R}$ jak to jest zakładane w Twierdzeniu 5.7. Warunek $EX\leq w(1-g(P(X<w)))$ jest spełniony, gdy $g(P(X<w))$ jest małą liczbą, $EX<w$ oraz $0\leq X\leq s$, przy czym $s>w$.

P13 Iteracyjność.

Składkę $H(X|Y)$ definiujemy jako rozwiązanie równania

$$u(w)=E_{gh}[u(w+H(X|Y)-X)\,|Y]$$

(patrz wzór (4.37)).

Twierdzenie 5.10 *(i) Jeżeli $g(p)=h(p)=p$ oraz $u\in\mathcal{U}_0$, to składka $H(X)$, która jest rozwiązaniem równania (5.2) jest iteracyjna.*

(ii) Niech $u \in \mathcal{U}$ będzie taka, że istnieje pochodna prawostronna u, która jest dodatnia dla wszystkich $x \neq 0$. Niech $g, h \in \mathcal{G}$ będą rosnące i ciągłe na $[0,1]$ oraz załóżmy, że istnieją skończone pochodne jednostronne $g'_-(x)$ i $h'_+(x)$ dla $x \in (0,1)$ oraz $0 < h'_+(0), g'_-(1) < \infty$. Jeżeli składka $H(X)$ jest iteracyjna dla $w = 0$, to $g(p) = h(p) = p$ oraz $u \in \mathcal{U}_0$.

W twierdzeniu tym nie zakładamy różniczkowalności funkcji u, g i h, co jest zgodne z założeniami teorii skumulowanej perspektywy.

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem oraz $f : I \to \mathbb{R}$. W dalszym ciągu poprzez $f'(x)$ będziemy oznaczali pochodną prawostronną funkcji f w punkcie $x \in I \backslash \{\sup I\}$.

Lemat 5.3 *Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Jeżeli f jest prawostronnie różniczkowalna w każdym punkcie $x \in [0,1)$ oraz $f'(x) = 0$ dla $x \in [0,1)$, to f jest funkcją stałą na $[0,1]$.*

Uwaga 5.1 *Dowód Lematu 5.3 podają Rajwade i Bhandari (2007). Założenie o ciągłości f w powyższym lemacie nie może być pominięte. Istotnie, funkcja $f(x) = \mathbf{1}_{[x_0,1]}(x)$ dla $x_0 \in (0,1]$ spełnia równanie $f'(x) = 0$ dla $x \in [0,1)$, ale f nie jest stała na $[0,1]$.*

Uwaga 5.2 *Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła oraz $f(0) = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest ustalone. Załóżmy, że f spełnia równanie różniczkowe $f'(x) = g(x)$ dla $x \in [0,1)$, gdzie funkcja g jest znana. Jeżeli G jest ciągłym rozwiązaniem tego równania różniczkowego, to $(f - G)' = 0$. Z Lematu 5.3 wynika, że G jest jedynym rozwiązaniem równania $f'(x) = g(x)$.*

Lemat 5.4 *Przy założeniach Twierdzenia 5.10, niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek*

$$u(f(x))\, g(1-x) + u(f(x) - s)\, h(x) = 0, \tag{5.44}$$

gdzie $s > 0$. Wówczas funkcja f jest dobrze określona, rosnąca, ciągła i ma prawostronną pochodną.

Dowód Niech $\varphi(y) = u(y)\, g(1-x) + u(y-s)\, h(x)$. Z ciągłości u wynika, że φ jest ciągła. Ponadto $\varphi(0) = u(-s)\, h(x) \leq 0$, $\varphi(s) = u(s)\, g(1-x) \geq 0$ oraz z monotoniczności u, g i h wynika, że φ ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Zatem f jest określona jednoznacznie. Pokażemy, że f jest funkcją różnowartościową. Istotnie, przypuśćmy, że istnieją $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ takie, że $f(x_1) = f(x_2)$. Wówczas

$$u(f(x_i))\, g(1-x_i) + u(f(x_i) - s)\, h(x_i) = 0 \text{ dla } i = 1, 2. \tag{5.45}$$

Jeżeli $x_1 = 0$, to $u(f(x_1)) = 0$ oraz $f(x_1) = 0$. Zatem jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $h(x_2) = 0$, co oznacza, że $x_2 = 0$ – sprzeczność. Możemy zatem założyć, że $x_1 > 0$. Ponieważ $u(f(x_1)) = u(f(x_2))$, więc przyrównując lewe strony równania (5.45) dla $i = 1$ oraz $i = 2$ mamy $1 < h(x_2)/h(x_1) = g(1-x_2)/g(1-x_1) < 1$ - sprzeczność. Wobec tego f jest różnowartościowa. Pokażemy, że f jest ciągła i ma pochodną prawostronną. Niech $x \in [0,1)$. Z (5.44) mamy $u(f(x))/u(f(x)-s) = -h(x)/g(1-x)$. Zdefiniujmy $\xi(x) = u(x)/u(x-s)$ dla $x \in [0,s)$. Z założeń dotyczących funkcji u wynika, że ξ jest dobrze zdefiniowana, ciągła i ma pochodną prawostronną. Stąd $f(x) = \xi^{-1}(-h(x)/g(1-x))$ jest również ciągła i ma pochodną prawostronną na $[0,1)$. Wykażemy, że f jest ciągła w $x = 1$. Niech $x_n \to 1^-$, gdy $n \to \infty$. Załóżmy, że $f(x_n) \to a$ dla pewnego a. Wtedy z (5.45) mamy $u(f(x_n))\,g(1-x_n) + u(f(x_n)-s)\,h(x_n) = 0$. Gdy $n \to \infty$, to z ciągłości u, g i h wynika, że $a = f(1)$. Zatem f jest ciągła na $[0,1]$. Ponieważ $f(0) = 0$ i $f(1) = s$, więc z ciągłości funkcji f wynika, że jest ona rosnąca. ■

Dowód Twierdzenia 5.10 (i) Ta część twierdzenia została udowodniona przez Gerbera (1979).
(ii) Załóżmy, że $H(X)$ jest iteracyjna. Rozważmy wektor losowy (X,Y) o rozkładzie $P(X=0,Y=1) = 1/2 - a$, $P(X=0,Y=2) = 1/2 - b$, $P(X=s,Y=1) = a$, $P(X=s,Y=2) = b$, gdzie $0 \le a,b \le 1/2$ oraz $s > 0$ są dowolnie ustalone. Jeżeli $w = 0$, to składka $H(X|Y)$ jest wyznaczona ze wzoru

$$0 = E_{gh}\left(u\left(H(X|Y) - X\right)|Y\right). \tag{5.46}$$

Stąd dla $H_1 = H(X|Y=1)$, $H_2 = H(X|Y=2)$ mamy

$$g(1-2a)\,u(H_1) + h(2a)\,u(H_1 - s) = 0, \tag{5.47}$$

$$g(1-2b)\,u(H_2) + h(2b)\,u(H_2 - s) = 0. \tag{5.48}$$

Z Lematu 5.4 wynika, że $H_1 < H_2$ dla $a < b$. Z warunku $H(X) = H(H(X|Y))$ wnioskujemy, że $0 = E_{gh}u(H(X) - H(X|Y))$, a zatem

$$0 = g(1/2)\,u(H(X) - H_1) + h(1/2)\,u(H(X) - H_2). \tag{5.49}$$

Ponadto równanie (5.2) dla zmiennej losowej X przy $w = 0$ możemy zapisać jako

$$g(1-(a+b))\,u(H(X)) + h(a+b)\,u(H(X) - s) = 0. \tag{5.50}$$

Pokażemy, że $0 < f'(x) < \infty$ dla $x \in [0,1)$. Z (5.47), (5.48) i (5.50), równanie (5.49) możemy zapisać jako

$$g(1/2)\,u(f(a+b) - f(2a)) + h(1/2)\,u(f(a+b) - f(2b)) = 0 \tag{5.51}$$

dla wszystkich $0 \le a < b \le 1/2$, gdzie f jest funkcją spełniającą (5.44). Obliczając pochodne prawostronne obu stron równania (5.51) ze względu na a i b dostajemy odpowiednio

$$\begin{aligned} & g(1/2)\,u'(f(a+b) - f(2a))\,(f'(a+b) - 2f'(2a)) \\ + \;& h(1/2)\,u'(f(a+b) - f(2b))\,f'(a+b) = 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned} & g(1/2)\,u'(f(a+b) - f(2a))\,f'(a+b) \\ + \;& h(1/2)\,u'(f(a+b) - f(2b))\,(f'(a+b) - 2f'(2b)) = 0 \end{aligned} \tag{5.53}$$

dla $0 \le a < b < 1/2$. Odejmując stronami równanie (5.53) od równania (5.52) otrzymujemy

$$g(1/2)\,u'(f(a+b) - f(2a))\,f'(2a) = h(1/2)\,u'(f(a+b) - f(2b))\,f'(2b)$$

dla $0 \le a < b < 1/2$, gdzie $g(1/2)\,h(1/2) > 0$, co wynika z monotoniczności g i h. Jeżeli $f'(2a) = 0$ dla jakiegoś $a \ge 0$, to z założenia $u'(x) \ne 0$ dla $x \ne 0$ i faktu, że f jest różnowartościowa mamy $f'(2b) = 0$ dla $a < b < 1/2$. Gdyby pochodna prawostronna była równa 0 na pewnym przedziale, to z Lematu 5.3 i ciągłości f wynikałoby, że f jest stała, co przeczyłoby faktowi, że jest różnowartościowa. Pokazaliśmy zatem, że $f'(x) > 0$ dla wszystkich $0 \le x < 1$. Gdyby $f'(2a) = \infty$ dla pewnego $a \ge 0$, to z założenia $u'(x) < \infty$ wynikałoby, że $f'(2b) = \infty$ dla wszystkich $a < b < 1/2$, co jest niemożliwe. Stąd $0 < f'(x) < \infty$ dla $0 \le x < 1$.
Z (5.53) mamy

$$u'(f(a+b) - f(2a)) = \frac{-h(1/2)\,(u'(f(a+b) - f(2b)))\,(f'(a+b) - 2f'(2b))}{g(1/2)\,f'(a+b)}. \tag{5.54}$$

Wstawiając (5.54) do (5.52) i korzystając z założenia, że $u'(x) \ne 0$ dla $x \ne 0$, mamy

$$-(f'(a+b) - 2f'(2a))\,(f'(a+b) - 2f'(2b))\,/f'(a+b) + f'(a+b) = 0 \tag{5.55}$$

dla $0 \le a < b < 1/2$. Zdefiniujmy funkcję $F(x) = f'(0)\,/f'(x) - 1$. Z (5.55) i symetrii wynika, że $2F(a+b) = F(2a) + F(2b)$ dla $0 \leq a, b < 1/2$. Ponieważ f' jest mierzalna jako granica punktowa funkcji mierzalnych, więc F jest również mierzalna. Stąd $F(x) = cx$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ (patrz Kuczma 2009, str. 354). Rozważmy następujące przypadki.

1° Niech $c = 0$. Wtedy $f'(x) = f'(0) > 0$ dla $x \in [0, 1)$. Ponieważ f jest ciągła i $f(1) = s$, więc z Lematu 5.3 mamy, że $f(x) = sx$. Z (5.44) dostajemy

$$u(sx)\, g(1-x) + u(sx - s)\, h(x) = 0 \tag{5.56}$$

dla $s \geq 1$ i $0 \leq x \leq 1$. Stąd dla $y = sx$ otrzymujemy

$$u(y)\, g(1 - y/s) + u(y - s)\, h(y/s) = 0 \tag{5.57}$$

dla $s \geq 1$ i $0 \leq y \leq s$. Z (5.57) dla $y = s - 1$ mamy $u(s-1)\, g(1 - (s-1)/s) + u(-1)\, h((s-1)/s) = 0$ dla $s \geq 1$. Kładąc $t = s - 1$ dostajemy

$$u(t) = -u(-1)\, h\left(\frac{t}{1+t}\right) / g\left(1 - \frac{t}{1+t}\right) \tag{5.58}$$

dla wszystkich $t \geq 0$. Kładąc $y = 1$ w (5.57) otrzymujemy $u(1)\, g(1 - 1/s) + u(1-s)\, h(1/s) = 0$ dla $s \geq 1$. Podstawiając $1 - s = t$ mamy

$$u(t) = -u(1)\, g\left(1 - \frac{1}{1-t}\right) / h\left(\frac{1}{1-t}\right) \tag{5.59}$$

dla $t \leq 0$. Wstawiając (5.58) i (5.59) do (5.56) dostajemy

$$u(-1)\, \psi\left(\frac{sx}{1+sx}\right) + u(1)\, \psi(x) / \psi\left(\frac{1}{1+s(1-x)}\right) = 0 \tag{5.60}$$

dla $s \geq 1$ i $0 \leq x < 1$, gdzie $\psi(x) = h(x)/g(1-x)$. Rozwiążemy teraz równanie (5.60). Wstawiając $x = 1/s < 1$ do (5.60) mamy $u(-1)\, \psi(1/2) + u(1) = 0$ dla $s > 1$. Zatem

$$u(1) = (-u(-1))\, \psi(1/2). \tag{5.61}$$

Jeśli wstawimy (5.61) do (5.60), otrzymamy

$$\psi\left(\frac{sx}{1+sx}\right) \psi\left(\frac{1}{1+s(1-x)}\right) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) \psi(x) \tag{5.62}$$

dla $s \geq 1$ oraz $0 \leq x < 1$. Kładąc $x = 1/2$ w (5.62) mamy $\psi(s/(2+s))\, \psi(2/(2+s)) =$

$\psi^2(1/2)$ dla $s \geq 1$. Stąd $\psi(x)\psi(1-x) = \psi^2(1/2)$ dla $x \in (0, 2/3]$. Z symetrii otrzymujemy

$$\psi(x)\psi(1-x) = \psi^2(1/2) \tag{5.63}$$

dla $0 < x < 1$. Obliczając pochodną prawostronną obu stron równania (5.62) ze względu na x, mamy

$$\begin{aligned} &\psi'\left(\frac{sx}{1+sx}\right)\frac{s}{(1+sx)^2}\psi\left(\frac{1}{1+s(1-x)}\right) \\ + \quad &\psi\left(\frac{sx}{1+sx}\right)\psi'\left(\frac{1}{1+s(1-x)}\right)\frac{s}{(1+s(1-x))^2} = \psi(1/2)\psi'(x) \end{aligned}$$

dla $0 \leq x < 1$ i $s \geq 1$. Dla $x = 0$ dostajemy

$$s\psi'(0)\psi(1/(1+s)) = \psi(1/2)\psi'(0) \tag{5.64}$$

dla $s \geq 1$. Ponieważ $\psi'(0) = h'(0) > 0$, więc kładąc $t = 1/(1+s)$ w (5.64) otrzymujemy

$$\psi(t) = t\psi(1/2)/(1-t) \tag{5.65}$$

dla $0 < t \leq 1/2$. Z (5.63) i (5.65) mamy

$$\psi(t) = \psi^2(1/2)/\psi(1-t) = t\psi(1/2)/(1-t) \tag{5.66}$$

dla $1/2 \leq t < 1$. Ponieważ $\psi(0) = 0$, z (5.65) i (5.66) dostajemy

$$\psi(t) = t\psi(1/2)/(1-t) \tag{5.67}$$

dla $0 \leq t < 1$. Wstawiając (5.67) do (5.58) i (5.59) mamy $u(t) = (-u(-1))\psi(1/2)t$ dla $t \geq 0$ oraz $u(t) = u(1)t/\psi(1/2)$ dla $t < 0$. Z (5.61) otrzymujemy

$$u(t) = -u(-1)\psi(1/2)t \text{ dla } t \geq 0 \tag{5.68}$$

$$u(t) = -u(-1)t \text{ dla } t < 0. \tag{5.69}$$

Pokazaliśmy, że u jest liniowa na $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$. Później wyznaczymy postać funkcji g i h oraz wykażemy, że u jest liniowa na $\mathbb{R}$.

2° Niech $c > 0$. Wtedy $F(x) = cx$ oraz $f'(x) = f'(0)/(1+cx)$, gdzie $f(0) = 0$. Ponieważ f jest ciągła, więc z Uwagi 5.2 wynika, że $f(x) = \beta^{-1}\ln(1+cx)$ dla $x \in [0,1]$, gdzie

$\beta = c/f'(0)$ jest ustalone, niezależne od s. Ponadto z faktu, że $f(1) = s = \beta^{-1}\ln(1+c)$ mamy $c = e^{s\beta} - 1$. Równanie (5.44) jest wówczas postaci $u_0(\ln(1+cx))\,g(1-x) + u_0(\ln(1+cx) - z)\,h(x) = 0$ dla $z > 0$ i $0 \le x \le 1$, gdzie $u_0(x) = u(x/\beta)$ oraz $z = s\beta$. Kładąc $e^y = 1 + cx$ mamy

$$u_0(y)\,g(1 - (e^y - 1)/c) + u_0(y - z)\,h((e^y - 1)/c) = 0 \tag{5.70}$$

dla $z \ge y \ge 0$, ponieważ $f(x) \le s$ dla $x \in [0,1]$. Niech $x \in [0,1]$ będzie takie, że $z - y = 1$. Wtedy

$$u_0(z-1)\,g\left(1 - \left(e^{z-1} - 1\right)/c\right) + u_0(-1)\,h\left(\left(e^{z-1} - 1\right)/c\right) = 0 \tag{5.71}$$

dla $z \ge 1$. Ponieważ $c = e^{s\beta} - 1 = e^z - 1$, więc przyjmując $x = z - 1$, z (5.71) mamy

$$u_0(x) = -u_0(-1)\,\psi\left(\frac{e^x - 1}{e^{x+1} - 1}\right) \tag{5.72}$$

dla $x \ge 0$, gdzie $\psi(x) = h(x)/g(1-x)$ dla $0 \le x < 1$. Kładąc $y = 1$ w (5.70) otrzymujemy $u_0(1)\,g(1 - (e-1)/c) + u_0(1-z)\,h((e-1)/c) = 0$ dla $z \ge 1$. Ponieważ $c = e^z - 1$, więc dla $t = 1 - z$ mamy $c = e^{1-t} - 1$ oraz

$$u_0(t) = -u_0(1)/\psi\left((e-1)/\left(e^{1-t} - 1\right)\right) \tag{5.73}$$

dla $t < 0$. Wstawiając (5.72) i (5.73) do (5.70) przy $c = e^z - 1$ dostajemy

$$-u_0(-1)\,\psi\left(\frac{e^y - 1}{e^{y+1} - 1}\right) g\left(1 - \frac{e^y - 1}{e^z - 1}\right) - u_0(1)\,\frac{1}{\psi\left(\frac{e-1}{e^{1+z-y} - 1}\right)} h\left(\frac{e^y - 1}{e^z - 1}\right) = 0$$

dla $z > y \ge 0$. Stąd

$$u_0(-1)\,\psi\left(\frac{e^y - 1}{e^{y+1} - 1}\right)\psi\left(\frac{e - 1}{e^{1+z-y} - 1}\right) + u_0(1)\,\psi\left(\frac{e^y - 1}{e^z - 1}\right) = 0 \tag{5.74}$$

dla $z > y \ge 0$. Kładąc $y = z - 1$ w (5.74) mamy

$$u_0(-1)\,\psi\left(\frac{e^{z-1} - 1}{e^z - 1}\right)\psi\left(\frac{e - 1}{e^2 - 1}\right) + u_0(1)\,\psi\left(\frac{e^{z-1} - 1}{e^z - 1}\right) = 0$$

dla $z > 1$. Ponieważ $\psi(x) > 0$ dla $x > 0$, więc

$$u_0(1) = -u_0(-1)\,\psi\left((e-1)/\left(e^2 - 1\right)\right). \tag{5.75}$$

Z (5.74) i (5.75) mamy

$$\psi\left(\frac{e^y-1}{e^{y+1}-1}\right)\psi\left(\frac{e-1}{e^{1+z-y}-1}\right)=\psi\left(\frac{e^y-1}{e^z-1}\right)\psi\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right) \tag{5.76}$$

dla $0 \le y < z$. Obliczając pochodną prawostronną obu stron równania (5.76) ze względu na y mamy

$$\begin{aligned} &\psi'\left(\frac{e^y-1}{e^{y+1}-1}\right)\frac{e^y\left(e-1\right)}{\left(e^{y+1}-1\right)^2}\psi\left(\frac{e-1}{e^{1+z-y}-1}\right)\\ +\ &\psi\left(\frac{e^y-1}{e^{y+1}-1}\right)\psi'\left(\frac{e-1}{e^{1+z-y}-1}\right)\frac{\left(e-1\right)e^{1+z-y}}{\left(e^{1+z-y}-1\right)^2}=\psi'\left(\frac{e^y-1}{e^z-1}\right)\frac{e^y}{e^z-1}\psi\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right). \end{aligned}$$

Kładąc $y=0$, z faktu że $\psi\left(0\right)=0$ oraz $\psi'\left(0\right)=h'\left(0\right)>0$ wynika, że

$$\frac{e-1}{\left(e-1\right)^2}\psi\left(\frac{e-1}{e^{1+z}-1}\right)=\psi\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right)\frac{1}{e^z-1}$$

dla $z>0$. Podstawiając $r=\left(e-1\right)/\left(e^{1+z}-1\right)$ otrzymujemy

$$\psi\left(r\right)=\frac{r}{1-r}e\psi\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right) \tag{5.77}$$

dla $0<r<1$. Z (5.72), (5.73) i (5.77) mamy

$$u_0\left(x\right)=-u_0\left(-1\right)\frac{1-e^{-x}}{e-1}e\psi\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right)\ \text{dla } x>0, \tag{5.78}$$

$$u_0\left(x\right)=u_0\left(1\right)\frac{1-e^{-x}}{e-1}\frac{1}{\psi\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right)}\ \text{dla } x<0.$$

Z (5.75) mamy

$$u_0\left(x\right)=-u_0\left(-1\right)\left(1-e^{-x}\right)/\left(e-1\right)\ \text{dla } x<0. \tag{5.79}$$

Z (5.78) i (5.79) wynika, że u jest wykładnicza na $(-\infty,0)$ i $(0,\infty)$. Aby udowodnić, że u jest wykładnicza na $\mathbb{R}$, musimy najpierw wyznaczyć funkcje g i h.

3° Gdy $c<0$, to w podobny sposób pokazujemy, że u jest kawałkami wykładnicza.

Wyznaczymy teraz funkcje g i h. Niech (X,Y) będzie wektorem losowym o rozkładzie $P\left(X=0,Y=1\right)=1/4-a$, $P\left(X=0,Y=2\right)=1/4-b$, $P\left(X=z,Y=1\right)=1/4-c$, $P\left(X=z,Y=2\right)=1/4-d$, $P\left(X=s,Y=1\right)=a+c$, $P\left(X=s,Y=2\right)=b+d$, gdzie $0\le a,b,c,d\le 1/4$, $a+c\le 1/2$, $b+d\le 1/2$ i $0<z<s$. Niech $w=0$. Połóżmy

$H_1 = H(X|Y=1)$, $H_2 = H(X|Y=2)$, $H = H(X)$. Jeżeli $u(H_1 - z) \geq 0$, to z (5.46) mamy

$$0 = g(1 - 2(a+c))\, u(H_1 - z) + g(1/2 - 2a)(u(H_1) - u(H_1 - z)) + h(2(a+c))\, u(H_1 - s), \tag{5.80}$$

ponieważ $u(H_1 - s) < 0$, przy czym $(u(H_1 - X))_+$ przyjmuje wartości 0, $u(H_1 - z)$ i $u(H_1)$ z prawdopodobieństwami warunkowymi odpowiednio $2(a+c)$, $1/2 - 2c$ i $1/2 - 2a$, zaś $(-u(H_1 - X))_+$ przyjmuje wartości 0 i $-u(H_1 - s)$ z prawdopodobieństwami $1 - 2(a+c)$ i $2(a+c)$. Jeżeli $u(H_1 - z) < 0$, to

$$0 = g(1/2 - 2a)\, u(H_1) + h(1/2 + 2a)\, u(H_1 - z) + h(2(a+c))(u(H_1 - s) - u(H_1 - z)). \tag{5.81}$$

Niech u będzie funkcją określoną wzorami (5.68) i (5.69). Przyjmując, że $-u(-1) = 1$, z (5.67)-(5.69) wynika, że

$$h(x) = g(1-x)\frac{h(1/2)}{g(1/2)}\frac{x}{1-x} \text{ dla } 0 \leq x < 1, \tag{5.82}$$

$$u(x) = h(1/2)\, x / g(1/2) \text{ dla } x \geq 0, \tag{5.83}$$

$$u(x) = x \text{ dla } x < 0. \tag{5.84}$$

Wstawiając (5.82)-(5.84) do (5.80) i (5.81) mamy

$$H_1 = z(1 - 2(a+c))\left(1 - \frac{g(1/2 - 2a)}{g(1 - 2(a+c))}\right) + 2(a+c)\, s, \tag{5.85}$$

gdy $H_1 \geq z$ i $a + c < 1/2$ oraz

$$H_1 = (1/2 + 2a)\, z + (s - z)\frac{g(1 - 2(a+c))}{g(1/2 - 2a)}\frac{(a+c)(1-4a)}{1 - 2(a+c)} \tag{5.86}$$

dla $H_1 < z$ i $a + c < 1/2$. Wzór na H_2 otrzymujemy zamieniając a na b i c na d we wzorach (5.85) i (5.86). W podobny sposób otrzymujemy wzór na H:

$$H = z(1 - (a+b+c+d))\left(1 - \frac{g(1/2 - (a+b))}{g(1 - (a+b+c+d))}\right) + (a+b+c+d)\, s, \tag{5.87}$$

gdy $H \geq z$ oraz

$$H = \left(\frac{1}{2} + (a+b)\right) z + (s-z) \frac{g\left(1-(a+b+c+d)\right)}{2g\left(1/2-(a+b)\right)} \frac{(a+b+c+d)\left(1-2\left(a+b\right)\right)}{1-(a+b+c+d)}, \quad (5.88)$$

jeśli $H < z$. Z (5.83) i (5.84), po skorzystaniu z warunku iteracyjności, wzór (5.49) dla $H_1 < H_2$ jest równoważny temu, że

$$\left(H_1 + H_2\right)/2 = H, \quad (5.89)$$

ponieważ $H - H_1 > 0 > H - H_2$ co jest konsekwencją (5.49). Ten sam warunek otrzymujemy, gdy $H_2 < H_1$. Połóżmy $a + c = 1/4$, $b + d = 1/4$. Z (5.85) dostajemy $H_1 = z\left(1 - g\left(1/2 - 2a\right)/g\left(1/2\right)\right)/2 + s/2$. Łatwo sprawdzić, że dla $0 \leq a \leq 1/4$ i $s = 2z$ mamy $H_1 \geq z$. Podobnie, dla $0 \leq b \leq 1/4$ i $b + d = 1/4$ dostajemy $H_2 \geq z$. Z (5.87) równanie (5.89) dla $a + c = 1/4$, $b + d = 1/4$ i $s = 2z$ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\left(1 - \frac{g\left(1/2-2a\right)}{g\left(1/2\right)}\right) + z + \frac{z}{2}\left(1 - \frac{g\left(1/2-2b\right)}{g\left(1/2\right)}\right) + z\right) \\ = \; & \frac{z}{2}\left(1 - \frac{g\left(1/2-(a+b)\right)}{g\left(1/2\right)}\right) + z, \end{aligned}$$

co jest równoważne temu, że $\left(g\left(1/2-2a\right) + g\left(1/2-2b\right)\right)/2 = g\left(1/2-(a+b)\right)$ dla $0 \leq a, b \leq 1/4$. Otrzymaliśmy równanie funkcyjne Jensena postaci $\left(g\left(x\right) + g\left(y\right)\right)/2 = g\left(\left(x+y\right)/2\right)$ dla $0 \leq x, y \leq 1/2$. Stąd, z ciągłości i monotoniczności g wynika, że $g\left(x\right) = \alpha x$ dla $0 < x \leq 1/2$ i pewnego $0 < \alpha \leq 2$ (patrz Kuczma, 2009, str. 354). W celu wyznaczenia wartości funkcji g na $[1/2, 1]$, połóżmy $a = 0$, $0 \leq c \leq 1/4$ i $s = 3z/2$ we wzorze (5.86). Wtedy

$$H_1 = \frac{z}{2} + \frac{z}{2}\frac{2cg\left(1-2c\right)}{\alpha\left(1-2c\right)}, \quad (5.90)$$

gdy $H_1 < z$. Ponieważ $2cg\left(1-2c\right)/\left(1-2c\right) \leq 2c/\left(1-2c\right) \leq 1$ dla $0 \leq c \leq 1/4$, więc dla $a = 0$, $0 \leq c \leq 1/4$ i $s = 3z/2$ mamy $H_1 < z$. W analogiczny sposób dostajemy wzór

$$H_2 = \frac{z}{2} + \frac{z}{2}\frac{2dg\left(1-2d\right)}{\alpha\left(1-2d\right)} < z. \quad (5.91)$$

Z (5.88) dla $a = b = 0$ przy $s = 3z/2$ otrzymujemy

$$H = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} g\left(1-(c+d)\right)\frac{(c+d)}{\alpha\left(1-(c+d)\right)} < z. \quad (5.92)$$

Z (5.90), (5.91), (5.92) i (5.89), warunek równoważny iteracyjności ma postać

$$\frac{1}{2}\left[g\left(1-2c\right)\frac{2c}{1-2c}+g\left(1-2d\right)\frac{2d}{1-2d}\right]=g\left(1-\left(c+d\right)\right)\frac{\left(c+d\right)}{1-\left(c+d\right)}$$

dla $0\leq c,d\leq 1/4$. Kładąc $x=1-2c$, $y=1-2d$ i $z\left(x\right)=g\left(x\right)\left(1/x-1\right)$, otrzymujemy równanie funkcyjne Jensena. Stąd z jest liniowa na $[1/2,1]$. Ponieważ $z\left(1\right)=0$ i $z\left(1/2\right)=\alpha/2$, więc $z\left(x\right)=-\alpha\left(x-1\right)$ dla $1/2\leq x\leq 1$ i pewnego $0<\alpha\leq 2$. Stąd $g\left(x\right)=\alpha x$ dla $1/2\leq x\leq 1$ i pewnego $0<\alpha\leq 1$. Ostatecznie $g\left(x\right)=\alpha x$ dla $0\leq x\leq 1$ i pewnego $0<\alpha\leq 1$. Z ciągłości g wynika, że $g\left(x\right)=x$ dla $x\in[0,1]$. Z (5.82) mamy zatem, że $h\left(x\right)=x$ dla $0\leq x\leq 1$. Ponieważ $h\left(1/2\right)=g\left(1/2\right)=1/2$, więc z (5.83) i (5.84) dostajemy $u\left(x\right)=x$ dla $x\in\mathbb{R}$.

Rozważmy teraz przypadek, gdy u_0 jest dana wzorami (5.78)-(5.79). Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $-u_0\left(-1\right)=e-1$. Z (5.77) wynika, że $\psi\left(1/2\right)=e\psi\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right)$. Wobec tego wzory (5.77)-(5.79) możemy zapisać w postaci

$$h\left(t\right)=g\left(1-t\right)\frac{t}{1-t}\frac{h\left(1/2\right)}{g\left(1/2\right)}\text{ dla }0\leq t<1, \tag{5.93}$$

$$u_0\left(x\right)=\left(1-e^{-x}\right)h\left(1/2\right)/g\left(1/2\right)\text{ dla }x\geq 0, \tag{5.94}$$

$$u_0\left(x\right)=1-e^{-x}\text{ dla }x\leq 0. \tag{5.95}$$

Przypomnijmy, że $u\left(x\right)=u_0\left(\beta x\right)$. Z (5.93)-(5.94) i (5.80) dla $u_0\left(H_1-z\right)\geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(1-2\left(a+c\right)\right)\left(1-e^{-\beta\left(H_1-z\right)}\right)+g\left(1/2-2a\right)\left(1-e^{-\beta H_1}-\left(1-e^{-\beta\left(H_1-z\right)}\right)\right) \\ &\quad +g\left(1-2\left(a+c\right)\right)\frac{2\left(a+c\right)}{1-2\left(a+c\right)}\left(1-e^{-\beta\left(H_1-s\right)}\right). \end{aligned}$$

Stąd

$$e^{\beta H_1}=\left(1-2\left(a+c\right)\right)\left(e^{\beta z}-\frac{g\left(1/2-2a\right)\left(e^{\beta z}-1\right)}{g\left(1-2\left(a+c\right)\right)}\right)+2\left(a+c\right)e^{\beta s},$$

o ile $H_1\geq z$. Gdy $H_2\geq z$, to wzór na $e^{\beta H_2}$ jest podobny do powyższego, przy czym a jest zastąpione przez b, zaś c przez d. Zatem z (5.50) dla $H\geq z$ mamy

$$e^{\beta H}=\left(1-\left(a+b+c+d\right)\right)\left(e^{\beta z}-\frac{g\left(1/2-\left(a+b\right)\right)\left(e^{\beta z}-1\right)}{g\left(1-\left(a+b+c+d\right)\right)}\right)+\left(a+b+c+d\right)e^{\beta s}.$$

Warunek iteracyjności dla $H_1<H_2$ możemy zapisać jako $0=g\left(1/2\right)u\left(H-H_1\right)+$

$h(1/2)\,u(H-H_2)$ (patrz wzór (5.49)). Z (5.49) mamy $H-H_1>0>H-H_2$, a więc z (5.94) i (5.95) przy $u(x)=u_0(\beta x)$ dostajemy

$$e^{\beta H}=\left(e^{\beta H_1}+e^{\beta H_2}\right)/2. \tag{5.96}$$

Identyczny warunek otrzymujemy dla $H_2\geq H_1$. Niech $a+c=1/4$, $0\leq a\leq 1/4$, $b+d=1/4$, $b\leq 1/4$. Nierówność $e^{H_1}\geq e^{z}$ dla $0\leq a\leq 1/4$ jest równoważna temu, że

$$e^{\beta H_1}=\frac{1}{2}\left(e^{\beta z}-\frac{g(1/2-2a)\left(e^{\beta z}-1\right)}{g(1/2)}\right)+\frac{1}{2}e^{\beta s}\geq e^{\beta z}$$

dla $0\leq a\leq 1/4$. Łatwo sprawdzić, że jest ona spełniona, gdy $e^{\beta s}\geq 2e^{\beta z}-1$. Ten sam warunek otrzymujemy, gdy $e^{\beta H_2}>e^{\beta z}$. Wobec tego równanie (5.96) jest równoważne temu, że $[g(1/2-2a)+g(1/2-2b)]/2=g(1/2-(a+b))$ dla $0\leq a,b\leq 1/4$. Stąd i z ciągłości g wynika, że $g(x)=\alpha x$ dla $0\leq x\leq 1/2$ i pewnego $0\leq\alpha\leq 2$. Aby udowodnić, że $g(x)=x$ dla $0\leq x\leq 1$, rozważmy przypadek, gdy $H_1<z$. Wstawiając (5.93)-(5.94) do (5.81) dla $H_1<z$ mamy

$$\begin{aligned}0 &= g(1/2-2a)\left(1-e^{-\beta H_1}\right)+g(1/2-2a)\frac{1/2+2a}{1/2-2a}\left(1-e^{-\beta(H_1-z)}\right)\\&\quad+g(1-2(a+c))\frac{2(a+c)}{1-2(a+c)}\left(1-e^{-\beta(H_1-s)}-1+e^{-\beta(H_1-z)}\right).\end{aligned}$$

Zatem

$$e^{\beta H_1}=\left(1/2-2a+(1/2+2a)e^{\beta z}\right)-g(1-2(a+c))\frac{2(a+c)}{1-2(a+c)}\frac{\left(e^{\beta z}-e^{\beta s}\right)(1/2-2a)}{g(1/2-2a)}.$$

Połóżmy $a=0$ i $0\leq c\leq 1/4$. Wtedy

$$e^{\beta H_1}=\left(1+e^{\beta z}\right)/2-g(1-2c)\,c\left(e^{\beta z}-e^{\beta s}\right)/\left[g(1/2)(1-2c)\right].$$

Z (5.93) mamy $h(2c)/h(1/2)=2cg(1-2c)/[g(1/2)(1-2c)]$, co oznacza, że $e^{\beta H_1}=\left(1+e^{\beta z}\right)/2+h(2c)\left(e^{\beta s}-e^{\beta z}\right)/(2h(1/2))$. Dla dowolnego $z>0$ połóżmy $e^{\beta s}=2e^{\beta z}-1>e^{\beta z}$. Wówczas nierówność $\left(1+e^{\beta z}\right)/2+h(2c)\left(e^{\beta s}-e^{\beta z}\right)/(2h(1/2))\leq e^{\beta z}$ jest spełniona dla wszystkich $0\leq c\leq 1/4$. Ponieważ dla $0\leq c,d\leq 1/4$ mamy

$$e^{\beta H_1}=\left(1+e^{\beta z}\right)/2+h(2c)\left(e^{\beta s}-e^{\beta z}\right)/(2h(1/2)),$$

$$e^{\beta H_2} = \left(1 + e^{\beta z}\right)/2 + h\,(2d)\left(e^{\beta s} - e^{\beta z}\right)/\left(2h\,(1/2)\right),$$

$$e^{\beta H} = \left(1 + e^{\beta z}\right)/2 + h\,(c+d)\left(e^{\beta s} - e^{\beta z}\right)/\left(2h\,(1/2)\right),$$

więc (5.96) możemy zapisać jako $h\,(c+d) = (h\,(2c) + h\,(2d))/2$ dla $0 \leq c, d \leq 1/4$. Stąd $h\,(x) = \gamma x$ dla $0 \leq x \leq 1/2$ i pewnego $0 \leq \gamma \leq 2$. Z (5.82) mamy

$$g\,(1-x) = h\,(x)\,g\,(1/2)\,(1-x)/\left(xh\,(1/2)\right) = \alpha\,(1-x)$$

dla $0 \leq x \leq 1/2$. Zatem $g\,(x) = \alpha x$ dla $1/2 \leq x \leq 1$ i pewnego $0 \leq \alpha \leq 1$, a więc ostatecznie $g\,(x) = \alpha x$ dla $0 \leq x \leq 1$ i pewnego $0 \leq \alpha \leq 1$. Z ciągłości g wynika, że $g\,(x) = x$ dla $0 \leq x \leq 1$. Z (5.82) mamy $h\,(x) = \gamma x$ dla $0 \leq x \leq 1$ i pewnego $0 \leq \gamma \leq 1$. Z ciągłości h wnioskujemy, że $h\,(x) = x$ dla $0 \leq x \leq 1$. Ponadto z (5.94)-(5.95) wynika, że $u_0\,(x) = 1 - e^{-x}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Stąd $u\,(x) = u_0\,(\beta x) = 1 - e^{-\beta x}$ dla pewnego $\beta > 0$ i wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Analogiczny dowód przeprowadzamy dla drugiego przypadku funkcji wykładniczej i otrzymujemy, że $u\,(x) = e^{cx} - 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i pewnego $c > 0$. ∎

Bibliografia

[1] Aase, K. K., Persson, S.-A. (1994) Pricing of unit-linked life insurance policies. Scandinavian Actuarial Journal, 26–52.

[2] Abdellaoui, M. (2002) A genuine rank-dependent generalization of the von Neumann–Morgenstern expected utility theorem. Econometrica 70, 717–736.

[3] Albrecht, P. (1992) Premium calculation without arbitrage? – A note on a contribution by G. Venter. ASTIN Bulletin 22, 247–254.

[4] Aliprantis, C. D., Border, K. C. (2007) Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide. Springer-Verlag, Berlin.

[5] Allais, M. (1953) Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique de postulats et axiomes de l'ecole americaine. Econometrica 21, 503–546.

[6] Al-Nowaihi, A., Bradley, I., Dhami, S. (2008) A note on the utility function under prospect theory. Economics Letters 99, 337-339.

[7] Arrow, K. J. (1971) Essays in the Theory of Risk-Bearing. North-Holland Pub. Co., Amsterdam.

[8] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) Coherent risk measures. Mathematical Finance 9, 207–225.

[9] Bacinello, A. R., Ortu, F. (1993) Pricing equity-linked life insurance with endogenous minimum guarantees. Insurance: Mathematics and Economics 12, 245–257.

[10] Baumol, W. J. (1963) An expected gain confidence limit criterion for portfolio selection. Management Science 10, 174-182.

[11] Bernard, C., Ghossoub, M. (2010) Static portfolio choice under Cumulative Prospect Theory. Mathematics and Financial Economics 2, 277-306.

[12] Bernoulli, D. (1738). Specimen theoriae novae de mensura sortis. Commentarii Academiae Scientarum Imperalis Petropolitanae 5, 175–192 (tłumaczenie: Sommer, L. (1954) Exposition of a new theory on the measurement of risk. Econometrica 22, 23–36).

[13] Beyer, D., Riedel, M. (1993) Remarks on the Swiss premium principle on positive risks. Insurance: Mathematics and Economics 13, 39–44.

[14] Borch, K. (1962) Equilibrium in a reinsurance market. Econometrica 30, 424-444.

[15] Borch, K. (1963) Recent developments in economic theory and their application to insurance. ASTIN Bulletin 2, 322–341.

[16] Borch, K. (1968) The Economics of Uncertainty. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[17] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J. (1997) Actuarial Mathematics. Second edition, Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

[18] Boyle, P. P., Schwartz, E. S. (1977) Equilibrium prices of guarantees under equity-linked contracts. Journal of Risk and Insurance 44, 639–660.

[19] Bühlmann, H. (1970) Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[20] Bühlmann, H. (1980) An economic premium principle. ASTIN Bulletin 11, 52–60.

[21] Bühlmann, H. (1984) The general economic premium principle. ASTIN Bulletin 14, 13–22.

[22] Chateauneuf, A., Cohen, M. (2000) Choquet expected utility model: a new approach to individual behavior under uncertainty and to social welfare. In: Grabisch, M., Mirofushi, T., Sugeno, M. (Eds.), Fuzzy Measure and Integral. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[23] Chateauneuf, A., Cohen, M., Meilijson, I. (1997) New tools to better model behavior under risk and uncertainty: an overview. Finance 18, 25–46.

[24] Choquet, G. (1954) Theory of capacities. Annales de l'institut Fourier 5, 131-295.

[25] De Giorgi, E., Hens, T. (2006) Making prospect theory fit for finance. Financial Markets and Portfolio Management 20, 339-360.

[26] De Giorgi, E., Hens, T., Rieger, M. O. (2009) Financial market equilibria with Cumulative Prospect Theory. Swiss Finance Institute Research Paper No. 07-21.

[27] De Vylder, F., Goovaerts, M. J. (1979) An invariance property of the Swiss premium calculation principle. M.V.S.V. 79, 105–120.

[28] Denneberg, D. (1990) Premium calculation: Why standard deviation should be replaced by absolute deviation. ASTIN Bulletin 20, 181–190.

[29] Denneberg, D. (1994) Lectures on Non-additive Measure and Integral. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[30] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R., Vyncke, D., (2002 a) The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. Insurance: Mathematics and Economics 31, 3–33.

[31] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R., Vyncke, D. (2002 b) The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications. Insurance: Mathematics and Economics 31, 133–161.

[32] Diecidue, E., Schmidt, U., Zank, H. (2009) Parametric weighting functions. Journal of Economic Theory 144, 1102-1118.

[33] Dowd, K., Blake, D. (2006) After VaR: The theory, estimation, and insurance applications of quantile-based risk measures. Journal of Risk and Insurance 73, 193-229.

[34] Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. Quarterly Journal of Economics 75, 643–669.

[35] Friedman, M., Savage, L. P. (1948) The utility analysis of choices involving risk. Journal of Political Economy 56, 279-304.

[36] Gerber, H. U. (1974 a) On additive premium calculation principles. ASTIN Bulletin 7, 215-222.

[37] Gerber, H. U. (1974 b) On iterative premium calculation principles. Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, 163-172.

[38] Gerber, H. U. (1979) An Introduction to Mathematical Risk Theory. Homewood, Philadelphia.

[39] Gerber, H. U. (1985) On additive principles of zero utility. Insurance: Mathematics and Economics 4, 249-251.

[40] Gerber, H. U., Pafumi, G. (1998) Utility functions: from risk theory to finance, including discussion. North American Actuarial Journal 2, 74–100.

[41] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (1994) Option pricing by Esscher transforms, with discussion. Transactions of the Society of Actuaries 46, 99–140.

[42] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (1996) Actuarial bridges to dynamic hedging and option pricing. Insurance: Mathematics and Economics 18, 183–218.

[43] Gilboa, I. (1987) Expected utility theory with purely subjective nonadditive probabilities. Journal of Mathematical Economics 16, 65–88.

[44] Gillen B. J., Markowitz H. M. (2010) A taxonomy of utility functions. Variations in Economic Analysis, Springer New York, 61-69.

[45] Goldstein, W. M., Einhorn, H. J. (1987) Expression theory and the preference reversal phenomenon. Psychological Review 94, 236-54.

[46] Goovaerts, M. J., De Vylder, F. (1979) A note on iterative premium calculation principles. ASTIN Bulletin 10, 326-329.

[47] Goovaerts, M. J., De Vylder, F., Haezendonck, J. (1984) Insurance Premiums: Theory and Applications. North-Holland, Amsterdam.

[48] Goovaerts, M.J., De Vylder, F., Martens, F., Hardy, R. (1980) An extension of an invariance property of Swiss premium calculation principle. ASTIN Bulletin 11, 145–153.

[49] Goovaerts, M. J., Kaas, R., Dhaene, J., Tang, Q. (2003) A unified approach to generate risk measures. ASTIN Bulletin 33, 173-191.

[50] Goovaerts, M. J., Kaas, R., Laeven, R. J. A. (2010a) A note on additive risk measures in rank-dependent utility. Insurance: Mathematics and Economics 47, 187-189.

[51] Goovaerts, M. J., Kaas, R., Laeven, R. J. A. (2010b) Decision principles derived from risk measures. Insurance: Mathematics and Economics 47, 294-302.

[52] Goovaerts, M. J., Kaas, R., Laeven, R. J. A., Tang, Q. (2004) A comonotonic image of independence for additive risk measures. Insurance: Mathematics and Economics 35, 581-594.

[53] Goovaerts, M. J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E., Bauwelinckx, T. (1990) Effective Actuarial Methods. Elsevier Science Publishers B. V., North Holland.

[54] Green, J. R., Jullien, B. (1988) Ordinal independence in nonlinear utility theory. Journal of Risk and Uncertainty 1, 355–387.

[55] Hardy, H. G., Littlewood, J. E., Pólya, G. (1952) Inequalities. Cambridge University Press.

[56] Heilmann, W. R. (1989) Decision theoretic foundations of credibility theory. Insurance: Mathematics and Economics 8, 77–95.

[57] Heilpern, S. (2002) Using Choquet integral in economics. Statistical Papers 43, 53–74.

[58] Heilpern, S. (2003) A rank-dependent generalization of zero utility principle. Insurance: Mathematics and Economics 33, 67-73.

[59] Hoppe, R. (1998) VaR and the unreal world. Risk 11, 45–50.

[60] Hürlimann, W. (1994) A note on experience rating, reinsurance and premium principles. Insurance: Mathematics and Economics 14, 197–204.

[61] Hürlimann, W. (1998) On stop-loss order and distortion pricing principles. ASTIN Bulletin 28, 119–134.

[62] Kaas, R., van Heerwaarden, A. E., Goovaerts, M. (1994) Ordering of Actuarial Risks. Amsterdam: Institute for Acturial Science and Econometrics, University of Amsterdam.

[63] Kahneman, D., Tversky, A. (1979) Prospect theory: An analysis of decisions under risk. Econometrica 47, 313-327.

[64] Kamps, U. (1998) On a class of premium principles including the Esscher principle. Scandinavian Actuarial Journal, 75–80.

[65] Kałuszka, M., Krzeszowiec, M. (2012 a) Mean-value principle under Cumulative Prospect Theory. ASTIN Bulletin 42, 103-122.

[66] Kałuszka, M., Krzeszowiec, M. (2012 b) Pricing insurance contracts under Cumulative Prospect Theory. Insurance: Mathematics and Economics 50, 159-166.

[67] Kałuszka, M., Krzeszowiec, M. (2013 a) An iterativity condition for the mean-value principle under Cumulative Prospect Theory. Praca przyjęta do ASTIN Bulletin.

[68] Kałuszka, M., Krzeszowiec, M. (2013 b) On iterative premium calculation principles under Cumulative Prospect Theory. Insurance: Mathematics and Economics 52, 435-440.

[69] Kaluszka, M., Okolewski, A. (2008) An extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract. Journal of Risk and Insurance 75, 275-288.

[70] Kołmogorow, A. I. (1930) Sur la notion de la moyenne. Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei 12, 388-391.

[71] Kőszegi, B., Rabin, M. (2007) Reference-dependent risk attitudes. American Economic Review 97, 1047-1073.

[72] Kuczma, M. (2009) An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Second edition, Edited by Attila Gilányi, Birkhäuser. Berlin.

[73] Landsman, Z., Sherris, M. (2001) Risk measures and insurance premium principles. Insurance: Mathematics and Economics 29, 103–115.

[74] Lax, P. D. (2008) A curious functional equation. Journal d'Analyse Mathematique 105, 383-390.

[75] Luan, C. (2001) Insurance premium calculations with anticipated utility theory. ASTIN Bulletin 31, 23-35.

[76] Markowitz, H. (1952) The utility of wealth. The Journal of Political Economy 60, 151-158.

[77] Martin, R. (2004). The St. Petersburg paradox. In Edward N. Zalta. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2004 ed.). Stanford, California: Stanford University.

[78] Moller, T. (2001) On transformations of actuarial valuation principles. Insurance: Mathematics and Economics 28, 281–303.

[79] Moore, K. S., Young, V. R. (2002) Pricing equity-linked pure endowments via the principle of equivalent utility. Working paper, Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

[80] Musiela, M., Zariphopoulou, T. (2002) Indifference prices and related measures. Technical report, The University of Texas at Austin.

[81] Nielsen, J. A., Sandmann, K. (1995) Equity-linked life insurance: a model with stochastic interest rates. Insurance: Mathematics and Economics 16, 225–253.

[82] Polyanin, A. D., Manzhirov, A. H. (2007) Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London.

[83] Pratt, J. W. (1964) Risk aversion in the small and in the large. Econometrica 32, 122-136.

[84] Prelec, D. (1998) The probability weighting function, Econometrica 66, 497-527.

[85] Puppe, C. (1991) Distorted Probabilities and Choice Under Risk. Springer, Berlin.

[86] Quiggin, J. (1982) A theory of anticipated utility. Journal of Economic Behavior and Organization 3, 323–343.

[87] Rabin, M. (2000) Risk aversion and expected utility theory: a calibration theorem. Econometrica 68, 1281-1292

[88] Rajwade, A. R., Bhandari, A. K. (2007) Surprises and Counterexamples in Real Funtion Theory. Hindustan Book Agency.

[89] Reich, A. (1984 a) Premium principles and translation invariance. Insurance: Mathematics and Economics 3, 57-66.

[90] Reich, A. (1984 b) Homogeneous premium calculation principles. ASTIN Bulletin 14, 123–134.

[91] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999) Stochastic Processes for Insurance and Finance. John Wiley & Sons, New York.

[92] Rothschild, M., Stiglitz, J. (1970) Increasing risk: I. A definition. Journal of Economic Theory 2, 225–243.

[93] Schmeidler, D. (1989) Subjective probability and expected utility without additivity. Econometrica 57, 571–587.

[94] Schmidt, U., Starmer, C., Sugden, R. (2008) Third-generation prospect theory. Journal of Risk and Uncertainty, 36, 203-223.

[95] Schmidt, U., Zank, H. (2007) Linear cumulative prospect theory with applications to portfolio selection and insurance demand. Decisions in Economics and Finance, 30, 1-18.

[96] Schweizer, M. (2001) From actuarial to financial valuation principles. Insurance: Mathematics and Economics 28, 31–47.

[97] Segal, U. (1989) Anticipated utility theory: a measure representation approach. Annals of Operations Research 19, 359–373.

[98] Sereda E.N., Bronshtein E.M., Rachev S.T., Fabozzi F. J., Wei Sun, Stoyanov S.V. (2010) Distortion risk measures in portfolio optimization. In Handbook of Portfolio Construction: Contemporary Applications of Markowitz Techniques. Edited by Guerard J.B., 649-673.

[99] Shaked, M., Shanthikumar, J. G. (2007) Stochastic orders. Springer, New York.

[100] Taleb, N. (1997) The world according to Nassim Taleb. Derivatives Strategy 2, 37–40.

[101] Teitelbaum, J. (2007) A unilateral accident model under ambiguity. Journal of Legal Studies 36, 431-477.

[102] Tsanakas, A. (2009) To split or not to split: capital allocation with convex risk measures. Insurance: Mathematics and Economics 44, 268–277.

[103] Tversky, A., Kahneman, D. (1992) Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty 5, 297–323.

[104] Van Heerwaarden, A. E. (1991) Ordering of Risks: Theory and Actuarial Applications. Thesis Publishers, Amsterdam.

[105] Van Heerwaarden, A. E., Kaas, R. (1992) The Dutch premium principle. Insurance: Mathematics and Economics 11, 129–133.

[106] Van der Hoek, J., Sherris, M. (2001) A class of non-expected utility risk measures and implications for asset allocation. Insurance: Mathematics and Economics 28, 69–82.

[107] Venter, G. G. (1991) Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage. ASTIN Bulletin 21, 223–230.

[108] Vitali, G. (1925) Sulla definizione di integraledelle funzionidi una variabile. Annali di Matematica Pura ed Applicata 4, 111-121. Tłumaczenie: Marinacci, M. (1997) On the definition of integral of functions of one variable. Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali 20, 159–168.

[109] von Neumann, J., Morgenstern, O. (1947) Theory of Games and Economic Behavior. Wydanie drugie. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[110] Wakker, P. P. (1994) Separating marginal utility and probabilistic risk aversion. Theory and Decision 36, 1–44.

[111] Wakker, P. P. (2010) Prospect Theory: For Risk and Ambiguity. Cambridge University Press.

[112] Wang, J. L. (2000) A note on Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle. ASTIN Bulletin 30, 13–17.

[113] Wang, S. (1995) Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. Insurance: Mathematics and Economics 17, 43–54.

[114] Wang, S. (1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. ASTIN Bulletin 26, 71–92.

[115] Wang, S., Young, V. R., Panjer, H. H. (1997) Axiomatic characterization of insurance prices. Insurance: Mathematics and Economics 21, 173-183.

[116] Wirch, J. L., Hardy, M. R. (1999) A synthesis of risk measures for capital adequacy. Insurance: Mathematics and Economics 25, 337-347

[117] Yaari, M. E. (1987) The dual theory of choice under risk. Econometrica 55, 95–116.

[118] Young, V. R. (1999) Discussion of Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle. ASTIN Bulletin 29, 191–195.

[119] Young, V. R. (2003) Equity-indexed life insurance: pricing and reserving using the principle of equivalent utility. North American Actuarial Journal 7, 68–86.

[120] Young, V. R., Zariphopoulou, T. (2002) Pricing dynamic insurance risks using the principle of equivalent utility. Scandinavian Actuarial Journal, 246–279.