**Instytut Matematyczny Polskiej
Akademii Nauk**

Mikołaj Krupski

Topologiczne i liniowe własności przestrzeni funkcji ciągłych

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Witolda Marciszewskiego

Warszawa 2014

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie

. . . .

data *podpis autora rozprawy*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów

. . . .

data *podpis promotora*

Spis treści

Wstęp

Przedmiotem niniejszej rozprawy są przestrzenie rzeczywistych funkcji ciągłych na przestrzeni Tichonowa. W przeważającej części (poza ostatnim rozdziałem) przestrzenie te będą wyposażone w topologię zbieżności punktowej i oznaczane przez $C_p(X)$, gdzie X jest pewną przestrzenią Tichonowa. Systematyczne badanie przestrzeni $C_p(X)$ zostało zapoczątkowane przez Archangielskiego w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku i szybko przyciągnęło uwagę innych wybitnych matematyków. Tak zaczęła rozwijać się teoria, dzisiaj znana pod nazwą *C_p-teorii.* Doczekała się ona kilku monografii (np. [4], [38], [50]) oraz licznych artykułów przeglądowych (np. [5], [6], [32]). Ukazują one zarówno bogactwo uzyskanych wyników jak i interesujących otwartych problemów. Mimo wielu udowodnionych rezultatów wciąż nie są znane odpowiedzi na bardzo podstawowe pytania dotyczące przestrzeni $C_p(X)$. Wspomnijmy tu o dwóch ważnych, ogólnych zagadnieniach, które poruszymy w tej rozprawie.

Pierwszym zagadnieniem, i wydaje się jednym z podstawowych, jest próba topologicznej (liniowej/jednostajnej) klasyfikacji przestrzeni $C_p(X)$. Jak dobrze wiadomo łatwo podać pełną klasyfikację przestrzeni $C_p(X)$ jako pierścieni topologicznych, tj. klasyfikację ze względu na homeomorfizmy będące jednocześnie algebraicznymi homomorfizmami pierścieni jakimi są przestrzenie funkcji ciągłych. Klasyfikacja ta jest szczególnie prosta, a dostarcza jej następujące, klasyczne twierdzenie Nagaty z roku 1949: *Przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są izomorficzne jako pierścienie topologiczne wtedy i tylko wtedy gdy przestrzenie X i Y są homeomorficzne.* Twierdzenie to stanowi dobry punkt wyjścia do dalszych rozważań polegających na osłabianiu związku między przestrzeniami $C_p(X)$ i $C_p(Y)$. Bardzo naturalna jest próba zbadania topologicznego podobieństwa przestrzeni X i Y przy założeniu, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo lub jednostajnie lub po prostu homeomorficzne. Wspomniane podobieństwo wyraża się przez topologiczne własności, które dzielą wówczas przestrzenie X i Y. Tego rodzaju rezultaty pomagają w topologicznej (liniowej/jednostajnej) klasyfikacji przestrzeni funkcyjnych. Powiemy, że topologiczna własność $\mathcal{P}$ jest *t-niezmiennikiem* jeśli przestrzeń Y ma własność $\mathcal{P}$, przy założeniu, że X ma $\mathcal{P}$ i przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są homeomorficzne. Niedawno O. Okunev udowodnił twierdzenie, z którego łatwo dowodzić o niektórych topologicznych własnościach, że są t-niezmiennikami (zob. [41]). W rozdziale 1 przedyskutujemy to twierdzenie. Pokażemy jak stosując pewien znany lemat wzmocnić wspomniane twierdzenie, odpowiadając tym samym na pytanie postawione przez O. Okuneva w [41]. Udowodniona przez nas wzmocniona wersja twierdzenia Okuneva pozwoli, dla przestrzeni metryzowalnych σ-zwartych, wyprowadzić nowy t-niezmiennik - własność C Havera (jest to własność związana z wymiarem przestrzeni topologicznej). Pozwoli także udowodnić znane wcześniej twierdzenia R. Cauty'ego i W. Marciszewskiego w nieco silniejszej formie. Wyniki zawarte w rozdziale 1 zostały opublikowane i można je znaleźć w artykule autora [25].

Drugim klasycznym zagadnieniem C_p-teorii poruszanym w tej rozprawie jest pytanie o istnienie słabszej topologii na przestrzeni $C_p(X)$ mającej dobre własności typu zwartości, np. zwartej, σ-zwartej, Lindelöfa. Zagadnienie to związane jest z problemem postawionym w "Księdze Szkockiej" przez S. Banacha (jako problem pierwszy), który pytał o istnienie słabszej, metryzowalnej, zwartej topologii na dowolnej ośrodkowej przestrzeni Banacha (zob. [36]). Twierdzącej odpowiedzi na pytanie Banacha udzielił Pytkeev w [46]. Ogólnie, jeśli dana klasa przestrzeni topologicznych nie ma pożądanej własności topologicznej (jak np. σ-zwartość), warto zastanowić się czy dla przestrzeni z rozważanej klasy, nie istnieje słabsza topologia mająca tę własność. Istnienie takiej topologii mogłoby ułatwić badanie rozpatrywanej klasy przestrzeni topologicznych. O przestrzeniach $C_p(X)$ wiadomo, że poza przypadkiem gdy X jest skończone, nie są σ-zwarte. Nie jest jednak jasne dla jakich X, przestrzeń $C_p(X)$ dopuszcza słabszą zwartą bądź σ-zwartą topologię. Próby opisania tego typu przestrzeni dotyczy problem postawiony przez Archangielskiego (por. [32, problem 5.1]). W roku 2000 Archangielski udowodnił, że dla każdej σ-zwartej metryzowalnej przestrzeni X, przestrzeń $C_p(X)$ dopuszcza słabszą metryzowalną, zwartą topologię (zob. [7]) (wynik ten został następnie uogólniony w [37] przez H. Michalewskiego na przestrzenie metryzowalne, analityczne). Postawił też pytanie czy udowodnione przez niego twierdzenie można uogólnić na przestrzenie metryzowalne, ośrodkowe, [7, problem 4] (byłoby to też uogólnienie rezultatu otrzymanego przez H. Michalewskiego). Negatywnej, niesprzecznej odpowiedzi na to pytanie udzielił W. Marciszewski w [33]. Zakładając, że minimalna moc dominującej rodziny funkcji $f : \omega \to \omega$ jest równa $2^{\aleph_0}$ (jest to dodatkowy aksjomat teorii mnogości, który wynika np. z Hipotezy Continuum), skonstruował podzbiór X prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taki, że przestrzeń $C_p(X)$ nie dopuszcza słabszej σ-zwartej topologii. Pytanie o istnienie tego typu przykładu w ZFC pozostawało otwarte. Celem rozdziału 2 jest udzielenie (w ZFC) negatywnej odpowiedzi na wspomniane wyżej pytanie Archangielskiego z [7]. Modyfikując konstrukcję W. Marciszewskiego będziemy w stanie wyeliminować dodatkowy aksjomat potrzebny w [33] i skonstruujemy podzbiór X prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taki, że $C_p(X)$ nie dopuszcza słabszej σ-zwartej topologii. Skonstruowany przez nas przykład dostarczy również negatywnej odpowiedzi na inne pytanie o możliwość istnienia słabszej σ-zwartej topologii na przestrzeni $C_p(X)$ w przypadku gdy $C_p(X)$ jest przestrzenią Hewitta (zob. [6, problem 37], [50, 4.10.1]). Wyniki tej części rozprawy pochodzą z artykułu autora [26], która ukaże się w Proc. Amer. Math. Soc.

Rozdział 3 niniejszej rozprawy poświęcony jest pewnemu porządkowi na rzeczywistych funkcjach ciągłych określonych na przestrzeni zwartej. Porządek ten wprowadzony został niedawno przez K.P. Harta, T. Kanię i T. Kochanka (zob. [23]). Za jego pomocą zdefiniować można klasę przestrzeni zwartych K takich, że w zbiorze funkcji ciągłych na K nie występują nieprzeliczalne łańcuchy w tym porządku (autorzy [23] nazywają tę klasę przestrzeniami o własności ♗). Naturalne jest pytanie o związek tej klasy kompaktów ze znanymi klasami przestrzeni zwartych takich jak kompakty Eberleina (tj. słabo zwarte podzbiory przestrzeni Banacha) czy kompakty Corsona (tj. zwarte podzbiory Σ-iloczynu prostych rzeczywistych). Autorzy [23] postawili pytanie czy do określonej przez nich klasy kompaktów należą wszystkie kompakty Eberleina lub ogólniej wszystkie przestrzenie zwarte K, dla których przestrzeń Banacha $C(K)$ rzeczywistych funkcji ciągłych na K jest Lindelöfa w słabej topologii [23, pytanie 3.9]. W rozdziale 3 udzielimy twierdzącej odpowiedzi na to pytanie. W istocie udowodnimy więcej: *Dla dowolnej przestrzeni zwartej K jeśli przestrzeń $C_p(K)$ jest Lindelöfa, to K należy do wspomnianej klasy ♗ przestrzeni zwartych.* Zatem również kompakty Corsona należą do wspomnianej klasy. Pokażemy też, że rozważana klasa przestrzeni zwartych jest istotnie większa od klasy kompaktów, dla których przestrzeń $C_p(K)$ jest Lindelöfa

Ostatni, czwarty rozdział nieco odbiega tematycznie od pozostałych. Zajmujemy się w nim co prawda także przestrzeniami rzeczywistych funkcji ciągłych (na przestrzeni zwartej), jednak przestrzenie te nie są wyposażone w topologię zbieżności punktowej, lecz w topologię normową. Centralnym zagadnieniem rozdziału 4 jest uniwersalność przestrzeni Banacha ℓ_∞/c_0: Dla danej klasy $\mathcal{K}$ przestrzeni zwartych pytamy kiedy $C(K)$ zanurza się izometrycznie bądź izomorficznie w przestrzeń ℓ_∞/c_0, dla każdego $K \in \mathcal{K}$. Problem uniwersalności przestrzeni ℓ_∞/c_0 w takim ujęciu jest klasycznym zagadnieniem, które bierze swój początek w twierdzeniu Parowiczenki: *Jeśli $\mathcal{K}$ jest klasą przestrzeni zwartych ciężaru mniejszego bądź równego $\aleph_1$, to dla każ-*

dego $K \in \mathcal{K}$, $C(K)$ zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0. W ostatnich latach uniwersalność przestrzeni ℓ_∞/c_0 rozważana była przez różnych autorów, np. [51], [15]. W szczególności S. Todorčević badał uniwersalne własności ℓ_∞/c_0 dla $\mathcal{K}$ będącego klasą kompaktów Corsona (zob. [51]) uzyskując interesujące związki tego zagadnienia z postacią σ-ciała podzbiorów n-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^n$ generowanego przez "uogólnione prostokąty" tj. zbiory postaci $A_1 \times \ldots \times A_n$ gdzie $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$. W rozdziale 4, modyfikując nieznacznie rozumowania Todorčevića, uogólnimy jego rezultaty na klasę $\mathcal{K}$ składającą się z kompaktów jednostajnie Eberleina (tj. słabo zwartych podzbiorów przestrzeni Hilberta). Pomimo, że główna idea dowodu jest identyczna jak w [51], uzyskane przez nas uogólnienie wydaje się być o tyle istotne, że prowadzi do (niesprzecznego z ZFC) przykładu przestrzeni zwartej K (będącej kompaktem jednostajnie Eberleina) takiej, że przestrzeń $C(K)$ zanurza się w przestrzeń ℓ_∞/c_0 izomorficznie, lecz nie zanurza się w tę przestrzeń izometrycznie. Wydaje się, że jest to pierwszy tego rodzaju przykład, odróżniający izomorficzne i izometryczne zanurzenia przestrzeni funkcyjnych w ℓ_∞/c_0. Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale zostały uzyskane przez autora wspólnie z Witoldem Marciszewskim i można je znaleźć w artykule [27].

Niniejsza rozprawa zbiera niektóre wyniki uzyskane przez autora w czasie jego studiów doktoranckich w Instytucie Matematycznym PAN. W jej skład weszły te rezultaty, które dotyczą przestrzeni funkcji ciągłych. Mimo to poszczególne rozdziały, których zawartość pokrótce opisaliśmy powyżej, są od siebie niezależne. Taki stan rzeczy spowodowany jest tym, że autor próbował, nie zawsze z sukcesem, mierzyć się z rozmaitymi problemami. Większa część zaprezentowanych w rozprawie wyników została już opublikowana, bądź ukaże się w druku - dotyczy to rozdziałów 1, 2 i 4. Publikacje odpowiadające tym rozdziałom dotyczą różnych zagadnień.

Kończąc wstęp, chciałbym złożyć serdeczne podziękowania mojemu promotorowi, profesorowi Witoldowi Marciszewskiemu, bez którego rozprawa w takim kształcie nie mogłaby powstać.

Oznaczenia

Rozdział ten służy ustaleniu terminologii i oznaczeń używanych w dalszej części rozprawy. Pojęcia, które tu nie zostaną zdefiniowane, albo pojawiają się lokalnie – tylko w obrębie jednego rozdziału – i tam są wyjaśnione, albo należą w opinii autora do zbioru standardowych pojęć matematycznych.

Głównym obiektem tej rozprawy są przestrzenie funkcji ciągłych. Dla przestrzeni topologicznej X (zwykle przestrzeni Tichonowa), przez $C(X)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji ciągłych z X w prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$ (wyposażoną w topologię Euklidesową). Na zbiorze $C(X)$ określić można topologię definiując bazę otoczeń każdego punku zbioru $C(X)$. Dla $f \in C(X)$ połóżmy mianowicie

$$O_X(f; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \text{ dla każdego } i \leqslant n\},$$

gdzie $x_1, \ldots, x_n \in X$, zaś ε jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Będziemy też pisać $O_X(f; A; \varepsilon)$, gdzie $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, mając na myśli zbiór $O_X(f; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$. Gdy $f \equiv 0$ (tj. f jest funkcją tożsamościowo równą 0) $O_X(A; \varepsilon)$ oznaczać będzie zbiór $O_X(f; A; \varepsilon)$. Jest jasne, że tak określone zbiory stanowią bazę lokalną w punkcie f pewnej topologii na $C(X)$. Topologię tę nazywamy topologią zbieżności punktowej, a zbiór $C(X)$ wyposażony w tę topologię oznaczamy przez $C_p(X)$. Zauważmy, że z definicji topologii zbieżności punktowej, przestrzeń $C_p(X)$ jest podprzestrzenią iloczynu $\mathbb{R}^X$.

Gdy K jest przestrzenią zwartą (przyjmujemy powszechną konwencję, że pisząc X mamy na myśli, poza nielicznymi wyjątkami, przestrzeń Tichonowa, zaś pisząc K mamy na myśli przestrzeń zwartą), na zbiorze $C(K)$ określić można topologię normową (zwaną też topologią zbieżności jednostajnej). Istotnie, wówczas dla $f \in C(K)$ wzór $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ zadaje normę (supremum) na $C(K)$. Przestrzeń z topologią wyznaczoną przez tę normę jest przestrzenią Banacha i oznaczać ją będziemy tak jak zbiór wszystkich funkcji ciągłych na K, to jest przez $C(K)$.

Dla $D \subseteq X$ określamy

$$C_D(X) = \{f \restriction D : f \in C_p(X)\} \subseteq C_p(D),$$

traktując przestrzeń $C_D(X)$ jako podprzestrzeń przestrzeni $C_p(D)$. Zanotujmy następujący fakt.

Stwierdzenie 0.0.1. *Niech $X \subsetneq Y$ będą przestrzeniami metryzowalnymi. Niech D będzie podzbiorem przestrzeni X gęstym w przestrzeni Y. Wtedy $C_D(X) \supsetneq C_D(Y)$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że $C_D(X) \supseteq C_D(Y)$. Rzeczywiście, niech $f \in C_D(Y)$. Z definicji przestrzeni $C_D(Y)$, istnieje $f' \in C_p(Y)$ takie, że $f' \upharpoonright D = f$. Ponieważ $X \subseteq Y$, to $f' \upharpoonright X \in C_p(X)$. A zatem $f = f' \upharpoonright D \in C_D(X)$. Pokażemy teraz, że $C_D(X) \neq C_D(Y)$. W tym celu ustalmy $y \in Y \setminus X$ (taki punkt musi istnieć bo $X \subsetneq Y$). Dla $x \in D$ połóżmy $f(x) = \frac{1}{d(x,y)}$, gdzie $d(\cdot,\cdot)$ jest metryką w przestrzeni Y. Mamy $f \in C_D(X) \setminus C_D(Y)$. □

Dla dowolnego zbioru X, przez $\mathcal{P}(X)$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X (zbiór potęgowy). *Siecią* przestrzeni topologicznej X nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że dla dowolnego $x \in X$ oraz U będącego otwartym otoczeniem punktu x, istnieje $N \in \mathcal{N}$ taki, że $x \in N \subseteq U$. Zauważmy, że sieć złożona ze zbiorów otwartych jest bazą przestrzeni X. *Ciężarem sieciowym* przestrzeni X nazywamy minimalną moc sieci w przestrzeni X. Przypomnijmy w tym miejscu następujące, nietrudne w dowodzie stwierdzenie (zob. [50, 1.2.172]).

Stwierdzenie 0.0.2. *Ciężar sieciowy przestrzeni X i ciężar sieciowy przestrzeni $C_p(X)$ są sobie równe.*

Minimalną liczbę kardynalną κ taką, że z każdego pokrycia otwartego przestrzeni X można wybrać podpokrycie mocy $\leqslant \kappa$ nazywamy *liczbą Lindelöfa* przestrzeni X. Jeśli liczba Lindelöfa przestrzeni X jest przeliczalna i X jest przestrzenią regularną, to przestrzeń X nazywamy *przestrzenią Lindelöfa.* Zanotujmy następujące, łatwe stwierdzenie (zob. [50, 1.2.156])

Stwierdzenie 0.0.3. *Liczba Lindelöfa przestrzeni X jest mniejsza bądź równa od ciężaru sieciowego przestrzeni X. W szczególności, każda przestrzeń regularna posiadająca przeliczalną sieć jest przestrzenią Lindelöfa.*

Przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią *Hewitta* jeśli X jest homeomorficzne z domkniętym podzbiorem iloczynu prostych $\mathbb{R}^\kappa$, dla pewnej liczby kardynalnej κ. Dobrze wiadomo, że każda przestrzeń Lindelöfa jest przestrzenią Hewitta (zob. [17, twierdzenie 3.11.7]).

Zdefiniujemy teraz niezbędne w dalszej części pojęcia dotyczące funkcji $f : X \to Y$ pomiędzy przestrzeniami topologicznymi X i Y. Przypomnijmy, że funkcja f jest borelowska, jeśli przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego w Y jest borelowskim podzbiorem przestrzeni X. *Warstwą* przekształcenia f nazywamy przeciwobraz przez f dowolnego punktu, tj. zbiór $f^{-1}(y)$, dla dowolnego $y \in Y$. Gdy $Y = \mathbb{R}$, przez $\operatorname{supp} f$ oznaczać będziemy nośnik funkcji f, tj. zbiór $\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$, gdzie kreska oznacza domknięcie.

Podzbiór $A \subseteq X$ przestrzeni topologicznej X nazywamy *lokalnie domkniętym*, jeśli $A = U \cap F$, gdzie U jest pewnym otwartym, zaś F pewnym domkniętym podzbiorem przestrzeni X. Powiemy, że x jest *punktem skupienia* zbioru A jeśli $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, gdzie kreska oznacza domknięcie.

Dla dowolnego zbioru A, przez $|A|$ oznaczać będziemy jego moc, zaś przez $[A]^{\leqslant n}$ zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A mocy $\leqslant n$. Przyjmiemy oznaczenie $\mathrm{Fin}(A)$ na rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru A.

Moc zbioru liczb rzeczywistych, tj. kontinuum oznaczać będziemy przez $\mathfrak{c}$. Przez $\mathbb{N}^+$ oznaczać będziemy zbiór dodatnich liczb naturalnych. Dla $f, g \in \omega^\omega$ określamy następujący porządek: $f \leqslant^* g$, jeśli zbiór $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ jest skończony. Powiemy, że zbiór $A \subseteq \omega^\omega$ *dominuje* jeśli dla dowolnego $f \in \omega^\omega$, istnieje $g \in A$ takie, że $f \leqslant^* g$. Możemy teraz określić następującą liczbę kardynalną $\mathfrak{d}$ jako $\mathfrak{d} = \min\{|A| : A \subseteq \omega^\omega,\ A \text{ dominuje}\}$. Oczywiście $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$. Dokładna wartość liczby $\mathfrak{d}$ zależy od teorii mnogości. W szczególności zdanie $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ jest niezależne od ZFC.

Na koniec tego rozdziału, przypomnijmy definicje klasycznych klas przestrzeni zwartych występujących w tej rozprawie. Powiemy, że przestrzeń zwarta K jest *kompaktem Corsona* jeśli jest homeomorficzna z podzbiorem Σ-iloczynu prostych, tj. podzbiorem przestrzeni $\{x \in \mathbb{R}^\Gamma : |\{\gamma \in \Gamma : x(\gamma) \neq 0\}| \leqslant \aleph_0\}$, dla pewnego zbioru indeksów Γ. Przestrzeń zwartą K nazywamy *kompaktem Eberleina* jeśli jest homeomorficzna ze słabo zwartym podzbiorem pewnej przestrzeni Banacha. Równoważnie, przestrzeń zwarta K jest kompaktem Eberleina jeśli jest homeomorficzna z podzbiorem przestrzeni $c_0(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : \forall \varepsilon > 0 \quad |\{\gamma \in \Gamma : |x(\gamma)| \geqslant \varepsilon\}| < \aleph_0\}$, dla pewnego zbioru indeksów Γ. Przestrzeń zwartą K nazywamy *kompaktem jednostajnie Eberleina* jeśli jest homeomorficzna ze słabo zwartym podzbiorem przestrzeni Hilberta $\ell_2(\Gamma)$, dla pewnego Γ. Równoważnie, przestrzeń zwarta K jest kompaktem jednostajnie Eberleina jeśli jest homeomorficzna z podzbiorem przestrzeni $\{x \in \mathbb{R}^\Gamma : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |\{\gamma \in \Gamma : x(\gamma) \geqslant \varepsilon\}| < N(\varepsilon)\} \subseteq c_0(\Gamma)$.

Z powyższych definicji wynika natychmiast, że każdy kompakt jednostajnie Eberleina jest kompaktem Eberleina oraz, że każdy kompakt Eberleina jest kompaktem Corsona.

Rozdział 1

Uwagi na temat relacji t-równoważności

Przypomnijmy, że przestrzenie X i Y są *t-równoważne*, jeśli ich przestrzenie funkcyjne $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są homeomorficzne. Ważnym zagadnieniem C_p-teorii jest szukanie tak zwanych *t-niezmienników* tj. własności topologicznych zachowywanych przez relację t-równoważności. Jest to o tyle istotnie, że służy rozróżnianiu przestrzeni funkcji ciągłych, a tym samym umożliwia klasyfikację topologiczną takich przestrzeni. Istotnie, zauważmy, że jeśli topologiczna własność $\mathcal{P}$ jest t-niezmiennikiem, przestrzeń X ma własność $\mathcal{P}$, zaś przestrzeń Y tej własności nie ma, to przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ nie mogą być homeomorficzne. O t-niezmienniku myślimy więc jako o przeszkodzie dla istnienia homeomorfizmu pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi.

Znanych jest wiele t-niezmienników, np. moc, ośrodkowość, ciężar sieciowy, σ-zwartość są t-niezmiennikami. Wiadomo też, że niektóre topologiczne własności t-niezmiennikami nie są, np. zwartość czy metryzowalność (zob. [3]). Jednym z ciekawszych pytań dotyczących relacji t-równoważności jest pytanie czy wymiar pokryciowy dim jest t-niezmiennikiem (zob. [5, problem 20 (1045)] lub [32, problem 2.9]). Związki relacji t-równoważności z wymiarem przedyskutujemy w paragrafach 1.2 i 1.3 tego rozdziału.

Niedawno O. Okunev w udowodnił następujące, interesujące twierdzenie, z którego otrzymał nowe t-niezmienniki (zob. [41, twierdzenie 1.1])

Twierdzenie 1.0.4. *(Okunev) Załóżmy, że przestrzeń $C_p(Y)$ jest obrazem przestrzeni $C_p(X)$ przez odwzorowanie ciągłe i otwarte. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ istnieją: przestrzeń Z_n, lokalnie domknięta*[1] *podprzestrzeń B_n przestrzeni Z_n oraz lokalnie domknięta podprzestrzeń Y_n przestrzeni Y, takie że Z_n odwzorowuje się na domknięty podzbiór produktu X^n przez odwzorowanie*

[1] Pojęcie to zdefiniowaliśmy w rozdziale poświęconym oznaczeniom.

doskonałe o warstwach skończonych, Y_n jest obrazem B_n przez odwzorowanie doskonałe oraz $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \mathbb{N}^+\}$.

W sformułowaniu powyższego twierdzenia w pracy [41], zamiast ciągłej otwartej surjekcji pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi występuje homeomorfizm jednak, jak zostało zauważone w [41, uwagi kończące pierwszy paragraf], dokładna analiza dowodu pozwala na osłabienie założeń do postaci przez nas zaprezentowanej.

W tym rozdziale, wykorzystując pewien lemat z pracy [31], wzmocnimy wspomniane wyżej twierdzenie Okuneva odpowiadając tym samym na pytanie 1.9 z [41]. Następnie, ze wzmocnionej wersji twierdzenia 1.0.4 wyprowadzimy nowe t-niezmienniki związane z wymiarem. Podamy też inne dowody twierdzeń Cauty'ego z [16] i Marciszewskiego z [31] w nieco ogólniejszej formie. Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale można znaleźć w artykule autora [25].

1.1 Twierdzenie Okuneva

W tym paragrafie odpowiemy na pytanie 1.9 zadane przez Okuneva w [41] dowodząc, że w sformułowaniu Twierdzenia 1.0.4 możemy dodatkowo żądać, że dla każdego n, przestrzeń Y_n jest obrazem B_n przez odwzorowanie doskonałe o skończonych warstwach. Aby to zrobić przedyskutujemy krótko dowód Okuneva z [41].

Prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$ będziemy traktować jako podprzestrzeń jej dwupunktowego uzwarcenia $I = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dla funkcji ciągłej $f : Z \to \mathbb{R}$, przez $\widetilde{f} : \beta Z \to I$ będziemy oznaczać ciągłe przedłużenie f na uzwarcenie Čecha-Stone'a przestrzeni Z. Dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$, $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in (\beta Z)^n$ oraz $\varepsilon > 0$ kładziemy

$$O'_Z(\overline{z}; \varepsilon) = O'_Z(z_1, \ldots, z_n; \varepsilon) = \{f \in C_p(Z) : |\widetilde{f}(z_1)| < \varepsilon, \ldots, |\widetilde{f}(z_n)| < \varepsilon\}.$$

Podobnie, dla każdego skończonego podzbioru $A \in \mathrm{Fin}(Z)$ oraz $\varepsilon > 0$ kładziemy

$$O_Z(A; \varepsilon) = \{f \in C_p(Z) : \forall z \in A \ \ |f(z)| < \varepsilon\}.$$

Dla punktu $z \in \beta Z$ połóżmy

$$\overline{O'}_Z(z; \varepsilon) = \{f \in C_p(Z) : |\widetilde{f}(z)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $z_1 \ldots, z_n, z \in Z$ mamy

$$O'_Z(z_1, \ldots, z_n; \varepsilon) = O_Z(z_1, \ldots, z_n; \varepsilon),$$

$$\overline{O'}_Z(z;\varepsilon) = \overline{O}_Z(z;\varepsilon) = \{f \in C_p(Z) : |f(z)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Niech $\Phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ będzie ciągłą otwartą surjekcją. Ponieważ przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są jednorodne, bez straty ogólności możemy założyć, że Φ posyła funkcję stale równą zero (na X) w funkcję stale równą zero (na Y). Dla każdej pary liczb naturalnych $(m,n) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ określmy następujący podzbiór produktu $X^n \times Y$:

$$\begin{aligned} Z_{m,n} &= \{(\overline{x}, y) \in X^n \times Y : \Phi(O'_X(\overline{x}; \tfrac{1}{m})) \subseteq \overline{O'}_Y(y;1)\} = \\ &= \{(\overline{x}, y) \in X^n \times Y : \Phi(O_X(\overline{x}; \tfrac{1}{m})) \subseteq \overline{O}_Y(y;1)\}. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $\pi_X : X^n \times \beta Y \to X^n$ rzutowanie produktu $X^n \times \beta Y$ na X^n i niech

$$p_{m,n} = \pi_X \restriction Z_{m,n} : Z_{m,n} \to X^n$$

będzie obcięciem tego rzutowania do zbioru $Z_{m,n}$. Podobnie, przez $\pi_{\beta Y}$: $(\beta X)^n \times \beta Y \to \beta Y$ oznaczamy rzutowanie produktu $(\beta X)^n \times \beta Y$ na oś βY i przez

$$A_{m,n} = \pi_{\beta Y}(Z_{m,n}).$$

oznaczamy obraz zbioru $Z_{m,n}$ przez to rzutowanie. Niech $S_{m,n}$ będzie domknięciem zbioru $Z_{m,n}$ w przestrzeni $(\beta X)^n \times \beta Y$. Dla każdej liczby naturalnej $m \in \mathbb{N}^+$ połóżmy $Y_{m,1} = A_{m,1}$ i dla każdego $n > 1$, $Y_{m,n} = A_{m,n} \setminus A_{m,n-1}$. Niech wreszcie $B_{m,n} = S_{m,n} \cap \pi_{\beta Y}^{-1}(Y_{m,n})$, zaś

$$r_{m,n} = \pi_{\beta Y} \restriction B_{m,n} : B_{m,n} \to Y_{m,n}$$

niech oznacza obcięcie rzutowania $\pi_{\beta Y}$ do zbioru $B_{m,n}$.

Zdefiniowane obiekty mają następujące własności (zob. [41]), z których wynika Twierdzenie 1.0.4:

(0) zbiór $Z_{m,n}$ jest domkniętym podzbiorem $X^n \times \beta Y$;

(1) odwzorowanie $p_{m,n}$ jest doskonałe i przekształca zbiór $Z_{m,n}$ na domknięty podzbiór X^n;

(2) odwzorowanie $p_{m,n}$ ma warstwy skończone;

(3) zbiór $A_{m,n}$ jest domknięty, z zatem $Y_{m,n}$ jest lokalnie domknięty;

(4) $Y = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}^+} Y_{m,n}$;

(5) zbiór $B_{m,n}$ jest lokalnie domknięty w $Z_{m,n}$;

(6) odwzorowanie $r_{m,n}$ jest doskonałą surjekcją;

Do udowodnienia zapowiadanego wzmocnienia Twierdzenia 1.0.4 będziemy potrzebować następującej wersji Δ-lematu, której łatwy dowód podamy dla wygody czytelnika.

Stwierdzenie 1.1.1. *Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym. Niech $n \in \mathbb{N}^+$ i niech $\mathcal{A} \subseteq [X]^{\leqslant n}$ będzie nieskończoną rodziną podzbiorów X mocy $\leqslant n$. Wtedy istnieje $A_0 \subseteq X$ takie, że $|A_0| < n$ oraz ciąg $A_1, A_2, \ldots$ składający się z różnych elementów rodziny $\mathcal{A}$ taki, że dla różnych $i, j \geqslant 1$ mamy $A_i \cap A_j = A_0$.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem $n \geqslant 1$. Dla $n = 1$ wystarczy położyć $A_0 = \emptyset$ i teza jest oczywista. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla $n \in \mathbb{N}^+$. Niech $\mathcal{A} \subseteq [X]^{\leqslant n+1}$. Rozważmy następujące dwa przypadki:

Przypadek 1: Istnieje $x \in X$, który należy do nieskończenie wielu elementów rodziny $\mathcal{A}$. Czyli istnieje ciąg $B_1, B_2, \ldots$ składający się z różnych elementów rodziny $\mathcal{A}$, taki że $x \in B_j$ dla każdego $j \geqslant 1$. Stosujemy założenie indukcyjne do rodziny $\mathcal{B} = \{B_j \setminus \{x\} : j \geqslant 1\}$, otrzymując zbiór $B_0 \subseteq X$ oraz ciąg $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots$, taki że dla $k \neq l$ mamy $B_{j_k} \cap B_{j_l} = B_0$. Jak łatwo zauważyć aby otrzymać tezę wystarczy przyjąć $A_0 = B_0 \cup \{x\}$, $A_i = B_{j_i} \cup \{x\}$.

Przypadek 2: Załóżmy, że taki x jak w przypadku pierwszym nie istnieje. Połóżmy $A_0 = \emptyset$ i indukcyjnie skonstruujmy ciąg $A_1, A_2, \ldots$ parami rozłacznych elementów $\mathcal{A}$. Niech $A_1 \in \mathcal{A}$ będzie dowolny. Załóżmy, że skonstruowaliśmy parami rozłączne zbiory A_i dla $i < k$. Chcemy skonstruować A_k taki, że $A_k \cap A_i = \emptyset$ dla $i < k$. Aby to zrobić rozważmy zbiór $A = \bigcup_{i<k} A_i$. Zbiór ten jest skończony, a ponieważ przypadek 1 nie zachodzi, zaś rodzina $\mathcal{A}$ jest nieskończona, możemy wybrać $A_k \in \mathcal{A}$ taki, że $A \cap A_k = \emptyset$, co kończy indukcyjną konstrukcję. □

Możemy teraz udowodnić następujące wzmocnienie twierdzenia 1.0.4 zapowiadana na początku rozdziału.

Twierdzenie 1.1.2. *Załóżmy, że $\Phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ jest ciągłą otwartą surjekcją. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ istnieją: przestrzeń Z_n, lokalnie domknięta podprzestrzeń B_n przestrzeni Z_n oraz lokalnie domknięta podprzestrzeń Y_n przestrzeni Y takie, że Z_n odwzorowuje się na domknięty podzbiór produktu X^n przez odwzorowanie doskonałe o warstwach skończonych, Y_n jest obrazem B_n przez odwzorowanie doskonałe* ***o skończonych warstwach*** *oraz $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \mathbb{N}^+\}$.*

Dowód. Ponieważ, jak udowodnił Okunev, z istnienia ciągłej otwartej surjekcji pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi wynikają warunki (0)–(6) powyżej, to dla dowodu twierdzenia wystarczy udowodnić

(7) odwzorowanie $r_{m,n}$ ma skończone warstwy.

Połóżmy

$$Z'_{m,n} = \{(A, y) \in \mathrm{Fin}(X) \times Y : \ |A| \leqslant n \text{ oraz } \Phi(O_X(A; \tfrac{1}{m})) \subseteq \overline{O}_Y(y; 1)\}.$$

Naturalne odwzorowanie $h : Z_{m,n} \to Z'_{m,n}$ określone jako

$$h((x_1, \ldots, x_n), y) = (\{x_1, \ldots, x_n\}, y),$$

ma skończone warstwy, a zatem jeśli dla ustalonego $y \in Y$ zbiór $\{A \in \mathrm{Fin}(X) : \ (A, y) \in Z'_{m,n}\}$ jest skończony, to zbiór $\{\overline{x} \in X^n : \ (\overline{x}, y) \in Z_{m,n}\}$ też jest skończony. Aby zakończyć dowód wystarczy więc udowodnić następujące, znane wcześniej stwierdzenie (por. [31, lemat 3.4]).

Stwierdzenie. Dla dowolnego $y \in Y_{m,n}$ zbiór $\{A \in \mathrm{Fin}(X) : \ (A, y) \in Z'_{m,n}\}$ jest skończony.

Dowód. Załóżmy przeciwnie. Wtedy na mocy stwierdzenia 1.1.1, istnieją $A_0 \in \mathrm{Fin}(X)$ oraz ciąg $A_1, A_2, \ldots$ skończonych podzbiorów X takie, że:

(a) $|A_0| < n$,

(b) $A_i \cap A_j = A_0$, dla $i \neq j$,

(c) $(A_i, y) \in Z'_{m,n}$ dla każdego $i \geqslant 1$.

Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $(A_0, y) \in Z'_{m,n}$. Istotnie, wówczas jeśli $n > 1$, to $(A_0, y) \in Z'_{m,n-1}$ (bo $|A_0| < n$), a więc $y \in A_{m,n-1}$ co daje sprzeczność z założeniem $y \in Y_{m,n} = A_{m,n} \setminus A_{m,n-1}$ (dla $n > 1$). Jeśli $n = 1$, to $A_0 = \emptyset$ i $(A_0, y) \notin Z'_{m,n}$, bo Φ jest surjekcją.

Niech $f \in O_X(A_0; \frac{1}{m})$. Musimy pokazać, że $|\Phi(f)(y)| \leqslant 1$. Załóżmy przeciwnie. Zbiór $\Phi^{-1}(\{\varphi \in C_p(Y) : |\varphi(y)| > 1\})$ jest wówczas otwartym otoczeniem funkcji f. Zatem istnieje skończony zbiór $B \in \mathrm{Fin}(X)$ oraz liczba naturalna $k \in \mathbb{N}^+$ takie, że dla dowolnego $g \in C_p(X)$ jeśli $(f - g) \in O_X(B; \frac{1}{k})$, to $|\Phi(g)(y)| > 1$.

Dla $i \geqslant 1$ zbiory $A_i \setminus A_0$ są parami rozłączne. Istnieje zatem $i \geqslant 1$ takie, że $B \cap (A_i \setminus A_0) = \emptyset$. Niech $g \in C_p(X)$ będzie funkcją spełniającą

$$g \restriction (A_0 \cup B) = f \restriction (A_0 \cup B) \text{ oraz } g \restriction (A_i \setminus A_0) \equiv 0.$$

Wtedy $g \in O_X(A_i; \frac{1}{m})$ czyli $|\Phi(g)(y)| \leqslant 1$. Z drugiej strony $(f - g) \in O_X(B; \frac{1}{k})$ czyli $\Phi(g)(y) > 1$, sprzeczność.

$\Diamond$

Dla $y \in Y_{m,n}$ mamy $r_{m,n}^{-1}(y) \subseteq \{\overline{x} \in X^n : (\overline{x}, y) \in Z_{m,n}\}$. Ostatni zbiór jest, jak udowodniliśmy, skończony. A zatem odwzorowanie $r_{m,n}$ ma skończone warstwy. □

Uwaga. Przypomnijmy, że przestrzeń nazywamy *κ-dyskretną* (*σ-dyskretną*) jeśli można ją przedstawić jako sumę mnogościową co najwyżej κ wielu (przeliczalnie wielu) dyskretnych podprzestrzeni. O. Okunev postawił pytanie czy σ-dyskretność jest t-niezmiennikiem [41, Pytanie 2.9]. Pokazał również jak to pytanie zredukować do następującego: *Czy obraz przestrzeni σ-dyskretnej przez odwzorowanie doskonałe jest przestrzenią σ-dyskretną?* (redukcja ta polega na bezpośrednim zastosowaniu twierdzenie 1.0.4). Odpowiedź na to pytanie jest jednak znana (zob. [14], [22]). G. Gruenhage udowodnił nawet silniejszy rezultat: Dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ, obraz przestrzeni κ-dyskretnej przez odwzorowanie doskonałe jest przestrzenią κ-dyskretną. Ponieważ redukcja dokonana przez Okuneva działa również dla dowolnej liczby kardynalnej κ, otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1.3. *Jeśli istnieje ciągła otwarta surjekcja z przestrzeni $C_p(X)$ na przestrzeń $C_p(Y)$ oraz X jest κ-dyskretne, to Y też jest κ-dyskretne.*

1.2 Własność C

Z Twierdzenia 1.1.2 wywnioskujemy kilka nowych obserwacji dotyczących zachowania się wymiaru względem relacji t-równoważności. Główną motywacją tych rozważań jest następujący problem wspomniany we wstępie tego rozdziału (zob. np. [5, Problem 20 (1045)] lub [32, Problem 2.9]).

Problem 1.2.1. *(Archangielski) Załóżmy, że X i Y są t-równoważne. Czy* $\dim X = \dim Y$*?*

Wiadomo, że gdy zażądamy żeby przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ były *liniowo* lub *jednostajnie* homeomorficzne wówczas wymiar pokryciowy przestrzeni X i Y jest taki sam (zob. [32]). Problem 1.2.1 jest o tyle ważny, że jego pozytywne rozstrzygnięcie pozwoliłoby na rozróżnienie takich podstawowych przestrzeni jak $C_p(2^\omega)$, $C_p([0,1])$, $C_p([0,1]^2)$, o których wciąż nie wiadomo czy są homeomorficzne. Warto nadmienić, że negatywna odpowiedź na problem 1.2.1 byłaby równie interesująca, a pozwoliłaby stwierdzić, że homeomorfizmy i homeomorfizmy jednostajne pomiędzy przestrzeniami funkcji ciągłych na kompaktach są różne (por. [6, problem 1]).

Przypomnijmy następujące dwie definicje (zob. [18] i [19]).

Definicja 1.2.2. *Przestrzeń normalną X nazywamy C-przestrzenią (lub mówimy, że X ma własność C) jeśli dla dowolnego ciągu jej otwartych pokryć $(\mathcal{U}_i)_{i\in\omega}$, istnieje ciąg $\mathcal{V}_i$ rodzin parami rozłącznych zbiorów otwartych takich, że $\mathcal{V}_i$ jest wpisane w $\mathcal{U}_i$ oraz $\bigcup_{i\in\omega}\mathcal{V}_i$ jest pokryciem przestrzeni X.*

Definicja 1.2.3. *Przestrzeń normalną X nazywamy k-C-przestrzenią (lub mówimy, że X ma własność k-C), gdzie k jest liczbą naturalną $\geqslant 2$, jeśli dla dowolnego ciągu jej co najwyżej k-elementowych otwartych pokryć $(\mathcal{U}_i)_{i\in\omega}$, istnieje ciąg $(\mathcal{V}_i)_{i\in\omega}$ rodzin parami rozłącznych zbiorów otwartych takich, że $\mathcal{V}_i$ jest wpisane w $\mathcal{U}_i$ oraz $\bigcup_{i\in\omega}\mathcal{V}_i$ jest pokryciem przestrzeni X.*

Zauważmy, że powyższe definicje różnią się tym, że w pierwszej dopuszczamy dowolne przeliczalne ciągi pokryć, w drugiej zaś, tylko ciągi pokryć co najwyżej k wieloma zbiorami otwartymi.

Przypomnijmy też definicję przestrzeni słabo nieskończenie wymiarowej

Definicja 1.2.4. *Przestrzeń normalną X nazywamy słabo nieskończenie wymiarową jeśli dla dowolnego ciągu $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots$ składającego się z par rozłącznych podzbiorów domkniętych przestrzeni X, istnieją domknięte w X zbiory $L_1, L_2, \ldots$ takie, że L_i jest przegródką pomiędzy A_i i B_i oraz $\bigcap_i L_i = \emptyset$.*

Przestrzenie, które nie są słabo nieskończenie wymiarowe określamy mianem silnie nieskończenie wymiarowych. Dobrze wiadomo, że przestrzeń normalna jest słabo nieskończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest 2-C-przestrzenią (zob. [19]). Bezpośrednio z definicji wynikają następujące inkluzje:

$$\text{słabo nieskończenie wymiarowe} = 2\text{-}C \supseteq 3\text{-}C \supseteq \ldots \supseteq C\text{-przestrzenie}$$

Nie wiadomo jednak czy powyższe inkluzje są ścisłe.

R. Cauty udowodnił w [16] następujące twierdzenie dotyczące zachowania przestrzeni słabo nieskończenie wymiarowych względem relacji t-równoważności.

Twierdzenie 1.2.5. *(Cauty) Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi zwartymi. Niech $C_p(Y)$ będzie obrazem $C_p(X)$ przez odwzorowanie ciągłe i otwarte. Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ przestrzeń X^n jest słabo nieskończenie wymiarowa, to dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ przestrzeń Y^n też jest słabo nieskończenie wymiarowa.*

Wykorzystując twierdzenie 1.1.2 udowodnimy częściowe uogólnienie powyższego twierdzenia Cauty'ego na k-C-przestrzenie. W dowodzie potrzebny nam będzie następujący lemat, będący modyfikacją [45, twierdzenie 4.1].

Lemat 1.2.6. *Przypuśćmy, że K i L są przestrzeniami metryzowalnymi zwartymi. Niech $f : K \to L$ będzie ciągłą surjekcją o przeliczalnych warstwach. Jeśli L jest k-C-przestrzenią, to K też jest k-C-przestrzenią.*

Dowód. Z dowodu twierdzenia 4.1 w [45] wynika, że wystarczy sprawdzić dopuszczalność klasy σ-zwartych metryzowalnych k-C-przestrzeni, to jest wystarczy sprawdzić, że spełnione są następujące warunki:

(i) jeśli X jest k-C-przestrzenią oraz Y jest homeomorficzna z domkniętą podprzestrzenią przestrzeni X, to Y jest k-C-przestrzenią;

(ii) metryzowalna suma przeliczalna k-C-przestrzeni jest k-C-przestrzenią;

(iii) jeśli $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem doskonałym, Y jest zerowymiarowa i wszystkie warstwy $f^{-1}(y)$ są k-C-przestrzeniami, to X jest k-C-przestrzenią;

(iv) jeśli $A \subseteq X$, A jest k-C-przestrzenią i wszystkie domknięte podzbiory X rozłączne z A są k-C-przestrzeniami, to X jest k-C-przestrzenią.

Warunek (i) to [19, stwierdzenie 2.13]. warunek (ii) to [19, twierdzenie 2.16]. Warunek (iii) to [19, twierdzenie 5.2]. Warunek (iv) to [20, lemat 2] (lemat ten dotyczy co prawda C-przestrzeni, jednak jego dowód pracuje bez zmian również dla k-C-przestrzeni). □

Twierdzenie 1.2.7. *Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi σ-zwartymi. Niech $C_p(Y)$ będzie obrazem $C_p(X)$ przez odwzorowanie ciągłe i otwarte. Ustalmy liczbę naturalną $k \geqslant 2$. Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ przestrzeń X^n jest k-C-przestrzenią, to Y również jest k-C-przestrzenią.*

Dowód. Wykorzystamy twierdzenie 1.1.2 w następujący sposób. Niech Y_n, Z_n, B_n będą takie jak w sformułowaniu twierdzenia 1.1.2. Przestrzeń $Z_n \subseteq X^n \times Y$ jest metryzowalna i σ-zwarta. Istotnie, jak dobrze wiadomo przeciwobraz zbioru zwartego przez odwzorowanie doskonałe jest zwarty (zob. [50, S.259, fakt 2]), a zatem σ-zwartość przestrzeni X pociąga σ-zwartość przestrzeni Z_n. Niech $Z_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, gdzie K_m jest zwarta.

Ponieważ Z_n jest przeciwobrazem domkniętej podprzestrzeni X^n przez odwzorowanie o skończonych warstwach, zaś domknięta podprzestrzeń metryzowalnej k-C-przestrzeni jest k-C-przestrzenią (por. [19, 1.15 i 2.19]) to, dla każdego $m \geqslant 1$, K_m jest k-C-przestrzenią na mocy lematu 1.2.6. Ponieważ przeliczalna suma domkniętych k-C-podprzestrzeni jest k-C-przestrzenią (zob. [19, 2.16]) to Z_n jest k-C-przestrzenią, a zatem także B_n nią jest (jako podprzestrzeń typu F_σ metryzowalnej k-C-przestrzeni [19, 1.15 i 2.19]).

Ponieważ obraz metryzowalnej k-C-przestrzeni przez odwzorowanie domknięte o warstwach mocy $< \mathfrak{c}$ jest k-C-przestrzenią (zob. [19, 6.17]), to przestrzeń Y_n jest k-C-przestrzenią, dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$. Wreszcie, ponownie korzystając z niezmienniczości własności k-C na przeliczalne sumy domkniętych podprzestrzeni wnosimy, że Y jest k-C-przestrzenią. □

Ponieważ, jak wspomnieliśmy wyżej, klasa przestrzeni słabo nieskończenie wymiarowych pokrywa się z klasą 2-C-przestrzeni, to z powyższego rezultatu otrzymujemy twierdzenie podobne do twierdzenia 1.2.5 udowodnionego przez Cauty'ego. Różni się ono od twierdzenia Cauty'ego tym, że dopuszczamy w nim szerszą klasę przestrzeni σ-zwartych (a nie zwartych jak w 1.2.5). Teza poniższego twierdzenia jest jednak słabsza od tej w 1.2.5. Nie umiemy mianowicie wywnioskować, że każda skończona potęga przestrzeni Y jest słabo nieskończenie wymiarowa, gdyż nie jest jasne czy słaby nieskończony wymiar zachowywany jest przez iloczyny kartezjańskie przestrzeni zwartych.

Wniosek 1.2.8. *Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi σ-zwartymi. Niech $C_p(Y)$ będzie obrazem $C_p(X)$ przez odwzorowanie ciągłe i otwarte. Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ przestrzeń X^n jest słabo nieskończenie wymiarowa, to Y jest również słabo nieskończenie wymiarowa.*

Używając tej samej techniki możemy udowodnić podobne twierdzenie dla C-przestrzeni.

Twierdzenie 1.2.9. *Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi σ-zwartymi. Niech $C_p(Y)$ będzie obrazem $C_p(X)$ przez odwzorowanie ciągłe i otwarte. Jeśli X jest C-przestrzenią, to Y też jest C-przestrzenią.*

Dowód. Ponieważ skończony iloczyn zwartych metryzowalnych C-przestrzeni jest C-przestrzenią (zob. [47, twierdzenie 3]) i ponieważ własność C jest niezmiennicza ze względu na przeliczalne sumy domkniętych podprzestrzeni (zob. [19, 2.24]) wnioskujemy, że przestrzeń X^n jest C-przestrzenią dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$.

Skorzystamy z twierdzenia 1.1.2, tak jak w dowodzie twierdzenia 1.2.7. Niech Y_n, Z_n, B_n będą takie jak w sformułowaniu twierdzenia 1.1.2.

Dobrze wiadomo, że w klasie przestrzeni metryzowalnych własność C jest niezmiennicza ze względu na przeciwobrazy przez odwzorowania ciągłe o warstwach będących C-przestrzeniami (zob. [19, 5.4]) oraz dziedziczy się na podprzestrzenie typu F_σ (zob. [19, 2.25]). Otrzymujemy zatem, że przestrzenie Z_n i B_n mają własność C. Wiadomo także, że dla przestrzeni zwartych własność C jest zachowywana przez odwzorowania ciągłe o warstwach mocy $< \mathfrak{c}$ (zob. [19, 6.4]). Korzystając z σ-zwartości przestrzeni Z_n (por. dowód twierdzenia 1.2.7) oraz raz jeszcze z faktu, że przeliczalna suma domkniętych C-przestrzeni jest C-przestrzenią (zob. [19, 2.24]) wnosimy, że Y_n jest C-przestrzenią. Na mocy [19, 2.24] $Y = \bigcup_n Y_n$ jest C-przestrzenią. □

1.3 Wymiar przeliczalny

Przypomnijmy następującą definicję przestrzeni przeliczalnie wymiarowej

Definicja 1.3.1. *Przestrzeń X jest przeliczalnie wymiarowa jeśli X daje się przedstawić jako mnogościowa suma skończenie wymiarowych podprzestrzeni.*

Z powyższej definicji wynika natychmiast, że przestrzenie skończenie wymiarowe są przeliczalnie wymiarowe.

W. Marciszewski, modyfikując technikę Cauty'ego z [16], udowodnił w [31] następujące twierdzenie orzekające, że wymiar przeliczalny jest t-niezmiennikiem w klasie przestrzeni metryzowalnych.

Twierdzenie 1.3.2. *(Marciszewski) Przypuśćmy, że X i Y są t-równoważnymi przestrzeniami metryzowalnymi. Wtedy X jest przeliczalnie wymiarowa wtedy i tylko wtedy gdy Y jest przeliczalnie wymiarowa.*

Pokażemy jak używając twierdzenia 1.1.2 udowodnić następujący nieco mocniejszy rezultat

Twierdzenie 1.3.3. *Przypuśćmy, że X i Y są przestrzeniami metryzowalnymi. Niech $C_p(Y)$ będzie obrazem $C_p(X)$ przez odwzorowanie ciągłe i otwarte. Jeśli X jest przeliczanie wymiarowa, to Y też jest przeliczalnie wymiarowa.*

Dowód. Ponieważ X jest przestrzenią przeliczalnie wymiarową metryzowalną, to każda skończona potęga X^n jest przestrzenią przeliczalnie wymiarową (zob. [18, twierdzenie 5.2.20]). Wiadomo również, że w klasie przestrzeni metryzowalnych wymiar przeliczalny jest niezmienniczy względem: przeciwobrazów przez odwzorowania domknięte o skończenie wymiarowych warstwach [18, stwierdzenie 5.4.5], operacji podprzestrzeni [18, 5.2.3], obrazów przez odwzorowania domknięte o skończonych warstwach [18, twierdzenie 5.4.3]) oraz sum przeliczalnych [18, 5.2.8]. Zatem wystarczy zastosować twierdzenie 1.1.2. □

Uwaga. Twierdzeń 1.2.7, 1.2.9, 1.3.3 nie można wyprowadzić bezpośrednio w twierdzenia Okuneva 1.0.4. Zauważmy, że jeśli przyjąć $X = [0, 1]$, $Z_n = B_n = [0, 1]^n$ oraz $Y = Y_n = [0, 1]^\omega$, to teza twierdzenia 1.0.4 zachodzi. Rzeczywiście, w tym przypadku Z_n odwzorowuje się na X^n przez odwzorowanie doskonałe o skończonych warstwach (identyczność). Ponadto B_n odwzorowuje się na Y_n przez odwzorowanie doskonałe. A zatem twierdzenie 1.0.4 nie rozstrzyga, że przestrzenie $[0,1]$ i $[0,1]^\omega$ nie są t-równoważne.

Rozdział 2

O zagęszczeniach przestrzeni funkcyjnych na przestrzenie σ-zwarte i analityczne

Jak dobrze wiadomo przestrzenie $C_p(X)$, poza przypadkiem gdy X jest skończone, nie są σ-zwarte (zob. [50, 1.2.186]). Można się jednak pytać kiedy (dla jakich przestrzeni X) przestrzeń funkcyjna $C_p(X)$ ma słabszą topologię, która jest σ-zwarta. Pytanie to jest równoważne pytaniu o istnienie ciągłej bijekcji z przestrzeni $C_p(X)$ na przestrzeń σ-zwartą (pewne motywacje i uwagi historyczne na temat tego rodzaju pytań czytelnik znajdzie we wstępie do rozprawy).

Definicja 2.0.4. *Ciągłą bijekcję pomiędzy przestrzeniami topologicznymi nazywamy zagęszczeniem. Mówimy, że przestrzeń X zagęszcza się na przestrzeń Y jeśli istnieje zagęszczenie $f : X \to Y$.*

Pytamy więc dla jakich przestrzeni X, przestrzeń $C_p(X)$ zagęszcza się na przestrzeń σ-zwartą (zwartą). Przykładowo, H. Michalewski udowodnił w [37], że przestrzeń $C_p(X)$ zagęszcza się na przestrzeń metryzowalną zwartą w przypadku gdy X jest metryzowalną przestrzenią analityczną tj. X jest ciągłym obrazem przestrzeni ω^ω liczb niewymiernych. Archangielski postawił następujące dwa pytania dotyczące możliwości zagęszczenia przestrzeni funkcyjnej na przestrzeń σ-zwartą.

Pytanie 2.0.5. *(Archangielski, [7, problem 4]) Niech X będzie przestrzenią metryzowalną ośrodkową. Czy przestrzeń $C_p(X)$ zagęszcza się na przestrzeń σ-zwartą?*

Pytanie 2.0.6. *(Archangielski, [6, problem 37]) Załóżmy, że przestrzeń $C_p(X)$ jest przestrzenią Hewitta. Czy $C_p(X)$ zagęszcza się na przestrzeń σ-zwartą?*

Zauważmy, że pytanie 2.0.6, które znaleźć można również w niedawno wydanej książce Tkaczuka [50, 4.10.1] jest ogólniejsze. Istotnie, dla przestrzeni metryzowalnej ośrodkowej X, przestrzeń $C_p(X)$ jest przestrzenią Lindelöfa (zob. 0.0.2, 0.0.3) jest więc przestrzenią Hewitta.

Sprecyzujmy, że Archangielski pytał o zagęszczenia na przestrzenie Tichonowa (w C_p-teorii zakłada się zwykle, że "wszystkie przestrzenie są Tichonowa"). Jest jednak sens pytać również o zagęszczenia na przestrzenie Hausdorffa i takimi zagęszczeniami także będziemy się tu zajmować.

W pracy [33] W. Marciszewski udzielił negatywnej odpowiedzi na pytanie 2.0.5 przy dodatkowym teoriomnogościowym założeniu. Mianowicie zakładając, że $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ skonstruował przestrzeń X będącą podprzestrzenią prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taką, że przestrzeń $C_p(X)$ nie zagęszcza się na żadną przestrzeń σ-zwartą Hausdorffa. Pytanie czy przestrzeń o podobnych własnościach można skonstruować w ZFC pozostawało otwarte (zob. [32, strona 363]).

W tym rozdziale pokażemy jak modyfikując konstrukcję Marciszewskiego otrzymać odpowiednią przestrzeń X bez dodatkowych teoriomnogościowych założeń. Dodatkowo udowodnimy, że dla skonstruowanej przez nas przestrzeni X, przestrzeń $C_p(X)$ nie zagęszcza się na żadną przestrzeń analityczną Tichonowa.

Znaczna część zaprezentowanej poniżej konstrukcji pochodzi z pracy W. Marciszewskiego [33]. Wydaje nam się jednak zasadne podanie wszystkich szczegółów tak, aby zamieszczony tu dowód był kompletny. Wyniki przedstawione w tym rozdziale znaleźć można w pracy autora [26].

2.1 Pomocnicze fakty

Przypomnijmy, że przez $C_D(X)$ oznaczamy przestrzeń $\{f \restriction D : f \in C_p(X)\}$ będącą podprzestrzenią przestrzeni $C_p(D) \subseteq \mathbb{R}^D$. Zauważmy, że w przypadku gdy D jest gęstym podzbiorem przestrzeni X, rzut $\pi_D : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^D$, zdefiniowany jako $\pi_D(f) = f \restriction D$, zagęszcza przestrzeń $C_p(X)$ na $C_D(X)$.

Stwierdzenie 2.1.1. *Przypuśćmy, że przestrzeń X jest przeliczalną sumą przestrzeni metryzowalnych zwartych. Wówczas istnieje różnowartościowa funkcja borelowska z przestrzeni X na przestrzeń metryzowalną σ-zwartą.*

Dowód. Ponieważ suma dwóch przestrzeni metryzowalnych zwartych jest metryzowalna i zwarta, to bez straty ogólności możemy założyć, że $X = \bigcup_{n\in\omega} K_n$ i suma ta jest wstępująca, przy czym $K_0 = \emptyset$. Dla $n \in \omega$, niech $i_n : K_n \to [0,1]^\omega$ będzie homeomorficznym zanurzeniem. Niech $f_n : X \to [0,1]^\omega$ będzie przedłużeniem odwzorowania i_n na przestrzeń X posyłającym dopełnienie $X \setminus K_n$ zbioru K_n w dowolnie ustalony punkt. Oczywiście tak zdefiniowane

f_n jest borelowskie. Zauważmy, że przekątna $F = \triangle_{n\in\omega} f_n : X \to ([0,1]^\omega)^\omega$ jest borelowską injekcją. Istotnie F jest różnowartościowe, gdyż dowolne dwa punkty z X należą do pewnego K_n (zbiory K_n tworzą rodzinę wstępującą), zaś $f_n \restriction K_n = i_n$ jest różnowartościowe.

Udowodnimy, że zbiór $F(X)$ jest σ-zwarty, co zakończy dowód. Dla każdego $n \in \omega$, zbiór $K_{n+1} \setminus K_n$ jest σ-zwarty jako otwarty podzbiór przestrzeni metryzowalnej zwartej K_{n+1}. Wystarczy więc wykazać, że funkcja F jest ciągła na zbiorze $K_{n+1} \setminus K_n$. Dla $n = 0$ wynika to z faktu, że f_n jest ciągła na K_n oraz $K_1 \subseteq K_n$ dla $n \geqslant 1$. Niech $n \geqslant 1$. Dla $m \geqslant n$ funkcja f_m jest ciągła na $K_{n+1} \setminus K_n \subseteq K_m$ (jako funkcja ciągła na K_m). Dla $m < n+1$ funkcja f_m jest również ciągła na $K_{n+1} \setminus K_n$ jako funkcja stała (zdefiniowaliśmy f_m jako funkcję stałą na $X \setminus K_m$). $\square$

Stwierdzenie 2.1.2. *Niech E będzie przeliczalnym gęstym podzbiorem metryzowalnej ośrodkowej przestrzeni X. Niech $\psi : C_p(X) \to Y$ będzie ciągła, gdzie Y jest dowolną przestrzenią z przeliczalną bazą. Wówczas istnieje przeliczalny zbiór $D \subseteq X$ zawierający E oraz funkcja ciągła $\xi : C_D(X) \to Y$ taka, że $\psi = \xi \circ (\pi_D \restriction C_p(X))$.*

Dowód. Niech $\{U_n\}$ będzie przeliczalną bazą przestrzeni Y. Przestrzeń X jako przestrzeń ośrodkowa i metryzowalna ma bazę przeliczalną. Zatem $C_p(X)$ ma przeliczalną sieć (zob. 0.0.2) i stąd jest dziedzicznie Lindelöfa (przeliczalny ciężar sieciowy dziedziczy się na podprzestrzenie zaś liczba Lindelöfa nie przekracza ciężaru sieciowego, zob. 0.0.3). Każdy zbiór otwarty w $C_p(X)$ jest więc przeliczalną sumą zbiorów otwartych bazowych.

Dla każdego $n \in \omega$ mamy $\psi^{-1}(U_n) = \bigcup_{m\in\omega} O_X(f^n_m; A^n_m; \varepsilon^n_m)$, gdzie $O_X(f^n_m; A^n_m; \varepsilon^n_m)$ jest zbiorem otwartym bazowym w $C_p(X)$ wyznaczonym przez funkcję $f^n_m \in C_p(X)$, zbiór skończony $A^n_m \subseteq X$ i liczbę $\varepsilon^n_m > 0$. Zbiór $D = E \cup (\bigcup_{n,m} A^n_m)$ jest szukanym zbiorem przeliczalnym gęstym. Funkcja ξ jest jednoznacznie wyznaczona przez D, gdyż gęstość zbioru D implikuje, że π_D jest injekcją. $\square$

Poniżej podamy znaną konstrukcję zbioru Bernsteina.

Stwierdzenie 2.1.3. *Istnieje zbiór $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ taki, że zarówno $\mathbb{K}$, jak i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ mają niepusty przekrój z dowolną (homeomorficzną) kopią zbioru Cantora w $\mathbb{R}$.*

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{C}$ kolekcję wszystkich (homeomorficznych) kopii zbioru Cantora na prostej. Rodzina $\mathcal{C}$ ma moc $\mathfrak{c}$ możemy więc ją ponumerować $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Przez indukcję konstruujemy punkty x_α, y_α spełniające warunki:

(i) $\{x_\beta : \beta \leqslant \alpha\} \cap \{y_\beta : \beta \leqslant \alpha\} = \emptyset$

(ii) $x_\alpha, y_\alpha \in C_\alpha$

Niech $x_0, y_0 \in C_0$ będą dowolnymi różnymi elementami zbioru C_0. Złóżmy, że punkty x_β, y_β, dla $\beta < \alpha$ zostały skonstruowane tak, że warunki (i)-(ii) są spełnione. Zbiór $K_\alpha = C_\alpha \setminus \{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}$ ma moc $\mathfrak{c}$ możemy więc wybrać dwa różne punkty $x_\alpha, y_\alpha \in K_\alpha$, co kończy indukcyjną konstrukcję.

Połóżmy $\mathbb{K} = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Wówczas na mocy warunku (i) mamy $\{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ i teza wynika z warunku (ii). □

Z powyższej konstrukcji wynika, że zbiory $\mathbb{K}$ i $\mathbb{R} \setminus K$ mają moc $\mathfrak{c}$. Zanotujmy następującą ważną własność zbioru $\mathbb{K}$.

Stwierdzenie 2.1.4. *Niech $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem jak w stwierdzeniu 2.1.3. Załóżmy, że $G \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem typu G_δ zawierającym $\mathbb{K}$. Wówczas $\mathbb{R} \setminus G$ jest przeliczalny.*

Dowód. Zbiór G jest typu G_δ, więc $\mathbb{R} \setminus G = \bigcap_{n\in\omega} F_n$, gdzie zbiory F_n są domknięte. Gdyby zbiór $\mathbb{R} \setminus G$ był nieprzeliczalny, to zbiór F_n byłby nieprzeliczalny, dla pewnego $n \in \omega$. Wobec tego F_n, jako zbiór domknięty nieprzeliczalny, zawierałby kopię zbioru Cantora. Przeczy to jednak własnościom zbioru $\mathbb{K}$. □

2.2 Konstrukcja kontrprzykładu

W tym paragrafie podamy konstrukcję przestrzeni $X \subseteq \mathbb{R}$ zapowiedzianej na początku rozdziału. Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.1. *Istnieje przestrzeń $X \subseteq \mathbb{R}$, taka że przestrzeń $C_p(X)$ nie zagęszcza się na żadną przestrzeń σ-zwartą Hausdorffa ani na żadną przestrzeń analityczną Tichonowa.*

Dowód. Niech $\mathcal{F}$ będzie następującą rodziną odwzorowań

$$\mathcal{F} = \{\varphi : B \to \mathbb{R}^\omega : B \text{ jest analitycznym podzbiorem } \mathbb{R}^D\text{, dla pewnego przeliczalnego zbioru } D \subseteq \mathbb{R}\text{, } \varphi \text{ jest borelowskie}\}.$$

Rodzina $\mathcal{F}$ ma moc $\mathfrak{c}$, więc możemy ją ponumerować $\mathcal{F} = \{\varphi_\alpha : B_\alpha \to \mathbb{R}^\omega : \alpha < \mathfrak{c}\}$, przy czym B_α jet podzbiorem $\mathbb{R}^{D_\alpha}$. Niech $\mathbb{K}$ będzie zbiorem Bernsteina danym przez stwierdzenie 2.1.3.

Generalnie zamierzamy powtórzyć konstrukcję z [33]. Jedyną, ale kluczową zmianą jest początek konstrukcji: Zamiast zbioru $\mathbb{Q}$ wykorzystanego w

[33], użyjemy zbioru $\mathbb{K}$. Ten prosty pomysł pozwoli nam wyeliminować założenie $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ potrzebne w [33].

Dla $\alpha < \mathfrak{c}$, indukcyjnie wybieramy punkty $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$, G_δ-podzbiory A_α prostej $\mathbb{R}$ zawierające $\mathbb{K}$ oraz funkcje ciągłe $f_\alpha, g_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}$ tak, aby następujące warunki były spełnione (kładziemy $X_\alpha = \mathbb{K} \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}$).

(i) $x_\beta \neq x_\alpha$, dla $\beta < \alpha$,

(ii) $(X_\alpha \cup \{x_\alpha\}) \cap \{y_\beta : \beta \leqslant \alpha\} = \emptyset$,

(iii) $x_\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{K}) \cap (\bigcap_{\beta \leqslant \alpha} A_\beta)$,

(iv) jeśli $D_\alpha \setminus X_\alpha \neq \emptyset$, to $y_\alpha \in D_\alpha$,

(v) jeśli $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ oraz $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \setminus B_\alpha \neq \emptyset$, to $X_\alpha \subseteq A_\alpha$ oraz $f_\alpha \restriction D_\alpha \notin B_\alpha$,

(vi) jeśli $D_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \subseteq B_\alpha$ oraz $\varphi_\alpha \restriction C_{D_\alpha}(X_\alpha)$ nie jest różnowartościowe, to $X_\alpha \subseteq A_\alpha$, $f_\alpha \restriction D_\alpha \neq g_\alpha \restriction D_\alpha$ oraz $\varphi(f_\alpha \restriction D_\alpha) = \varphi(g_\alpha \restriction D_\alpha)$.

Dla $\alpha < \mathfrak{c}$, zbiór $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{K}) \cap (\bigcap_{\beta \leqslant \alpha} A_\beta)$ ma moc $\mathfrak{c}$. Istotnie, dla dowolnego $\beta < \alpha$ zbiór A_β jest typu G_δ i zawiera $\mathbb{K}$. Z Faktu 2.1.4 wynika, że $|(\bigcap_{\beta \leqslant \alpha} A_\beta)^c| < \mathfrak{c}$. Ponadto, jak wcześniej zauważyliśmy, zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ ma moc $\mathfrak{c}$.

Przypuśćmy, że wybraliśmy $x_\beta, y_\beta, A_\beta, f_\beta, g_\beta$ dla wszystkich $\beta < \alpha$ w taki sposób, że warunki (i)-(vi) są spełnione. Rozważmy następujące cztery przypadki:

Przypadek 1: $D_\alpha \setminus X_\alpha \neq \emptyset$.

W tym przypadku wystarczy zadbać o warunki (i)-(iv). Ponieważ $D_\alpha \setminus X_\alpha \neq \emptyset$, to istnieje $y_\alpha \in D_\alpha \setminus X_\alpha$. Kładziemy $A_\alpha = \mathbb{R}$, $f_\alpha = g_\alpha \equiv 0$. Ponieważ, jak zauważyliśmy zbiór $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{K}) \cap (\bigcap_{\beta \leqslant \alpha} A_\beta)$ ma moc kontinuum, istnieje $x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ spełniający warunki (i)-(iii).

Przypadek 2: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ oraz $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \setminus B_\alpha \neq \emptyset$.

W tym przypadku wystarczy zadbać o warunki (i)-(iii) oraz (v). Z założenia poczynionego w tym przypadku wynika istnienie funkcji ciągłej $f' : X_\alpha \to \mathbb{R}$, takiej że $f' \restriction D_\alpha \notin B_\alpha$. Z twierdzenie Ławrientiewa (zob. [49, 2.2.3]) istnieje zbiór $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ typu G_δ zawierający X_α oraz funkcja ciągła $f_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}$ przedłużająca funkcję f'. Połóżmy $g_\alpha = f_\alpha$. Podobnie jak w poprzednim przypadku możemy wybrać x_α tak, by warunki (i)-(iii) były spełnione. Pozostaje wybrać y_α spełniające warunek (ii) - możemy to zrobić gdyż zbiór $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{K}) \setminus (X_\alpha \cup \{x_\alpha\})$ ma moc $\mathfrak{c}$.

Przypadek 3: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \subseteq B_\alpha$ oraz $\varphi_\alpha \upharpoonright C_{D_\alpha}(X_\alpha)$ nie jest różnowartościowe.

W tym przypadku wystarczy zadbać o warunki (i)-(iii) oraz (vi). Ponieważ założyliśmy, że $\varphi_\alpha \upharpoonright C_{D_\alpha}(X_\alpha)$ nie jest różnowartościowe, to istnieją dwie funkcje $f', g' \in C_p(X_\alpha)$ takie, że $f' \upharpoonright D_\alpha \neq g' \upharpoonright D_\alpha$ i $\varphi(f' \upharpoonright D_\alpha) = \varphi(g' \upharpoonright D_\alpha)$. Podobnie jak w poprzednim przypadku możemy skorzystać z twierdzenia Ławrientiewa otrzymując zbiór $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ typu G_δ zawierający X_α oraz ciągłe przedłużenia $f_\alpha, g_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}$ funkcji f' i g' odpowiednio. Punkty x_α i y_α wybieramy argumentując jak w poprzednim przypadku.

Przypadek 4: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \subseteq B_\alpha$ oraz $\varphi_\alpha \upharpoonright C_{D_\alpha}(X_\alpha)$ jest różnowartościowe.

W tym przypadku wystarczy zadbać o warunki (i)-(iii). W tym celu przyjmujemy $A_\alpha = \mathbb{R}$, $f_\alpha = g_\alpha \equiv 0$. Tak jak w poprzednich przypadkach wybieramy x_α, y_α spełniające warunki (i)-(iii).

Zakończyliśmy konstrukcję indukcyjną. Połóżmy $X = \mathbb{K} \cup \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Udowodnimy, że przestrzeń $C_p(X)$ nie zagęszcza się na żadną σ-zwartą przestrzeń Hausdorffa ani na żadną przestrzeń analityczną Tichonowa.

Niech M będzie σ-zwartą przestrzenią Hausdorffa ⟦analityczną przestrzenią Tichonowa⟧. Przypuśćmy dowodząc nie wprost, że istnieje zagęszczenie $\psi : C_p(X) \to M$. Przestrzeń X jest metryzowalna i ośrodkowa, więc $C_p(X)$ ma przeliczalną sieć (por. dowód stwierdzenia 2.1.2). Stąd M także ma przeliczalną sieć (zob. [50, 1.2.157]) i jako przestrzeń σ-zwarta jest przeliczalną sumą przestrzeni metryzowalnych. Ponieważ każda przestrzeń Hausdorffa mająca przeliczalną sieć zagęszcza się na przestrzeń Hausdorffa przeliczalnego ciężaru [8, rozdział 2, problem 149], możemy bez straty ogólności założyć, że M ma bazę przeliczalną. Ze stwierdzenia 2.1.2 wynika istnienie zbioru przeliczalnego gęstego $D \subseteq X$ oraz odwzorowania $\xi : C_D(X) \to M$ takiego, że $\psi = \xi \circ (\pi_D \upharpoonright C_p(X))$. Ze stwierdzenia 2.1.1, istnieje przestrzeń metryzowalna σ-zwarta S oraz borelowska injekcja $\eta : M \to S$ ⟦w przypadku gdy M jest analityczną przestrzenią Tichonowa na mocy [50, 1.2.156 (iii)], istnieje ciągła bijekcja $\eta : M \to S$ na przestrzeń Tichonowa S przeliczalnego ciężaru, a więc metryzowalną [50, 1.2.209], która jast analityczna jako ciągły obraz analitycznej przestrzeni M⟧. Ponieważ S jest metryzowalna i ma przeliczalną bazę to bez straty ogólności możemy założyć, że $S \subseteq \mathbb{R}^\omega$ (przestrzeń metryzowalna jest normalna, zaś $\mathbb{R}^\omega$ jest przestrzenią uniwersalną dla przestrzeni Tichonowa przeliczalnego ciężaru [50, 1.2.209]). Niech $\varphi' = \eta \circ \xi : C_D(X) \to \mathbb{R}^\omega$. Z twierdzenia Kuratowskiego (zob. [29, §35.VI]) istnieje borelowski zbiór $B' \subseteq \mathbb{R}^D$ zawierający $C_D(X)$ oraz funkcja borelowska $\varphi'' : B' \to \mathbb{R}^\omega$ przedłużająca φ'. Połóżmy $B = (\varphi'')^{-1}(S)$ oraz $\varphi = \varphi'' \upharpoonright B$. Zbiór B jest analityczny jako przeciwobraz zbioru σ-zwartego przez funkcję borelowską [[jako przeciwobraz zbioru analitycznego przez funkcję borelowską, zob. [49, 4.1.2]]], i funkcja φ odwzorowuje różnowartościowo $C_D(X)$ na S. Zauważmy, że $\varphi \in \mathcal{F}$, a zatem istnieje $\alpha < \mathfrak{c}$ taka, że $\varphi = \varphi_\alpha$, $D = D_\alpha$, $B = B_\alpha$.

Aby zakończyć dowód pozostaje rozważyć analogiczne cztery przypadki jak w konstrukcji indukcyjnej.

Przypadek 1: $D_\alpha \setminus X_\alpha \neq \emptyset$.

Z warunku (iv) mamy $y_\alpha \in D_\alpha = D$. Ale $y_\alpha \notin X$ na mocy (ii). Stąd $D \setminus X \neq \emptyset$, sprzeczność z $D \subseteq X$.

Przypadek 2: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ oraz $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \setminus B_\alpha \neq \emptyset$.

Z warunku (v) mamy $X_\alpha \subseteq A_\alpha$. Ponieważ z warunku (iii) wynika, że $X_\beta \in A_\alpha$ dla $\beta \geqslant \alpha$ to $X \subseteq A_\alpha$ i $f_\alpha \upharpoonright X \in C_p(X)$. Z warunku (v) $f_\alpha \upharpoonright D \in C_D(X) \setminus B$, sprzeczność z $C_D(X) \subseteq B$.

Przypadek 3: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \subseteq B_\alpha$ oraz $\varphi_\alpha \upharpoonright C_{D_\alpha}(X_\alpha)$ nie jest różnowartościowe.

Podobnie jak w poprzednim przypadku, warunki (vi), (iii) implikują $X \subseteq A_\alpha$ oraz $f_\alpha \upharpoonright X, g_\alpha \upharpoonright X \in C_p(X)$. Z warunku (vi) wynika, że $f_\alpha \upharpoonright D, g_\alpha \upharpoonright D$ są różnymi elementami $C_D(X)$ i $\varphi(f_\alpha \upharpoonright D) = \varphi(g_\alpha \upharpoonright D)$, sprzeczność z różnowartościowością $\varphi \upharpoonright C_D(X)$.

Przypadek 4: $D_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_{D_\alpha}(X_\alpha) \subseteq B_\alpha$ oraz $\varphi_\alpha \upharpoonright C_{D_\alpha}(X_\alpha)$ jest różnowartościowe.

Z warunku (i) wynika, że X_α jest właściwym podzbiorem zbioru X, a zatem $C_D(X)$ jest właściwym podzbiorem $C_D(X_\alpha)$ (zob. 0.0.1). Ponieważ $\varphi \upharpoonright C_D(X_\alpha)$ jest różnowartościowe oraz $\varphi(C_D(X_\alpha)) \subseteq \varphi(B) = S$, otrzymujemy $S \setminus \varphi(C_D(X)) \neq \emptyset$, sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 2.2.1 daje negatywną odpowiedź na pytanie 2.0.5, a tym samy również na pytanie 2.0.6.

Uwaga. Odpowiedź na pytanie 2.0.6 była znana niektórym specjalistom wcześniej. Jak zauważył R. Pol wystarczy rozważyć przestrzeń $X = \omega \cup \{\infty\}$, gdzie punkty zbioru ω są izolowane, zaś otoczenia punktu ∞ zadane są przez analityczny nieborelowski filtr na zbiorze ω (por. [30, twierdzenie 4.1]). Dla takiej przeliczalnej przestrzeni X, metryzowalna i ośrodkowa przestrzeń $C_p(X)$ jest analitycznym, nieborelowskim podzbiorem $\mathbb{R}^X$. Nie zagęszcza się więc na żadną σ-zwartą przestrzeń Hausdorffa. Rzeczywiście, gdyby takie zagęszczenie istniało, to moglibyśmy skorzystać ze stwierdzenia 2.1.1 (por. dowód twierdzenia 2.2.1) otrzymując borelowską bijekcję ψ pomiędzy przestrzenią $C_p(X)$ a pewną metryzowalną przestrzenią σ-zwartą (a więc borelowskim podzbiorem przestrzeni polskiej $\mathbb{R}^\omega$). Ponieważ $C_p(X)$ jest analityczna to dla dowolnego borelowskiego zbioru $B \subseteq C_p(X)$, zbiór $\psi(B)$ byłby analityczny (jako obraz zbioru analitycznego przez funkcję borelowską). Ale zbiór $\psi(C_p(X)) \setminus \psi(B)$ też byłby analityczny (jako obraz zbioru analitycznego $C_p(X) \setminus B$ przez funkcję borelowską), a stąd funkcja ψ^{-1} byłaby borelowska i odwzorowywałaby różnowartościowo pewien zbiór borelowski w $\mathbb{R}^\omega$ na $C_p(X)$. Zatem $C_p(X)$ byłoby borelowskim podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^X$ (jako różnowartościowy obraz zbioru borelowskiego), sprzeczność.

Przestrzeń $C_p(X)$ wspomniana powyżej zagęszcza się jednak na przestrzeń analityczną Tichonowa, gdyż sama jest taką przestrzenią. Warto wspomnieć w tym miejscu, że na pytanie 2.0.5 nie da się znaleźć przeliczalnego kontrprzykładu, gdyż jak zostało pokazane w [7], dla X będącego przestrzenią metryzowalną σ-zwartą, $C_p(X)$ zagęszcza się na przestrzeń zwartą.

Problem 37 w [6] (powtórzony w książce Tkaczuka [50, 4.10.1]) ma dwie części. Jedna z nich, to pytanie 2.0.6, które dotyczy możliwości zagęszczenia przestrzeni funkcyjnych Hewitta na przestrzenie σ-zwarte. Druga część tego problemu to pytanie czy każdą przestrzeń Hewitta postaci $C_p(X)$ można zagęścić na przestrzeń Lindelöfa. To pytanie, wydaje się być wciąż nierozstrzygnięte. Odnotujmy, że konstrukcja przedstawiona w tym rozdziale nie rozstrzyga negatywnie tego ogólniejszego pytania gdyż dla przestrzeni metrycznej X, przestrzeń $C_p(X)$ jest Lindelöfa.

Rozdział 3

O pewnym porządku w przestrzeniach funkcyjnych

W pracy [23] wprowadzony został następujący porządek $\prec$ na zbiorze $C(K)$ rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na przestrzeni zwartej K. Dla $f, g \in C(K)$ piszemy $f \prec g$ jeśli $f \neq g$ oraz $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in \operatorname{supp} f$. Zbiór funkcji $\{f_i : i \in I\}$ liniowo uporządkowany przez $\prec$ będziemy nazywać $\prec$-łańcuchem. Przypomnijmy, że dla przestrzeni zwartej K, przestrzeń $C(K)$ możemy wyposażyć w normę supremum, którą tutaj oznaczamy przez $\|\cdot\|$ Wspólnie ograniczony $\prec$-łańcuch $\{f_i : i \in I\}$ spełniający $\|f_i - f_j\| \geqslant \delta$ dla wszystkich $i, j \in I$ oraz pewnego $\delta > 0$ będziemy nazywać δ-$\prec$-łańcuchem.

Autorzy [23] badali jakie przestrzenie zwarte nie dopuszczają nieprzeliczalnych δ-$\prec$-łańcuchów dla dowolnego $\delta > 0$. Udowodnili oni między innymi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.0.2. *(Hart, Kania, Kochanek) Jeśli przestrzeń zwarta K jest*

(i) przeliczalna lub

(ii) jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni dyskretnej lub

(iii) jest lokalnie spójna i ma własność Suslina,

to w $C(K)$ nie ma nieprzeliczalnych δ-$\prec$-łańcuchów dla dowolnego $\delta > 0$.

Postawili także pytanie czy kompakty Eberleina lub ogólniej, przestrzenie zwarte K, dla których $C(K)$ jest Lindelöfa w słabej topologii, również mają własność jak w twierdzeniu (zob. [23, pytanie 3.9]).

Celem tego rozdziału jest udzielenie twierdzącej odpowiedzi na powyższy problem. Zbadamy czym są δ-$\prec$-łańcuchy z punktu widzenia topologii zbieżności punktowej w $C(K)$. Pokażemy, że każdy δ-$\prec$-łańcuch jest domkniętym dyskretnym podzbiorem przestrzeni $C_p(K)$ co natychmiast będzie pociągało brak δ-$\prec$-łańcuchów w klasie przestrzeni zwartych K, dla których $C_p(K)$ jest Lindelöfa, a więc w szczególności dla K będących kompaktami Corsona.

Po udowodnieniu wyników zaprezentowanych w tym rozdziale autor dowiedział się listownie od T. Kani, że uzyskał on niezależnie (nieco inną metodą) podobne rezultaty. Struktura δ-$\prec$-łańcuchów jako podzbiorów przestrzeni $C_p(K)$ nie były jednak T. Kani znane.

3.1 Łańcuchy a topologia zbieżności punktowej

Dla $\prec$-łańcucha F oraz $f \in F$, zdefiniujmy następujące zbiory $A(f, F) = \{g \in F : g \prec f\}$ i $B(f, F) = \{g \in F : g \succ f\}$. Zbiór $A(f, F)$ jest zbiorem wszystkich poprzedników funkcji f należących do $\prec$-łańcucha F, zaś zbiór $B(f, F)$ jest zbiorem wszystkich następników funkcji f należących do F.

Zaczniemy od udowodnienia następującego lematu

Lemat 3.1.1. *Niech $F \subseteq C_p(K)$ będzie δ-$\prec$-łańcuchem. Dla dowolnego $f \in F$ istnieje $x \in K$ takie, że $f(x) = 0$ i $|g(x)| \geqslant \delta$, dla każdego $g \in B(f, F)$*

Dowód. Ustalmy $f \in F$. Dla $g \succ f$ niech $L_g = f^{-1}(0) \cap (K \setminus g^{-1}(-\delta, \delta))$. Zbiór L_g jest zwarty i niepusty, gdyż na mocy definicji δ-$\prec$-łańcucha $g \restriction \operatorname{supp} f = f \restriction \operatorname{supp} f$ oraz $\|f - g\| \geqslant \delta$, a stąd istnieje $x \in K$ taki, że $f(x) = 0$ i $|g(x)| \geqslant \delta$. Zauważmy, że rodzina $\{L_g : g \succ f\}$ jest scentrowana, gdyż na mocy definicji δ-$\prec$-łańcucha $L_{g_1} \subseteq L_{g_2}$ dla $g_1 \prec g_2$. Korzystając ze zwartości zbiorów L_g wnosimy, że istnieje $x \in \bigcap_{g \succ f} L_g$. $\square$

Podobny do powyższego fakt zachodzi także dla poprzedników funkcji f, co zostało zauważone w [23, lemat 3.1]. Dowód, który zamieścimy tu dla wygody czytelnika, jest analogiczny do poprzedniego argumentu i wydaje się być prostszy od zaprezentowanego w [23].

Lemat 3.1.2. *Niech $F \subseteq C_p(K)$ będzie δ-$\prec$-łańcuchem. Dla dowolnego $f \in F$ istnieje $x \in K$ takie, że $|f(x)| \geqslant \delta$ i $g(x) = 0$, dla każdego $g \in A(f, F)$*

Dowód. Ustalmy $f \in F$. Dla $g \prec f$ niech $R_g = g^{-1}(0) \cap (K \setminus f^{-1}(-\delta, \delta))$. Zbiór R_g jest zwarty i na mocy definicji δ-$\prec$-łańcucha, niepusty. Rodzina $\{R_g : g \prec f\}$ jest scentrowana, gdyż dla $g_1 \prec g_2$ mamy $R_{g_1} \supseteq R_{g_2}$. Ze zwartości zbiorów R_g, istnieje $x \in \bigcap_{g \prec f} R_g$. $\square$

Korzystając z dwóch poprzednich lematów możemy łatwo wyprowadzić dyskretność δ-$\prec$-łańcuchów w topologii zbieżności punktowej przestrzeni funkcji ciągłych.

Stwierdzenie 3.1.3. *Każdy δ-$\prec$-łańcuch $F \subseteq C_p(K)$ jest dyskretną podprzestrzenią przestrzeni $C_p(K)$.*

Dowód. Ustalmy $f \in F$. Z lematu 3.1.1 istnieje $x \in K$ taki, że $f(x) = 0$ i $|g(x)| \geqslant \delta$, dla każdego $g \in B(f, F)$. Podobnie, z lematu 3.1.2 istnieje $y \in K$ taki, że $|f(y)| \geqslant \delta$ i $g(y) = 0$, dla każdego $g \in A(f, F)$. Zauważmy, że

$$O_K(f; x, y; \delta) \cap F = \{f\}.$$

Istotnie, jeśli $g \in F \setminus \{f\}$, to $g \in A(f, F)$ lub $g \in B(f, F)$. W pierwszym przypadku $g(y) = 0 \notin (f(y) - \delta, f(y) + \delta)$, podczas gdy w drugim przypadku $g(x) \notin (-\delta, \delta)$, bo $|g(x)| \geqslant \delta$. □

Lemat 3.1.4. *Niech $F \subseteq C_p(K)$ będzie δ-$\prec$-łańcuchem i niech $h \in C_p(K)$ będzie punktem skupienia zbioru F. Wtedy $F \cup \{h\}$ jest $\prec$-łańcuchem.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że h jest $\prec$-nieporównywalny z pewnym $f \in F$. Twierdzimy, że $\operatorname{supp} h \subseteq \operatorname{supp} f$. Istotnie, w przeciwnym razie wybierzmy $x \in (K \setminus h^{-1}(0)) \setminus \operatorname{supp} f$ i rozważmy zbiór otwarty $U = O(h; x, (h(x) - \varepsilon, h(x) + \varepsilon)$, dla ε tak małego aby odcinek $(h(x) - \varepsilon, h(x) + \varepsilon)$ nie zawierał liczby 0. Zauważmy, że dla każdej funkcji $g \in U \cap F$ mamy $f \prec g$, ponieważ $f(x) = 0$ zaś $g \in U$ pociąga $g(x) \neq 0$. Wobec tego dla każdego $g \in U \cap F$ mamy $f \restriction \operatorname{supp} f = g \restriction \operatorname{supp} f = h \restriction \operatorname{supp} f$ (ostatnia równość wynika natychmiast z faktu, że h jest punktem skupienia zbioru $U \cap F$), co daje $f \prec h$. Sprzeczność z założeniem, że h jest nieporównywalne z f.

Ponieważ, jak pokazaliśmy, $\operatorname{supp} h \subseteq \operatorname{supp} f$ i h jest nieporównywalne z f, więc istnieje $x \in K$ takie, że $f(x), h(x) \neq 0$ oraz $f(x) \neq h(x)$. Wnosimy, że $U = O(h; x, (h(x) - \varepsilon, h(x) + \varepsilon)$, gdzie ε jest tak małe aby $0, f(x) \notin (h(x) - \varepsilon, h(x) + \varepsilon)$, jest otwartym otoczeniem h rozłącznym z F (żaden element U nie jest $\prec$-porównywalny z f) co przeczy temu, że h jest punktem skupienia zbioru F. □

Lemat 3.1.5. *Niech $F \subseteq C_p(K)$ będzie δ-$\prec$-łańcuchem i niech $h \in C_p(K)$ będzie takie, że $F \cup \{h\}$ jest $\prec$-łańcuchem. Wtedy $F \cup \{h\}$ jest δ'-$\prec$-łańcuchem, dla pewnego $\delta' > 0$.*

Dowód. Dla $h \in F$ teza jest oczywista. Możemy więc założyć, że $h \notin F$. Ponieważ $F \cup \{h\}$ jest $\prec$-łańcuchem i $h \notin F$, to $F = A(h, F) \cup B(h, F)$. Ustalmy $g \in F$. Załóżmy najpierw, że $g \in A(h, F)$. Jeśli g jest bezpośrednim poprzednikiem h to istnieje $x \in K$ takie, że $g(x) = 0$ (a zatem również $f(x) = 0$ dla każdego $f \in A(h, F)$) oraz $h(x) \neq 0$. A więc $A(h, F) \cup \{h\}$ jest δ_1-$\prec$-łańcuchem, gdzie $\delta_1 = \min\{|h(x)|, \delta\}$. Jeśli bezpośredni poprzednik h nie istnieje, to zbiór $A(h, F) \cup \{h\}$ jest δ-$\prec$-łańcuchem.

Dla $g \in B(h,F)$ postępujemy podobnie jak wyżej. Jeśli g jest bezpośrednim następnikiem h, to istnieje $x \in K$ taki, że $h(x) = 0$ i $g(x) \neq 0$ (a zatem $f(x) = 0$ dla każdego $f \in B(h,F)$). Wnosimy, że $B(h,F) \cup \{h\}$ jest δ_2-$\prec$-łańcuchem, gdzie $\delta_2 = \min\{|g(x)|, \delta\}$. Jeśli bezpośredni następnik h nie istnieje, to zbiór $B(h,F) \cup \{h\}$ jest δ-$\prec$-łańcuchem.

Wystarczy przyjąć $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. □

Możemy teraz łatwo wyprowadzić główny rezultat tego rozdziału.

Twierdzenie 3.1.6. *Niech K będzie przestrzenią zwartą i niech $\delta > 0$. Każdy δ-$\prec$-łańcuch jest domkniętym dyskretnym podzbiorem przestrzeni $C_p(K)$.*

Dowód. Niech F będzie δ-$\prec$-łańcuchem. Ze stwierdzenia 3.1.3 wnosimy, że F jest dyskretny. Z lematów 3.1.4 i 3.1.5 i stwierdzenia 3.1.3, wynika natychmiast, że F jest domknięty (nie ma punktów skupienia). □

Dla przestrzeni topologicznej X, przez $\mathrm{ext}(X)$ oznaczamy kres górny mocy domkniętych dyskretnych podzbiorów przestrzeni X (ekstent przestrzeni). Łatwo zobaczyć, że jeśli X jest przestrzenią Lindelöfa, to $\mathrm{ext}(X) \leqslant \aleph_0$. Wobec tego z twierdzenia 3.1.6 wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.1.7. *Niech K będzie przestrzenią zwartą i niech $\delta > 0$. Jeśli $C_p(K)$ jest Lindelöfa, to każdy δ-$\prec$-łańcuch w przestrzeni $C_p(K)$ jest przeliczalny.*

Nie jest jasne dla jakich kompaktów K przestrzeń $C_p(K)$ jest Lindelöfa (por. [39]). Wiadomo jednak, że jeśli K jest kompaktem Corsona, to $C_p(K)$ jest przestrzenią Lindelöfa (zob. [2], [44, 3.1.1]).

Uwaga. Z twierdzenia 3.1.6 wynika, że we wniosku 3.1.7 założenie, że $C_p(K)$ jest przestrzenią Lindelöfa można zastąpić a priori słabszym założeniem $\exp(C_p(K)) \leqslant \aleph_0$. Ostatnie założenie jest jednak tylko pozornie słabsze co wynika z twierdzenia Baturova, które orzeka, że dla przestrzeni zwartej K przestrzeń $C_p(K)$ jest Lindelöfa wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{ext}(C_p(K)) \leqslant \aleph_0$ (zob. [4, III.6.1])

W twierdzeniu 3.1.6 pokazaliśmy, że każdy δ-$\prec$-łańcuch jest domkniętym dyskretnym podzbiorem przestrzeni $C_p(K)$. Naturalne wydaje się pytanie czy istnienie nieprzeliczalnego domkniętego dyskretnego podzbioru w przestrzeni $C_p(K)$ implikuje istnienie nieprzeliczalnego δ-$\prec$-łańcucha dla pewnego $\delta > 0$. Poniższy przykład pokazuje, że tak być nie musi: Istnieje przestrzeń zwarta K taka, że $\mathrm{ext}(C_p(K)) \geqslant \aleph_1$ i każdy δ-$\prec$-łańcuch w $C_p(K)$ jest przeliczalny.

Przykład. Dla maksymalnej prawie rozłącznej[1] rodziny $\mathcal{A}$ podzbiorów ω określamy $\Psi = \omega \cup \mathcal{A} \cup \{\infty\}$, gdzie punkty ω są izolowane; dla $A \in \mathcal{A}$, zbiory postaci $\mathcal{B}_A = \{A\} \cup (A \setminus S)$, gdzie S jest skończonym podzbiorem A, są bazą otoczeń A; punkt ∞ jest punktem uzwarcającym lokalnie zwartą przestrzeń $\omega \cup \mathcal{A}$ (por. [50, problem 142]). Przestrzeń Ψ jest nazywana przestrzenią Mrówki-Isbella[2]. Jak łatwo zobaczyć, zbiór ω jest gęsty w Ψ, zatem Ψ jest przestrzenią ośrodkową. Oczywiście jest też rozproszona wysokości 3, więc na mocy [43, twierdzenie 2] przestrzeń $C_p(\Psi)$ nie jest Lindelöfa (a więc również $\mathrm{ext}(C_p(\Psi)) \geqslant \aleph_1$, zob. uwaga powyżej).

Pokażemy, że dla dowolnego $\delta > 0$ każdy δ-$\prec$-łańcuch w $C_p(\Psi)$ jest przeliczalny (dowód będzie podobny do argumentu z [23, stwierdzenie 3.3]). W tym celu ustalmy $\delta > 0$ i niech F będzie δ-$\prec$-łańcuchem w $C_p(\Psi)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że F składa się z funkcji nieujemnych, gdyż $\{|f| : f \in F\}$ też jest δ-$\prec$-łańcuchem. Załóżmy dowodząc nie wprost, że F jest nieprzeliczalny.

Połóżmy $F_1 = \{f \in F : f(\infty) = 0\}$, $F_2 = \{f \in F : f(\infty) > 0\}$. Oczywiście $F = F_1 \cup F_2$. Z poczynionego powyżej założenia wynika, że F_1 lub F_2 jest nieprzeliczalny. Przypuśćmy najpierw, że F_1 jest nieprzeliczalny.

Dla $f \in F_1$ zbiór $\Gamma_f = \{A \in \mathcal{A} : f(A) \geqslant \delta\}$ jest skończony. Podobnie, dla $f \in F_1$, zbiór $D_f = \{n \in \bigcup \Gamma_f : f(n) = 0\}$ jest skończony. Dla $g, f \in F_1$ takich, że $g \succ f$ mamy $\Gamma_g \supsetneq \Gamma_f$ lub $\Gamma_f = \Gamma_g$ i $g(n) \geqslant \delta$, $f(n) = 0$ dla pewnego $n \in \omega$.

Ponieważ wstępujące rodziny zbiorów skończonych mogą być co najwyżej przeliczalne (a F_1 jest nieprzeliczalny), to istnieje Γ taki, że zbiór $R = \{f \in F_1 : \Gamma_f = \Gamma\}$ jest nieprzeliczalny. Zauważmy, że dla $f, g \in R$ jeśli $f \prec g$, to $D_f \supsetneq D_g$ lub $D_f = D_g$ i $f(n) = 0$, $g(n) \geqslant \delta$, dla pewnego $n \in \omega \setminus \bigcup \Gamma$. Ponieważ zstępujące rodziny zbiorów skończonych mogą być co najwyżej przeliczalne (a R jest nieprzeliczalny), to istnieje D taki, że zbiór $S = \{g \in R : D_f = D\}$ jest nieprzeliczalny. Zauważmy, że dla $f, g \in S$ jeśli $f \prec g$, to $f(n) = 0$, $g(n) \geqslant \delta$, dla pewnego $n \in \omega \setminus \bigcup \Gamma$. Ponadto, dla dowolnego $f \in S$, zbiór $E_f = \{n \in \omega \setminus \bigcup \Gamma : f(n) \geqslant \delta\}$ jest skończony. Rzeczywiście, w przeciwnym razie zbiór E_f miałby punkt skupienia w zbiorze $(\mathcal{A} \setminus \Gamma) \cup \{\infty\}$, co nie jest możliwe gdyż $f(\infty) = 0$ (bo $f \in F_1$), $f(A) < \delta$ dla $A \in \mathcal{A} \setminus \Gamma = \mathcal{A} \setminus \Gamma_f$. Ponieważ skończonych podzbiorów przeliczalnego zbioru $\omega \setminus \bigcup \Gamma$ jest przeliczalnie wiele (a S jest nieprzeliczalny), to istnieje E taki,

[1] Rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów ω jest *prawie rozłączna* jeśli przekrój dowolnych dwóch jej elementów jest co najwyżej skończony.

[2] Gdy rodzina $\mathcal{A}$ nie jest maksymalna bardziej adekwatną nazwą dla analogicznie zdefiniowanej przestrzeni wydaje się być "kompakt Aleksandrowa-Urysohna", por. [35]

że zbiór $T = \{f \in S : E_f = E\}$ jest nieprzeliczalny. Ale zbiór ten jest jednoelementowy, bo jeśli $f, g \in T$ i $f \prec g$, to $f(x) = 0$, $g(x) \geqslant \delta$, dla pewnego $x \in \mathcal{A} \cup (\bigcup \Gamma) \cup (\omega \setminus \bigcup \Gamma)$. Jednak z określenia zbioru T wynika, że $\Gamma_f = \Gamma_g = \Gamma$, $D_f = D_g = D$, $E_f = E_g = E$, czyli taki x nie może istnieć, sprzeczność.

Podobnie rozumujemy w przypadku, gdy F_2 jest nieprzeliczalny. Dla $f \in F_2$ zbiory $\Gamma'_f = \{A \in \mathcal{A} : f(A) = 0\}$ i $D'_f = \{n \in \bigcup \Gamma'_f : f(n) \geqslant \delta\}$ są skończone. Jeśli $g, f \in F_2$ oraz $g \prec f$, to z definicji δ-$\prec$-łańcucha istnieje $x \in \omega \cup \mathcal{A}$ takie, że $g(x) = 0$ i $f(x) \geqslant \delta$. Stąd $\Gamma'_g \supsetneq \Gamma'_f$ lub $\Gamma'_g = \Gamma'_f$ i $f(n) \geqslant \delta$, $g(n) = 0$ dla pewnego $n \in \omega$. Podobnie jak wyżej sukcesywnie zmniejszamy zbiór F_2 otrzymując zbiór T' analogiczny do zbioru T, który z jednej strony będzie nieprzeliczalny, z drugiej zaś jednoelementowy, co da pożądaną sprzeczność.

Innym przykładem przestrzeni zwartej, dla której przestrzeń funkcji ciągłych w topologii zbieżności punktowej nie jest Lindelöfa i wszystkie δ-$\prec$-łańcuchy są przeliczalne jest dwupunktowe uzwarcenie prostej Suslina, które oznaczymy przez S.

Przypomnijmy, że prostą Suslina nazywamy przestrzeń nieośrodkową, liniowo uporządkowaną, spójną mającą przeliczalną liczbę Suslina. Takiej przestrzeni nie można skonstruować w ZFC ale jej istnienie jest z teorią ZFC niesprzeczne (zob. [28, II,§4]).

Z twierdzenia 3.0.2(iii) wynika, że dla dowolnego $\delta > 0$ każdy δ-$\prec$-łańcuch w $C_p(S)$ jest przeliczalny. Przestrzeń $C_p(S)$ nie jest Lindelöfa na mocy następującego twierdzenia Nakhmansona (zob. [4, IV.10.1])

Twierdzenie 3.1.8. *(Nakhmanson) Jeśli X jest liniowo uporządkowaną przestrzenią zwartą, to liczba Lindelöfa przestrzeni $C_p(X)$ jest równa ciężarowi przestrzeni X.*

Uwaga. Oczywiście warunkiem dostatecznym na brak nieprzeliczalnych δ-$\prec$-łańcuchów w przestrzeni $C(K)$ jest brak nieprzeliczalnych $\prec$-łańcuchów. Nasuwa się naturalne pytanie: Czy jest to również warunek konieczny, tj. czy brak nieprzeliczalnych δ-$\prec$-łańcuchów w przestrzeni $C(K)$ dla dowolnego $\delta > 0$ implikuje brak nieprzeliczalnych $\prec$-łańcuchów w $C(K)$? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Wystarczy jako $K \subseteq [0,1]$ przyjąć "trójkowy" zbiór Cantora. Wówczas zbiór $\{f_t : t \in K\}$, gdzie $f_t : [0,1] \to [0,1]$, $f_t(x) = \mathrm{dist}(x, K) \cdot \chi_{[t,1]}(x)$ ($\chi_{[t,1]}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $[t,1]$ zaś $\mathrm{dist}(\cdot, K)$ funkcję odległości od zbioru K), jest nieprzeliczalnym $\prec$-łańcuchem w przestrzeni $C(K)$ (zob. [23, przykład 3.7]). Z wniosku 3.1.7

wynika natychmiast, że w przestrzeni $C(K)$ nie istnieją nieprzeliczalne δ-$\prec$-łańcuchy dla dowolnego $\delta > 0$.

Rozdział 4

Uniwersalność przestrzeni ℓ_∞/c_0

Rozdział ten, jak wspomnieliśmy we wstępie, jest odmienny od pozostałych w tym sensie, że nie badamy w nim przestrzeni funkcji ciągłych z topologią zbieżności punktowej, ale przestrzenie Banacha funkcji ciągłych na kompaktach. Powiemy, że przestrzeń Banacha X jest uniwersalna (izometrycznie uniwersalna) dla pewnej klasy $\mathcal{K}$ przestrzeni zwartych jeśli dla dowolnego $K \in \mathcal{K}$ przestrzeń $C(K)$ zanurza się izomorficznie (izometrycznie) w przestrzeń X, tj. $C(K)$ jest izomorficzne (izometryczne) z pewną podprzestrzenią przestrzeni X. W tym rozdziale poruszymy zagadnienie uniwersalności przestrzeni ℓ_∞/c_0, izometrycznej z przestrzenią $C(\beta\omega \setminus \omega)$ funkcji ciągłych na naroście uzwarcenia Čecha-Stone'a liczb naturalnych. Przestrzeń ta ma, jak się okazuje, dostatecznie bogatą strukturę i jest dobrym kandydatem na obiekt uniwersalny dla różnych klas przestrzeni zwartych. Zauważmy, że warunkiem koniecznym istnienie izomorficznej kopii przestrzeni $C(K)$ w przestrzeni ℓ_∞/c_0 jest mniejszy bądź równy $\mathfrak{c}$ ciężar przestrzeni K. Wynika to z faktu, że gęstość przestrzeni $C(K)$ jest równa ciężarowi przestrzeni K i ℓ_∞/c_0 ma gęstość równą $\mathfrak{c}$. Przypomnijmy klasyczne twierdzenie Parowiczenki orzekające, że każda przestrzeń zwarta ciężaru $\leqslant \aleph_1$ jest ciągłym obrazem $\beta\omega\setminus\omega$, więc przestrzeń ℓ_∞/c_0 jest izometrycznie uniwersalna dla takich przestrzeni zwartych. Zatem jeśli założyć Hipotezę Continuum, to przestrzeń ℓ_∞/c_0 jest izometrycznie uniwersalna dla wszystkich przestrzeni zwartych ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$. Naturalne wydaje się pytanie czy dla innych klas kompaktów (niż tych małego ciężaru) przestrzeń ℓ_∞/c_0 jest uniwersalna. Czy jeśli za $\mathcal{K}$ przyjmiemy klasę kompaktów Corsona / Eberleina / jednostajnie Eberleina (ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$), to ℓ_∞/c_0 jest uniwersalna (izometrycznie uniwersalna) dla $\mathcal{K}$?

C. Brech i P. Koszmider pokazali w [15], że niesprzecznie z ZFC przestrzeń ℓ_∞/c_0 nie jest uniwersalna dla najmniejszej z wymienionych wyżej klas kompaktów, tj. klasy kompaktów jednostajnie Eberleina. W świetle tego rezultatu i wspomnianego wyżej wyniku Parowiczenki na pytanie, które postawiliśmy nie można odpowiedzieć w ZFC. Można jednak się zastanawiać jakie dodatkowe założenia teoriomnogościowe stoją za zagadnieniem uniwersalności przestrzeni ℓ_∞/c_0.

Wyniki w tym kierunku uzyskał S. Todorčević (por. [51]), który znalazł piękny związek pomiędzy uniwersalnością/izometryczną uniwersalnością przestrzeni ℓ_∞/c_0, a własnościami σ-ciała podzbiorów n-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^n$ generowanego przez "uogólnione prostokąty" tj. zbiory postaci $A_1 \times \ldots \times A_n$ gdzie $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$. Udowodnił on mianowicie, że jeśli $\mathfrak{c}$ nie jest liczbą Kunena[1], to ℓ_∞/c_0 nie jest izometrycznie uniwersalna dla kompaktów Corsona ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$. Podobny rezultat, wykorzystujący nieco inne założenie dotyczące σ-ciał podzbiorów $\mathbb{R}^n$, uzyskał także dla izomorficznych zanurzeń kompaktów Corsona w ℓ_∞/c_0.

W tym rozdziale wzmocnimy wynik Todorčevića modyfikując nieznacznie jego rozumowanie. Udowodnimy w szczególności, że jeśli $\mathfrak{c}$ nie jest liczbą Kunena, to przestrzeń ℓ_∞/c_0 nie jest izometrycznie uniwersalna dla kompaktów jednostajnie Eberleina ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$. Tym samym, inną metodą uzyskamy wspomniany wyżej rezultat C. Brech i P. Koszmidera (w istocie autorzy [15] udowodnili więcej: jest niesprzeczne z ZFC, że nie istnieje przestrzeń uniwersalna gęstości $\mathfrak{c}$ dla kompaktów jednostajnie Eberleina ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$). Nasze rozważania prowadzą do niesprzecznego z ZFC przykładu kompaktu jednostajnie Eberleina, który nie jest ciągłym obrazem przestrzeni $\beta\omega\setminus\omega$ (narostu uzwarcenia Čecha-Stone'a liczb naturalnych), mimo to przestrzeń funkcji ciągłych na tym kompakcie zanurza się izomorficznie w ℓ_∞/c_0. Wydaje się, że jest to pierwszy tego rodzaju przykład.

W pierwszym paragrafie, na potrzeby tego rozdziału, wprowadzimy kilka oznaczeń i przypomnimy potrzebne w dalszej części własności kompaktów jednostajnie Eberleina oraz przestrzeni ℓ_∞/c_0. Drugi paragraf zawiera główne wyniki tego rozdziału, między innymi te wspomniane wyżej. Ostatni, trzeci paragraf poświęcimy uwagom dotyczącym uniwersalności przestrzeni ℓ_∞/c_0 dla innych niż kompakty jednostajnie Eberleina klas kompaktów: przestrzeni poliadycznych i AD-kompaktów.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały uzyskane przez autora wspólnie z Witoldem Marciszewskim i można je znaleźć w artykule [27].

4.1 Uwagi wstępne

Kompakty jednostajnie Eberleina. Przypomnijmy, że przestrzeń zwartą nazywamy *jednostajnie Eberleina* jeśli jest homeomorficzna z podzbiorem przestrzeni Hilberta w słabej topologii (por. [40]). Równoważnie, przestrzeń

[1]Definicja zostanie podana w następnym paragrafie.

zwarta jest jednostajnie Eberleina jeśli zanurza się homeomorficznie w przestrzeń

$$B(\Gamma) = \{x \in [-1,1]^\Gamma : \sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| \leqslant 1\},$$

dla pewnego zbioru indeksów Γ. Rzeczywiście, zauważmy, że powyższa przestrzeń jest homeomorficzna z kulą w przestrzeni $\ell_2(\Gamma)$ wyposażonej w słabą topologię. Dobrze znanym przykładem kompaktu jednostajnie Eberleina jest następująca przestrzeń, określona dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dla dowolnego zbioru nieskończonego Γ,

$$\sigma_n(\Gamma) = \{x \in \{0,1\}^\Gamma : |\{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0\}| \leqslant n\}.$$

Przestrzeń ta jest homeomorficzna z przestrzenią $B(\Gamma) \cap \{0, \frac{1}{n}\}^\Gamma$ więc jest kompaktem jednostajnie Eberleina. Będziemy potrzebować następującego, zapewne dobrze znanego, faktu orzekającego, że jednopunktowe uzwarcenie dyskretnej sumy kompaktów jednostajnie Eberleina również jest takim kompaktem.

Stwierdzenie 4.1.1. *Niech T będzie dowolnym, ustalonym zbiorem indeksów. Przypuśćmy, że dla dowolnego $t \in T$ przestrzeń K_t jest kompaktem jednostajnie Eberleina. Wtedy przestrzeń $K = \bigoplus_{t\in T} K_t \cup \{\infty\}$ (tj. jednopunktowe uzwarcenie dyskretnej sumy przestrzeni K_t) jest kompaktem jednostajnie Eberleina.*

Dowód. Ponieważ dla dowolnego $t \in T$ przestrzeń K_t jest kompaktem jednostajnie Eberleina, to mocy definicji, dla dowolnego $t \in T$ istnieje homeomorficzne zanurzenie $h_t : K_t \to B(\Gamma_t)$, dla pewnego zbioru Γ_t. Niech Γ będzie rozłączną sumą zbiorów $\{\Gamma_t : t \in T\}$ oraz zbioru T. Wtedy $h : K \to B(\Gamma)$ określone jako

$$h(x)_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2}h_t(x)_\gamma & \text{jeśli } \gamma \in \Gamma_t \\ 0 & \text{jeśli } \gamma \in \Gamma_s,\ s \neq t \\ \frac{1}{2} & \text{jeśli } \gamma = t \\ 0 & \text{jeśli } \gamma \in T,\ \gamma \neq t \end{cases}$$

dla $x \in K_t$ oraz $h(\infty)_\gamma = 0$ dla każdego $\gamma \in \Gamma$ jest szukanym zanurzeniem homeomorficznym. □

Liczby Kunena. Dla dowolnego zbioru Γ oraz liczby naturalnej $k \geqslant 2$ oznaczmy przez $\mathcal{P}^k(\Gamma)$ σ-ciało generowane przez "uogólnione prostokąty", tj. zbiory postaci $A_1 \times \ldots \times A_k$ gdzie $A_1, \ldots, A_k \subseteq \Gamma$. Liczbę kardynalną

κ nazywamy *liczbą Kunena*[2] jeśli $\mathcal{P}(\kappa \times \kappa) = \mathcal{P}^2(\kappa)$, tj. każdy podzbiór produktu $\kappa \times \kappa$ należy do σ-ciała generowanego przez zbiory postaci $A_1 \times A_2$, $A_1, A_2 \subseteq \kappa$. Zauważmy, że dla dowolnego zbioru Γ równość $\mathcal{P}(\Gamma \times \Gamma) = \mathcal{P}^2(\Gamma)$ zależy wyłącznie od mocy zbioru Γ, a zatem równość ta ma miejsce wtedy i tylko wtedy gdy $|\Gamma|$ jest liczbą Kunena.

Przypomnijmy kilka dobrze znanych własności liczb Kunena (por. [9])

(a) Każda liczba Kunena jest $\leqslant \mathfrak{c}$;

(b) $\aleph_1$ jest liczbą Kunena;

(c) (Kunen) Jest niesprzeczne z ZFC, że $\mathfrak{c}$ nie jest liczbą Kunena.

Z powyższych faktów wynika, że zdanie: "$\mathfrak{c}$ jest liczbą Kunena" jest niezależne od ZFC.

Przestrzeń $\ell_\infty/\mathbf{c_0}$. Elementy tej przestrzeni są postaci $[x] = \{y \in \ell_\infty : x - y \in c_0\}$, gdzie $x \in \ell_\infty$. Łatwo sprawdzić, że standardowa norma przestrzeni ilorazowej ℓ_∞/c_0 wyraża się wzorem $\|[x]\| = \limsup_n |x(n)|$. Jak dobrze wiadomo, przestrzeń ℓ_∞/c_0 jest izometryczna z przestrzenią $C(\beta\omega \setminus \omega)$ funkcji ciągłych na naroście uzwarcenia Čecha-Stone'a liczb naturalnych Wynika to z faktu, że przestrzeń ℓ_∞ jest izometryczna z przestrzenią $C(\beta\omega)$ (zob. [1, paragraf 4.2]), zaś $\beta\omega \setminus \omega$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $\beta\omega$ (por. [48]). Wobec tego jeśli K jest ciągłym obrazem przestrzeni $\beta\omega \setminus \omega$, to odwzorowanie $f \mapsto f \circ \phi$, gdzie $\phi : \beta\omega \setminus \omega \xrightarrow{na} K$ jest ustaloną ciągłą surjekcją, jest izometrycznym zanurzeniem $C(K)$ w $C(\beta\omega \setminus \omega)$ (a zatem $C(K)$ zanurza się izometrycznie ℓ_∞/c_0).

Podobnego narzędzia do badania izometrycznych zanurzeń przestrzeni $C(K)$ w przestrzeń ℓ_∞/c_0 dostarcza dualność Stone'a: Przestrzeń $\beta\omega \setminus \omega$ jest przestrzenią Stone'a algebry Boole'a $\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{Fin}$, więc przestrzeń Stone'a $St(\mathcal{A})$ dowolnej podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{Fin}$ jest ciągłym obrazem $\beta\omega \setminus \omega$. Wówczas, na mocy tego co zauważyliśmy wyżej, przestrzeń $C(St(\mathcal{A}))$ zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0.

4.2 Izometryczne i izomorficzne zanurzenia

W tym paragrafie udowodnimy dwa zapowiedziane wcześniej twierdzenia wzmacniające wyniki Todorčevića z [51]. Twierdzenia 4.2.2 i 4.2.4 poniżej

[2] Tak zdefiniowane pojęcie "liczba Kunena" pojawiło się w artykule [9]. Jak zasugerował autorowi S. Todorčević bardziej adekwatną nazwą byłaby "liczba Rothbergera". Przyjmiemy jednak terminologię już występującą w literaturze.

są odpowiednikami twierdzeń 4.1 i 4.3 z [51], odpowiednio. Pomimo, że główna idea obu dowodów jest taka jak w [51] wydaje nam się zasadne podanie kompletnych dowodów.

Dla dwuargumentowej relacji $E \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz liczby naturalnej n połóżmy

$$K_n(E) = \{\chi_A \in \{0,1\}^{\mathbb{R}} : A \in [\mathbb{R}]^{\leqslant n},\ \forall a, b \in A\ \ [a < b \Rightarrow (a,b) \in E]\}.$$

Przestrzeń ta jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $\sigma_n(\mathbb{R})$, a zatem jest kompaktem jednostajnie Eberleina.

Dla funkcji $f : X \to Y$ oraz liczby naturalnej $n \geqslant 2$, przez f^n będziemy oznaczać n-krotny iloczyn funkcji f, tj. $f^n = f \times \ldots \times f : X^n \to Y^n$. Poniższy łatwy fakt będzie kluczowy w dowodzie następnego twierdzenia.

Stwierdzenie 4.2.1. *Niech (X, τ) będzie ośrodkową, metryzowalną przestrzenią topologiczną. Niech $f : \mathbb{R} \to X$ będzie injekcją zaś $S \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie takie, że $f^2[S]$ jest borelowskim podzbiorem $(f^2[\mathbb{R}^2], \tau \times \tau)$. Wtedy $S \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$.*

Dowód. Ponieważ (X, τ) jest metryczna i ośrodkowa, to przestrzeń $(f^2[\mathbb{R}^2], \tau \times \tau)$ ma przeliczalną bazę $\mathcal{B}$. Zbiory borelowskie w tej przestrzeni należą więc do σ-ciała generowanego przez zbiory postaci $U \times V$, gdzie $U, V \in \mathcal{B}$. Ponieważ $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ jest σ-ciałem wystarczy sprawdzić, że jeśli $f^2[S] = U \times V$, dla pewnych $U, V \in \mathcal{B}$, to $S \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Ale, dla takiego S mamy $S = f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. □

Zauważmy, że z powyższego stwierdzenia (kładąc $X = \mathbb{R}$ i $f = id$) wynika, że borelowskie podzbiory płaszczyzny należą do $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. A stąd, dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$, zbiór $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\} = A \times A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ też należy do $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$.

Twierdzenie 4.2.2. *Przypuśćmy, że dla każdego kompaktu jednostajnie Eberleina K ciężaru co najwyżej $\mathfrak{c}$, przestrzeń $C(K)$ zanurza się izometrycznie w przestrzeń ℓ_∞/c_0. Wtedy $\mathfrak{c}$ jest liczbą Kunena.*

Dowód. Niech $E \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym podzbiorem płaszczyzny. Pokażmy, że $E \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Ponieważ $E \cap \{(a,b) : a = b\}$ należy do σ-ciała $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ (zob. uwaga poprzedzająca twierdzenie), więc wystarczy pokazać, że zbiory $E_0 = E \cap \{(a,b) : a < b\}$ i $E_1 = E \cap \{(a,b) : a > b)\}$ należą do $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Z symetrii, wystarczy wykazać, że $E_0 \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Rozważmy przestrzeń $K_2(E_0)$. Jak zauważyliśmy wcześniej jest to kompakt jednostajnie Eberleina. Możemy teraz naśladować argument z [51]. Określamy injekcję $\phi : \mathbb{R} \to C(K_2(E_0))$ jako $\phi(r) = f_r$, gdzie $f_r(x) = x(r)$ dla $x \in K_2(E_0)$. Niech $T : C(K_2) \to \ell_\infty/c_0$ będzie izometrią na podprzestrzeń przestrzeni ℓ_∞/c_0, która istnieje z założenia. Niech $\psi : \ell_\infty/c_0 \to \ell_\infty$ będzie dowolnym selektorem, tzn. injekcją taką, że $\psi([x]) \in [x]$. Dla $a < b$ mamy

$$(a,b) \in E_0 \Leftrightarrow \chi_{\{a,b\}} \in K_2(E_0) \Leftrightarrow \|T(f_a) + T(f_b)\| = \|f_a + f_b\| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\limsup_n |(\psi \circ T(f_a))(n) + (\psi \circ T(f_b))(n)| > 1.$$

Połóżmy $g = \psi \circ\ T \circ \phi$. Zbiór

$$g^2[\mathbb{R}^2] \cap \{(x,y) \in (\mathbb{R}^\omega)^2 : \limsup_n |x(n) + y(n)| > 1\}$$

jest borelowskim podzbiorem $g^2[\mathbb{R}^2] \subseteq \ell_\infty \times \ell_\infty$ w topologii dziedziczonej z $(\mathbb{R}^\omega)^2$. Zatem, na mocy 4.2.1,

$$(g \times g)^{-1}[\{(x,y) \in (\mathbb{R}^\omega)^2 : \limsup_n |x(n) + y(n)| > 1\}] \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}).$$

Ponieważ

$$E_0 = (g \times g)^{-1}[\{(x,y) \in (\mathbb{R}^\omega)^2 : \limsup_n |x(n) + y(n)| > 1\}] \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$$

oraz $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ wnosimy, że $E_0 \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. □

Zauważmy, że w powyższym dowodzie posłużyliśmy się kompaktem jednostajnie Eberleina postaci $K_2(E)$. Twierdzenie będzie zatem również prawdziwe przy słabszym założeniu: Dla każdego *rozproszonego* kompaktu jednostajnie Eberleina (wysokości 3) K przestrzeń $C(K)$ zanurza się izometrycznie w przestrzeń ℓ_∞/c_0.

Aby udowodnić twierdzenie dotyczące izomorficznych zanurzeń, będziemy potrzebować następującej modyfikacji stwierdzenia 4.2.1.

Stwierdzenie 4.2.3. *Niech (X, τ) będzie ośrodkową, metryzowalną przestrzenią topologiczną. Niech $f : \mathbb{R} \to X$ będzie injekcją oraz $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$. Jeśli zbiory $f^n[A]$ i $f^n[B]$ można rozdzielić borelowskim podzbiorem X^n, to zbiory A i B można rozdzielić zbiorem należącym do $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$.*

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie przeliczalną bazą w przestrzeni X. Podobnie jak w dowodzie stwierdzenia 4.2.1, wystarczy udowodnić, że jeśli zbiory $f^n[A]$ i $f^n[B]$ można rozdzielić zbiorem postaci $U_1 \times \ldots \times U_n$, gdzie $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{B}$, to A i B można rozdzielić zbiorem należącym do $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$. To jednak jest oczywiste, gdyż wówczas zbiory A i B są rozdzielone przez zbiór $f^{-1}(U_1) \times \ldots \times f^{-1}(U_n) \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$. □

Tak jak w [51], dla dwuargumentowej relacji $E \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz dla liczby naturalnej $n \geqslant 2$ kładziemy

$$E^{[n]} = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i < j \ [x_i \neq x_j \text{ oraz } (x_i, x_j) \in E]\}.$$

W szczególności $<^{[n]}$ jest zbiorem wszystkich ściśle rosnących ciągów liczb rzeczywistych długości n. Dopełnienie zbioru E oznaczać będziemy przez E^c.

Twierdzenie 4.2.4. *Załóżmy, że dla każdego kompaktu jednostajnie Eberleina K ciężaru co najwyżej $\mathfrak{c}$, przestrzeń $C(K)$ zanurza się izomorficznie w ℓ_∞/c_0. Wtedy dla każdej dwuargumentowej relacji $E \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz dla prawie wszystkich[3] liczb naturalnych n, zbiory $E^{[n]}$ i $(E^c)^{[n]}$ można rozdzielić elementem σ-ciała $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$.*

Dowód. Ustalmy $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Zaczniemy od udowodnienia twierdzenia dla relacji

$$E_0 = (E \cap <) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \text{ oraz } (x, y) \in E\}.$$

Ponieważ $E_0^{[n]} \subseteq <^{[n]}$ oraz $<^{[n]} \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$, to wystarczy udowodnić, że zbiory $E_0^{[n]}$ i $(E_0^c)^{[n]} \cap <^{[n]}$ można rozdzielić elementem $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$. Aby to zrobić rozważmy zbiór

$$K = \bigoplus_{n=1}^{\infty} K_n(E_0) \cup \{\infty\},$$

będący jednopunktowym uzwarceniem dyskretnej sumy przestrzeni $K_n(E_0)$. Ze stwierdzenia 4.1.1 wynika, że K jest kompaktem jednostajnie Eberleina.

Niech $T : C(K) \to \ell_\infty/c_0$ będzie izomorfizmem na podprzestrzeń przestrzeni ℓ_∞/c_0 (który istnieje z założenia). Istnieje liczba naturalna k taka, że $k > \|T\|\|T^{-1}\|$. Ustalmy $n \geqslant \max\{k, 2\}$.

Tak jak w poprzednim dowodzie określamy injekcję $\phi : \mathbb{R} \to C(K)$ jako $\phi(r) = f_r$ gdzie $f_r : K \to \mathbb{R}$ jest określona jako

$$f_r(x) = \begin{cases} x(r) & \text{jeśli } x \in K_n(E_0) \\ 0 & \text{jeśli } x \in K \setminus K_n(E_0) \end{cases}$$

Jeśli $(x_1, \dots, x_n) \in E_0^{[n]}$ to $\chi_{\{x_1, \dots, x_n\}} \in K_n(E_0) \subseteq K$, więc $\|f_{x_1} + \ldots + f_{x_n}\| = n$. Zatem

$$n = \|f_{x_1} + \ldots + f_{x_n}\| = \|T^{-1}T(f_{x_1} + \ldots + f_{x_n})\| \leqslant \|T^{-1}\|\|T(f_{x_1} + \ldots + f_{x_n})\| ,$$

więc

$$\|T(f_{x_1} + \ldots + f_{x_n})\| \geqslant \frac{n}{\|T^{-1}\|} \geqslant \frac{k}{\|T^{-1}\|} > \|T\|.$$

[3]tzn. poza być może skończenie wieloma

Jeśli $(x_1, \ldots, x_n) \in (E_0^c)^{[n]} \cap <^{[n]}$ to dla dowolnego $x \in K$, co najwyżej jedna funkcja f_{x_i} przyjmuje wartość 1 w punkcie x, więc $\|f_{x_1} + \ldots + f_{x_n}\| = 1$. Zatem

$$\|T(f_{x_1} + \ldots + f_{x_n})\| \leqslant \|T\|\|f_{x_1} + \ldots + f_{x_n}\| = \|T\|.$$

Dla dowolnego selektora $\psi : \ell_\infty/c_0 \to \ell_\infty$, kładąc $g = \psi \circ T \circ \phi$ wnosimy, że zbiór

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\ell_\infty)^n : \limsup_m |x_1(m) + \ldots + x_n(m)| > \|T\|\}$$

rozdziela zbiory $g^n[E_0^{[n]}]$ i $g^n[(E_0^c)^{[n]} \cap <^{[n]}]$ (przypomnijmy, że przez g^n rozumiemy iloczyn kartezjański n-wielu kopii funkcji g). Ponieważ zbiór ten jest borelowski w topologii odziedziczonej z przestrzeni $(\mathbb{R}^\omega)^n$, to teza wynika ze stwierdzenia 4.2.3.

Z symetrii, powyższe rozumowanie możemy zastosować również do relacji

$$E_1 = (E \cap >) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y \text{ and } (x, y) \in E\}.$$

Jedyne co musimy zrobić, to zmienić $<$ na $>$ w definicji przestrzeni $K_n(E)$.

Aby udowodnić rezultat w pełnej ogólności, przez $\mathbb{R}_n$ oznaczmy zbiór wszystkich różnowartościowych ciągów długości n, tj. $\mathbb{R}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \neq j \;\; x_i \neq x_j\}$. Oczywiście, z definicji zbioru $E^{[n]}$ wynika, że $E^{[n]} \subseteq \mathbb{R}_n$. Z twierdzenia Ramseya wynika, że jeśli liczba naturalna n jest dostatecznie duża, to ciąg $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ ma ściśle rosnący, bądź ściśle malejący podciąg długości k. To znaczy, jeśli dla dowolnego $A \in [n]^k$ (utożsamiamy tu liczbę n ze zbiorem $\{1, \ldots, n\}$) zdefiniujemy

$$\begin{aligned} F_0(A) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n : \forall i, j \in A \;\; [i < j \Rightarrow x_i < x_j]\}, \\ F_1(A) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n : \forall i, j \in A \;\; [i < j \Rightarrow x_i > x_j]\} \end{aligned}$$

to

$$\mathbb{R}_n = \bigcup_{A \in [n]^k} (F_0(A) \cup F_1(A)).$$

Dla $A \in [n]^k$ oraz $i \in \{0, 1\}$ niech $G_i(A) = E^{[n]} \cap F_i(A)$ i niech $\pi_A : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}^A$ będzie rzutowaniem.

Jest jasne, że zbiór $\pi_A(G_i(A))$ możemy utożsamić z $E_i^{[k]}$ zatem z pierwszej części dowodu otrzymujemy zbiór $S_i(A) \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R})$ rozdzielający zbiory $\pi_A(G_i(A))$ i $\pi_A((E_i^c)^{[n]})$, przy czym oczywiście można zakładać, że $\pi_A(G_i(A)) \subseteq S_i(A)$. Nietrudno sprawdzić, że zbiór

$$\bigcup_{A \in [n]^k, i \in \{0,1\}} \pi_A^{-1}(S_i(A)),$$

który oczywiście należy do $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$, rozdziela zbiory $E^{[n]}$ i $(E^c)^{[n]}$. $\square$

Warto w tym miejscu wspomnieć, że niesprzecznie z ZFC teza twierdzenia 4.2.4 może nie zachodzić. Dokładniej, niesprzecznie z ZFC, istnieje zbiór $E \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że dla dowolnej liczby naturalnej n zbiorów $E^{[n]}$ i $(E^c)^{[n]}$ nie można rozdzielić żadnym elementem σ-ciała $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ (zob. [51, uwaga 3.5]). A zatem, z tego co udowodniliśmy wynika, że niesprzecznie z ZFC istnieje kompakt jednostajnie Eberleina K taki, że przestrzeń $C(K)$ nie zanurza się izomorficznie w ℓ_∞/c_0.

Pokażemy teraz, że niesprzecznie z ZFC, istnieje kompakt jednostajnie Eberleina, który rozróżnia izometryczną i izomorficzną uniwersalność przestrzeni ℓ_∞/c_0 (w klasie kompaktów jednostajnie Eberleina ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$).

Twierdzenie 4.2.5. *Jeśli $\mathfrak{c}$ nie jest liczbą Kunena to istnieje kompakt jednostajnie Eberleina K taki, że przestrzeń $C(K)$ zanurza się izomorficznie, lecz nie zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0.*

Dowód. Ponieważ $\mathfrak{c}$ nie jest liczbą Kunena, istnieje zbiór $E \subseteq \mathbb{R}^2$ nienależący do σ-ciała $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $E \subseteq \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$: zob. dowód twierdzenia 4.2.2). Z tego dowodu wynika również, że $K = K_2(E)$ jest kompaktem jednostajnie Eberleina takim, że $C(K)$ nie zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0. Z drugiej strony przestrzeń $C(K) = C(K_2(E))$ zanurza się izomorficznie w ℓ_∞/c_0 (w ZFC) gdyż jest izomorficzna z $c_0(\mathfrak{c})$ (zob. [34, twierdzenie 1.1]) $\square$

4.3 Uwagi końcowe i komentarze

W tym paragrafie przedyskutujemy krótko uniwersalność przestrzeni ℓ_∞/c_0 w dwóch innych klasach kompaktów: ciągłych obrazów przestrzeni $\sigma_1(\mathfrak{c})^\omega$ oraz tak zwanych AD-kompaktów.

Y. Benyamini, M.E Rudin i M. Wage pokazali w [13], że przestrzeń K jest kompaktem jednostajnie Eberleina ciężaru $\leqslant \kappa$ wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągłym obrazem domkniętego podzbioru przestrzeni $\sigma_1(\kappa)^\omega$. Zauważmy, że przestrzeń ta jest homeomorficzna z przestrzenią $A(\kappa)^\omega$, gdzie $A(\kappa)$ oznacza jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni dyskretnej mocy κ. W tej samej pracy autorzy postawili pytanie czy w udowodnionym przez nich twierdzeniu, domknięty podzbiór przestrzeni $\sigma_1(\kappa)^\omega$ można zastąpić całą przestrzenią $\sigma_1(\kappa)^\omega$. Negatywnej odpowiedzi na to pytanie udzielił M. Bell w [11]. Przestrzeń, która posłużyła mu za kontrprzykład była homeomorficzna z następującą przestrzenią

$$B = \{\chi_A \in \{0,1\}^{\omega_1} : A \in [\omega_1]^2 \ \forall a,b \in A \ [a < b \Leftrightarrow a \prec b]\},$$

gdzie $\prec$ jest dobrym porządkiem na ω_1 ([11, przykład 3.1]). Bell udowodnił, że przestrzeń B nie jest ciągłym obrazem $\sigma_1(\kappa)^\omega$ (w przykładzie poniżej podamy inny przykład tego rodzaju). Nietrudno zauważyć, że przestrzeń B jest ciągłym obrazem przestrzeni $K_2(\prec)$, gdzie $\prec$ jest dobrym porządkiem na $\mathbb{R}$. Jak zauważył S. Todorčević, niesprzecznie z ZFC (w modelu otrzymanym przez dodanie więcej niż continuum liczb Cohena) zbiór

$$E = \{\{a,b\} \in [0,1]^2 : a < b \Leftrightarrow a \prec b\},$$

gdzie $\prec$ jest dobrym porządkiem na $[0,1]$, nie należy do σ-ciała $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ (zob. [51, uwaga 3.5]). A zatem z twierdzenia 4.2.2 wynika, że (w tym modelu) przestrzeń $C(K_2(\prec))$ nie zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0. Oczywiście przestrzeń $K_2(\prec)$ jest bardzo podobna do przestrzeni B (dobry porządek na ω_1 zastępujemy dobrym porządkiem na $\mathbb{R}$). Zauważmy jednak, że B jest ciągłym obrazem $\beta\omega \setminus \omega$ (na mocy twierdzenia Parowiczenki wspomnianego we wstępie rozdziału) i stąd przestrzeń $C(B)$ zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0 (w ZFC).

Okazuje się, że przestrzeń ℓ_∞/c_0 jest izometrycznie uniwersalna w klasie ciągłych obrazów przestrzeni $\sigma_1(\mathfrak{c})^\omega$. Możemy więc rozróżnić kompakty jednostajnie Eberleina ciężaru co najwyżej $\mathfrak{c}$ od ciągłych obrazów $\sigma_1(\mathfrak{c})^\omega$ w terminach uniwersalnych własności przestrzeni ℓ_∞/c_0.

Stwierdzenie 4.3.1. *Jeśli K jest ciągłym obrazem przestrzeni $\sigma_1(\mathfrak{c})^\omega$, to przestrzeń $C(K)$ zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0.*

Dowód. Przestrzeń $\sigma_1(\mathfrak{c})^\omega$ jest ciągłym obrazem $\beta\omega\setminus\omega$ (zob. [12, twierdzenie 2.5 i przykład 5.3]), zaś $C(\beta\omega \setminus \omega)$ jest izometryczne z ℓ_∞/c_0. $\square$

Przykład.[4] Stosunkowo prostym kontrprzykładem na pytanie Y. Benyaminiego, M.E. Rudin i M. Wage'a, wspomniane na początku tego paragrafu, jest podwojenie Aleksandrowa zbioru Cantora 2^ω, które oznaczymy przez D. Dokładniej, $D = 2^\omega \times \{0,1\}$, dla $x \in 2^\omega$ punkty $(x,1)$ są izolowane, zaś zbiory $(V_s,0) \cup (V_s \setminus \{x\},1)$, gdzie V_s jest otwartym zbiorem bazowym w 2^ω wyznaczonym przez ciąg skończony s, zadają bazę otoczeń punktu $(x,0)$. Ponieważ, na mocy wyniku udowodnionego przez J. Gerlitsa w [21], dla przestrzeni będących ciągłymi obrazami $\sigma_1(\kappa)^\omega$ charakter i ciężar są sobie równe, wnioskujemy, że D nie jest taką przestrzenią. Jest jednak kompaktem jednostajnie Eberleina. Istotnie, dla $x \in 2^\omega$ oraz $i = 0,\ 1$, niech $\Gamma = 2^\omega \cup \{*\}$.

[4] Przykład ten również pochodzi od M. Bella, jednak nigdy przez niego nie został opublikowany.

Określmy $f_{x,i} : \Gamma \to [0,1]$ następująco:

$$f_{x,i}(\gamma) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{jeśli } \gamma = * \\ 0 & \text{jeśli } \gamma \in 2^\omega,\ \gamma \neq x \\ \frac{1}{2} & \text{jeśli } \gamma = x,\ i = 1 \\ 0 & \text{jeśli } \gamma = x,\ i = 0. \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że przestrzeń $\{f_{x,i} : x \in 2^\omega,\ i = 0,\ 1\} \subseteq [0,1]^\Gamma$ z topologią odziedziczoną z iloczynu $[0,1]^\Gamma$ jest homeomorficzna z przestrzenią D (funkcje $f_{x,0}$ odpowiadają punktom nieizolowanym, zaś funkcje $f_{x,1}$ punktom izolowanym przestrzeni D). Zatem D jest kompaktem jednostajnie Eberleina (por. uwagi zawarte w pierwszym paragrafie).

Przestrzeń D, która spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności, ma inne własności niż przestrzeń B rozważana przez M. Bella (i inne niż $K_2(\prec)$).

Pokażemy, że algebra zbiorów otwato-domkniętych przestrzeni D zanurza się w algebrę $\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{Fin}$. W tym celu wygodniej będzie, zamiast zbiorem ω, posługiwać się zbiorem przeliczalnym $2^{<\omega}$, składającym się ze skończonych ciągów 0-1-kowych i, co na jedno wychodzi, konstruować zanurzenie w algebrę $\mathcal{P}(2^{<\omega})/\operatorname{Fin}(2^{<\omega})$. Elementy tej algebry oznaczać będziemy przez $[A]$, gdzie $A \in \mathcal{P}(2^{<\omega})$. Z definicji topologii na D wynika, że zbiory $\{(x,1)\}$, $V_s \times \{0,1\}$ generują algebrę otwarto-domkniętych podzbiorów przestrzeni D. Szukane zanurzenie wystarczy określić na powyższych generatorach algebry następująco: $\{(x,1)\} \mapsto [B_x]$, gdzie $B_x = \{x \restriction n : n \in \omega\}$, $V_s \times \{0,1\} \mapsto [\{t \in 2^{<\omega} :\ t \text{ jest przedłużeniem } s\}]$. Stosując kryterium Sikorskiego (zob. [24, 5.5]) niestrudno sprawdzić, że tak określone odwzorowanie jest homomorficznym zanurzeniem.

Warto wspomnieć, że przestrzeń D została użyta (w innym kontekście) przez G. Plebanka w [42] do rozróżnienia kompaktów Eberleina do AD-kompaktów (definicję podamy poniżej). Plebanek zauważył, że D nie jest ciągłym obrazem przestrzeni $\sigma_1(\kappa)^\omega$ i jest kompaktem Eberleina. Nie był jednak świadomy pytania Y. Benyaminiego, M.E Rudin i M. Wage'a.

Inną interesującą klasą przestrzeni zwartych jest klasa tak zwanych AD-kompaktów (zob. [10], [42]). Niech X będzie zbiorem niepustym, zaś $\mathcal{A}$ pewną rodziną podzbiorów zbioru X. Powiemy, że $\mathcal{A}$ jest *adekwatna* jeśli spełnia następujące dwa warunki:

(i) jeśli $A \in \mathcal{A}$ i $B \subseteq A$, to $B \in \mathcal{A}$ oraz

(ii) jeśli $A \subseteq X$ i każdy skończony podzbiór A należy do $\mathcal{A}$, to $A \in \mathcal{A}$.

Oczywiście, utożsamiając zbiory z ich funkcjami charakterystycznymi, możemy rodzinie $\mathcal{A}$ przyporządkować przestrzeń $K(\mathcal{A}) \subseteq \{0,1\}^X$. Nietrudno sprawdzić, że $K(\mathcal{A})$ jest zwartym podzbiorem $\{0,1\}^X$, dla adekwatnej rodziny $\mathcal{A}$. Powiemy, że przestrzeń zwarta K jest *adekwatna* jeśli K jest homeomorficzne z $K(\mathcal{A})$, dla pewnej adekwatnej rodziny $\mathcal{A}$. Powiemy, że K jest *AD-kompaktem* jeśli jest ciągłym obrazem pewnego kompaktu adekwatnego.

M. Bell zauważył w [10], że niesprzecznie z ZFC istnieje AD-kompakt ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$, który nie jest ciągłym obrazem przestrzeni $\beta\omega\setminus\omega$. Ze wcześniejszych rozważań możemy wywnioskować więcej:

Wniosek 4.3.2. *Załóżmy, że dla każdego AD-kompaktu K ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$, przestrzeń $C(K)$ zanurza się izometrycznie w ℓ_∞/c_0. Wtedy $\mathfrak{c}$ jest liczbą Kunena.*

Dowód. Przestrzeń $K_2(E_0)$ rozważana w dowodzie twierdzenia 4.2.2 jest kompaktem adekwatnym. Można więc powtórzyć rozumowanie z 4.2.2. $\square$

Wniosek 4.3.3. *Załóżmy, że dla każdego AD-kompaktu K ciężaru $\leqslant \mathfrak{c}$, przestrzeń $C(K)$ zanurza się izomorficznie w ℓ_∞/c_0. Wtedy dla każdej dwuargumentowej relacji $E \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz dla prawie wszystkich liczb naturalnych n, zbiory $E^{[n]}$ i $(E^c)^{[n]}$ można rozdzielić elementem σ-ciała $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$.*

Dowód. Dla dowolnego $E \subseteq \mathbb{R}^2$ przestrzeń $K_n(E)$ jest kompaktem adekwatnym, a zatem AD-kompaktem. Na mocy [42, twierdzenie 2.1], przestrzeń $K = \bigoplus_{n=1}^\infty K_n(E_0) \cup \{\infty\}$ rozważana w dowodzie twierdzenia 4.2.4 jest również AD-kompaktem. Możemy więc powtórzyć rozumowanie z 4.2.4. $\square$

Bibliografia

[1] F. Albiac, N.J. Kalton Topics in Banach space theory, Graduate Texts in Mathematics, 233, Springer, New York, 2006.

[2] K. Alster, R. Pol, *On function spaces of compact subspaces of* Σ*-products of the real line*, Fund. Math. 107 (1980), no. 2, 135–143.

[3] A.V. Arhangel'skii, *Some results and problems in* $C_p(X)$*-theory*, in: General topology and its relations to modern analysis and algebra VI. Proc. Sixth Prague Top. Symp., Z. Frolik (ed.), Heldermann Verlag, Berlin, 1988.

[4] A.V. Arhangel'skii, *Topological function spaces*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[5] A.V. Arhangel'skii, *Problems in* C_p*-theory*, in: Open Problems in Topology, J. van Mill and G.M. Reed (eds.), Elsevier 1990, 601-615.

[6] A.V. Arhangel'skii, C_p*-Theory*, in: Recent Progress in General Topology, M. Hušek and J. van Mill (eds.), Elsevier 1992, 1-56.

[7] A.V. Arhangel'skii, *On condensations of* C_p*-spaces onto compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 6, 1881–1883.

[8] A.V. Arhangel'skii, V.I. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology in Problems and Exercises*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Boston, 1984.

[9] A. Avilés, G. Plebanek, J. Rodríguez, *Measurability in* $C(2^\kappa)$ *and Kunen cardinals*, Israel J. Math. 195 (2013), no. 1, 1–30.

[10] M. Bell, *Generalized dyadic spaces*, Fund. Math. 125 (1985), 47-58.

[11] M. Bell, *A Ramsey theorem for polyadic spaces*, Fund. Math. 150 (1996), 189-195.

[12] M. Bell, L. Shapiro, P. Simon *Products of* ω^* *images*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 1593-1599.

[13] Y. Benyamini, M.E. Rudin, M. Wage *Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. 70 (1977), 309-324.

[14] D. Burke, R. Hansell, *Perfect maps and relatively discrete collections*, Papers on General topology and applications (Amsterdam, 1994), 54–56, Ann. New York Acad. Sci., 788, New York.

[15] C. Brech, P. Koszmider, *On universal spaces for the class of Banach spaces whose dual balls are uniform Eberlein compacts*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 4, 1267–1280.

[16] R. Cauty, *Sur l'invariance de la dimension infinie forte par t-équivalence*, Fund. Math. 160 (1999), 95—100.

[17] R. Engelking, *Topologia ogólna*, Biblioteka Matematyczna, tom 47, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1975.

[18] R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics, 10. Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[19] V.V. Fedorchuk, *Some classes of weakly infinite-dimensional spaces*, J. Math. Sci. (N. Y.) 155 (2008), no. 4, 523–570.

[20] D. Garity, D. Rohm, *Property C, refinable maps and dimension raising maps*. Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), no. 2, 336–340.

[21] J. Gerlits *On a problem of S. Mrówka*, Period. Math. Hungar. 4 (1973), 71-80.

[22] G. Gruenhage, *Covering compacta by discrete and other separated sets*, Topology Appl. 156 (2009), no. 7, 1355–1360.

[23] K.P. Hart, T. Kania, T. Kochanek, *A chain condition for operators from* $C(K)$*-spaces*, Quart. J. Math.

[24] S. Koppelberg, *Algebraic Theory*, in: Handbook of Boolean Algebras vol. 1, D. Monk, R. Bonnet (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1989, Ch.2.

[25] M. Krupski, *On the* t*-equivalence relation*, Topology Appl. 160 (2013), no. 2, 368–373.

[26] M. Krupski, *A note on condensations of function spaces onto* σ*-compact and analytic spaces*, przyjęte do Proc. Amer. Math. Soc.

[27] M. Krupski, W. Marciszewski, *Some remarks on universality properties of* ℓ_∞/c_0, Colloq. Math. 128 (2012), no. 2, 187–195.

[28] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[29] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, New York and London; PWN, Warszawa, 1966.

[30] D. Lutzer, J. van Mill, R. Pol, *Descriptive complexity of function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985), no. 1, 121–128.

[31] W. Marciszewski, *On properties of metrizable spaces* X *preserved by t-equivalence*, Mathematika 47 (2000), 273–279.

[32] W. Marciszewski, *Function Spaces*, in: Recent Progress in General Topology II, M. Hušek and J. van Mill (eds.), Elsevier 2002, 345-369.

[33] W. Marciszewski, *A function space* $C_p(X)$ *without a condensation onto a* σ*-compact space*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 6, 1965–1969.

[34] W. Marciszewski *On Banach spaces* $C(K)$ *isomorphic to* $c_0(\Gamma)$, Studia Math. 156 (2003), 295-302.

[35] W. Marciszewski, R. Pol, *On Banach spaces whose norm-open sets are* F_σ*-sets in the weak topology*, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009), no. 2, 708–722.

[36] D.R. Mauldin ed. *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café.* Birkhäuser, Boston, 1981.

[37] H. Michalewski, *Condensations of projective sets onto compacta.* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 11, 3601–3606

[38] J. van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, North-Holland Mathematical Library 64, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[39] J. van Mill, J. Pelant, R. Pol, *Note on function spaces with the topology of pointwise convergence*, Arch. Math. 80 (2003), no. 6, 655–663.

[40] S. Negrepontis, *Banach spaces and topology*, in: Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J.E. Vaughan (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, Ch. 23.

[41] O. Okunev, *A relation between spaces implied by their t-equivalence*, Topology Appl. 158 (2011), 2158–2164.

[42] G. Plebanek *Compact spaces that result from adequate families of sets*, Topology Appl. 65 (1995), 257-270

[43] R. Pol, *Concerning Function Spaces on Separable Compact Spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), no. 10, 993–997.

[44] R. Pol, *On pointwise and weak topology in function spaces*, Uniwersytet Warszawski, preprint nr 4/84, Warszawa 1984.

[45] R. Pol, *On light mappings without perfect fibers on compacta*, Tsukuba J. Math. 20 (1996), no. 1, 11–19.

[46] E.G. Pytkeev, *The upper bounds of topologies*, Math. Notes 20 (1976), 831-837.

[47] D. Rohm, *Products of infinite-dimensional spaces* Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990), no. 4, 1019–1023.

[48] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions* Vol. I. Monografie Matematyczne, Tom 55, PWN, Warszawa, 1971.

[49] S.M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Graduate Texts in Mathematics, 180, Springer-Verlag, New York, 1998.

[50] V.V. Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book, Topological and Function Spaces*, Springer, New York, 2011.

[51] S. Todorčević, *Embedding function spaces into ℓ_∞/c_0*, J. Math. Anal. Appl. 384 (2011), 246-251.