Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa i Analizy Stochastycznej

Natalia Soja-Kukieła

Wpływ lokalnych zależności na asymptotykę wartości ekstremalnych pól i ciągów wektorów losowych

Promotor:
prof. dr hab. Adam Jakubowski
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa
i Analizy Stochastycznej

Toruń 2014

Niniejszą rozprawę dedykuję Rodzinie: mężowi Michałowi, Mamie i Tacie, Małej Natalii, Pauli, Oli, Bartkowi, Remikowi z Marleną i Igorkiem, Asi z Karolem i Lenką, Monice z Krzysiem i Kalinką, z wdzięcznością za dobry, ciepły dom, pełen kochających ludzi.

Spis treści

Wstęp

W książce [18] (zobacz również [17]) de Haan opisuje następujący problem z lat 50. ubiegłego wieku : *Duży obszar Holandii (około 40% powierzchni) znajduje się poniżej poziomu morza i jest chroniony przed powodzią przy pomocy wałów umieszczonych wzdłuż wybrzeża. Mając na uwadze bezpieczeństwo oraz koszty związane z budową i utrzymaniem wałów, rząd Holandii zadecydował, że wysokość wałów powinna być taka, aby prawdopodobieństwo powodzi w danym roku wynosiło 0,0001. Postawione zadanie to wyznaczenie wysokości wału. Dysponujemy wynikami z ponad 100 lat obserwacji, ponadto wysokości fal tworzą w przybliżeniu ciąg niezależnych obserwacji.*

Powyższe, bardzo ważne zagadnienie stanowiło mocny impuls do rozwoju teorii wartości ekstremalnych w Holandii na przestrzeni XX wieku. Inne, aktualne i ważne przykłady zastosowań tej teorii, w hydrologii, ubezpieczeniach czy finasach, można znaleźć np. w [19] lub [61].

Teoria wartości ekstremalnych dla ciągów zmiennych losowych opisuje asymptotyczne własności rozkładu maksimum

$$M_n := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j,$$

gdy $n \to \infty$, gdzie $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest obserwowanym procesem. Teoria ta, zapoczątkowana w latach 20. ubiegłego stulecia przez Frécheta [25], Fishera i Tipetta [24], w klasycznej wersji koncentrowała się na asymptotyce maksimów ciągu $\{X_n\}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Dla takich ciągów Fisher, Tipett [24] i Gniedenko [30] scharakteryzowali klasę *rozkładów ekstremalnych*, tj. słabych granic ciągów odpowiednio scentrowanych i unormowanych maksimów częściowych. Wykazali, że jeśli

$$\mathrm{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \to H(x) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty$$

w punktach ciągłości niezdegenerowanej dystrybuanty H (dla $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$), to H ma jeden z trzech typów ekstremalnych (patrz Twierdzenie 1.3). Twierdzenie o typach ekstremalnych stanowi główny rezultat klasycznej teorii wartości ekstremalnych.

Nietrudno jednak o przykłady sytuacji, gdy obserwowany proces wykazuje istotne zależności. Dlatego począwszy od lat 50. XX wieku rozwijana jest odpowiednia teoria dla ciągów zależnych zmiennych losowych. Watson [74], Berman [5,6] i Loynes [51] dają początek teorii wartości ekstremalnych dla ciągów *stacjonarnych*, czyli ciągów $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, których rozkłady skończenie wymiarowe są niezmiennicze ze względu na translację:

$$\{X_{n+j}\}_{n\in\mathcal{A}} \stackrel{D}{=} \{X_n\}_{n\in\mathcal{A}}$$

dla każdego skończonego zbioru $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ i wszystkich $j \in \mathbb{Z}$. Szczególnie interesujące są dla nas rezultaty opisujące lokalne zależności rozważanych procesów w języku *dystrybuanty pozornej* (O'Brien, 1987) oraz *indeksu ekstremalnego* (Leadbetter, 1983). Oba te pojęcia zostały gruntownie przestudiowane w latach 80. i 90. w kontekście ciągów stacjonarnych [37,46,47,56]. W szczególności prowadzono intensywne prace [23,33,44,64,65,69,75] nad estymacją indeksu ekstremalnego $\theta \in (0,1]$ w oparciu o wzór O'Briena [56]:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\max\{X_2, X_2, \dots, X_{r_n}\} \leqslant v_n \mid X_1 > v_n\right),$$

który dla ciągów m-zależnych przybiera postać:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\max\{X_2, X_2, \dots, X_{m+1}\} \leqslant v_n \mid X_1 > v_n\right). \tag{1}$$

Niniejsza rozprawa poświęcona jest badaniom wartości ekstremalnych stacjonarych pól losowych oraz stacjonarych ciągów wektorów losowych.

Praca zorganizowana jest w sposób następujący. W rozdziale 1 przedstawiamy znane wyniki z teorii wartości ekstremalnych dla słabo zależnych stacjonarnych ciągów zmiennych losowych. Rozdziały 2 i 3 zawierają rozważania i oryginalne rezultaty dotyczące asymptotyki ekstremów pól losowych. W rozdziale 2 badamy maksima słabo zależnego stacjonarnego pola losowego z czasem dyskretnym, natomiast rozdział 3 poświęcamy asymptotyce supremum pola gaussowskiego z czasem ciągłym. W ostatnim rozdziale 4 dowodzimy twierdzeń granicznych dla maksimów słabo zależnych ciągów wektorów losowych.

W opublikowanej w 1997 roku pracy [50] Leadbetter i Rootzén pokazują, że klasa rozkładów ekstremalnych dla pól pokrywa się z klasą rozkładów ekstremalnych otrzymaną wcześniej dla ciągów zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie. Mimo, iż ogólna postać słabej granicy ciągu odpowiednio scentrowanych i unormowanych maksimów częściowych jest znana, sam wybór ciągów normującego i centrującego bywa trudnym zadaniem. Często wybór ten jest ściśle związany ze strukturą lokalnych zależności rozważanego procesu, do opisu której wykorzystuje się indeks ekstremalny i dystrybuantę pozorną.

Jak dotąd tematyka indeksu ekstremalnego dla pól losowych podejmowana była jedynie przez nielicznych autorów [3, 12, 22, 73]. Co więcej, według posiadanej przez nas wiedzy, nikt nie prowadził badań nad dystrybuantą pozorną pola. Wyniki przedstawione w rozdziale 2 rozprawy częściowo wypełniają tę istotną lukę. W pełni opisują asymptotykę maksimum pola losowego spełniającego pewne lokalne warunki mieszania (w szczególności pola m-zależnego) – podobnie jak rezultaty Chernicka, Hsinga i McCormicka [11] w przypadku ciągów.

W rozdziale 2 rozważamy słabo zależne, stacjonarne pole $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$, gdzie $d \in \mathbb{N}$ jest dowolne. Badamy asymptotykę maksimów

$$M_{\mathbf{n}} := \max\{X_{\mathbf{k}} : \mathbf{1} \leqslant \mathbf{k} \leqslant \mathbf{n} \text{ (po współrzędnych)}\}$$

gdy $\mathbf{n} \to (\infty, \ldots, \infty)$. Stosując podejście zaproponowane przez O'Briena [56], a kontynuowane m.in. przez Jakubowskiego [37], wskazujemy wzór na dystrybuantę pozorną pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ (patrz: Twierdzenie 2.27 dla $d = 2$, Twierdzenie 2.57 dla dowolnego $d \geqslant 1$) oraz podajemy warunki równoważne istnieniu dystrybuanty pozornej (Twierdzenie 2.33, Twierdzenie 2.59). W dowodzie głównych rezultatów przedstawionych w rozdziale 2 kluczową rolę odgrywa nierówność typu Bonferroniego z artykułu Jakubowskiego i Rosińskiego [39, Theorem 2.1]. Korzystając z tej metody pokazujemy, że dla pól spełniających wprowadzony przez nas lokalny warunek mieszania $LD^{(r)}$ rozkład graniczny maksimów może być otrzymany z rozkładu łącznego r^d zmiennych (Twierdzenie 2.34, Twierdzenie 2.60). Znajdujemy wzór na indeks ekstremalny pola spełniającego warunek $LD^{(r)}$ (Twierdzenie 2.43, Twierdzenie 2.63), który dla 2-wymiarowego pola m-zależnego przyjmuje postać:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}\left(M_{(m+1,m+1)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(m,m+1)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(m+1,m)} > v_n\right) + \mathrm{P}\left(M_{(m,m)} > v_n\right)}{\mathrm{P}\left(X_{\mathbf{1}} > v_n\right)}$$

i stanowi odpowiednik wzoru (1) dla pól. Proponujemy także dalsze uogólnienia otrzymanej formuły (Twierdzenie 2.46, Twierdzenie 2.64). Ponadto odpowiadamy na pytanie o warunki równoważne istnieniu indeksu ekstremalnego pola (Twierdzenie 2.40, Twierdzenie 2.62).

W latach 60. Cramér [14] zainicjował badania ekstremów procesu gaussowskiego z czasem ciągłym. Rozdział 3 stanowi kontynuację rozważań Leadbettera, Lindgrena i Rootzéna [47, Theorem 12.3.4], Arendarczyka i Dębickiego [2, Lemma 4.3] oraz Tana i Hashorvy [72, Lemma 3.3] na temat stacjonarnych procesów gaussowskich. Badamy scentrowane stacjonarne pole gaussowskie $\{X(\mathbf{t}) : \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d\}$, $d \in \mathbb{N}$, o funkcji kowariancji $r(\mathbf{t}) := \mathrm{Cov}(X(\mathbf{t}), X(\mathbf{0}))$ spełniającej warunki:

$$r(\mathbf{t}) = 1 - |t_1|^{\alpha_1} - |t_2|^{\alpha_2} - \ldots - |t_d|^{\alpha_d} + o(|t_1|^{\alpha_1} + |t_2|^{\alpha_2} + \ldots + |t_d|^{\alpha_d}) \quad \text{gdy} \quad \mathbf{t} \to \mathbf{0},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_d \in (0, 2]$, oraz

$$r(\mathbf{t}) \ln \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_d^d} \to r \in [0, \infty) \quad \text{gdy} \quad \mathbf{t} \to \infty.$$

Dla pewnych funkcji $m_1, m_2, \ldots, m_d : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o własności

$$m_1(u) m_2(u) \cdots m_d(u) = \mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^d} X(\mathbf{t}) > u\right)^{-1} (1 + o(1)),$$

dla dowolnego $\mathbf{x} \in (0, \infty)^d$ oraz d-wymiarowych kostek postaci

$$\mathcal{P}^{\mathbf{x}}(u) := [0, x_1 m_1(u)] \times [0, x_2 m_2(u)] \times \ldots \times [0, x_d m_d(u)],$$

otrzymujemy następujący wynik:

$$\mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}_u^{\mathbf{x}}} X(\mathbf{t}) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-x_1 x_2 \ldots x_d \exp\left(-\frac{r}{2\gamma} + \sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right) \quad \text{gdy} \quad u \to \infty,$$

gdzie $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ jest stałą wyznaczoną przez funkcje $m_1, m_2, \ldots, m_d$ jako

$$\gamma = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln\left(\max\{m_1(u), m_2(u), \ldots, m_d(u)\}\right)}{u^2},$$

a $\mathcal{W}$ jest zmienną o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$ (patrz Twierdzenie 3.8 dla $d = 2$ oraz Twierdzenie 3.20 dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$). Wnioskujemy, że zachodzi analogiczne twierdzenie opisujące asymptotykę supremum pola $\{X(\mathbf{t})\}$ po zbiorze mierzalnym w sensie Jordana (Twierdzenie 3.12). Jako zastosowanie otrzymanych rezultatów podajemy twierdzenie opisujące asymptotyczne zachowanie supremum pola gaussowskiego po losowym zbiorze (Twierdzenie 3.18) i wyciągamy wnioski dotyczące indeksu ekstremalnego zdyskretyzowanego pola losowego wyznaczonego przez $\{X(\mathbf{t})\}$ (Twierdzenie 3.19).

Rozdział 4 zawiera rezultaty dotyczące asymptotyki maksimów częściowych ciągu wektorów losowych. Rozważamy słabo zależny, stacjonarny ciąg

$$\left\{\mathbf{X}_n = \left(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(w)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

gdzie wymiar $w \in \mathbb{N}$ jest dowolny, i określamy maksima

$$\mathbf{M}_n := \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^{(1)}, \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^{(2)}, \ldots, \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^{(w)}\right).$$

Wprowadzamy pojęcie wielowymiarowej dystrybuanty pozornej. Dowodzimy twierdzeń o postaci (Twierdzenie 4.27) i istnieniu (Twierdzenie 4.28) dystrybuanty pozornej ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$. Ponadto pokazujemy jak wykorzystać nierówność typu Bonferroniego do badania maksimów ciągów spełniających pewne lokalne warunki mieszania (Twierdzenie 4.32), podobnie jak czynimy to w przypadku pól losowych. W szczególności otrzymujemy rezultaty na temat wielowymiarowego indeksu ekstremalnego (Twierdzenie 4.36), które następnie porównujemy ze znanymi metodami wyznaczania indeksu wielowymiarowego.

Rozdział 2 niniejszej rozprawy opiera się na pracy [40] przygotowanej wspólnie z promotorem A. Jakubowskim. Rezultaty z rozdziału 3 stanowią uogólnienie wyników z artykułu napisanego przez autorkę we współpracy z K. Dębickim i E. Hashorvą [15].

Autorka dziękuje prof. dr. hab. Adamowi Jakubowskiemu za kierowanie jej pracą naukową, poświęcony czas i udzielone rady w związku z powstawaniem tej rozprawy. Ponadto dziękuje prof. dr. hab. Krzysztofowi Dębickiemu za opiekę naukową podczas stażu na Uniwersytecie Wrocławskim.

1

Teoria wartości ekstremalnych dla ciągów

1.1. Klasyczna teoria dla ciągów niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie

Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wyznaczonym przez dystrybuantę F. Klasyczna teoria wartości ekstremalnych koncentruje się wokół opisu asymptotycznego zachowania (gdy $n \to \infty$) częściowych maksimów $M_n := \max\{X_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Fischer, Tippet i Gniedenko [24, 30] dokonali charakteryzacji klasy typowych granic dla odpowiednio scentrowanych i unormowanych maksimów M_n. Dowiedzione przez nich *twierdzenie o typach ekstremalnych* (Twierdzenie 1.3) stanowi główny rezultat klasycznej teorii wartości ekstremalnych.

Załóżmy, że istnieją ciągi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb dodatnich oraz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych takie, że ciąg $\{(M_n - b_n)/a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posiada niezdegenerowaną granicę według rozkładu wyznaczoną przez dystrybuantę H, czyli

$$\mathrm{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = F(a_n x + b_n)^n \to H(x) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty \tag{1.1}$$

dla wszystkich punktów $x \in \mathbb{R}$, w których H jest ciągła. Rozkład, który otrzymujemy jako granicę w (1.1) nazywany jest *rozkładem ekstremalnym*. Jeżeli warunek (1.1) zachodzi, to mówimy, że rozkład F leży w *obszarze przyciągania* rozkładu ekstremalnego H.

Fakt 1.1. *Klasa rozkładów ekstremalnych pokrywa się z klasą rozkładów max-stabilnych, czyli takich, których dystrybuanta H dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ spełnia warunek*

$$H(A_n x + B_n)^n = H(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

dla pewnych ciągów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

O dystrybuantach G i H powiemy, że są *tego samego typu*, gdy $G(x) = H(ax + b)$ dla pewnych stałych $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia Chinczyna o zbieżności do typów [31, Theorem 2.1, strona 428] dostajemy:

Fakt 1.2. *Typ rozkładu ekstremalnego w (1.1) nie zależy od wyboru ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Jeśli warunek (1.1) jest spełniony oraz ponadto dla innego centrowania $\{b'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i normowania $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

mamy

$$\mathrm{P}\left(\frac{M_n - b'_n}{a'_n} \leqslant x\right) \to G(x), \quad \textit{gdy} \quad n \to \infty, \quad \textit{w punktach } x \in \mathbb{R} \textit{ ciągłości dystrybuanty } G,$$

to G i H są tego samego typu.

Przypomnijmy rezultat Fishera, Tippeta i Gniedenki [24, 30] charakteryzujący klasę rozkładów ekstremalnych lub, równoważnie, rozkładów max-stabilnych.

Twierdzenie 1.3 (O typach ekstremalnych). *Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Jeśli (1.1) zachodzi dla ciągów $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ oraz dla pewnej niezdegenerowanej dystrybuanty H, to H jest tego samego typu co jeden poniższych rozkładów:*

1. *rozkład Gumbela (typ I) o dystrybuancie*

$$G_1(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \textit{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

2. *rozkład Frécheta (typ II) z parametrem $\alpha > 0$ o dystrybuancie*

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{dla } x \leqslant 0; \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \textit{dla } x > 0, \end{cases}$$

3. *rozkład Weibulla (typ III) z parametrem $\alpha > 0$ o dystrybuancie*

$$G_{3,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) & \textit{dla } x < 0; \\ 0 & \textit{dla } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Poniżej podajemy także inny opis rodziny rozkładów ekstremalnych (patrz np. [18, Theorem 1.1.3]):

Wniosek 1.4. *Rodzina rozkładów ekstremalnych może być przedstawiona jako*

$$\left\{H_\gamma^{a,b} : a > 0, b \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}\right\},$$

gdzie $H_\gamma^{a,b}(x) := H_\gamma(ax+b)$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz

$$H_\gamma(x) \quad := \quad \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}), & \textit{gdy } \gamma \neq 0; \\ \exp(-e^{-x}) = \lim_{\chi\to 0} H_\chi(x), & \textit{gdy } \gamma = 0, \end{cases}$$

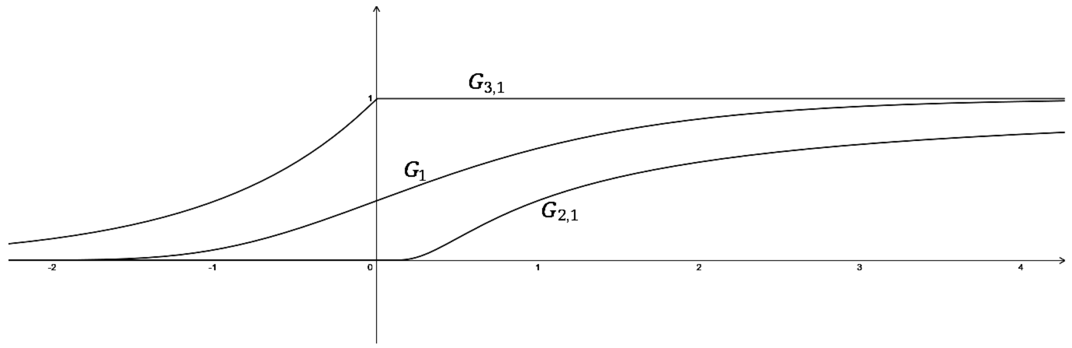
dla x spełniających warunek $1 + \gamma x > 0$.

W następnym przykładzie podajemy propozycję wyboru odpowiednich ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, gdy $\{X_n\}$ jest ciągiem zmiennych o rozkładzie normalnym [18, Example 1.1.7].

Przykład 1.5. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Kładąc $a_n := 1/\sqrt{2\ln n}$ i $b_n := \sqrt{2\ln n} - (\ln\ln n + \ln(4\pi))/(2\sqrt{2\ln n})$, otrzymujemy:

$$\mathrm{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \to \exp(-e^{-x}) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wynika stąd, że standardowy rozkład normalny leży w obszarze przyciągania rozkładu Gumbela.



Rysunek 1.1: Dystrybuanty rozkładów ekstremalnych: Gumbela G_1, Frécheta $G_{2,1}$ oraz Weibulla $G_{3,1}$.

W dalszej części podrozdziału nadal rozważamy ciąg $\{X_n\}$ niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie zadanym przez F. Nie zakładamy natomiast, że ma miejsce zbieżność (1.1). Żądamy jedynie, aby

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_n \leqslant v_n) = \rho$$

dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i pewnej liczby $\rho \in (0,1)$, co w przypadku ciągu niezależnych zmiennych równoważne jest warunkowi

$$\lim_{n\to\infty} F(v_n)^n = \rho. \tag{1.2}$$

Bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że ciąg $\{v_n\}$ jest niemalejący (jeśli tak nie jest, definiujemy nowy ciąg o wyrazie ogólnym $v_n^* := \min\{v_l : l \geqslant n\}$, dla którego (1.2) także zachodzi). Jak pokazuje poniższy przykład zaczerpnięty z pracy Doukhana, Jakubowskiego i Langa [16], warunek (1.2) jest istotnie słabszy od założenia (1.1).

Przykład 1.6. Rozważmy ciąg $\{X_n\}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą

$$F(x) = 1 - x^{-1/\sqrt{\ln x}} \quad \text{dla} \quad x > 1.$$

Ponieważ dla dowolnej stałej $c > 0$ mamy $x^{-c}/(1-F(x)) \to 0$ gdy $x \to \infty$, to F nie leży w obszarze przyciągania żadnego rozkładu ekstremalnego [18, Theorem 1.1.3]. Z drugiej strony dla ciągu $v_n := n^{\ln n}$ otrzymujemy $F(v_n)^n \to e^{-1}$ gdy $n \to \infty$.

Dystrybuantę F nazywa się *regularną* w sensie O'Briena, gdy dla pewnego (a stąd dla każdego) $\rho \in (0,1)$ istnieje ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ taki, że (1.2) zachodzi. O'Brien [55] podaje następującą charakteryzację dystrybuanty regularnej:

Fakt 1.7. *Dystrybuanta F jest regularna dokładnie wtedy, gdy*

$$F(F_*-) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\nearrow F_*} \frac{F(x)-F(x-)}{1-F(x)} = 0,$$

gdzie $F_* = \sup\{x : F(x<1)\}$ oraz $F(x-)$ oznacza lewostronną granicę funkcji F w punkcie x.

Zauważmy, że ciągła dystrybuanta F jest również regularna. Rzeczywiście, wybierając dla dowolnego $\rho \in (0,1)$ ciąg $\{v_n(\rho)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jako

$$v_n(\rho) := \min\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) = \left(1 - \frac{-\ln\rho}{n}\right)\right\}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} F(v_n(\rho))^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{-\ln\rho}{n}\right)^n = \rho.$$

Nietrudno pokazać, że mając ciąg $\{v_n\}$ i liczbę $\rho \in (0,1)$, dla których warunek (1.2) jest spełniony, znamy asymptotykę $\mathrm{P}(M_n \leqslant u_n)$ gdy $n \to \infty$ dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Fakt 1.8. *Niech $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i $\rho \in (0,1)$ będą takie, że (1.2) zachodzi. Wtedy*

$$\mathrm{P}\left(M_{\lfloor nt\rfloor} \leqslant v_n\right) \to \rho^t \quad \text{gdy } n \to \infty, \quad \text{jednostajnie dla } t \in [0,\infty).$$

Dowód. Korzystając z niezależności zmiennych dla dowolnego $t \geqslant 0$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{\lfloor nt\rfloor} \leqslant v_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_n \leqslant v_n)^t = \lim_{n\to\infty} F(v_n)^{nt} = \rho^t.$$

Jednostajna zbieżność wynika z monotoniczności funkcji $t \mapsto \mathrm{P}\left(M_{\lfloor nt\rfloor} \leqslant v_n\right)$ i ciągłości funkcji granicznej $t \mapsto \rho^t$. □

1.2. Teoria dla słabo zależnych ciągów stacjonarnych

W kolejnym podrozdziale przypominamy podstawowe twierdzenia teorii wartości ekstremalnych dla ciągów *stacjonarnych*. Interesują nas ciągi *słabo zależne* – w naszym rozumieniu ciągi o asymptotycznie niezależnych maksimach. Pierwszą część podrozdziału poświęcamy omówieniu różnorakich warunków opisujących tę własność. Jak się okazuje, asymptotyczne zachowanie maksimów słabo zależnych ciągów stacjonarnych jest pod wieloma względami zbliżone do zachowania maksimów ciągów niezależnych. W drugiej części podrozdziału Czytelnik znajdzie twierdzenie o typach ekstremalnych dla ciągów stacjonarnych, a także rezultaty dotyczące dystrybuanty pozornej oraz bardziej szczegółowe rozważania na temat indeksu ekstremalnego.

Zakładamy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest stacjonarny, czyli jego skończenie wymiarowe rozkłady są niezmiennicze ze względu na przesunięcia. Dla dowolnych $j \leqslant n$ oznaczamy $M_{l,n} := \max\{X_j :\ l \leqslant j \leqslant n\}$. Wtedy $M_n = M_{1,n}$.

1.2.1. Przegląd warunków mieszania

Na początek przypominamy warunek mocnego mieszania, zaproponowany w 1956 przez Rosenblatta [66], i wykorzystany w dowodzie centralnego twierdzenia granicznego dla zmiennych zależnych.

Definicja 1.9. Ciąg $\{X_n\}$ spełnia *warunek mocnego mieszania*, o ile istnieje ciąg $\{\phi_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ zbieżny do zera i taki, że

$$|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)| \leqslant \phi_l.$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich zbiorów $A \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $B \in \sigma(X_{n+l+1}, X_{n+l+2}, \ldots)$.

W 1965 Loynes [51] dowiódł pewnych twierdzeń granicznych dla maksimów ciągów stacjonarnych spełniających warunek mocnego mieszania, m.in. pokazał dla takich ciągów twierdzenie o typach ekstremalnych identyczne jak w przypadku zmiennych niezależnych. Następnie, w 1974 Leadbetter wzmocnił te wyniki wykazując, że tezy rezultatów Loynesa są prawdziwe również wtedy, gdy zastąpimy mocne mieszanie zaproponowanym przez Leadbettera słabszym warunkiem $D(u_n)$ [45,47].

Definicja 1.10. Ciąg $\{X_n\}$ spełnia *warunek* $D(u_n)$ dla ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, o ile dla $\alpha(n,l)$ określonych (dla $n,l \in \mathbb{N}$) jako

$$\alpha(n,l) := \max \left| \mathrm{P}\left(M_{\{i_1,i_2,\dots,i_p,j_1,j_2,\dots,j_q\}} \leqslant u_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\{i_1,i_2,\dots,i_p\}} \leqslant u_n\right) \mathrm{P}\left(M_{\{j_1,j_2,\dots,j_q\}} \leqslant u_n\right)\right|$$

(gdzie maksimum jest po $p,q \in \mathbb{N}$ i wszystkich układach $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p < j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leqslant n$ spełniających $j_1 - i_p > l$) istnieje ciąg $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $l_n = o(n)$ oraz $\alpha(n,l_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$.

Należy w tym miejscu dodać, że warunek $D(u_n)$ jest warunkiem powszechnie używanym w teorii wartości ekstremalnych. Jednym z ważniejszych rezultatów, przy dowodzie których zakłada się, że $D(u_n)$ jest spełniony, jest twierdzenie o typach ekstremalnych dla ciągów słabo zależnych, które przypomnimy w dalszej części tego rozdziału (patrz Twierdzenie 1.21).

W 1987 O'Brien [56] wprowadził warunek $AIM(u_n)$ (skrót od *asymptotic independence of maxima*).

Definicja 1.11. Ciąg $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ spełnia *warunek* $AIM(u_n)$ dla ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, o ile dla $\alpha(n,l)$ zdefiniowanych (dla $n,l \in \mathbb{N}$) jako

$$\alpha(n,l) := \max_{\substack{p,q\in\mathbb{N},\\ p,q\geqslant l,\\ p+l+q\leqslant n}} \left|\mathrm{P}(M_p \leqslant u_n, M_{p+l+1,\, p+l+q} \leqslant u_n) - \mathrm{P}(M_p \leqslant u_n)\,\mathrm{P}(M_q \leqslant u_n)\right|$$

istnieje ciąg $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $l_n = o(n)$ oraz $\alpha(n,l_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$.

Jak pokazuje kolejny przykład [56, strona 287] warunek $AIM(u_n)$ jest istotnie słabszy od warunku $D(u_n)$.

Przykład 1.12. Niech $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0,1)$. Niech Z będzie zmienną niezależną od $\{Y_n\}$, o rozkładzie $\mathrm{P}(Z = 1) = \mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{2}$. Dla $n \in \mathbb{Z}$ określamy $X_n := (-1)^{n+Z}Y_n$ oraz $v_n := 1 - \frac{1}{n}$. Wtedy ciąg $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ spełnia $AIM(v_n)$, podczas gdy warunek $D(v_n)$ nie zachodzi.

Założenie $AIM(u_n)$ mówi, że ma miejsce asymptotyczna niezależność maksimów po rozłącznych odcinkach, o ile tylko zadbamy o odpowiednią odległośc pomiędzy blokami, na które dzielimy. Chcąc pominąć niewygodny aspekt powyższego warunku dotyczący oddzielania bloków, Jakubowski [37] wprowadza warunki $B_T(u_n)$ i $B_\infty(u_n)$, które będziemy nazywać *warunkami łamania*.

Definicja 1.13. Mówimy, że ciąg $\{X_n\}$ spełnia *warunek* $B_T(u_n)$ dla ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i stałej $T > 0$, jeżeli dla

$$\beta_T(n) := \max_{\substack{p,q\in\mathbb{N} \\ p+q\leqslant T\cdot n}} |\,\mathrm{P}(M_{p+q} \leqslant u_n) - \mathrm{P}(M_p \leqslant u_n)\,\mathrm{P}(M_q \leqslant u_n)| \quad (\text{dla} \quad n \in \mathbb{N})$$

zachodzi $\beta_T(n) \to 0$ gdy $n \to \infty$.

Definicja 1.14. Ciąg $\{X_n\}$ spełnia *warunek* $B_\infty(u_n)$ dla ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ o ile dla

$$\beta(n) := \max_{p,q\in\mathbb{N}} |\,\mathrm{P}(M_{p+q} \leqslant u_n) - \mathrm{P}(M_p \leqslant u_n)\,\mathrm{P}(M_q \leqslant u_n)|, \quad (\text{dla} \quad n \in \mathbb{N})$$

zachodzi $\beta(n) \to 0$ gdy $n \to \infty$.

Ma miejsce następujący fakt [37, Proposition 2.5]:

Fakt 1.15. *Jeżeli ciąg* $\{v_n\}$ *jest taki, że* $\mathrm{P}(M_n \leqslant v_n) \to \rho \in (0,1)$, *to* $B_\infty(v_n)$ *zachodzi dokładnie wtedy, gdy warunek* $B_T(v_n)$ *jest spełniony dla wszystkich* $T > 0$.

Uwaga 1.16. Warunek $B_1(u_n)$ jest silniejszy od warunku $AIM(u_n)$. Jednak jeśli tylko $\mathrm{P}(M_{l_n} \leqslant u_n) \to 1$ gdy $n \to \infty$ (gdzie $\{l_n\}$ jest ciągiem z definicji $AIM(u_n)$), to mamy równoważność obu warunków.

Definicja 1.17. Ciąg $\{X_n\}$ jest m-zależny (dla pewnego $m \in \mathbb{N}$), gdy rodziny $\{X_j\}_{j\in\mathcal{A}}$ i $\{X_l\}_{l\in\mathcal{B}}$ są niezależne dla dowolnych skończonych zbiorów $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{Z}$, dla których $\inf\{|j-l| : j \in \mathcal{A}, l \in \mathcal{B}\} > m$.

Ciągi m-zależne stanowią podklasę ciągów słabo zależnych: m-zależność ciągu $\{X_n\}$ implikuje mocne mieszanie, a co za tym idzie również $D(u_n)$ i $AIM(u_n)$ dla dowolnego $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Ponadto, jeśli ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest taki, że $\mathrm{P}(X_1 > v_n) = o(1)$, to m-zależność pociąga warunek $B_T(v_n)$ dla dowolnego $T > 0$.

Jako ostatni przypominamy warunek $D^{(r)}(u_n)$ Chernicka, Hsinga i McCormicka [11] opisujący lokalne zależności ciągu zmiennych losowych.

Definicja 1.18. Załóżmy, że $\{X_n\}$ spełnia $D(u_n)$ dla ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Powiemy, że dla ciągu $\{X_n\}$ zachodzi *warunek* $D^{(r)}(u_n)$ (dla pewnego $r \in \mathbb{N}$), o ile

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}\left(X_1 > u_n \geqslant M_{2,r}\,, M_{r+1,\lfloor n/k_n\rfloor} > u_n\right) = 0$$

dla pewnych ciągów $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych spełniających $k_n\alpha(n, l_n) \to 0$ oraz $k_n l_n\,\mathrm{P}(X_1 > u_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$, dla $\alpha(n,l)$ takich jak w definicji 1.10.

Zauważmy, że ciągi spełniające warunek $D^{(r)}(u_n)$ spełniają $D^{(r+1)}(u_n)$. Co więcej, jeśli wiemy, że $D(u_n)$ zachodzi, to aby pokazać, że warunek $D^{(r)}(u_n)$ jest spełniony wystarczy stwierdzić, że

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=r+1}^{\lfloor n/k_n\rfloor} \mathrm{P}(X_1 > u_n \geqslant M_{2,r}\,,\ X_i > u_n) = 0, \tag{1.3}$$

lub wykazać słabszą własność

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n \sum_{i=r+1}^{\lfloor n/k\rfloor} \mathrm{P}(X_1 > u_n \geqslant M_{2,r}\,,\ X_i > u_n) = 0. \tag{1.4}$$

Zwróćmy uwagę, że warunek (1.4) dla $r = 1$ to warunek $D'(u_n)$ Leadbettera i in. [47], natomiast (1.3) dla $r = 2$ jest warunkiem $D''(u_n)$ wprowadzonym przez Leadbettera i Nandagopalana [49].

Przykład 1.19. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem m-zależnym. Załóżmy, że dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zachodzi $\limsup_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}(X_1 > v_n) < \infty$. Wtedy $\{X_n\}$ spełnia warunek $D^{(r)}(v_n)$ dla każdego $r \geqslant m+1$.

Kolejny przykład dotyczy procesów gaussowskich (zobacz [47, rozdział 3]).

Przykład 1.20. Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest procesem gaussowskim, $X_1, X_2, X_3, \ldots$ mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, a dla ciągu kowariancji $r_n := \mathrm{Cov}(X_n, X_0)$ zachodzi warunek Bermana:

$$r_n \ln n \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{1.5}$$

Wtedy spełnione są warunki $D(v_n)$ i $D'(v_n)$ dla każdego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ o własności $\mathrm{P}(M_n \leqslant v_n) \to \rho$ dla pewnego $\rho \in (0,1)$.

1.2.2. Twierdzenia graniczne dla maksimów ciągów stacjonarnych

W niniejszym podrozdziale prezentujemy twierdzenia graniczne dla maksimów słabo zależnego stacjonarnego ciągu $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. W pierwszej kolejności przypominamy twierdzenie o typach ekstremalnych dla ciągów stacjonarnych dowiedzione po raz pierwszy przez Loynesa [51]. Poniżej przedstawiamy ogólną wersję Leadbettera [47]. Twierdzenie to mówi, że klasa słabych granic odpowiednio scentrowanych i unormowanych maksimów słabo zależnych ciągów stacjonarnych pokrywa się z klasą słabych granic scentrowanych i unormowanych maksimów ciągów niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie.

Twierdzenie 1.21 (O typach ekstremalnych dla ciągów stacjonarnych)**.** *Niech ciąg $\{X_n\}$ będzie taki, że ma miejsce zbieżność*

$$\mathrm{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \to H(x), \quad \textit{gdy} \quad n \to \infty, \tag{1.6}$$

we wszystkich punktach x ciągłości niezdegenerowanej dystrybuanty H, dla pewnych ciągów $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wtedy, jeśli dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek Leadbettera $D(a_n x + b_n)$, to H jest tego samego typu co G_1, $G_{2,\alpha}$ lub $G_{3,\alpha}$.

Ilustrujemy powyższe twierdzenie następującym przykładem Bermana [6]:

Przykład 1.22. Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest procesem gaussowskim, zmienne $X_1, X_2, X_3, \ldots$ mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, a ciąg kowariancji $r_n = \mathrm{Cov}(X_n, X_0)$ spełnia warunek Bermana (1.5). Wtedy

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right) \to \exp(-e^{-x}) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty,$$

gdzie ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są takie jak w Przykładzie 1.5.

W pozostałej części podrozdziału przedstawiamy rzadziej używane podejście do problemu asymptotyki maksimów, w którym nie zakładamy słabej zbieżności (1.6). Żądamy jedynie, aby istniał ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, dla którego

$$\mathrm{P}(M_n \leqslant v_n) \to \rho \quad \text{gdy } n \to \infty, \quad \text{dla pewnej liczby } \rho \in (0,1), \tag{1.7}$$

co stanowi odpowiednik założenia (1.2). Pytamy o asymptotyczne zachowanie prawdopodobiestw $\mathrm{P}(M_n \leqslant u_n)$, gdy $n \to \infty$, dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Z rozważanym ciągiem $\{X_n\}$ stowarzyszamy ciąg $\{\hat{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zadanym przez $F(x) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant x)$. Określamy $\hat{M}_n := \max\{\hat{X}_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Okazuje się, że w pewnych szczególnych sytuacjach maksima M_n zachowują się asymptotycznie tak samo jak maksima $\hat{M}_n$. Mówi o tym następujący fakt [46, Theorem 3.4.1]:

Fakt 1.23. *Załóżmy, że $\{X_n\}$ spełnia warunki $D(v_n)$ i $D'(v_n)$ dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ oraz (1.7) zachodzi. Wtedy*

$$\mathrm{P}(M_n \leqslant v_n) - \mathrm{P}(\hat{M}_n \leqslant v_n) = \mathrm{P}(M_n \leqslant v_n) - F(v_n)^n = o(1).$$

Rozważmy ogólniejszy problem: kiedy maksima M_n można aproksymować maksimami częściowymi pewnego ciągu $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie? Odpowiedzi udzielimy wykorzystając zaproponowane przez O'Briena [56] pojęcie dystrybuanty pozornej.

Definicja 1.24. Dystrybuantę G nazywamy *dystrybuantą pozorną* ciągu $\{X_n\}$, jeśli

$$\mathrm{P}(M_n \leqslant u_n) - G(u_n)^n \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty,$$

dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Uwaga 1.25. Dystrybuanta G jest dystrybuantą pozorną ciągu $\{X_n\}$, o ile

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} |\,\mathrm{P}(M_n \leqslant x) - G(x)^n| \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Uwaga 1.26. Dystrybuanta pozorna nie jest wyznaczona jednoznacznie. Istotne jest wyłącznie jej zachowanie w pobliżu punktu $F_* = G_*$.

Posługując się warunkiem mieszania B_T można otrzymać charakteryzację słabo zależnych ciągów stacjonarnych, dla których istnieje dystrybuanta pozorna [37, Theorem 1.3].

Twierdzenie 1.27. *Niech ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i stała $\rho \in (0,1)$ będą takie, że warunek (1.7) zachodzi. Wtedy $\{X_n\}$ ma dystrybuantę pozorną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia $B_T(v_n)$ dla każdego $T > 0$. Ponadto dystrybuanta pozorna może być zadana wzorem:*

$$G(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x < v_1; \\ \rho^{1/n} & \text{dla } v_n \leqslant x < v_{n+1}; \\ 1 & \text{dla } x \geqslant F_*. \end{cases}$$

W dowodzie powyższego twierdzenia bardzo ważną rolę odgrywa następujący fakt [37, Proposition 2.5]:

Fakt 1.28. *Załóżmy, że ciąg $\{X_n\}$ spełnia warunek $B_\infty(v_n)$ dla ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ takiego, że (1.7) zachodzi. Wtedy*

$$\mathrm{P}\left(M_{\lfloor nt\rfloor} \leqslant v_n\right) \to \rho^t \quad \textit{gdy } n \to \infty, \quad \textit{jednostajnie dla } t \in [0,\infty).$$

Zauważmy, że powyższy fakt stanowi uogólnienie Faktu 1.8 prawdziwego dla ciągu zmiennych niezależnych. Należy w tym miejscu dodać, że tezy analogicznej do Faktu 1.28 dowiódł również O'Brien dla ciągu spełnijącego $AIM(v_n)$ (porównaj z dowodem [56, Theorem 4.1]).

Spójrzmy na kolejny przykład.

Przykład 1.29. Niech ciąg $\{X_n\}$ będzie określony jako

$$X_n := \max\{Z_n, Z_{n+1}, \ldots, Z_{n+m}\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$ oraz ciągu $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Wtedy dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathrm{P}(M_n \leqslant u_n) - \mathrm{P}(X_1 \leqslant u_n)^{n(m+1)^{-1}} \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Stąd $G(x) := \mathrm{P}(X_1 \leqslant x)^{(m+1)^{-1}}$ jest dystrybuantą pozorną ciągu $\{X_n\}$.

Okazuje się, że podobnie jak w powyższym przykładzie, również w wielu innych, bardziej skomplikowanych sytuacjach, maksima M_n można przybliżać maksimami ciągu zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie zadanym przez $G(x) = F(x)^\theta$, gdzie $\theta \in (0,1]$ jest pewną stałą. Obserwację tę sformalizował Leadbetter [46] wprowadzając pojęcie indeksu ekstremalnego. Poniższa, nieco ogólniejsza definicja indeksu ekstremalnego została zaproponowana przez Jakubowskiego [37].

Definicja 1.30. Stacjonarny ciąg $\{X_n\}$ ma *indeks ekstremalny* $\theta \in (0,1]$, o ile

$$\mathrm{P}(M_n \leqslant u_n) - \mathrm{P}(\hat{M}_n \leqslant u_n)^\theta = \mathrm{P}(M_n \leqslant u_n) - F(u_n)^{n\theta} = o(1) \tag{1.8}$$

dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Uwaga 1.31. Leadbetter zdefiniował i rozważał także indeks ekstremalny równy zero. My nie będziemy poświęcać uwagi zagadnieniom z tym związanym.

Uwaga 1.32. Liczba $\theta \in (0,1]$ jest indeksem ekstremalnym ciągu $\{X_n\}$ dokładnie wtedy, gdy ciąg ten posiada dystrybuantę pozorną postaci $G(x) := F(x)^\theta$.

Uwaga 1.33. Istnieje ciąg stacjonarny $\{X_n\}$, który ma dystrybuantę pozorną regularną w sensie O'Briena oraz nie posiada indeksu ekstremalnego $\theta \in (0,1]$ [16, Theorem 7].

Indeks ekstremalny został wprowadzony jako narzędzie do badania ciągu stacjonarnego $\{X_n\}$ spełniającego warunek (1.7) dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dla klasy takich ciągów definicja Leadbettera pokrywa się z powyższą definicją Jakubowskiego. Nietrudno jednak o przykład ciągu niespełniającego założenia (1.7), dla którego indeks ekstremalny w sensie definicji 1.30 istnieje.

Przykład 1.34. Niech ciąg $\{X_n\}$ będzie ciągiem z Przykładu 1.29, gdzie zmienne Y_n mają rozkład Poissona $Pois(\lambda)$ z parametrem $\lambda > 1$. Wtedy indeks ekstremalny w sensie definicji 1.30 istnieje i $\theta = \frac{1}{m+1}$. Z drugiej strony, indeks ekstremalny w sensie definicji Leadbettera nie istnieje, ponieważ nie istnieje ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający (1.7).

Przykład 1.29 podaje konstrukcję ciągu losowego o indeksie ekstremalnym $\theta = \frac{1}{m+1}$, dla dowolnego $m = 0, 1, 2, \ldots$. W oparciu o Przykład 1.20 i Fakt 1.23 można pokazać, że stacjonarny scentrowany i unormowany proces gaussowski z ciągiem kowariancji $r_n = \mathrm{Cov}(X_n, X_0)$ spełniającym (1.5) ma indeks $\theta = 1$. Okazuje się, że każda liczba $\theta \in (0, 1]$ jest indeksem ekstremalnym pewnego ciągu losowego. Zanim podamy odpowiedni przykład, przypomnimy definicje funkcji wolno i regularnie zmieniających się.

Definicja 1.35. O funkcji $l : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ powiemy, że jest funkcją *wolno zmieniającą się*, o ile dla dowolnego $a > 0$ zachodzi $l(ax)/l(x) \to 1$ gdy $x \to \infty$. Natomiast funkcję $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ postaci $g(u) = x^{-\alpha} \cdot l(x)$ dla pewnej wolno zmieniającej się fukcji l nazywamy funkcją regularnie zmieniającą się o indeksie $-\alpha$ (w myśl definicji Karamaty [42]).

Przykład 1.36. [19, Example 8.1.1 (d)] Niech $\{X_n\}$ będzie *procesem ruchomych średnich* określonym jako:

$$X_n := \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i Z_{n+i}, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{Z},$$

gdzie $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ to ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Zakładamy, że $g(u) := \mathrm{P}(|Z_1| > x)$ jest funkcją regularnie zmieniającą się o indeksie α, ponadto warunki

$$\frac{\mathrm{P}(Z_1 > x)}{\mathrm{P}(|Z_1| > x)} \to p \quad \text{oraz} \quad \frac{\mathrm{P}(Z_1 < -x)}{\mathrm{P}(|Z_1| > x)} \to q \quad (\text{gdy } x \to \infty)$$

zachodzą dla pewnego $p \in (0, 1]$ i $q := 1 - p$. Wtedy ciąg $\{X_n\}$ ma indeks ekstremalny

$$\theta = \frac{\gamma_+^\alpha p + \gamma_-^\alpha q}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\gamma_i|^\alpha \left(p\mathbb{1}_{\{\gamma_i>0\}} + q\mathbb{1}_{\{\gamma_i<0\}}\right)},$$

gdzie $\gamma_+ := \max\{\gamma_i \vee 0 : \ i \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma_- := \max\{-\gamma_i \vee 0 : \ i \in \mathbb{Z}\}$.

Naturalne jest pytanie: *jak interpretować indeks ekstremalny*? W literaturze znajdujemy, że indeks ekstremalny nazywany jest *miarą zależności krótkiego zasięgu*. Wraz ze wrostem takiej zależności indeks maleje. Dla przykładu, indeks ekstremalny $\theta = 1$ mają ciągi o bardzo słabych lokalnych zależnościach, m.in. ciągi zmiennych niezależnych oraz ciągi spełniające warunek $D'(u_n)$. Co więcej, jak wykazuje Leadbetter [46], duże wartości ciągu stacjonarnego posiadającego indeks ekstremalny θ grupują się w kilkuelementowe klastry, których średni rozmiar wynosi θ^{-1}. Rezultat ten został uogólniony przez Hsinga, Hüslera i Leadbettera [35], którzy pokazali, że punktowy proces przekroczeń określony dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subset \mathbb{R}$ jako

$$N_\omega(B) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_k>u_n\}}(\omega)\mathbb{1}_B(k/n)$$

zbiega do złożonego procesu Poissona z klastrami o średnim rozmiarze równym θ^{-1}.

Powołując się na rezultaty O'Briena [55, 56] możemy wskazać metodę *liczenia indeksu ekstremalnego*. Przypuśćmy na chwilę, że $\{X_n\}$ posiada indeks ekstremalny θ. Ponadto załóżmy, że ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest taki, że (1.7) zachodzi. O'Brien pokazuje jak skonstruować ciąg $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ spełniający $r_n = o(n)$ tak, aby zachodził wzór

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_{2,r_n} \leqslant v_n \mid X_1 > v_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_{r_n-1} \leqslant v_n \mid X_{r_n} > v_n), \tag{1.9}$$

przy założeniu, że ciąg $\{X_n\}$ spełnia $AIM(v_n)$ (porównaj [56, Theorem 2.1]). W szczególnym przypadku, gdy $\{X_n\}$ jest ciągiem m-zależnym lub innym ciągiem losowym spełniającym lokalny warunek $D^{(m+1)}(v_n)$, wzór (1.9) redukuje się do postaci

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_{2,m+1} \leqslant v_n \mid X_1 > v_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_m \leqslant v_n \mid X_{m+1} > v_n) \qquad (1.10)$$

(porównaj [11, Corollary 1.3]). Formuła (1.10) dla ciągów m-zależnych może być łatwo otrzymana poprzez zastosowanie nierówności typu Bonferroniego [38, Lemma 3.2].

Wzór (1.9) był intensywnie wykorzystywany do aproksymacji indeksu ekstremalnego. Wyczerpujące informacje dotyczące estymacji indeksu ekstremalnego zawarte są w pracach [23,33,44,64,65,69,75].

Przykład 1.37. Rozważmy ciąg $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ niezależnych nieujemnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zadanym przez dystrybuantę regularną w sensie (1.2). Niech W będzie zmienną o rozkładzie $\mathrm{P}(W = 1) = \mathrm{P}(W = 0) = 1/2$, niezależną od $\{Z_n\}$. Określamy ciąg stacjonarny $\{X_n\}$ jako

$$X_n := WZ_n, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Z regularności rozkładu zmiennej Z_1 dostajemy, że dla dowolnej liczby $\varrho \in (0, 1)$ istnieje ciąg $\{v_n(\varrho)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, dla którego $\mathrm{P}(Z_1 \leqslant v_n(\varrho))^n \to \varrho$ gdy $n \to \infty$. Dla maksimów częściowych ciągu $\{X_n\}$ otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_n \leqslant v_n(\varrho)) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(Z_1 \leqslant v_n(\varrho))^n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\varrho+1}{2}.$$

Z drugiej strony, dla maksimów $\hat{M}_n$ stowarzyszonego ciągu zmiennych niezależnych mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\hat{M}_n \leqslant v_n(\varrho)\right) = \lim_{\to\infty} \mathrm{P}(WZ_1 \leqslant v_n(\varrho)) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(Z_1 \leqslant v_n(\varrho))\right)^n = \sqrt{\varrho}.$$

Z dowolności wyboru $\varrho \in (0, 1)$ wnioskujemy, że ciąg $\{X_n\}$ nie ma indeksu ekstremalnego. Zauważmy, że mimo to posiada on niezdegenerowaną dystrybuantę pozorną. Zobacz również [19, Example 8.1.4].

Zamykamy niniejszy rozdział podając warunki gwarantujące istnienie indeksu ekstremalnego. W świetle Uwagi 1.32 widzimy, że pytając o istnienie indeksu ekstremalnego, pytamy właściwie o istnienie dystrybuanty pozornej szczególnej postaci. Korzystając z Twierdzenia 1.27 otrzymujemy charakteryzację ciągów, dla których istnieje indeks ekstremalny:

Twierdzenie 1.38. *Załóżmy, że dystrybuanta $F(u) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant u)$ jest regularna. Ciąg $\{X_n\}$ posiada indeks ekstremalny $\theta \in (0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i liczba $\tau > 0$ takie, że*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}(X_1 > v_n) &= \tau, \\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M_n \leqslant v_n) &= \exp(-\theta\tau) \end{aligned}$$

oraz zachodzi warunek $B_\infty(v_n)$.

2

Maksima dyskretnych stacjonarnych pól losowych

2.1. Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale rozważamy d-wymiarowe pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$, które jest *stacjonarne*, tzn. dla dowolnego skończonego zbioru $\mathcal{A}\subset\mathbb{Z}^d$ i dla każdego $\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d$ zachodzi równość według rozkładu:

$$\{X_{\mathbf{n}+\mathbf{j}}\}_{\mathbf{n}\in\mathcal{A}} \stackrel{D}{=} \{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathcal{A}}.$$

Dla dowolnego $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$ przyjmujemy notację $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_d)$. Wyróżniamy elementy $\mathbf{0}:=(0,0,\ldots,0)$ oraz $\mathbf{1}:=(1,1,\ldots,1)$, ponadto oznaczamy $\boldsymbol{\infty}:=(\infty,\infty,\ldots,\infty)$. Zbiór indeksów $\mathbb{Z}^d$ rozpatrujemy z dodawaniem po współrzędnych (dla $\mathbf{j},\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$ mamy $\mathbf{j}+\mathbf{n}=(j_1+n_1,j_2+n_2,\ldots,j_d+n_d)$) oraz z porządkiem po współrzędnych (dla $\mathbf{j},\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$ zachodzi $\mathbf{j}\leqslant\mathbf{n}$, o ile $j_1\leqslant n_1$, $j_2\leqslant n_2$, ..., $j_d\leqslant n_d$). Określamy $a\cdot\mathbf{n}:=(an_1,an_2,\ldots,an_d)$, $\mathbf{n}/b:=(n_1/b,n_2/b,\ldots,n_d/b)$ i $\|\mathbf{n}\|_\infty:=\max\{|n_1|,|n_2|,\ldots,|n_d|\}$ dla $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. O ciągu $\{\mathbf{j}(n)=(j_1(n),j_2(n),\ldots,j_d(n))\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Z}^d$ piszemy, że $\mathbf{j}(n)\to\boldsymbol{\infty}$ gdy $n\to\infty$, jeżeli $j_i(n)\to\infty$ dla wszystkich $i\in\{1,2,\ldots,d\}$.

Dla każdego skończonego niepustego zbioru $\mathcal{A}\subset\mathbb{Z}^d$ określamy

$$M_{\mathcal{A}}:=\max\{X_{\mathbf{j}}:\ \mathbf{j}\in\mathcal{A}\},$$

ponadto $M_\emptyset:=-\infty$. Definiujemy d-wymiarową kostkę w $\mathbb{Z}^d$ wyznaczoną przez wierzchołki $\mathbf{j}\leqslant\mathbf{n}$ jako $[\mathbf{j},\ \mathbf{n}]:=\{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d:\ \mathbf{j}\leqslant\mathbf{l}\leqslant\mathbf{n}\}$ i oznaczamy $M_{\mathbf{j},\mathbf{n}}:=M_{[\mathbf{j},\ \mathbf{n}]}$. W niniejszym rozdziale przedstawiamy rezultaty opisujące asymptotykę (gdy $\mathbf{n}\to\boldsymbol{\infty}$) maksimów częściowych

$$M_{\mathbf{n}}:=M_{\mathbf{1},\mathbf{n}}=\max\{X_{\mathbf{j}}:\mathbf{1}\leqslant\mathbf{j}\leqslant\mathbf{n}\}.$$

Stacjonarne pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ to w szczególności pole zmiennych o jednakowym rozkładzie wyznaczonym przez dystrybuantę $F(x):=\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}}\leqslant x)$, $x\in\mathbb{R}$. Z polem $\{X_{\mathbf{n}}\}$ stowarzyszamy pole $\{\hat{X}_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie zadanym przez F i określamy $\hat{M}_{\mathbf{n}}:=\max\{\hat{X}_{\mathbf{j}}:\mathbf{1}\leqslant\mathbf{j}\leqslant\mathbf{n}\}$.

Wyjątkową uwagę poświęcamy polom m-zależnym (dla pewnego $m\in\mathbb{N}$). Pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ nazywamy m-zależnym, gdy rodziny $\{X_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathcal{A}}$ i $\{X_{\mathbf{l}}\}_{\mathbf{l}\in\mathcal{B}}$ są niezależne dla dowolnych skończonych zbiorów indeksów $\mathcal{A},\mathcal{B}\subset\mathbb{Z}^d$ takich, że

$$\mathrm{dist}(\mathcal{A},\mathcal{B}):=\inf\{\|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty:\mathbf{j}\in\mathcal{A},\mathbf{l}\in\mathcal{B}\}>m.$$

Leadbetter i Rootzén [50, Theorem 4.1] dowodzą twierdzenia o typach ekstremalnych dla pól. Pokazują, że słaba granica odpowiednio scentrowanych i unormowanych maksimów częściowych pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełniającego warunek CW-mieszania jest typu Gumbela, Frécheta lub Weibulla (porównaj z Twierdzeniem 1.21 dla ciągów). Podczas gdy postać rozkładów granicznych jest znana, znalezienie odpowiednich ciągów normujących i centrujących bywa niełatwe. Wybór takich ciągów często mocno zależy od lokalnych zależności rozważanego pola losowego. W niniejszym rozdziale opisujemy wpływ lokalnych zależności na zachowanie maksimów pola losowego w języku indeksu ekstremalnego i dystrybuanty pozornej. Szczególny przypadek $d = 1$, gdy $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest ciągiem losowym, został omówiony wcześniej w podrozdziale 1.2.2.

Jednym z interesujących nas problemów jest znalezienie wzoru na indeks ekstremalny pola losowego. Wcześniej zagadnieniem tym zajmowali się nieliczni autorzy, m.in. Ferreira i Pereira [22] oraz Turkman [73] prowadzący ogólne rozważania czy Basrak i Tafro [3], którzy wskazali wzór na indeks ekstremalny dla pola ruchomych średnich i pola ruchomych maksimów. Naturalnym pomysłem jest przeniesienie rezultatu O'Briena wyrażonego wzorami (1.9) i (1.10) na przypadek wielowymiarowy. Zauważmy, że wspomniane wzory mają następującą własność: podstawiając $r_n := m + 1$ we wzorze (1.9) otrzymujemy formułę (1.10), dzięki której możemy obliczyć indeks ekstremalny ciągu m-zależnego na podstawie rozkładu łącznego kolejnych $m + 1$ zmiennych z rozważanego ciągu.

Turkman [73, Theorem 1] proponuje pewne uogólnienie wzoru (1.9). Otrzymuje indeks ekstremalny d-wymiarowego pola losowego jako granicę iloczynu d prawdopodobieństw warunkowych dla maksimów częściowych po rosnących prostokątnych blokach o wymiarach $r_1(n) \times r_2(n) \times \ldots \times r_d(n)$, $r_1(n) \times r_2(n) \times \ldots \times r_{d-1}(n) \times 1$, $r_1(n) \times r_2(n) \times \ldots \times r_{d-2}(n) \times 1 \times 1, \ldots, r_1(n) \times r_2(n) \times 1 \times \ldots \times 1$ oraz $r_1(n) \times 1 \times \ldots \times 1$ (patrz (2.26) dla $d = 2$ i (2.36) dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$). Gdy $d = 1$, to rezultat Turkmana pokrywa się z formułą (1.9) O'Briena. Jednak jeśli tylko $d > 1$, to poprzez podstawienie $r_i(n) := m + 1$ (dla $i = 1, 2, \ldots, d$) nie otrzymujemy poprawnego wzoru na indeks ekstremalny pola m-zależnego (porównaj Przykład 2.42).

Szukamy wzoru na indeks ekstremalny, który stanowi uogólnienie formuły (1.10) i pozwola nam wyliczyć indeks pola m-zależnego na podstawie rozkładu łącznego skończonej liczby zmiennych. Stawiając przed sobą podobny cel, Ferreira i Pereira [22] proponują dla $d = 2$ wzór postaci:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(M^*_{\mathbf{r}} \leqslant v_n \mid X_{\mathbf{1}} > v_n), \tag{2.1}$$

gdzie $\mathbf{r} \geqslant \mathbf{1}$ jest ustalone, $M^*_{\mathbf{r}} := \max\{X_{\mathbf{j}} : \mathbf{1} \leqslant \mathbf{j} \leqslant \mathbf{r},\ \mathbf{j} \neq \mathbf{1}\}$ oraz $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest pewnym ciągiem liczb rzeczywistych. Okazuje się jednak, że istnieje bardzo prosty przykład pola 1-zależnego, dla którego indeks ekstremalny istnieje, ale formuła (2.1) nie jest spełniona (porównaj Przykład 2.45). Pokażemy, w jaki sposób wykorzystać nierówność typu Bonferroniego [39, Theorem 2.1], aby otrzymać nowy wzór na indeks ekstremalny pola losowego (patrz Twierdzenie 2.43 i Twierdzenie 2.63). Przedstawiony tok rozumowania w pełni wyjaśni przypadek pola m-zależnego. Uzyskamy także wgląd w asymptotykę maksimów pól o bardziej złożonej strukturze zależności, podobnie jak zrobili to Chernick, Hsing i McCormick [11] dla ciągów zmiennych losowych.

Wyniki, o których mowa w dalszej części rozdziału prawdziwe są dla pól dowolnego wymiaru $d \geqslant 1$. W celu zachowania przejrzystości przedstawionych rozumowań, w podrozdziale 2.2 prezentujemy twierdzenia ze szczegółowymi dowodami dla $d = 2$, gdzie rachunki są nieco prostsze niż w przypadku dowolnego $d \geqslant 1$. W podrozdziale 2.3 podajemy rezultaty dla pól dowolnego wymiaru wraz ze szkicami niektórych dowodów.

2.2. Maksima dwuwymiarowych pól losowych

W podrozdziale tym skupiamy się na przypadku $d = 2$ i rozważamy stacjonarne pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$. Ponadto ustalamy niemalejący ciąg

$$\{\boldsymbol{\psi}(n) = (\psi_1(n), \psi_2(n))\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$$

taki, że $\psi_1(n) \to \infty$, $\psi_2(n) \to \infty$ oraz $\psi_1(n)\psi_2(n) \sim n^2$ (gdy $n \to \infty$). Niektóre z naszych rozważań dotyczyć będą szczególnej sytuacji, gdy $\boldsymbol{\psi}(n) = \boldsymbol{\psi}_0(n) := (n, n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Interesuje nas asymptotyczne zachowanie maksimów $M_{\mathbf{n}}$ gdy $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$ *wokół* $\boldsymbol{\psi}$ w myśl definicji 2.5. Zwykle zakładać będziemy, że

$$\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) \to \rho \quad \text{gdy} \quad n \to \infty, \quad \text{dla} \quad \rho \in (0, 1), \tag{2.2}$$

dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, co stanowi odpowiednik warunku (1.7).

2.2.1. Podstawowe pojęcia

Przedmiotem naszych badań jest pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$, które ma asymptotycznie niezależne maksima w sensie następującego warunku mieszania.

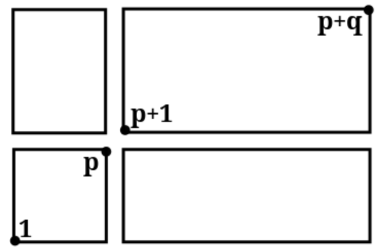
Definicja 2.1. Powiemy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia *warunek* $B_T(v_n)$ *wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$ dla pewnego $T > 0$ i ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, o ile

$$\beta_T(n) := \max_{\substack{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{N}_0^2 \\ \mathbf{p}+\mathbf{q}\leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)}} \Big| \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}} \leqslant v_n\right) \mathrm{P}\left(M_{(p_1,q_2)} \leqslant v_n\right) \times \mathrm{P}\left(M_{(q_1,p_2)} \leqslant v_n\right) \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{q}} \leqslant v_n\right) \Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Powyższy warunek $B_T(v_n)$ jest odpowiednikiem warunku łamania wprowadzonego wcześniej dla ciągów (patrz definicja 1.13). Oznacza, że możemy *połamać* duży prostokąt $[\mathbf{1}, \mathbf{p}+\mathbf{q}]$ na cztery mniejsze: $[\mathbf{1}, \mathbf{p}]$, $[(1, p_2+1), (p_1, p_2+q_2)]$, $[(p_1+1, 1), (p_1+q_1, p_2)]$ i $[\mathbf{p}+\mathbf{1}, \mathbf{p}+\mathbf{q}]$ (tak jak na rysunku 2.1), a następnie aproksymować prawdopodobieństwo $\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \leqslant v_n\right)$ przez iloczyn czterech odpowiednich prawdopodobieństw dla maksimów po mniejszych blokach. W sformułowaniu warunku $B_T(v_n)$ w celu uproszczenia zapisu skorzystaliśmy ze stacjonarności pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$.

Uwaga 2.2. Innym warunkiem opisującym słabą zależność pola losowego jest warunek CW-mieszania wprowadzony przed Leadbettera i Rootzéna [50] (porównaj także [22]).

Dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełniającego $B_1(v_n)$ wprowadzamy warunek $LD^{(r)}(v_n)$ (skrót od *local dependencies*) opisujący lokalne zależności.



Rysunek 2.1: Podział prostokąta $[\mathbf{1}, \mathbf{p}+\mathbf{q}]$ na cztery bloki: $[\mathbf{1}, \mathbf{p}]$, $[(1, p_2+1), (p_1, p_2+q_2)]$, $[(p_1+1, 1), (p_1+q_1, p_2)]$ i $[\mathbf{p}+\mathbf{1}, \mathbf{p}+\mathbf{q}]$.

Definicja 2.3. Powiemy, że pole $\{X_\mathbf{n}\}$ spełnia *warunek* $LD^{(r)}(v_n)$ *wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$ (dla pewnego $r \in \mathbb{N}$), o ile

$$k_n^2 \sum_{\substack{\mathbf{j},\mathbf{l} \in \{1,2,\ldots,\lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor\} \times \{1,2,\ldots,\lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor\}, \\ \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty \geqslant r}} \mathrm{P}(X_\mathbf{j} > v_n, X_\mathbf{l} > v_n) \to 0, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty,$$

dla pewnego ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ takiego, że $k_n^2 \beta_1(n) \to 0$ (gdzie $\{\beta_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem z definicji warunku $B_1(v_n)$) i $k_n \psi_i(n) \mathrm{P}(X_\mathbf{1} > v_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$, dla $i = 1, 2$.

Zauważmy, że warunek $LD^{(r)}(v_n)$ ma podobny charakter do warunku $D'(v_n)$ Leadbettera i in. [47] gdy $r = 1$, do warunku $D''(v_n)$ Leadbettera i Nandagopalana [49] gdy $r = 2$ oraz do warunku $D^{(r)}(v_n)$ wprowadzonego przez Chernicka i in. [11] dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Uwaga 2.4. Niech $\{X_\mathbf{n}\}$ będzie polem m-zależnym oraz niech $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem takim, że

$$\limsup_{n\to\infty} n^2 \mathrm{P}(X_\mathbf{1} > v_n) < \infty.$$

Wtedy $B_1(v_n)$ zachodzi na mocy Faktu 2.19 (dowodzonego w dalszej części rozdziału) i dlatego $\beta_1(n) \to 0$. Ponadto z przyjętego założenia wynika, że $\psi_i(n) \mathrm{P}(X_\mathbf{1} > v_n) \to 0$ dla $i = 1, 2$. Wnioskujemy, że istnieje ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ rosnący do nieskończoności, dla którego $k_n^2 \beta_1(n) \to 0$ oraz $k_n \psi_i(n) \mathrm{P}(X_\mathbf{1} > v_n) \to 0$ dla $i = 1, 2$ (gdy $n \to \infty$). Dla ciągu tego otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
k_n^2 &\sum_{\substack{\mathbf{j},\mathbf{l} \in \{1,2,\ldots,\lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor\} \times \{1,2,\ldots,\lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor\}, \\ \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty \geqslant m+1}} P(X_\mathbf{j} > v_n, X_\mathbf{l} > v_n) \\
&\leqslant k_n^2 \frac{\psi_1(n)^2 \psi_2(n)^2}{k_n^4} \mathrm{P}(X_\mathbf{1} > v_n)^2 = \frac{(\psi_1(n)\psi_2(n) \mathrm{P}(X_\mathbf{1} > v_n))^2}{k_n^2} \\
&\sim \frac{(n^2 \mathrm{P}(X_\mathbf{1} > v_n))^2}{k_n^2} = o(1).
\end{aligned}$$

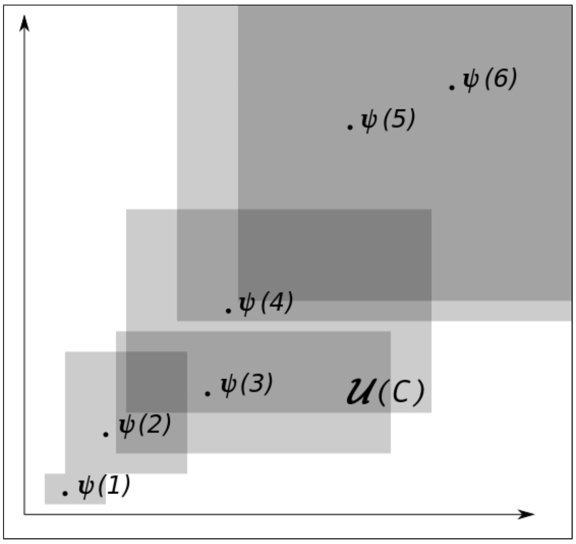
Otrzymujemy stąd, że dla m-zależnego pola $\{X_\mathbf{n}\}$ warunek $LD^{(m+1)}(v_n)$ jest spełniony wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$.

Definicja 2.5. O ciągu $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$ powiemy, że

$$\mathbf{N}(n) \to \boldsymbol{\infty} \quad \textit{wokół} \quad \boldsymbol{\psi} \quad \text{gdy} \quad n \to \infty,$$

jeśli $\mathbf{N}(n) \to \boldsymbol{\infty}$ oraz istnieje stała $C \geqslant 1$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C) := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [1/C \cdot \psi_1(j), C \cdot \psi_1(j)] \times [1/C \cdot \psi_2(j), C \cdot \psi_2(j)].$$



Rysunek 2.2: Zacieniowany obszar to zbiór $\mathcal{U}(C)$ wokół ciągu $\{\boldsymbol{\psi}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dla $C = 2$.

Przykład 2.6. Zbieżność $\mathbf{N}(n) \to \boldsymbol{\infty}$ wokół $\boldsymbol{\psi}_0$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy ciągi $\{N_1(n)\}$ i $\{N_2(n)\}$ są tego samego rzędu, czyli dla pewnego $C \geqslant 1$ i dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $1/C \leqslant N_1(n)/N_2(n) \leqslant C$.

Uwaga 2.7. Zbieżność wokół $\boldsymbol{\psi}_0$ nazywana jest zbieżnością *sektorową*. Zbieżność taka rozważana była m.in. przez Gadidov [26] w zagadnieniach dotyczących twierdzeń granicznych dla U-statystyk.

Definicja 2.8. O rodzinie $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} \subset \mathbb{R}$ powiemy, że

$$a_{\mathbf{n}} \to a \text{ gdy } \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \text{ wokół } \boldsymbol{\psi},$$

jeżeli dla każdego $C > 0$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $R \in \mathbb{N}$ taka, że $|a_{\mathbf{n}} - a| < \varepsilon$, o ile $n_1, n_2 > R$ i $\mathbf{n} \in \mathcal{U}(C)$.

Poniżej wprowadzamy definicję dystrybuanty pozornej dla pola losowego. Jest to uogólnienie definicji 1.24 pochodzącej od O'Briena.

Definicja 2.9. Dystrybuantę G nazywamy *dystrybuantą pozorną wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$, o ile

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{n}} \leqslant u_{\mathbf{n}}) - G(u_{\mathbf{n}})^{n_1 n_2} \to 0, \quad \text{gdy } \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \text{ wokół } \boldsymbol{\psi},$$

dla dowolnej rodziny $\{u_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}$.

Uwaga 2.10. Szukając dystrybuanty pozornej słabo zależnego pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ w istocie szukamy pola zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie zadanym przez dystrybuantę G, którego maksima aproksymują maksima $M_{\mathbf{n}}$ rozważanego pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$.

Uwaga 2.11. W naszych rozważaniach zakładamy, że zachodzą warunki (2.2) oraz $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla każdego $T > 0$ i dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. W takiej sytuacji sensowną okazuje się być aproksymacja maksimów $M_{\mathbf{n}}$ maksimami pola niezależnego gdy $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$ wokół $\boldsymbol{\psi}$. Zwykle założona przez nas wiedza nie jest wystarczająca, aby móc rozważać ogólną sytuację, gdy $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$.

W szczególnym przypadku, gdy dystrybuanta pozorna pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ (wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$) istnieje i jest postaci $G(x) = \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant x)^\theta$ dla pewnej stałej $\theta \in (0,1]$, liczbę θ nazywamy indeksem ekstremalnym (wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$) rozważanego pola, zgodnie z poniższą definicją.

Definicja 2.12. Jeśli dla pewnej liczby $\theta \in (0,1]$ zachodzi

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{n}} \leqslant u_{\mathbf{n}}) - \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant u_{\mathbf{n}})^{n_1 n_2 \theta} \to 0, \quad \text{gdy } \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \text{ wokół } \boldsymbol{\psi},$$

dla dowolnej rodziny $\{u_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}$, to liczbę θ nazywamy *indeksem ekstremalnym wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$ pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$.

Uwaga 2.13. Powody, dla których rozważamy $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ są podobne do tych przedstawionych w Uwadze 2.11. Należy w tym miejscu dodać, że Choi [12] w swojej rozprawie doktorskiej proponuje nieco inną definicję indeksu ekstremalnego, będącą prostym uogólnieniem definicji Leadbettera [47], bez założenia o zbieżności $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$. My jednak uważamy tę definicję za zbyt mocną i wymagającą sprawdzenia zbyt wielu założeń.

2.2.2. Warunek łamania i jego konsekwencje

W dalszym ciągu rozważamy stacjonarne pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}\}$ i ciąg $\{\boldsymbol{\psi}(n)\}$ taki jak na początku rozdziału. Powiemy o pewnych konsekwencjach warunku $B_T(v_n)$ dotyczących asymptotyki maksimum pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. W dalszej części podrozdziału podamy także przykłady pól spełniających $B_T(v_n)$.

Zaczynamy od przykładu, na podstawie którego wnioskujemy, że dla pól losowych nie zachodzi odpowiednik Faktu 1.15. Nie można zastąpić warunków $B_T(v_n)$ dla pola (dla wszystkich $T > 0$) jednym warunkiem stanowiącym analogon warunku $B_\infty(v_n)$ określonego dla ciągu przez definicję 1.14.

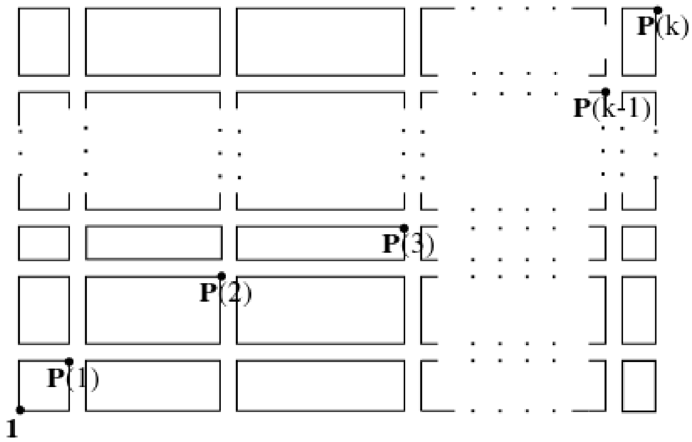
Przykład 2.14. Niech $\{X_{\mathbf{n}}\}$ będzie polem określonym jako

$$\{X_{\mathbf{n}}\} := \max\left\{Y_{(n_1,n_2)}, Y_{(n_1+1,n_2)}\right\}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2,$$

gdzie $\{Y_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$ jest polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie oraz $\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{n^2} \to \rho$ dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i liczby $\rho \in (0,1)$. Wtedy pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jako pole 1-zależne spełnia $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla każdego $T > 0$ (na mocy Faktu 2.19). Z drugiej strony:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(M_{(2,n^2)} \leqslant v_n\right) &- \mathrm{P}\left(M_{(1,n^2)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{(1,n^2)} \leqslant v_n\right)\\ &= \mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{3n^2} - \mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{2n^2}\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{2n^2} + o(1) = \rho^3(1-\rho) + o(1),\end{aligned}$$

a zatem nie zachodzi bezpośredni odpowiednik warunku $B_\infty(v_n)$ dla ciągów.



Rysunek 2.3: Wyznaczony przez $\mathbf{p}(1), \mathbf{p}(2), \ldots, \mathbf{p}(k) \in \mathbb{N}^2$ podział prostokąta $[\mathbf{1}, \mathbf{P}(k)]$, gdzie $\mathbf{P}(i) := \mathbf{p}(1) + \mathbf{p}(2) + \ldots + \mathbf{p}(i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Przypomnijmy, że warunek $B_T(v_n)$ mówi, że maksimum częściowe pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ po dużym prostokącie o wymiarach $(p_1 + q_1) \times (p_2 + q_2)$ można aproksymować przez maksima po blokach o wymiarach $p_1 \times p_2$, $q_1 \times p_2$, $p_1 \times q_2$ i $q_1 \times q_2$, a zatem można połamać duży prostokątny obszar na cztery mniejsze asymptotycznie niezależne bloki. Iloczyn prawdopodobieństw pojawiający się w definicji warunku $B_T(v_n)$ związany z tym podziałem będziemy oznaczać jako $\Pi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(n)$, a formalnie:

$$\Pi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(n) := \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}} \leqslant v_n\right) \mathrm{P}\left(M_{(p_1,q_2)} \leqslant v_n\right) \mathrm{P}\left(M_{(q_1,p_2)} \leqslant v_n\right) \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{q}} \leqslant v_n\right).$$

Analogicznie postępujemy, gdy łamiemy duży obszar na k^2 bloków, gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest dowolne. Wtedy dla dowolnych $\mathbf{p}(1), \mathbf{p}(2), \ldots, \mathbf{p}(k) \in \mathbb{N}_0^2$ rozważamy podział prostokąta $[\mathbf{1}, \mathbf{p}(1) + \mathbf{p}(2) + \ldots + \mathbf{p}(k)]$ taki jak przedstawiony na rysunku 2.3 i definiujemy $\Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n)$ jako produkt odpowiednich prawdopodobieństw dla maksimów po blokach podziału:

$$\Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n) := \prod_{i_1=1}^{k} \prod_{i_2=1}^{k} \mathrm{P}(M_{(p_1(i_1),p_2(i_2))} \leqslant v_n). \tag{2.3}$$

Okazuje się, że warunek $B_T(v_n)$ pozwala łamać duże prostokąty nie tylko na cztery mniejsze (co wynika wprost z definicji), ale także na k^2 bloków, gdzie $k \in \mathbb{N}$ dowolne, oraz na k_n^2 bloków, gdzie $k_n \to \infty$ dostatecznie wolno gdy $n \to \infty$. O własnościach tych mówi poniższy lemat.

Lemat 2.15. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia dla pewnego $T > 0$ warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla ciągu $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.*

(1) Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sup_{\mathbf{p}(1)+\ldots+\mathbf{p}(k) \leqslant T \cdot \boldsymbol{\psi}(n)} \left| \mathrm{P}(M_{\mathbf{p}(1)+\ldots+\mathbf{p}(k)} \leqslant v_n) - \Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(2) *Dla dowolnego ciągu* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *o własnościach*

$$k_n \to \infty, \quad k_n = o(n), \quad k_n^2 \beta_T(n) = o(1), \tag{2.4}$$

gdzie $\{\beta_T(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem z definicji warunku* $B_T(v_n)$ *wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$, *zachodzi*

$$\sup_{\mathbf{p}(1)+\ldots+\mathbf{p}(k_n)\leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)} \left| \mathrm{P}(M_{\mathbf{p}(1)+\ldots+\mathbf{p}(k_n)} \leqslant v_n) - \Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k_n)}(n) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(3) *Niech ciąg* $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$ *będzie taki, że* $\mathbf{N}(n) \leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy dla dowolnego ciągu* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *o własnościach (2.4) i* $k_n\psi_i(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) = o(1)$ *(dla* $i = 1,2$*) zachodzi*

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n) = \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor N_1(n)/k_n\rfloor,\lfloor N_2(n)/k_n\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{k_n^2} + o(1).$$

Dowód. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $k \geqslant 2$ określamy

$$\beta_T(n,k) := \sup_{\mathbf{p}(1)+\ldots+\mathbf{p}(k)\leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)} \left| \mathrm{P}(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k)} \leqslant v_n) - \Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n) \right|.$$

Zauważmy, że wtedy $\beta_T(n,2) = \beta_T(n)$. Dla $n \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ i $\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k) \in \mathbb{N}_0^2$ takich, że $\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k) \leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k)} \leqslant v_n\right) - \Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n)\right| \\
&\quad\leqslant \left|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k)} \leqslant v_n\right) - \Pi_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2),\mathbf{p}(3),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n)\right| \\
&\qquad + \left|\Pi_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2),\mathbf{p}(3)\ldots,\mathbf{p}(k)}(n) - \Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n)\right| \\
&\quad\leqslant \beta_T(n,k-1) + \left|\Pi_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2),\mathbf{p}(3)\ldots,\mathbf{p}(k)}(n) - \Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n)\right|.
\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności

$$\prod_{i=1}^m a_i - \prod_{i=1}^m b_i \leqslant \sum_{i=1}^m (a_i - b_i) \quad \text{o ile} \quad 1 \geqslant a_i \geqslant b_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1,2,\ldots,m \tag{2.5}$$

prawdziwej dla każdego $m \in \mathbb{N}$, po kilku prostych przekształceniach dostajemy, że drugi składnik powyższego oszacowania spełnia nierówność

$$\left|\Pi_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2),\mathbf{p}(3)\ldots,\mathbf{p}(k)}(n) - \Pi_{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)}(n)\right| \leqslant \beta_T(n,2),$$

niezależnie od wyboru $\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2),\ldots,\mathbf{p}(k)$. Rozważania te prowadzą nas do nierówności

$$\beta_T(n,k) \leqslant \beta_T(n,k-1) + \beta_T(n,2)$$

prawdziwej dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Za pomocą metody indukcji matematycznej nietrudno pokazać, że

$$\beta_T(n,k) \leqslant k^2\beta_T(n) \quad \text{dla} \quad n,k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Ponieważ $\beta_T(n) \to 0$, to dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $\beta_T(n,k) \to 0$ gdy $n \to \infty$, a zatem punkt (1) dowodzonego lematu zachodzi. Natomiast z wyboru ciągu $\{k_n\}$ wnioskujemy, że $\beta_T(n,k_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$, co kończy dowód punktu (2).

Przejdźmy do dowodu części (3). Ponieważ $k_n\psi_i(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$ dla $i = 1,2$ oraz $\mathbf{N}(n) \leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)$, to

$$0 \leqslant \mathrm{P}\left(M_{(k_n\lfloor N_1(n)/k_n\rfloor, k_n\lfloor N_2(n)/k_n\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\right)$$
$$\leqslant k_n(N_1(n)+N_2(n))\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) = o(1).$$

Ponadto z punktu (2) dowodzonego lematu mamy także

$$\mathrm{P}\left(M_{(k_n\lfloor N_1(n)/k_n\rfloor, k_n\lfloor N_2(n)/k_n\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor N_1/k_n\rfloor, \lfloor N_2/k_n\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{k_n^2} = o(1).$$

W konsekwencji część (3) lematu zachodzi. □

Poniżej przypominamy obserwację O'Briena [56], która jest powszechnie stosowana w teorii wartości ekstremalnych.

Fakt 2.16. *Niech $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym o wartościach w przedziale $[0,1]$. Wtedy*

$$(1-c_n)^n - e^{-nc_n} \to 0 \quad gdy \quad n\to\infty.$$

Konsekwencją Lematu 2.15 (3) oraz Faktu 2.16 jest następujący wniosek:

Wniosek 2.17. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ i ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ są takie, że dla pewnego $T > 0$ warunek $B_T(v_n)$ zachodzi wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ oraz*

$$\psi_i(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0 \quad gdy \quad n\to\infty \quad (dla\ \ i=1,2). \tag{2.7}$$

Ponadto niech $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$ będzie ciągiem indeksów spełniającym $\mathbf{N}(n) \leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)$. Wtedy istnieje ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zbieżny do nieskończoności taki, że

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\right) &= \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor N_1(n)/k_n\rfloor, \lfloor N_2(n)/k_n\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{k_n^2} + o(1)\\ &= \exp\left(-k_n^2\,\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor N_1(n)/k_n\rfloor, \lfloor N_2(n)/k_n\rfloor)} > v_n\right)\right) + o(1), \quad gdy \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Dowód. Ponieważ warunek $B_T(v_n)$ zachodzi, to $\beta_T(n) \to 0$ gdy $n\to\infty$. Ponadto z założenia mamy (2.7). Dlatego możemy wybrać ciąg $\{k_n\}$ rosnący do nieskończoności na tyle wolno, aby $k_n^2\beta_T(n) \to 0$, $k_n\psi_1(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$ oraz $k_n\psi_2(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$. Taki ciąg $\{k_n\}$ spełnia założenia Lematu 2.15 (3). Na podstawie tego lematu otrzymujemy pierwszą równość. Druga równość wynika z Faktu 2.16. □

Kolejny lemat mówi o pewnych własnościach wynikających z warunku (2.2) dla pól m-zależnych.

Lemat 2.18. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest m-zależne. Rozważmy dowolny ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ taki, że $a_n = o(n^2)$. Wtedy warunek (2.2) implikuje, że*

$$\lim_{n\to\infty} a_n\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) = 0$$

oraz

$$\limsup_{n\to\infty} n^2 P(X_{\mathbf{1}} > v_n) < \infty.$$

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że pierwsza własność nie zachodzi. Wtedy istnieje podciąg $\{n_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ ciągu liczb naturalnych taki, że $a_{n_l}\,\mathrm{P}(X > v_{n_l}) \to a$ gdy $l \to \infty$ dla pewnej stałej $a \in (0,\infty]$. Korzystając najpierw z m-zależności, a potem z Faktu 2.16 i z założenia $\psi_1(n_l)\psi_2(n_l) \sim n_l^2$, otrzymujemy:

$$\rho = \lim_{l\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n_l)} \leqslant v_{n_l}\right) \leqslant \lim_{l\to\infty} \mathrm{P}\left(X_{\mathbf{1}} \leqslant v_{n_l}\right)^{\lfloor \psi_1(n_l)/(m+1)\rfloor \cdot \lfloor \psi_2(n_l)/(m+1)\rfloor}$$
$$= \lim_{l\to\infty} \exp\left(-\frac{\psi_1(n_l)\psi_2(n_l)}{a_{n_l}(m+1)^2} \cdot a_{n_l}\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_{n_l})\right) = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem, że $\rho \in (0,1)$.

Dla dowodu drugiej własności określamy $a_n := P(X_{\mathbf{1}} > v_n)^{-1}$. Gdyby dla pewnego podciągu $\{n_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ ciągu liczb naturalnych zachodziło $n_l^2 P(X_{\mathbf{1}} > v_{n_l}) \to \infty$ gdy $l \to \infty$, to otrzymalibyśmy $a_{n_l} = o(n_l^2)$ oraz $a_{n_l}\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_{n_l}) \to 1$ gdy $l \to \infty$, co stanowi sprzeczność z udowodnioną wyżej pierwszą częścią lematu. □

Poniżej dowodzimy zapowiedzianego wcześniej faktu mówiącego, że jeśli rozważane pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest m-zależne, to jest słabo zależne w sensie warunku B_T.

Fakt 2.19. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest m-zależne oraz własność (2.7) zachodzi dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wtedy pole to spełnia warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla dowolnego $T > 0$.*

Dowód. Niech $T > 0$. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ niech $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}^2$ będą dowolne takie, że zachodzi $\mathbf{p} + \mathbf{q} \leqslant T \cdot \boldsymbol{\psi}(n)$. Rozważmy stowarzyszony z wyborem $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ podział prostokąta $[\mathbf{1}, \mathbf{p}+\mathbf{q}]$. Dla $\boldsymbol{\epsilon} \in \{0,1\}^2$ określamy zbiór $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ jak na rysunku 2.4, a formalnie:

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\epsilon}} := [(\epsilon_1 p_1 + m + 1, \epsilon_2 p_2 + m + 1), (p_1 + \epsilon_1 q_1, p_2 + \epsilon_2 q_2)].$$

Na mocy m-zależności otrzymujemy, że dla $\boldsymbol{\epsilon}_1 \neq \boldsymbol{\epsilon}_2$ maksima $M_{\mathcal{A}_{\boldsymbol{\epsilon}_1}}$ i $M_{\mathcal{A}_{\boldsymbol{\epsilon}_2}}$ są niezależne. Określmy zbiór $\mathcal{A}$ jako

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_{(0,0)} \cup \mathcal{A}_{(0,1)} \cup \mathcal{A}_{(1,0)} \cup \mathcal{A}_{(1,1)}.$$

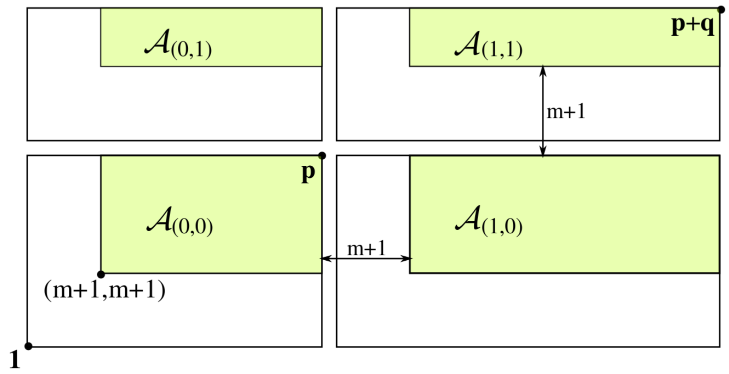
Korzystając z nierówności trójkąta, następnie z nierówności (2.5) oraz z własności rozważanego pola otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \leqslant v_n\right) - \Pi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(n)\right| \\
&\quad\leqslant \left|\mathrm{P}\left(M_{\mathcal{A}} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \leqslant v_n\right)\right| + \left|\mathrm{P}\left(M_{\mathcal{A}} \leqslant v_n\right) - \Pi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(n)\right| \\
&\quad\leqslant \mathrm{P}\left(M_{\mathcal{A}} \leqslant v_n, M_{[\mathbf{1},\mathbf{p}+\mathbf{q}]\setminus\mathcal{A}} > v_n\right) \\
&\qquad + \left|\mathrm{P}\left(M_{\mathcal{A}_{(0,0)}} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{\mathcal{A}_{(0,1)}} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{\mathcal{A}_{(1,0)}} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{\mathcal{A}_{(1,1)}} \leqslant v_n\right) - \Pi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(n)\right| \\
&\quad\leqslant 2m(p_1 + q_1 + p_2 + q_2)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) + 2m(p_1 + q_1 + p_2 + q_2)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \\
&\quad\leqslant 4mT(\psi_1(n) + \psi_2(n))\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n),
\end{aligned}$$

a stąd:

$$\beta_T(n) = \max_{\substack{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{N}_0^2 \\ \mathbf{p}+\mathbf{q}\leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)}} \left|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \leqslant v_n\right) - \Pi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(n)\right| \leqslant 4mT(\psi_1(n) + \psi_2(n))\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n).$$

Zauważmy, że dla $a_n := 4mT(\psi_1(n) + \psi_2(n))$ zachodzi $a_n = o(n^2)$ gdy $n \to \infty$. Na podstawie Lematu 2.18 wnioskujemy, że $a_n\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$, co kończy dowód. □



Rysunek 2.4: Podział prostokąta $[\mathbf{1}, \mathbf{p}+\mathbf{q}]$ z wyróżnionymi zbiorami $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ dla $\boldsymbol{\epsilon} \in \{0,1\}^2$.

Z Lematu 2.18 wynika, że jeśli pole m-zależne spełnia założenie (2.2), to automatycznie warunek (2.7) zachodzi. A zatem prawdziwy jest następny wniosek płynący z dowiedzionego powyżej faktu.

Wniosek 2.20. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest m-zależne oraz (2.2) zachodzi dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wtedy $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla dowolnego $T > 0$.*

Ważną klasę pól słabo zależnych stanowią pola ruchomych maksimów badane przez Basraka i Tafro [3].

Definicja 2.21. Pole $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$ określone jako

$$X_{\mathbf{n}} := \max_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2} \gamma_{\mathbf{i}} Z_{\mathbf{n}+\mathbf{i}}\,, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2, \tag{2.8}$$

nazywamy *polem ruchomych maksimów zmiennych o regularnie zmieniających się ogonach*, gdy spełnione są warunki:

(i) $\{Z_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$ jest polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie;

(ii) dla pewnej liczby $\alpha > 0$ mamy

$$P(|Z_{\mathbf{1}}| > x) = x^{-\alpha} \cdot l(x) \quad \text{dla} \quad x > 0, \tag{2.9}$$

gdzie $l : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest wolno zmieniającą się funkcją;

(iii) $\{\gamma_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2}$ jest rodziną współczynników rzeczywistych spełniających

$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2} |\gamma_{\mathbf{i}}|^{\delta} < \infty. \tag{2.10}$$

dla pewnej stałej $\delta \in (0,1]$ takiej, że $\delta < \alpha$.

Uwaga 2.22. Można pokazać [13, Theorem 2.1, Theorem 2.3], że zdefiniowane powyżej pole ruchomych maksimów jest poprawnie określone oraz zachodzi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(|X_{\mathbf{1}}| > x)}{P(|Z_{\mathbf{1}}| > x)} = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2} |\gamma_{\mathbf{i}}|^{\alpha} < \infty. \tag{2.11}$$

Dla pola ruchomych maksimów prawdziwe jest następujące twierdzenie [3, Corollary 2.2] opisujące asymptotykę maksimów:

Twierdzenie 2.23. *Niech $\{X_{\mathbf{n}}\}$ będzie polem ruchomych maksimów określonym zgodnie z definicją 2.21. Niech $\gamma_+ := \max\{\max\{\gamma_{\mathbf{i}}, 0\} : \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2\}$, $\gamma_- := \max\{\max\{-\gamma_{\mathbf{i}}, 0\} : \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2\}$. Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb dodatnich, dla którego*

$$n^2\,\mathrm{P}(|Z_{\mathbf{1}}| > a_n x) \to x^{-\alpha} \quad \text{gdy} \quad n \to \infty, \quad \text{dla każdego} \quad x > 0. \tag{2.12}$$

Załóżmy, że dla pewnego $p \in [0,1]$ i $q := 1 - p$ zachodzi

$$\frac{\mathrm{P}(Z_{\mathbf{1}} > x)}{\mathrm{P}(|Z_{\mathbf{1}}| > x)} \to p \quad \text{oraz} \quad \frac{\mathrm{P}(Z_{\mathbf{1}} \leqslant -x)}{\mathrm{P}(|Z_{\mathbf{1}}| > x)} \to q, \quad \text{gdy} \quad x \to \infty.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{(n,n)} \leqslant a_n x\right) = \exp\left(-(p\gamma_+^\alpha + q\gamma_-^\alpha)x^{-\alpha}\right)$$

Uwaga 2.24. Ciąg $\{a_n\}$ z powyższego twierdzenia można określić (porównaj [3]) jako:

$$a_n := \inf\left\{x : \ \mathrm{P}(|Z_{\mathbf{1}}| > x) \leqslant n^{-2}\right\}.$$

Poniżej uzasadnimy, że pola ruchomych maksimów spełniają warunek B_T wzdłuż $\boldsymbol{\psi}_0$.

Fakt 2.25. *Niech $\{X_{\mathbf{n}}\}$ będzie polem ruchomych maksimów określonym zgodnie z definicją 2.21. Zakładamy, że $Z_{\mathbf{1}} \geqslant 0$ prawie wszędzie oraz $\gamma_{\mathbf{i}} \geqslant 0$ dla $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2$. Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem z warunku (2.12). Wtedy dla dowolnego $x > 0$ pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunek $B_T(a_n x)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}_0$ dla wszystkich $T > 0$.*

Dowód. Ustalmy $T > 0$ i $x > 0$. Dla uproszczenia notacji przyjmijmy $v_n := a_n x$. Możemy założyć, że $\gamma_{\mathbf{i}} \neq 0$ dla pewnego $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2$. Zauważmy, że wtedy na mocy Twierdzenia 2.23 zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{(n,n)} \leqslant v_n\right) = \exp(-\gamma_+^\alpha x^{-\alpha}) \in (0,1),$$

a zatem warunek (2.2) jest spełniony z $\rho = \exp(-\gamma_+^\alpha x^{-\alpha})$. Rozważmy ciągi $\{\mathbf{p}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mathbf{q}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ elementów z $\mathbb{N}_0^2$ takie, że $\mathbf{p}(n) + \mathbf{q}(n) \leqslant (T\cdot n, T\cdot n)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Aby dowieść warunku $B_T(v_n)$ należy pokazać, że

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) &- \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) \\ &\times \mathrm{P}\left(M_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{(q_1(n),p_2(n))} \leqslant v_n\right) \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Niech $m \in \mathbb{N}$. Z polem $\{X_{\mathbf{n}}\}$ stowarzyszamy pole $\{X_{\mathbf{n}}^{[m]}\}$ określone następująco:

$$X_{\mathbf{n}}^{[m]} := \max_{\mathbf{i}\in\{-m,\ldots,-1,0,1,\ldots,m\}^2} \gamma_{\mathbf{i}} Z_{\mathbf{n}+\mathbf{i}}\,, \quad \text{dla} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2. \tag{2.14}$$

Jak łatwo zauważyć, tak zdefiniowane pole $\{X_{\mathbf{n}}^{[m]}\}$ jest $(2m)$-zależne. Ponadto, dla wystarczająco dużych $m \in \mathbb{N}$ oraz dla $M_{\mathbf{n}}^{[m]} := \max_{\mathbf{1}\leqslant\mathbf{j}\leqslant\mathbf{n}} X_{\mathbf{j}}^{[m]}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{(n,n)}^{[m]} \leqslant v_n\right) \in (0,1),$$

na mocy Twierdzenia 2.23. Korzystając z Wniosku 2.20 dostajemy, że

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) \\ &\quad \times \mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(p_2(n),q_1(n))} \leqslant v_n\right) \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Chcemy wywnioskować, że zachodzi także (2.13). W tym celu pokażemy, że dla dużych $m \in \mathbb{N}$ maksima pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ można przybliżać maksimami pola $(2m)$-zależnego $\{X^{[m]}_{\mathbf{n}}\}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right)\right| \\ &\quad\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathbf{1}\leqslant\mathbf{j}\leqslant\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \mathrm{P}\left(X^{[m]}_{\mathbf{j}} \leqslant v_n,\, X_{\mathbf{j}} > v_n\right) \\ &\quad\leqslant T^2 \lim_{n\to\infty} n^2\,\mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2,\ \|\mathbf{i}\|_\infty>m} \gamma_{\mathbf{i}} Z_{\mathbf{i}} > v_n\right) \\ &\quad\leqslant T^2 \lim_{n\to\infty} n^2\,\mathrm{P}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2,\ \|\mathbf{i}\|_\infty>m} \gamma_{\mathbf{i}} Z_{\mathbf{i}} > v_n\right) = T^2 u^{-\alpha} \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2,\ \|\mathbf{i}\|_\infty>m} \gamma_{\mathbf{i}}^{\alpha}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z wspomnianej wcześniej własności (2.11) oraz z wyboru ciągu $\{v_n\}$. Ponadto ze zbieżności szeregu w (2.10) mamy:

$$R(m) := T^2 u^{-\alpha} \sum_{\substack{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2,\\ \|\mathbf{i}\|_\infty>m}} \gamma_{\mathbf{i}}^{\alpha} \longrightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad m \to \infty.$$

Prowadząc analogiczne rozumowanie pokazuje się, że

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right)\right| &\leqslant R(m), \\ \lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right)\right| &\leqslant R(m), \\ \lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right)\right| &\leqslant R(m), \\ \lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(q_1(n),p_2(n))} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(q_1(n),p_2(n))} \leqslant v_n\right)\right| &\leqslant R(m). \end{aligned}$$

Korzystając kolejno z nierówności trójkąta, zbieżności (2.15), nierówności (2.5) i uzyskanych powyżej oszacowań dostajemy, że

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\Big|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) \\ &\qquad - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{(q_1(n),p_2(n))} \leqslant v_n\right)\Big| \\ &\quad\leqslant \lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right)\right| \\ &\quad + \lim_{n\to\infty}\Big|\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)+\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right) \\ &\qquad - \mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(q_1(n),p_2(n))} \leqslant v_n\right)\Big| \\ &\quad + \lim_{n\to\infty}\Big|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{(q_1(n),p_2(n))} \leqslant v_n\right) \\ &\qquad - \mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{p}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{\mathbf{q}(n)} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(p_1(n),q_2(n))} \leqslant v_n\right)\mathrm{P}\left(M^{[m]}_{(q_1(n),p_2(n))} \leqslant v_n\right)\Big| \\ &\quad\leqslant 5R(m). \end{aligned}$$

Przechodząc z m do nieskończoności otrzymujemy tezę. □

2.2.3. Dystrybuanta pozorna

Podrozdział ten poświęcamy zagadnieniom związanym z dystrybuantą pozorną rozważanego pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Zakładać będziemy, że dla $\{X_{\mathbf{n}}\}$ i dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zachodzą warunki (2.2) i (2.7).

Dla dystrybuanty F zmiennej $X_{\mathbf{1}}$ określamy $F_* \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jako

$$F_* := \sup\{x \in \mathbb{R} : \ F(x) < 1\}.$$

Na mocy założenia (2.7) mamy, że $v_n \to F_*$ gdy $n \to \infty$. Ponadto, zgodnie z poniższą uwagą, bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że ciąg $\{v_n\}$ jest niemalejący.

Uwaga 2.26. Jeśli warunki (2.2) oraz (2.7) są spełnione dla ciągu $\{v_n\}$, to zachodzą również dla niemalejącego ciągu $\{v_n^*\}$ o wyrazie ogólnym $v_n^* := \inf\{v_m : m \geqslant n\}$.

Definiujemy odwzorowanie będące kandydatem na dystrybuantę pozorną pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ następująco:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < v_1; \\ \rho^{1/n^2} & \text{dla } v_n \leqslant x < v_{n+1}; \\ 1 & \text{dla } x \geqslant F_*. \end{cases} \tag{2.16}$$

W następnym kroku naszych rozważań zamierzamy dowieść, że tak określona funkcja G jest rzeczywiście dystrybuantą pozorną (wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$) dla rozważanego pola losowego, o ile tylko warunek $B_T(v_n)$ (wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$) dla dowolnego $T > 0$ zachodzi.

Twierdzenie 2.27. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla dowolnego $T > 0$ i niemalejącego ciągu $\{v_n\}$, dla którego (2.2) i (2.7) zachodzą. Wtedy formuła (2.16) zadaje dystrybuantę pozorną pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$, czyli*

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{n}} \leqslant u_{\mathbf{n}}) - G(u_{\mathbf{n}})^{n_1 n_2} \to 0 \quad gdy \quad \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \quad wok\acute{o}\l \quad \boldsymbol{\psi} \tag{2.17}$$

dla dowolnej rodziny $\{u_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}$.

W dowodzie twierdzenia skorzystamy z poniższych faktów oraz z następujących po nich Lematu 2.30 i Lematu 2.31.

Fakt 2.28. *Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych oraz $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy zachodzi $a_n \to a$ gdy $n \to \infty$ dokładnie wtedy, gdy z dowolnego podciągu $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu liczb naturalnych można wybrać dalszy podciąg $\{n_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tak, aby $a_{n_{k_l}} \to a$ gdy $l \to \infty$.*

Fakt 2.29. *Rozważmy rodzinę $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}$ oraz $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy*

$$a_{\mathbf{n}} \to a \quad gdy \quad \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \quad wok\acute{o}\l \quad \boldsymbol{\psi}$$

dokładnie wtedy, gdy z każdego ciągu $\{\mathbf{n}(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$ zbieżnego do nieskończoności wokół $\boldsymbol{\psi}$ można wybrać podciąg $\{\mathbf{n}(k_l)\}_{l\in\mathbb{N}}$, dla którego zachodzi $a_{\mathbf{n}(k_l)} \to a$ gdy $l \to \infty$.

Lemat 2.30. *Niech pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ i ciąg $\{v_n\}$ spełniają założenia Twierdzenia 2.27. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $s, t > 0$ mamy zbieżność*

$$\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s\cdot\psi_1(n)\rfloor,\lfloor t\cdot\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) \to \rho^{st} \quad gdy \quad n \to \infty.$$

Ponadto, jeżeli $\mathcal{F} \subset [0,\infty)^2$ jest zbiorem takim, że nie istnieje ciąg elementów z $\mathcal{F}$ zbieżny do punktu $(0,\infty)$ lub do punktu $(\infty, 0)$, to ma miejsce zbieżność jednostajna:

$$\sup_{(s,t)\in\mathcal{F}}\left|\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s\cdot\psi_1(n)\rfloor,\lfloor t\cdot\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \rho^{st}\right| \to 0 \quad gdy \quad n \to \infty.$$

Dowód. W pierwszej części dowodu badamy zbieżność punktową. Ponieważ założenie (2.2) mówi, że $\mathrm{P}(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n) \to \rho$, to wystarczy abyśmy dowiedli, że dla dowolnych $s, t > 0$ zachodzi

$$\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right)^{st} - \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s\cdot\psi_1(n)\rfloor,\lfloor t\cdot\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{2.18}$$

Na początek pokażemy, że zbieżność taka ma miejsce dla $s = 1/q_1$ i $t = 1/q_2$, gdzie stałe $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ są dowolne. Korzystając z nierówności trójkąta otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor\psi_1(n)/q_1\rfloor,\lfloor\psi_2(n)/q_2\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{q_1q_2}\right| \\
\leqslant\ & \left|\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(q_1\lfloor\psi_1(n)/q_1\rfloor,q_2\lfloor\psi_2(n)/q_2\rfloor)} \leqslant v_n\right)\right| \\
&\quad + \left|\mathrm{P}\left(M_{(q_1\lfloor\psi_1(n)/q_1\rfloor,q_2\lfloor\psi_2(n)/q_2\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor\psi_1(n)/q_1\rfloor,\lfloor\psi_2(n)/q_2\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{q_1q_2}\right| \\
= &: R_1(n) + R_2(n).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że pierwszy składnik powyższego oszacowania oznaczony jako R_1 spełnia

$$R_1(n) \leqslant (q_1\psi_2(n) + q_2\psi_1(n))\,\mathrm{P}(X > v_n) = o(1).$$

Natomiast dla składnika R_2 na podstawie warunku $B_1(v_n)$ wnioskujemy, że $R_2(n) = o(1)$ gdy $n \to \infty$. Zatem dowiedliśmy (2.18), a tym samym pokazaliśmy, że zbieżność z tezy lematu zachodzi dla $s = 1/q_1$ i $t = 1/q_2$.

W kolejnym kroku wykażemy, że zbieżność punktowa zachodzi dla dodatnich $s, t \in \mathbb{Q}$. W tym celu rozpatrzmy $s = p_1/q_1$ oraz $t = p_2/q_2$, gdzie $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor\frac{p_1}{q_1}\psi_1(n)\rfloor,\lfloor\frac{p_2}{q_2}\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right)^{\frac{p_1p_2}{q_1q_2}}\right| \\
\leqslant\ & \left|\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor\frac{p_1}{q_1}\psi_1(n)\rfloor,\lfloor\frac{p_2}{q_2}\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(p_1\lfloor\frac{\psi_1(n)}{q_1}\rfloor,p_2\lfloor\frac{\psi_2(n)}{q_2}\rfloor)} \leqslant v_n\right)\right| \\
&\quad + \left|\mathrm{P}\left(M_{(p_1\lfloor\frac{\psi_1(n)}{q_1}\rfloor,p_2\lfloor\frac{\psi_2(n)}{q_2}\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor\frac{\psi_1(n)}{q_1}\rfloor,\lfloor\frac{\psi_2(n)}{q_2}\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{p_1p_2}\right| \\
&\quad + \left|\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor\frac{\psi_1(n)}{q_1}\rfloor,\lfloor\frac{\psi_2(n)}{q_2}\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{p_1p_2} - \mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right)^{\frac{p_1p_2}{q_1q_2}}\right| \\
=:\ & R_1'(n) + R_2'(n) + R_3'(n).
\end{aligned}$$

Ponieważ dla $i = 1, 2$ mamy $0 \leqslant \lfloor\frac{p_i}{q_i}\psi_i(n)\rfloor - p_i\lfloor\frac{\psi_i(n)}{q_i}\rfloor \leqslant p_i$, to zachodzi

$$R_1'(n) \leqslant p_1p_2(\lfloor\psi_1(n)/q_1\rfloor + \lfloor\psi_2(n)/q_2\rfloor + 2)\,\mathrm{P}(X > v_n) = o(1).$$

Dalej, warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla $T = p_1/q_1 \vee p_2/q_2$ pociąga, że $R_2'(n) = o(1)$. Natomiast to, że $R_3'(n) = o(1)$ wynika z udowodnionej już wcześniej zbieżności (2.18) dla pary $(1/q_1, 1/q_2)$. Z powyższych rozważań otrzymujemy (2.18) dla $s = p_1/q_1$ oraz $t = p_2/q_2$.

Dowiedliśmy już, że mamy punktową zbieżność dla wymiernych $s, t > 0$. Następnie pokażemy, że dzięki monotoniczności przekształcenia $(s,t) \mapsto \mathrm{P}(M_{(\lfloor s\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n)$ oraz ciągłości odwzorowania $(s,t) \mapsto \rho^{st}$ można wnioskować, że zbieżność punktowa zachodzi dla wszystkich $s, t > 0$. W tym celu ustalmy dowolny punkt $(s,t) \in (0,\infty)^2$ i stowarzyszmy z nim monotoniczne ciągi $\{(s(j), t(j))\}_{j\in\mathbb{N}}$ i $\{(s'(j), t'(j))\}_{j\in\mathbb{N}}$ takie, że $s(j), t(j), s'(j), t'(j)$ są liczbami wymiernymi dla każdego $j \in \mathbb{N}$ oraz

$$s(j) \nearrow s, \quad t(j) \nearrow t, \quad s'(j) \searrow s, \quad t'(j) \searrow t \quad \text{gdy} \quad j \to \infty.$$

Wtedy dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\begin{aligned}
\rho^{s'(j)t'(j)} + o(1) &= \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s'(j)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t'(j)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) \\
&\leqslant \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) \\
&\leqslant \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s(j)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(j)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) = \rho^{s(j)t(j)} + o(1),
\end{aligned}$$

gdy $n \to \infty$. Ponieważ $\rho^{s(j)t(j)} \to \rho^{st}$ oraz $\rho^{s'(j)t'(j)} \to \rho^{st}$ gdy $j \to \infty$, to zmierzając z j i n do nieskończoności otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) = \rho^{st}.$$

Przejdźmy teraz do wykazania zbieżności jednostajnej. W tym celu rozważmy zbiór $\mathcal{F}$ spełniający założenia lematu i dowolny ciąg $\{(s(n), t(n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ elementów z $\mathcal{F}$. Naszym celem jest pokazanie, że

$$\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s(n)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(n)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \rho^{s(n)t(n)} \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Na mocy Faktu 2.28 można założyć, że $(s(n), t(n)) \to (s,t) \in [0,\infty]^2 \backslash \{(0,\infty), (\infty,0)\}$. Rozważymy trzy możliwe przypadki: pierwszy $(s,t) \in (0,\infty)^2$, drugi $s \vee t < \infty$ i $s \wedge t = 0$ oraz trzeci $s \vee t = \infty$ i $s \wedge t > 0$.

Badamy pierwszą z wymienionych powyżej sytuacji. Załóżmy, że $(s(n), t(n)) \to (s,t)$ i $(s,t) \in (0,\infty)^2$. Wtedy mamy $(s-\varepsilon, t-\varepsilon) \leqslant (s(n), t(n)) \leqslant (s+\varepsilon, t+\varepsilon)$ dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$, dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Korzystając z monotoniczności odwzorowania $(s,t) \mapsto \mathrm{P}(M_{(\lfloor sn\rfloor, \lfloor tn\rfloor)} \leqslant v_n)$ dostajemy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor (s+\varepsilon)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor (t+\varepsilon)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) &\leqslant \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s(n)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(n)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) \\
&\leqslant \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor (s-\varepsilon)n\rfloor, \lfloor (t-\varepsilon)n\rfloor)} \leqslant v_n\right).
\end{aligned}$$

Ponadto, na mocy udowodnionej wcześniej zbieżności punktowej mamy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor (s+\varepsilon)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor (t+\varepsilon)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) &= \rho^{(s+\varepsilon)(t+\varepsilon)} + o(1), \\
\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor (s-\varepsilon)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor (t-\varepsilon)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) &= \rho^{(s-\varepsilon)(t-\varepsilon)} + o(1).
\end{aligned}$$

Z dowolności wyboru stałej $\varepsilon > 0$ otrzymujemy $\mathrm{P}(M_{\lfloor s(n)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(n)\psi_2(n)\rfloor} \leqslant v_n) \to \rho^{st}$ gdy $n \to \infty$. A ponieważ zachodzi również $\rho^{s(n)t(n)} \to \rho^{st}$, dowód pierwszego przypadku został zakończony.

Rozpatrzmy drugą sytuację, gdy $(s(n), t(n)) \to (s,t)$ oraz $s \vee t < \infty$ i $s \wedge t = 0$. Bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że $(s(n), t(n)) \to (s, 0)$ oraz $s < \infty$. Wtedy $\rho^{s(n)t(n)} \to 1$. Ponadto dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dla dużych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor (s+\varepsilon)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor \varepsilon\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) \leqslant \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s(n)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(n)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n\right) \leqslant 1.$$

Ponieważ $\mathrm{P}(M_{(\lfloor (s+\varepsilon)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor \varepsilon\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n) \to \rho^{(s+\varepsilon)\varepsilon}$ (gdy $n \to \infty$) i $\rho^{(s+\varepsilon)\varepsilon} \to 1$ (gdy $\varepsilon \to 0$), to mamy $\mathrm{P}(M_{(\lfloor s(n)\psi_1(n), t(n)\psi_2(n)\rfloor)} \leqslant v_n) \to 1$ gdy $n \to \infty$.

By rozważyć ostatni przypadek załóżmy, że $(s(n), t(n)) \to (s,t)$, $s \vee t = \infty$ i $s \wedge t > 0$. Przypuśćmy, że $(s(n), t(n)) \to (\infty, t)$ oraz $t > 0$. Wtedy zachodzi $\rho^{s(n)t(n)} \to 0$, więc należy pokazać, że $\mathrm{P}(M_{(\lfloor s(n)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(n)\psi_2(n)\rfloor)}) \to 0$ gdy $n \to \infty$. Wiemy, że dla dowolnych $R > 0$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $n_{R,\varepsilon}$ takie, że $s(n) > R$, $t(n) > t - \varepsilon$, o ile $n > n_{R,\varepsilon}$. Stąd dla wszystkich $n > n_{R,\varepsilon}$ otrzymujemy nierówność:

$$0 \leqslant \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor s(n)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(n)\psi_2(n)\rfloor)}\right) \leqslant \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor R\psi_1(n)\rfloor, \lfloor (t-\varepsilon)\psi_2(n)\rfloor)}\right).$$

Ponieważ $\mathrm{P}(M_{(\lfloor R\psi_1(n)\rfloor, \lfloor (t-\varepsilon)\psi_2(n)\rfloor)}) \to \rho^{(t-\varepsilon)R}$ (gdy $n \to \infty$) oraz $\rho^{(t-\varepsilon)R} \to 0$ (gdy $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$), to z dowolności $\varepsilon, R > 0$ wnioskujemy, że $\mathrm{P}(M_{(\lfloor s(n)\psi_1(n)\rfloor, \lfloor t(n)\psi_2(n)\rfloor)}) \to 0$ gdy $n \to \infty$, co kończy dowód trzeciego z rozważanych przypadków, a zarazem dowód całego lematu. □

Lemat 2.31. *Niech $\{g(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{h(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą niemalejącymi ciągami liczb rzeczywistych. Nie istnieją ciągi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych, dla których*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(a_n)}{g(b_n)} = \gamma, \ \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n)}{h(b_n)} = \chi \quad \textit{oraz} \quad \gamma \wedge \chi < 1, \ \gamma \vee \chi > 1.$$

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że lemat nie jest prawdziwy. Załóżmy, że dla ciągów $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zachodzi $g(a_{n_k})/g(b_{n_k}) \to \gamma$ i $h(a_{n_k})/h(b_{n_k}) \to \chi$, gdy $k \to \infty$, oraz $\gamma > 1 > \chi$. Wtedy warunek $g(a_n)/g(b_n) \to \gamma > 1$ (gdy $n \to \infty$) implikuje, że $g(a_n) > g(b_n)$, a stąd $a_n > b_n$ (dla dużych $n \in \mathbb{N}$). Analogicznie, z $h(a_n)/h(b_n) \to \chi < 1$ (gdy $n \to \infty$) otrzymujemy, że $a_n < b_n$ (dla dużych $n \in \mathbb{N}$), co prowadzi do sprzeczności. A zatem lemat jest pradziwy. □

Dowód Twierdzenia 2.27. Rozważmy dowolną rodzinę $\{u_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2} \subset (-\infty, F_*)$. Dla każdego $x \in (-\infty, F_*)$ określamy liczbę naturalną $K(x)$ następująco:

$$K(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < v_1; \\ k & \text{gdy } x \in [v_k, v_{k+1}). \end{cases}$$

Na mocy Faktu 2.29 wystarczy wykazać, że własność (2.17) zachodzi dla dowolnego ciągu indeksów zbieżnego do nieskończoności wokół $\boldsymbol{\psi}$. W tym celu ustalmy $C \geqslant 1$ i załóżmy, że $\mathbf{N}(n) \to \boldsymbol{\infty}$ oraz $\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\mathcal{U}(C)$ jest zbiorem z definicji 2.5. Wybierzmy ciąg $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, dla którego zachodzi

$$\mathbf{N}(n) \in [1/C \cdot \psi_1(c_n),\, C \cdot \psi_1(c_n)] \times [1/C \cdot \psi_2(c_n),\, C \cdot \psi_2(c_n)] \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant u_{\mathbf{N}(n)}\right) &\leqslant \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_{K(u_{\mathbf{N}(n)})+1}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(M_{\left(\frac{N_1(n)}{\psi_1(K(u_{\mathbf{N}(n)})+1)}\psi_1(K(u_{\mathbf{N}(n)})+1), \frac{N_2(n)}{\psi_2(K(u_{\mathbf{N}(n)})+1)}\psi_2(K(u_{\mathbf{N}(n)})+1)\right)} \leqslant v_{K(u_{\mathbf{N}(n)})+1}\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant u_{\mathbf{N}(n)}\right) &\geqslant \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_{K(u_{\mathbf{N}(n)})}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(M_{\left(\frac{N_1(n)}{\psi_1(K(u_{\mathbf{N}(n)}))}\psi_1(K(u_{\mathbf{N}(n)})), \frac{N_2(n)}{\psi_2(K(u_{\mathbf{N}(n)}))}\psi_2(K(u_{\mathbf{N}(n)}))\right)} \leqslant v_{K(u_{\mathbf{N}(n)})}\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ponieważ $\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C)$, to dla $i = 1, 2$ mamy:

$$\frac{1/C \cdot \psi_i(c_n)}{\psi_i(K(u_{\mathbf{N}(n)}))} \leqslant \frac{N_i(n)}{\psi_i(K(u_{\mathbf{N}(n)}))} \leqslant \frac{C \cdot \psi_i(c_n)}{\psi_i(K(u_{\mathbf{N}(n)}))}.$$

Stosując Lemat 2.31 dla $g(n) = \psi_1(n)$, $h(n) = \psi_2(n)$, otrzymujemy, że zbiór

$$\mathcal{F} := \left\{ \left(\frac{N_1(n)}{\psi_1(K(u_{\mathbf{N}(n)}))}, \frac{N_2(n)}{\psi_2(K(u_{\mathbf{N}(n)}))} \right) : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

spełnia założenie Lematu 2.30. Korzystając z tego lematu w celu aproksymacji prawej strony nierówności (2.20), dostajemy:

$$\mathrm{P}\left(M_{\left(\frac{N_1(n)}{K(u_{\mathbf{N}(n)})}(K(u_{\mathbf{N}(n)})), \frac{N_2(n)}{K(u_{\mathbf{N}(n)})}(K(u_{\mathbf{N}(n)}))\right)} \leqslant v_{K(u_{\mathbf{N}(n)})}\right) = \rho^{\frac{N_1(n)N_2(n)}{K(u_{\mathbf{N}(n)})^2}} + o(1).$$

W podobny sposób jak powyżej pokazuje się, że dla prawej strony nierówności (2.19) mamy:

$$\mathrm{P}\left(M_{\left(\frac{N_1(n)}{K(u_{\mathbf{N}(n)}+1)}(K(u_{\mathbf{N}(n)}+1)), \frac{N_2(n)}{K(u_{\mathbf{N}(n)+1})}(K(u_{\mathbf{N}(n)}+1))\right)} \leqslant v_{K(u_{\mathbf{N}(n)}+1)}\right) = \rho^{\frac{N_1(n)N_2(n)}{(K(u_{\mathbf{N}(n)})+1)^2}} + o(1).$$

A zatem zachodzą nierówności:

$$\rho^{N_1(n)N_2(n)/K(u_{\mathbf{N}(n)})^2} + o(1) \leqslant \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant u_{\mathbf{N}(n)}\right) \leqslant \rho^{N_1(n)N_2(n)/(K(u_{\mathbf{N}(n)})+1)^2} + o(1).$$

Dalej, korzystając z faktu, że $\rho^{N_1(n)N_2(n)/K(u_{\mathbf{N}(n)})^2} - \rho^{N_1(n)N_2(n)/(K(u_{\mathbf{N}(n)})+1)^2} = o(1)$, otrzymujemy:

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant u_{\mathbf{N}(n)}) - G(u_{\mathbf{N}(n)})^{N_1(n)N_2(n)} = \mathrm{P}(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant u_{\mathbf{N}(n)}) - \rho^{N_1(n)N_2(n)/K(u_{\mathbf{N}(n)})^2} = o(1),$$

co należało wykazać. □

Zestawiając Twierdzenie 2.27 z Wnioskiem 2.20 otrzymujemy następujący rezultat dla pól m-zależnych.

Wniosek 2.32. *Załóżmy, że $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest polem m-zależnym spełniającym (2.2) dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wtedy wzór (2.16) wyznacza dystrybuantę pozorną wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla $\{X_{\mathbf{n}}\}$.*

Nietrudno pokazać, że dla pól spełniających warunek (2.2) istnienie dystrybuanty pozornej wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ pociąga warunek warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$. Zestawiając ten fakt z Twierdzeniem 2.27 otrzymujemy charakteryzację pól posiadających dystrybuantę pozorną.

Twierdzenie 2.33. *Niech $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia założenia (2.2) oraz (2.7) dla ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wtedy pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ posiada dystrybuantę pozorną wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dokładanie wtedy, gdy warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ zachodzi dla każdego $T > 0$.*

2.2.4. Granica maksimów

Kolejnym interesującym nas zagadnieniem są metody obliczania granicy prawdopodobieństw $\mathrm{P}(M_{\mathbf{n}} \leqslant u_{\mathbf{n}})$ gdy $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$.

Dla słabo zależnego, stacjonarnego pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$, dla którego zachodzi lokalny warunek $LD^{(r)}$ dla pewnej liczby $r \in \mathbb{N}$ dowodzimy twierdzenia, które w swoim sensie jest podobne do rezultatu Chernicka, Hsinga i McCormicka dla ciągów [11, Proposition 1.1].

Twierdzenie 2.34. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunki (2.2) oraz $B_T(v_n)$ i $LD^{(r)}(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, liczby $r \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $T > 0$. Niech ciąg $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$ znajduje się w otoczeniu $\boldsymbol{\psi}$ (tzn. istnieje $C \geqslant 1$ takie, że $\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\mathcal{U}(C)$ jest zbiorem z definicji 2.5). Wtedy zachodzi*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\Big) &= \exp\Big(- N_1(n)N_2(n)\Big(\mathrm{P}\Big(M_{(r,r)} > v_n\Big) - \mathrm{P}\Big(M_{(r-1,r)} > v_n\Big) \\ &\qquad - \mathrm{P}\Big(M_{(r,r-1)} > v_n\Big) + \mathrm{P}\Big(M_{(r-1,r-1)} > v_n\Big)\Big)\Big) + o(1).\end{aligned}$$

W szczególności:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\Big) &= \exp\Big(- n^2\Big(\mathrm{P}\Big(M_{(r,r)} > v_n\Big) - \mathrm{P}\Big(M_{(r-1,r)} > v_n\Big) \\ &\qquad - \mathrm{P}\Big(M_{(r,r-1)} > v_n\Big) + \mathrm{P}\Big(M_{(r-1,r-1)} > v_n\Big)\Big)\Big) + o(1).\end{aligned}$$

W kolejnym lemacie [39, Theorem 2.1] prezentujemy nierówność stanowiącą główne narzędzie w dowodzie powyższego twierdzenia. Ponieważ nierówność ta jest ze względu na charakter podobna do klasycznej nierówności Bonferroniego (patrz [8,28]):

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right), \tag{2.21}$$

nazywać ją będziemy (tak jak to czynią jej autorzy) *nierównością typu Bonferroniego*. Poniższy lemat znajduje także zastosowanie w podrozdziale 4.5 w rozważaniach o asymptotyce maksimów wielowymiarowych.

Lemat 2.35. *Ustalmy $d, m \in \mathbb{N}$. Niech $\{Z_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ będzie stacjonarnym polem losowym o wartościach w przestrzeni liniowej $(E, \mathscr{B}_E)$. Niech zbiór $U \in \mathscr{B}_E$ będzie taki, że $0 \notin U$. Dla skończonego zbioru $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ definiujemy*

$$S_{\mathcal{A}} := \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{A}} Z_{\mathbf{n}}.$$

Dla $\boldsymbol{\epsilon} \in \{0,1\}^d$ i $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ rozważamy zbiory $\mathcal{B}(\mathbf{n},\boldsymbol{\epsilon})$ i $\mathcal{B}(\mathbf{n})$ postaci

$$\mathcal{B}(\mathbf{n},\boldsymbol{\epsilon}) := \left\{ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon} \leqslant \mathbf{j} \leqslant \mathbf{n} + (m, m, \ldots, m) \right\}, \quad \mathcal{B}(\mathbf{n}) := \mathcal{B}(\mathbf{n}, \mathbf{0}),$$

ponadto określamy liczbę:

$$\Delta_{\mathbf{n}}(U) := \sum_{\boldsymbol{\epsilon} \in \{0,1\}^d} (-1)^{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots \epsilon_d} \, \mathrm{P}\left(S_{\mathcal{B}(\mathbf{n},\boldsymbol{\epsilon})} \in U \right).$$

Dla zbioru $\mathcal{A}$ definiujemy jego brzeg $\partial\mathcal{A}$ jako

$$\partial\mathcal{A} := \{ \mathbf{j} \notin \mathcal{A} : \exists_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} \, \mathbf{j} \in \mathcal{B}(\mathbf{n}) \} \cup \left\{ \mathbf{n} \in \mathcal{A} : \exists_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{A}} \, \mathbf{n} \in \mathcal{B}(\mathbf{j}) \setminus \mathcal{B}(\mathbf{j} + \mathbf{1}) \right\}.$$

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach zachodzi nierówność

$$\left| \mathrm{P}(S_{\mathcal{A}} \in U) - \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} \Delta_{\mathbf{n}}(U) \right| \leqslant C_1(d,m) \sum_{\mathbf{j} \in \partial\mathcal{A}} \mathrm{P}(Z_{\mathbf{j}} \neq 0) + C_2(d,m) \sum_{\substack{\mathbf{j},\mathbf{l} \in \mathcal{A} \\ \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty > m}} \mathrm{P}(Z_{\mathbf{j}} \neq 0, Z_{\mathbf{l}} \neq 0)$$

ze stałymi $C_1(d,m) := 2^d((m+1)^d - 1)$, $C_2(d,m) := 1/2(1 + 2^d(2m+1)^d$.

Wniosek 2.36. *Dla dowolnych $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

$$\begin{aligned} &\Big| \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{n}} > x\right) - n_1 n_2 \\ &\qquad \times \Big(\mathrm{P}(M_{(m+1,m+1)} > x) - \mathrm{P}(M_{(m,m+1)} > x) - \mathrm{P}(M_{(m+1,m)} > x) + \mathrm{P}(M_{(m,m)} > x) \Big) \Big| \\ &\leqslant \; 2C_1(2,m)(n_1+n_2)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > x) + C_2(2,m) \sum_{\mathbf{j},\mathbf{l} \in [\mathbf{1},\mathbf{n}], \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty > m} \mathrm{P}\left(X_{\mathbf{j}} > x, X_{\mathbf{l}} > x\right). \end{aligned}$$

Dowód. Należy zastosować Lemat 2.35 dla pola stacjoarnego $\{Z_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ zdefiniowanego jako $Z_{\mathbf{n}} := \mathbb{1}_{\{X_{\mathbf{n}} > x\}}$ oraz dla $\mathcal{A} := [\mathbf{1}, \mathbf{n}]$ i $U := (0, \infty)$. □

Dowód Twierdzenia 2.34. W pierwszym kroku dowiedziemy tezy twierdzenia dla szczególnego przypadku, gdy $N_1(n) = \psi_1(n)$ oraz $N_2(n) = \psi_2(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem z warunku $LD^{(r)}(v_n)$. Wtedy na mocy Wniosku 2.17 mamy

$$\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n \right) = \exp\left(-k_n^2 \, \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor, \lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor)} > v_n \right) \right) + o(1). \tag{2.22}$$

Wykorzystując Wniosek 2.36 z $\mathbf{n} := (\lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor, \lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor)$ i $m := r - 1$ oraz mnożąc otrzymaną nierówność obustronnie przez k_n^2, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\Big| k_n^2 \, \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor, \lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor)} > v_n \right) - k_n^2 \lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor \lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor \\ &\qquad \times \Big(\mathrm{P}(M_{(r,r)} > v_n) - \mathrm{P}(M_{(r-1,r)} > v_n) - \mathrm{P}(M_{(r,r-1)} > v_n) + \mathrm{P}(M_{(r-1,r-1)} > v_n) \Big) \Big| \\ &\leqslant \; 2k_n^2 c_1(r) \left(\lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor + \lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor \right) \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \\ &\quad + k_n^2 c_2(r) \sum_{\substack{\mathbf{j},\mathbf{l} \in \{1,2,\ldots,\lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor\} \times \{1,2,\ldots,\lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor\}, \\ \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty \geqslant r}} \mathrm{P}(X_{\mathbf{j}} > v_n, X_{\mathbf{l}} > v_n) \; =: \; R(n,r), \end{aligned} \tag{2.23}$$

gdzie stałe $c_1(r), c_2(r)$ są postaci $c_1(r) := 4(r^2-1)$, $c_2(r) := \frac{1}{2} + 2(2r-1)^2$. Z faktu, że $\{k_n\}$ jest ciągiem z definicji warunku $LD^{(r)}(v_n)$ wnioskujemy, że $R(n,r) \to 0$ gdy $n \to \infty$. Wraz z (2.22) prowadzi to nas do końca pierwszej części dowodu.

W drugim kroku dowodu ustalmy $C \geqslant 1$ i rozważmy ciąg $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek $\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że jeżeli ciągi $\{N_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{N_2(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ są ograniczone, czyli $N_1(n), N_2(n) < K$ dla pewnego $K > 0$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to teza twierdzenia wynika w prosty sposób z faktu, że $\mathrm{P}(X_\mathbf{1} \leqslant v_n) \to 1$ gdy $n \to \infty$. Aby zakończyć dowód rozważmy sytuację, w której $\mathbf{N}(n) \to \boldsymbol{\infty}$ wokół $\boldsymbol{\psi}$. Zauważmy, że zgodnie z Twierdzeniem 2.27 wzór (2.16) określa dystrybuantę pozorną dla pola $\{X_\mathbf{n}\}$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho^{\frac{N_1(n)N_2(n)}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{l\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(l)} \leqslant v_l\right)\right)^{\frac{N_1(n)N_2(n)}{n^2}}.$$

Korzystając z wzoru na $\lim_{l\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(l)} \leqslant v_l\right)$ otrzymanego w pierwszym kroku dowodu, dostajemy:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{l\to\infty} e^{-\psi_1(l)\psi_2(l)(\mathrm{P}(M_{(r,r)}>v_l)-\mathrm{P}(M_{(r-1,r)}>v_l)-\mathrm{P}(M_{(r,r-1)}>v_l)+\mathrm{P}(M_{(r-1,r-1)}>v_l))}\right)^{\frac{N_1(n)N_2(n)}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\psi_1(n)\psi_2(n)(\mathrm{P}(M_{(r,r)}>v_n)-\mathrm{P}(M_{(r-1,r)}>v_n)-\mathrm{P}(M_{(r,r-1)}>v_n)+\mathrm{P}(M_{(r-1,r-1)}>v_n))}\right)^{\frac{N_1(n)N_2(n)}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-N_1(n)N_2(n)(\mathrm{P}(M_{(r,r)}>v_n)-\mathrm{P}(M_{(r-1,r)}>v_n)-\mathrm{P}(M_{(r,r-1)}>v_n)+\mathrm{P}(M_{(r-1,r-1)}>v_n))},
\end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Poniżej przedstawiamy w jaki sposób można wykorzystać udowodnione wyżej twierdzenie do badania asymptotyki maksimów m-zależnego pola ruchomych maksimów.

Przykład 2.37. Rozważmy pole $\{X_\mathbf{n}\}$ ruchomych maksimów określone zgodnie z definicją 2.21. Załóżmy, że $\gamma_\mathbf{i} \geqslant 0$ dla $\mathbf{i} \in \{0,1,\ldots,m\}^2$ oraz $\gamma_\mathbf{i} = 0$ gdy $\mathbf{i} \notin \{0,1,\ldots,m\}^2$. A zatem

$$X_\mathbf{n} = \max_{\substack{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2,\\ \mathbf{0}\leqslant\mathbf{i}\leqslant(m,m)}} \gamma_\mathbf{i} Z_{\mathbf{n}+\mathbf{i}}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2.$$

Zakładamy, że $\mathrm{P}(Z_\mathbf{1} \geqslant 0) = 1$ i oznaczamy $\gamma_+ := \max_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2} \gamma_\mathbf{i}$. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem z warunku (2.12). Dla ustalonego $x > 0$ określmy $v_n := a_n x$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że pole $\{X_\mathbf{n}\}$ spełnia warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ na mocy Faktu 2.25 oraz warunek $LD^{(m+1)}(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ jako pole m-zależne (patrz Uwaga 2.56). Korzystając z Twierdzenia 2.34 dostajemy, że

$$\mathrm{P}\left(M_{(n,n)} \leqslant v_n\right) = e^{-n^2(\mathrm{P}(M_{(m+1,m+1)}>v_n)-\mathrm{P}(M_{(m,m+1)}>v_n)-\mathrm{P}(M_{(m+1,m)}>v_n)+\mathrm{P}(M_{(m,m)}>v_n))} + o(1).$$

Obliczymy granicę wyrażenia po prawej stronie w powyższej równości. Aby to zrobić, na początek przyjrzymy się asymptotyce wyrażenia $n^2\,\mathrm{P}(M_{(m+1,m+1)} > v_n)$ gdy $n \to \infty$.

Korzystając ze szczególnej postaci rozważanego pola otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
n^2\,\mathrm{P}\left(M_{(m+1,m+1)} > v_n\right) &= n^2 \sum_{\mathbf{j}\in\{0,1,\ldots,m\}^2} \mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{i}\leqslant\mathbf{j}} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{j}} > v_n\right) \\
&\quad + n^2 \sum_{\mathbf{j}\in\{0,1,\ldots,m\}\times\{m+1,\ldots,2m\}} \mathrm{P}\left(\max_{i_1\leqslant j_1,\, i_2\geqslant j_2-m} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{j}} > v_n\right) \\
&\quad + n^2 \sum_{\mathbf{j}\in\{m+1,\ldots,2m\}\times\{0,1,\ldots,m\}} \mathrm{P}\left(\max_{i_1\geqslant j_1-m,\, i_2\leqslant j_2} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{j}} > v_n\right) \\
&\quad + n^2 \sum_{\mathbf{j}\in\{m+1,\ldots,2m\}^2} \mathrm{P}\left(\max_{i_1\geqslant j_1-m,\, i_2\geqslant j_2-m} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{j}} > v_n\right) + o(1) \\
&= n^2 \sum_{\mathcal{B}\in\mathscr{I}_{(0,0)}} \mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{i}\in\mathcal{B}} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{1}} > v_n\right) + o(1),
\end{aligned}
$$

gdzie $\mathscr{I}_{(0,0)}$ oznacza rodzinę prostokątnych podzbiorów w $\mathcal{I}_{(0,0)} := \{0,1,\ldots,m\}^2$ określoną jak poniżej:

$$
\mathscr{I}_{(0,0)} := \left\{\left(\mathbf{j}+\mathcal{I}_{(0,0)}\right)\cap\mathcal{I}_{(0,0)} :\ \mathbf{j}\in\mathbb{Z}^2\right\};
$$

dla dowolnego $\mathcal{I}\subset\mathbb{Z}^d$ przyjmujemy $\mathbf{j}+\mathcal{I} := \{\mathbf{j}+\mathbf{i} :\ \mathbf{i}\in\mathcal{I}\}$. W analogiczny sposób pokazuje się, że

$$
\begin{aligned}
n^2\,\mathrm{P}\left(M_{(m,m+1)} > v_n\right) &= n^2 \sum_{\mathcal{B}\in\mathscr{I}_{(1,0)}} \mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{i}\in\mathcal{B}} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{1}} > v_n\right) + o(1), \\
n^2\,\mathrm{P}\left(M_{(m+1,m)} > v_n\right) &= n^2 \sum_{\mathcal{B}\in\mathscr{I}_{(0,1)}} \mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{i}\in\mathcal{B}} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{1}} > v_n\right) + o(1), \\
n^2\,\mathrm{P}\left(M_{(m,m)} > v_n\right) &= n^2 \sum_{\mathcal{B}\in\mathscr{I}_{(1,1)}} \mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{i}\in\mathcal{B}} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{1}} > v_n\right) + o(1),
\end{aligned}
$$

dla $\mathscr{I}_{\boldsymbol{\epsilon}} := \{(\mathbf{j}+\mathcal{I}_{\boldsymbol{\epsilon}})\cap\mathcal{I}_{(0,0)} :\ \mathbf{j}\in\mathbb{Z}^2\}$ oraz $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\epsilon}} := [\mathbf{0},(m,m)-\boldsymbol{\epsilon}]$. Korzystając kolejno z faktu, że $(\mathscr{I}_{(0,0)}\backslash\mathscr{I}_{(0,1)})\backslash(\mathscr{I}_{(1,0)}\backslash\mathscr{I}_{(1,1)}) = \{\mathcal{I}_{(0,0)}\}$ oraz z założenia (2.12) wnioskujemy, że

$$
\begin{aligned}
&n^2\left(\mathrm{P}\left(M_{(m+1,m+1)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(m,m+1)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(m+1,m)} > v_n\right) + \mathrm{P}(M_{(m,m)} > v_n)\right) \\
&\qquad = n^2\,\mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{(0,0)}} \gamma_{\mathbf{i}}\cdot Z_{\mathbf{1}} > v_n\right) + o(1) = n^2\,\mathrm{P}(\gamma_+ Z_{\mathbf{1}} > v_n) + o(1) = \gamma_+^{\alpha} x^{-\alpha} + o(1),
\end{aligned}
$$

a stąd

$$
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{(n,n)} \leqslant v_n\right) = \exp(-\gamma_+^{\alpha} x^{-\alpha}).
$$

Zauważmy, że otrzymany wynik jest zgodny z tezą Twierdzenia 2.23.

Poniżej uogólniamy Twierdzenie 2.34 na przypadek pól o bardziej skomplikowanej strukturze lokalnych zależności.

Twierdzenie 2.38. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunki (2.2) oraz $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla ciągu $\{v_n\}_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ i wszystkich $T>0$. Niech ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ będzie taki, że $k_n^2\beta_1(n)\to 0$*

oraz $k_n \psi_i(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$ *dla* $i = 1, 2$, *gdy* $n \to \infty$. *Przypuśćmy, że* $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *jest ciągiem, dla którego* $R(n, \varrho_n) \to 0$ *gdy* $n \to \infty$, *gdzie* R *jest funkcją zadaną przez (2.23). Wtedy dla każdego ciągu* $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$ *znajdującego się w otoczeniu* $\boldsymbol{\psi}$ *(w sensie takim jak w Twierdzeniu 2.34) zachodzi:*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\Big) \;=\; \exp\Big(&- N_1(n)N_2(n)\Big(\mathrm{P}\Big(M_{(\varrho_n,\varrho_n)} > v_n\Big) - \mathrm{P}\Big(M_{(\varrho_n-1,\varrho_n)} > v_n\Big) \\ &- \mathrm{P}\Big(M_{(\varrho_n,\varrho_n-1)} > v_n\Big) + \mathrm{P}\Big(M_{(\varrho_n-1,\varrho_n-1)} > v_n\Big)\Big)\Big) + o(1).\end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy, że dla ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego założenia twierdzenia prawdziwa jest równość (2.22), na mocy Wniosku 2.17. Ponadto, stosując Wniosek 2.36 podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.34, tym razem dla $m := \varrho_n - 1$, otrzymujemy nierówność analogiczną do (2.23). Łatwo widać, że zbieżność $R(n, \varrho_n) \to 0$ implikuje tezę twierdzenia. □

W niektórych sytuacjach do badania maksimów może okazać się przydatny nietrudny w dowodzie wniosek z powyższego twierdzenia.

Wniosek 2.39. *Przypuśćmy, że pole* $\{X_{\mathbf{n}}\}$ *i ciąg* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *są takie, że* $B_1(v_n)$ *zachodzi wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$. *Ponadto niech ciąg* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *spełnia* $k_n^2 \beta_1(n) \to 0$ *i* $k_n \psi_i(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$ *dla* $i = 1, 2$, *gdy* $n \to \infty$. *Jeśli spełnione są następujące założenia:*

(i) $\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} R(n, r) = 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} n^2\,\mathrm{P}(M_{(r,r)-\boldsymbol{\epsilon}} > v_n) = \zeta_{\boldsymbol{\epsilon}}(r)$ *dla dowolnych* $r \in \mathbb{N}$ *i* $\boldsymbol{\epsilon} \in \{0, 1\}^2$;

(iii) $\lim_{r\to\infty} \Big(\zeta_{(0,0)}(r) - \zeta_{(0,1)}(r) - \zeta_{(1,0)}(r) + \zeta_{(1,1)}(r)\Big) = \zeta$,

to ma miejsce zależność

$$\mathrm{P}\Big(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\Big) \to e^{-\zeta} \quad \textit{gdy} \quad n \to \infty.$$

Dowód. Dowód rozpoczynamy od prostej obserwacji. Niech $\{b_{n,r}\}_{n,r\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną liczb nieujemnych spełniającą warunek $\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} b_{n,r} = 0$. Wtedy istnieje ciąg $\{\varrho_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zbieżny do nieskończoności i taki, że $\lim_{n\to\infty} b_{n,\varrho_n} = 0$ dla dowolnego ciągu $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ zbieżnego do nieskończoności takiego, że $\varrho_n \leqslant \varrho_n^*$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Na mocy założeń mamy:

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} n^2\big(\mathrm{P}(M_{(r,r)} > v_n) + \mathrm{P}(M_{(r,r-1)} > v_n) - \mathrm{P}(M_{(r-1,r)} > v_n) + \mathrm{P}(M_{(r-1,r-1)} > v_n)\big) - \zeta = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} R(n, r) = 0.$$

Wykorzystując powyższą obserwację znajdujemy ciąg $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do nieskończoności i taki, że

$$\lim_{n\to\infty} n^2\big(\mathrm{P}(M_{(\varrho_n,\varrho_n)} > v_n) + \mathrm{P}(M_{(\varrho_n,\varrho_n-1)} > v_n) - \mathrm{P}(M_{(\varrho_n-1,\varrho_n)} > v_n) + \mathrm{P}(M_{(\varrho_n-1,\varrho_n-1)} > v_n)\big) = \zeta,$$

$$\lim_{n\to\infty} R(n, \varrho_n) = 0.$$

Aby zakończyć dowód wniosku wystarczy skorzystać z Twierdzenia 2.38. □

2.2.5. Indeks ekstremalny

W niniejszym podrozdziale opieramy się na rezultatach przedstawionych w podrozdziałach 2.2.3 i 2.2.4, by dowieść pewnych twierdzeń dotyczących indeksu ekstremalego (wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$) dla pola losowego $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Na początek odpowiadamy na pytanie o istnienie indeksu ekstremalnego.

Twierdzenie 2.40. *Przypuśćmy, że dystrybuanta $F(x) = \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant x)$ jest regularna w sensie O'Briena. Wtedy pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ ma indeks ekstremalny wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ równy $\theta \in (0,1]$ dokładnie wtedy, gdy istnieją ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i liczba $\tau > 0$, dla których*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 P(X > v_n) = \tau, \tag{2.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n) = \exp(-\theta\cdot\tau), \tag{2.25}$$

oraz dla każdego $T > 0$ warunek $B_T(v_n)$ zachodzi wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$.

Dowód. Na początek uzasadnimy, że warunek konieczny w dowodzonym twierdzeniu jest prawdziwy. Rzeczywiście, na mocy regularności dystrybuanty F znajdujemy ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o własności (2.24) dla pewnego $\tau > 0$. Wtedy (2.25) wynika z definicji indeksu ekstremalnego, natomiast na mocy Twierdzenia 2.33 wnioskujemy, że $B_T(v_n)$ zachodzi.

Aby pokazać, że warunek dostateczny zachodzi, przypuśćmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia założenia (2.24), (2.25) oraz $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla wszystkich $T > 0$ oraz dla ciągu $\{v_n\}$. Wtedy wzór (2.16) z $\rho := e^{-\theta\tau}$ definiuje dystrybuantę pozorną G dla $\{X_{\mathbf{n}}\}$, zgodnie z Twierdzeniem 2.27. Stosując to twierdzenie ponownie i kładąc $\hat{\rho} := e^{-\tau}$ określamy dystrybuantę pozorną $\hat{G}$ dla pola $\{\hat{X}_{\mathbf{n}}\}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zadanym przez F. Niech teraz $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^2$ będzie dowolnym ciągiem znajdującym się w otoczeniu $\boldsymbol{\psi}$ (w sensie takim jak w Twierdzeniu 2.34), tzn. istnieje $C \geqslant 1$ takie, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C)$. Wtedy dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ otrzymujemy:

$$\left|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant u_n\right) - \mathrm{P}\left(X_{\mathbf{1}} \leqslant u_n\right)^{N_1(n)N_2(n)\theta}\right| \leqslant \left|\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant u_n\right) - G(u_n)^{N_1(n)N_2(n)}\right|$$
$$+ \left|G(u_n)^{N_1(n)N_2(n)} - \hat{G}(u_n)^{N_1(n)N_2(n)\theta}\right| + \left|\hat{G}(u_n)^{N_1(n)N_2(n)\theta} - \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant u_n)^{N_1(n)N_2(n)\theta}\right| = o(1),$$

gdyż funkcje G i $\hat{G}$ to dystrybuanty pozorne dla pól $\{X_{\mathbf{n}}\}$ i $\{\hat{X}_{\mathbf{n}}\}$, odpowiednio, oraz $G(x) = \hat{G}(x)^{\theta}$. Stąd otrzymujemy, że indeks ekstremalny wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ istnieje i wynosi θ. □

Okazuje się, że każda liczba $\theta \in (0,1]$ jest indeksem ekstremalnym pewnego pola losowego. Poniżej podajemy odpowiedni przykład.

Przykład 2.41. Niech $\{X_{\mathbf{n}}\}$ będzie polem ruchomych maksimów określonym za pomocą definicji 2.21. Zakładamy, że $\mathrm{P}(Z_{\mathbf{1}} \geqslant 0) = 1$ i $\gamma_{\mathbf{i}} \geqslant 0$ dla $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2$. Oznaczamy $\gamma_+ := \max_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2} \gamma_{\mathbf{i}}$. Dla ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ spełniającego (2.12) oraz dla ustalonego $x > 0$ określmy $v_n := a_n x$. Korzystając z Twierdzenia 2.40, Faktu 2.25, Twierdzenia 2.23 i własności (2.11) dostajemy, że indeks ekstremalny θ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}_0$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ istnieje. Ponadto zachodzi $\theta = \gamma_+^{\alpha} / \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2} \gamma_{\mathbf{i}}^{\alpha}$.

W dalszych rozważaniach poszukujemy wzoru, który pozwoli nam obliczyć indeks ekstremalny pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Wyjątkową uwagę poświęcamy indeksowi pola spełniającego lokalny warunek $LD^{(r)}$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$, a więc w szczególności pola m-zależnego dla $m = r - 1$.

Turkman pokazuje [73, Theorem 1], że jeśli liczba $\theta \in (0, 1]$ jest indeksem ekstremalnym wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełniającego warunek

$$\mathrm{P}\left(M_{(1,2),(r_1,r_2)} \leqslant x \mid M_{(1,1),(r_1,1)} > x\right) \geqslant \mathrm{P}\left(M_{(1,2),(r_1+l_1,r_2)} \leqslant x \mid M_{(1,1),(r_1+l_1,1)} > x\right)$$

dla dużych $r_1, r_2, l_1 \in \mathbb{N}$ i $x < F_*$, to

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{(1,2),(r_1(n),r_2(n))} \leqslant v_n \mid M_{(1,1),(r_1(n),1)} > v_n\right) \times \mathrm{P}\left(M_{(2,1),(r_1(n),1)} \leqslant v_n \mid X_{\mathbf{1}} > v_n\right) \tag{2.26}$$

dla ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ o własności $n^2\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau > 0$, ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ o własnościach $k_n^2\beta_1(n) \to 0$, $k_n\psi_1(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$ i $k_n\psi_2(n)\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to 0$ oraz ciągów $\{r_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{r_2(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ postaci $r_1(n) := \lfloor \psi_1(n)/k_n \rfloor$ i $r_2(n) := \lfloor \psi_2(n)/k_n \rfloor$.

Kolejny przykład uzasadnia, że podstawienie $r_1(n) = r_2(n) := m + 1$ we wzorze (2.26) nie prowadzi do poprawnej formuły na indeks ekstremalny pola m-zależnego.

Przykład 2.42. Niech $\{Y_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Niech ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ będzie taki, że $n^2\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau$ gdy $n \to \infty$, dla pewnego $\tau > 0$. Rozważmy 1-zależne pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$ określone następująco:

$$X_{\mathbf{n}} := \max\left\{Y_{(n_1,n_2)}, Y_{(n_1+1,n_2)}, Y_{(n_1,n_2+1)}\right\}, \quad \text{dla} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2.$$

Wtedy indeks ekstremalny pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ istnieje i $\theta = \frac{1}{3}$. Ponadto mamy:

$$\mathrm{P}\left(M_{(1,2),(2,2)} \leqslant v_n \mid M_{(1,1),(2,1)} > v_n\right)\mathrm{P}\left(M_{(2,1),(2,1)} \leqslant v_n \mid X_{\mathbf{1}} > v_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}.$$

Pytamy o wzór, który umożliwi nam obliczenie indeksu ekstremalny pola, które jest m-zależne, na podstawie łącznego rozkładu skończonej liczby zmiennych z badanego pola. Poniżej przedstawiamy taką formułę będącą odpowiednikiem wzoru (1.10) dla ciągów.

Twierdzenie 2.43. *Załóżmy, że liczba $\theta \in (0, 1]$ jest indeksem ekstremalnym pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Niech ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i liczba $\tau > 0$ będą takie, że $n^2 P(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau$ gdy $n \to \infty$. Jeśli warunek $LD^{(r)}(v_n)$ jest spełniony dla pewnego $r \in \mathbb{N}$, to zachodzi:*

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}\left(M_{(r,r)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(r-1,r)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(r,r-1)} > v_n\right) + \mathrm{P}\left(M_{(r-1,r-1)} > v_n\right)}{\mathrm{P}\left(X_{\mathbf{1}} > v_n\right)}.$$

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$\theta_n := \frac{\mathrm{P}\left(M_{(r,r)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(r-1,r)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(r,r-1)} > v_n\right) + \mathrm{P}\left(M_{(r-1,r-1)} > v_n\right)}{\mathrm{P}\left(X_{\mathbf{1}} > v_n\right)}.$$

Zauważmy, że mamy

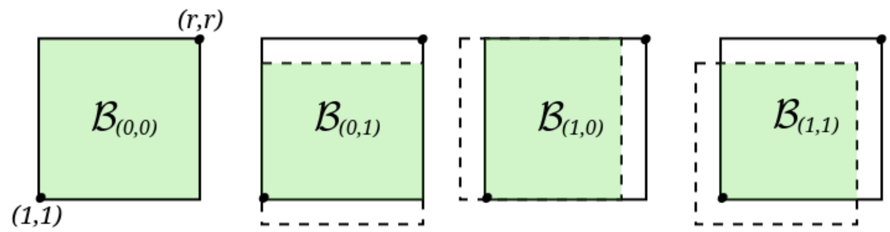
$$\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) = \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{\psi_1(n)\psi_2(n)\theta} + o(1) = \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{n^2\theta} + o(1)$$
$$= \exp(-n^2\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)\,\theta) + o(1),$$

ponieważ θ jest indeksem ekstremalnym pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Natomiast z drugiej strony, korzystając z Twierdzenia 2.34, otrzymujemy

$$\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) = \exp\left(-n^2\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)\,\theta_n\right) + o(1).$$

Zestawiając powyższe fakty dostajemy, że $\theta_n \to \theta$ gdy $n \to \infty$, co kończy dowód. □

Uwaga 2.44. Na mocy powyższego twierdzenia, jeśli chcemy obliczyć indeks ekstremalny pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełniającego lokalny warunek $LD^{(r)}(v_n)$, to wystarczy, że znamy rozkład łączny rodziny $\{X_{\mathbf{n}} :\ \mathbf{n} \in \{1,2,\ldots,r\}^2\}$ składającej się ze skończonej liczby zmiennych (patrz także rysunek 2.5).



Rysunek 2.5: Na mocy Twierdzenia 2.43, aby znaleźć indeks ekstremalny pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełniającego lokalny warunek $LD^{(r)}(v_n)$, wystarczy znać asymptotykę prawdopodobieństw $\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)$ oraz $\mathrm{P}(M_{\mathcal{B}_{\boldsymbol{\epsilon}}} > v_n)$ dla $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \{0,1\}^2$, gdy $n \to \infty$, gdzie $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\epsilon}} := [(1,1),(r-\epsilon_1, r-\epsilon_2)]$.

Zatosujemy powyższe twierdzenie, by obliczyć indeks ekstremalny pewnego pola 1-zależnego, dla którego wspomniany wcześniej wzór (2.1) nie działa.

Przykład 2.45. Niech $\{Y_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie oraz niech ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ spełnia $n^2\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau$ gdy $n \to \infty$ dla pewnego $\tau > 0$. Rozważmy 1-zależne pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}$ określone następująco:

$$X_{\mathbf{n}} := \max\left\{Y_{(n_1+1,n_2)}, Y_{(n_1,n_2+1)}\right\} \quad \text{dla} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2.$$

Wtedy

$$\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) = \mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{\psi_1(n)\psi_2(n)+\psi_1(n)+\psi_2(n)-1} = \mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{n^2} + o(1) = e^{-\tau} + o(1),$$
$$\mathrm{P}\left(\hat{M}_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) = \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{n^2} = \mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} \leqslant v_n)^{2n^2} = e^{-2\tau} + o(1),$$

a stąd $\theta = 1/2$. Na mocy Twierdzenia 2.43 zachodzi:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{7\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} > v_n) - 4\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} > v_n) - 4\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} > v_n) + 2\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} > v_n)}{2\,\mathrm{P}(Y_{\mathbf{1}} > v_n)} = \frac{1}{2}.$$

Z drugiej strony, korzystając z wzoru (2.1) otrzymujemy niezgodnie z prawdą, że indeks ekstremalny wynosi 1.

Analogicznie jak Twierdzenia 2.43 (jednak tym razem w miejsce Twierdzenia 2.34 wykorzystujemy Twierdzenie 2.38) dowodzi się kolejnego rezultatu dla pól o bardziej skomplikowanej strukturze zależności.

Twierdzenie 2.46. *Załóżmy, że* $\theta \in (0,1]$ *jest indeksem ekstremalnym pola* $\{X_{\mathbf{n}}\}$*, a ciąg* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *jest taki, że* $n^2 P(X_{\mathbf{n}} > v_n) \to \tau$ *gdy* $n \to \infty$*, dla pewnego* $\tau > 0$*. Niech* $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *będzie ciągiem spełniającym założenia Twierdzenia 2.38. Wtedy*

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}\left(M_{(\varrho_n,\varrho_n)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(\varrho_n-1,\varrho_n)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{(\varrho_n,\varrho_n-1)} > v_n\right) + \mathrm{P}\left(M_{(\varrho_n-1,\varrho_n-1)} > v_n\right)}{\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)}.$$

2.3. Maksima pól losowych dowolnego wymiaru

W podrozdziale 2.2 przedstawione zostały rozważania dotyczące 2-wymiarowego stacjonarnego pola losowego. Dowiedliśmy rezultatów opisujących asymptotykę maksimów, zwracając szczególną uwagę na dystrybuantę pozorną i indeks ekstremalny badanego pola. Prowadząc analogiczne rozważania, nieco bardziej złożone z racji większego wymiaru i bardziej skomplikowanych w zapisie formuł, otrzymujemy podobne wyniki dla d-wymiarowego pola stacjonarnego, gdzie $d \in \mathbb{N}$ jest dowolne. Celem tego podrozdziału jest przedstawienie tych właśnie rezultatów. Dowody będące w istocie zastosowaniem takich samych technik jak w przypadku $d = 2$ pomijamy lub podajemy wyłącznie ich szkice.

Ustalmy wymiar $d \in \mathbb{N}$ i rozważmy stacjonarne pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$. Ponadto niech $\{\boldsymbol{\psi}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ będzie ciągiem, którego współrzędne $\psi_1(n), \psi_2(n), \ldots, \psi_d(n)$ są niemalejące i zbiegają do nieskończoności (gdy $n \to \infty$) oraz spełniają warunek

$$\psi_1(n)\psi_2(n)\cdots\psi_d(n) \sim n^d.$$

Podamy rezultaty opisujące asymptotykę maksimów $M_{\mathbf{n}}$ gdy $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$ *wokół* $\boldsymbol{\psi}$ (zgodnie z definicją 2.47). Zwykle będziemy zakładać, że dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ spełniony jest warunek

$$\mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) \to \rho \in (0,1) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty, \tag{2.27}$$

lub

$$\frac{n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)}{\psi_i(n)} \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, d. \tag{2.28}$$

2.3.1. Podstawowe pojęcia

Poniżej uogólniamy pojęcia wprowadzone w podrozdziale 2.2.1 dla szczególnego przypadku $d = 2$.

Definicja 2.47. O ciągu $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ powiemy, że

$$\mathbf{N}(n) \to \boldsymbol{\infty} \quad \textit{wokół} \quad \boldsymbol{\psi},$$

gdy $\mathbf{N}(n) \to \boldsymbol{\infty}$ oraz istnieje $C \geqslant 1$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C) := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \prod_{i=1}^{d} [1/C \cdot \psi_i(j), C \cdot \psi_i(j)].$$

Definicja 2.48. O rodzinie $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{R}$ powiemy, że

$$a_{\mathbf{n}} \to a \text{ gdy } \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \text{ wokół } \boldsymbol{\psi},$$

jeżeli dla każdego $C > 0$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $R \in \mathbb{N}$ taka, że $|a_{\mathbf{n}} - a| < \varepsilon$, o ile $n_1, n_2, \ldots, n_d > R$ i $\mathbf{n} \in \mathcal{U}(C)$.

Definicja 2.49. Dystrybuantę G nazywamy *dystrybuantą pozorną wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$, jeśli

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{n}} \leqslant u_{\mathbf{n}}) - G(u_{\mathbf{n}})^{n_1 n_2 \cdots n_d} \to 0 \quad \text{gdy} \quad \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \quad \text{wokół} \quad \boldsymbol{\psi},$$

dla dowolnej rodziny $\{u_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \subset \mathbb{R}$.

Definicja 2.50. Mówimy, że liczba $\theta \in (0,1]$ jest *indeksem ekstremalnym wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$, jeśli

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{n}} \leqslant u_{\mathbf{n}}) - \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant u_{\mathbf{n}})^{n_1 n_2 \cdots n_d \cdot \theta} \to 0 \quad \text{gdy} \quad \mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty} \quad \text{wokół} \quad \boldsymbol{\psi},$$

dla dowolnej rodziny $\{u_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \subset \mathbb{R}$.

Uwaga 2.51. Niech $\theta \in (0,1]$. Pole losowe $\{X_{\mathbf{n}}\}$ ma dystrybuantę pozorną G postaci

$$G(x) := \mathrm{P}\left(X_{\mathbf{1}} \leqslant x\right)^{\theta} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}$$

dokładnie wtedy, gdy liczba θ jest indeksem ekstremalnym tego pola.

Uogólniając warunki łamania B_T dla wymiarów $d = 1, 2$ wprowadzamy warunek B_T dla pola dowolnego wymiaru.

Definicja 2.52. Pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia *warunek* $B_T(v_n)$ *wzdłuż* $\boldsymbol{\psi}$ dla pewnego $T > 0$ i ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, o ile

$$\beta_T(n) := \max_{\substack{\mathbf{p}(1),\mathbf{p}(2)\in\mathbb{N}_0^d,\\ \mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)\leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)}} \Big| \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)} \leqslant v_n\right) - \prod_{(i_1,i_2,\ldots,i_d)\in\{1,2\}^d} \mathrm{P}\left(M_{(p_1(i_1),p_2(i_2),\ldots,p_d(i_d))} \leqslant v_n\right) \Big| \to 0, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Dla pól m-zależnych ma miejsce następujący fakt (uogólnienie Faktu 2.19).

Fakt 2.53. *Jeśli $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest polem m-zależnym i dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ spełnia założenie (2.28), to warunek $B_T(v_n)$ zachodzi wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla dowolego $T > 0$.*

Poniżej podajemy pewne konsekwencje warunku $B_T(v_n)$, analogiczne do tych, o których mówił Lemat 2.15 oraz Wniosek 2.17 w przypadku $d = 2$.

Lemat 2.54. *Przypuśćmy, że $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pewnego $T > 0$ i dla ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.*

(1) Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\max_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k)\leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)} \Big| \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k)} \leqslant v_n\right) - \prod_{(i_1,i_2,\ldots,i_d)\in\{1,2,\ldots,k\}^d} \mathrm{P}\left(M_{(p_1(i_1),p_2(i_2),\ldots,p_d(i_d))} \leqslant v_n\right) \Big| \to 0, \quad \textit{gdy} \quad n \to \infty.$$

(2) Dla dowolnego ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ o własnościach

$$k_n \to \infty, \quad k_n = o(n), \quad k_n^d \beta_T(n) = o(1), \tag{2.29}$$

gdzie $\{\beta_T(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem z definicji warunku $B_T(v_n)$, zachodzi

$$\max_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k_n)\leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)} \Big| \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)+\ldots+\mathbf{p}(k_n)} \leqslant v_n\right) - \prod_{(i_1,i_2,\ldots,i_d)\in\{1,2,\ldots,k_n\}^d} \mathrm{P}\left(M_{(p_1(i_1),p_2(i_2),\ldots,p_d(i_d))} \leqslant v_n\right) \Big| \to 0, \quad \textit{gdy} \quad n\to\infty.$$

(3) Załóżmy, że (2.28) zachodzi oraz ciąg $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ jest taki, że $\mathbf{N}(n) \leqslant T\cdot\boldsymbol{\psi}(n)$ dla $n\in\mathbb{N}$. Dla dowolnego ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ spełniającego (2.29) oraz

$$k_n \cdot \frac{n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)}{\psi_i(n)} = o(1) \quad (\textit{dla} \quad i = 1,2,\ldots,d)$$

mamy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\right) &= \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor N_1(n)/k_n\rfloor,\lfloor N_2(n)/k_n\rfloor,\ldots,\lfloor N_d(n)/k_n\rfloor)} \leqslant v_n\right)^{k_n^d} + o(1)\\
&= \exp\left(-k_n^d\,\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor N_1(n)/k_n\rfloor,\lfloor N_2(n)/k_n\rfloor,\ldots,\lfloor N_d(n)/k_n\rfloor)} > v_n\right)\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełniającego $B_1(v_n)$ wprowadzamy warunek opisujący lokalne zależności. Warunek taki dla $d = 2$ został określony przez definicję 2.3.

Definicja 2.55. Powiemy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia *warunek $LD^{(r)}(v_n)$* wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ (dla pewnego $r\in\mathbb{N}$), o ile

$$k_n^d \sum_{\substack{\mathbf{j},\mathbf{l}\,\in\,\prod_{i=1}^d\{1,2,\ldots,\lfloor\psi_i(n)/k_n\rfloor\},\\ \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty\geqslant r}} \mathrm{P}(X_{\mathbf{j}} > v_n, X_{\mathbf{l}} > v_n) \to 0, \quad \text{gdy} \quad n\to\infty,$$

dla pewnego ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ o własnościach $k_n^d\beta_1(n) = o(1)$ oraz $k_n\frac{n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}}>v_n)}{\psi_i(n)} = o(1)$ dla $i = 1,2,\ldots,d$.

Uwaga 2.56. Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ jest m-zależne. Niech $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem takim, że zachodzi warunek $B_1(v_n)$ oraz

$$\limsup_{n\to\infty} n^d P(X_{\mathbf{1}} > v_n) < \infty.$$

Wtedy istnieje ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ taki, że $k_n\to\infty$, $k_n^d\beta_1(n)\to 0$ oraz $k_n\frac{n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}}>v_n)}{\psi_i(n)} \to 0$ dla $i = 1,2,\ldots,d$, gdy $n\to\infty$. Co więcej, dla takiego ciągu $\{k_n\}$ mamy, że

$$\begin{aligned}
k_n^d \sum_{\substack{\mathbf{j},\mathbf{l}\,\in\,\prod_{i=1}^d\{1,2,\ldots,\lfloor\psi_i(n)/k_n\rfloor\},\\ \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty\geqslant m+1}} \mathrm{P}(X_{\mathbf{j}} > v_n, X_{\mathbf{l}} > v_n) &\leqslant k_n^d \left(\frac{\psi_1(n)\psi_2(n)\cdots\psi_d(n)}{k_n^d}\right)^2 \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)^2\\
&= \frac{(n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n))^2}{k_n^d} + o(1) = o(1).
\end{aligned}$$

A zatem m-zależne pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunek $LD^{(m+1)}(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$.

2.3.2. Twierdzenia graniczne

W niniejszym podrozdziale prezentujemy twierdzenia opisujące asymptotykę maksimów słabo zależnego, stacjonarnego pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ dowolnego wymiaru $d \geqslant 1$.

Dystrybuanta pozorna

Zaczynamy od zagadnienia istnienia dystrybuanty pozornej dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$, które spełnia założenia (2.27) i (2.28) z pewnym niemalejącym ciągiem $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Przypominamy, że dla $d = 2$ dowiedliśmy już Twierdzenia 2.27 i Twierdzenia 2.33. Definiujemy odwzorowanie będące kandydatem na dystrybuantę pozorną:

$$G(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x < v_1; \\ \rho^{1/n^d} & \text{dla } v_n \leqslant x < v_{n+1}; \\ 1 & \text{dla } x \geqslant F_*, \end{cases} \tag{2.30}$$

analogicznie jak zostało to zrobione wcześniej w przypadku $d = 2$. Poniższe twierdzenie mówi, że formuła (2.30) rzeczywiście wyznacza dystrybuantę pozorną pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$.

Twierdzenie 2.57. *Załóżmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla każdego $T > 0$ i dla ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ oraz spełnione są założenia (2.27) i (2.28). Wtedy funkcja G zdefiniowana przez (2.30) jest dystrybuantą pozorną wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$.*

Ważnym narzędziem w dowodzie powyższego twierdzenia jest następujące uogólnienie Lematu 2.30.

Lemat 2.58. *Niech pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ i ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ będą takie, że warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ zachodzi dla każdego $T > 0$ oraz spełnione są założenia (2.27) i (2.28). Wtedy dla dowolnego $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_d) \in (0, \infty)^d$ prawdą jest, że*

$$\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor t_1 n\rfloor, \lfloor t_2 n\rfloor, \ldots, \lfloor t_d n\rfloor)} \leqslant v_n\right) \to \rho^{t_1 t_2 \cdots t_d} \quad gdy \quad n \to \infty.$$

Ponadto, dla dowolnego zbioru $\mathcal{F} \subset [0, \infty)^d$ takiego, że nie istnieje ciąg

$$\{\mathbf{t}(n) = (t_1(n), t_2(n), \ldots, t_d(n))\} \subset \mathcal{F}$$

o własności $t_{i_1}(n) \to \infty$, $t_{i_2}(n) \to 0$ dla pewnych $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, d\}$, zachodzi zbieżność jednostajna:

$$\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{F}} \left| \mathrm{P}\left(M_{(\lfloor t_1 n\rfloor, \lfloor t_2 n\rfloor, \ldots, \lfloor t_d n\rfloor)} \leqslant v_n\right) - \rho^{t_1 t_2 \cdots t_n} \right| \to 0 \quad gdy \quad n \to \infty. \tag{2.31}$$

Ponieważ nietrudno pokazać, że pola spełniające (2.27) i posiadające dystrybuantę pozorną wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ spełniają warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$, wnioskujemy, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.59. *Niech pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia (2.27) i (2.28) z pewnym ciągiem $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Wtedy dystrybuanta pozorna wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ istnieje dokładnie wtedy, gdy warunek $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ zachodzi dla dowolnego $T > 0$.*

Granica maksimów

Przechodzimy teraz do odpowiedzi na pytanie o zbieżność maksimów częściowych. W pierwszej kolejności koncentrujemy się na sytuacji, gdy $\{X_{\mathbf{n}}\}$ należy do klasy pól spełniających lokalny warunek $LD^{(r)}(v_n)$ dla pewnej liczby $r \in \mathbb{N}$. Dla takiego pola potrafimy dowieść następującego twierdzenia, będącego odpowiednikiem Twierdzenia 2.34 dla przypadku $d = 2$.

Twierdzenie 2.60. *Przypuśćmy, że pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia warunki (2.27) oraz $B_T(v_n)$ i $LD^{(r)}(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, pewnego $r \in \mathbb{N}$ i dla każdego $T > 0$. Niech ciąg $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ znajduje się w otoczeniu $\boldsymbol{\psi}$ (tzn. $\mathbf{N}(n) \in \mathcal{U}(C)$ dla pewnego $C \geqslant 1$, gdzie $\mathcal{U}(C)$ jest zbiorem z definicji 2.47). Wtedy zachodzi*

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\right) \qquad (2.32)\\ &\quad = \exp\left(-N_1(n)N_2(n)\cdots N_d(n) \sum_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^d} (-1)^{\epsilon_1+\epsilon_2+\ldots+\epsilon_d}\,\mathrm{P}\left(M_{(r,r,\ldots,r)-\boldsymbol{\epsilon}} > v_n\right)\right) + o(1). \end{aligned}$$

Dowód. Pierwszy krok dowodu przeprowadzamy dla $\mathbf{N}(n) = \boldsymbol{\psi}(n)$. Korzystając z nierówności typu Bonferroniego z Lematu 2.35 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\Bigg|k_n^d\,\mathrm{P}\left(M_{(\lfloor\psi_1(n)/k_n\rfloor,\lfloor\psi_2(n)/k_n\rfloor,\ldots,\lfloor\psi_d(n)/k_n\rfloor)} > v_n\right)\\ &\qquad - k_n^d\frac{\psi_1(n)\psi_2(n)\cdots\psi_d(n)}{k_n^d}\sum_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^d}(-1)^{\epsilon_1+\epsilon_2+\ldots+\epsilon_d}\,\mathrm{P}\left(M_{(r,r,\ldots,r)-\boldsymbol{\epsilon}} > v_n\right)\Bigg|\\ &\leq\; c_1(r)\cdot k_n^d\left(\prod_{i=1}^d(\lfloor\psi_i(n)/k_n\rfloor + r) - \prod_{i=1}^d\lfloor\psi_1(n)/k_n\rfloor\right)\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)\\ &\qquad + c_2(r)\cdot k_n^d \sum_{\substack{\mathbf{j},\mathbf{l}\,\in\prod_{i=1}^d\{1,2,\ldots,\lfloor\psi_i(n)/k_n\rfloor\},\\ \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|_\infty\geqslant r}} \mathrm{P}(X_{\mathbf{j}} > v_n, X_{\mathbf{l}} > v_n) \;=:\; R(n,r) \qquad (2.33) \end{aligned}$$

dla $c_1(r) := 2^d(r^d-1)$, $c_2(r) := \frac{1}{2} + 2^{d-1}(2r-1)^d$ i dla dowolnego ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$. Stosując Lemat 2.54 (3), a następnie wykorzystując założenie $LD^{(r)}(v_n)$ otrzymujemy tezę twierdzenia dla $\mathbf{N}(n) = \boldsymbol{\psi}(n)$.

Teza dla dowolnego $\{\mathbf{N}(n)\}$ spełniającego założenia dowodzonego twierdzenia wynika z pierwszego kroku po zastosowaniu Twierdzenia 2.57. □

Kolejne twierdzenie to uogólnienie Twierdzenia 2.60 na przypadek pól o bardziej złożonej strukturze zależności (odpowiednik Twierdzenia 2.38 dla $d = 2$). Dowodzi się go podobnie.

Twierdzenie 2.61. *Niech pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełnia (2.27) oraz $B_T(v_n)$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pewnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i dla wszystkich $T > 0$. Niech ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ będzie taki, że $k_n^d\beta_1(n) \to 0$ i $k_n\frac{n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}}>v_n)}{\psi_i(n)} \to 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, d$, gdy $n \to \infty$. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, dla którego $R(n, \varrho_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$, gdzie R jest funkcją zadaną przez (2.33). Wtedy dla każdego ciągu $\{\mathbf{N}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ znajdującego się w otoczeniu $\boldsymbol{\psi}$ (w sensie takim jak w Twierdze-*

niu 2.34) zachodzi:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{N}(n)} \leqslant v_n\right)\\ &= \exp\left(-N_1(n)N_2(n)\cdots N_d(n) \sum_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^d} (-1)^{\epsilon_1+\epsilon_2+\ldots+\epsilon_d}\,\mathrm{P}\left(M_{(\varrho_n,\varrho_n,\ldots,\varrho_n)-\boldsymbol{\epsilon}} > v_n\right)\right) + o(1).\end{aligned}$$

Indeks ekstremalny

Opierając się na przedstawionych powyżej rezultatach odpowiadamy na pytania o istnienie oraz o metody obliczania indeksu ekstremalnego. Kolejne twierdzenie o istnieniu indeksu w przypadku $d = 2$ to udowodnione wcześniej Twierdzenie 2.40.

Twierdzenie 2.62. *Przypuśćmy, że dystrybuanta $F(x) = \mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} \leqslant x)$ jest regularna w sensie O'Briena. Wtedy pole $\{X_{\mathbf{n}}\}$ posiada indeks ekstremalny $\theta \in (0,1]$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i liczba $\tau > 0$ takie, że*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^d\,\mathrm{P}(X > v_n) &= \tau,\\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \leqslant v_n\right) &= \exp(-\theta\cdot\tau),\end{aligned}$$

oraz warunek $B_T(v_n)$ zachodzi wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla każdego $T > 0$.

W dalszej kolejności podajemy twierdzenia ustanawiające wzory na indeks ekstremalny pola (porównaj: Twierdzenie 2.43 i Twierdzenie 2.46 dla $d = 2$). Pierwsze z nich zachodzi dla pól spełniających $LD^{(r)}(v_n)$.

Twierdzenie 2.63. *Załóżmy, że $\theta \in (0,1]$ jest indeksem ekstremalnym wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Niech $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem spełniającym $n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau$ gdy $n \to \infty$, dla $\tau > 0$. Załóżmy, że $LD^{(r)}(v_n)$ zachodzi wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$. Wtedy θ otrzymuje się jako następującą granicę:*

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^d} (-1)^{\epsilon_1+\epsilon_2+\ldots+\epsilon_d}\,\mathrm{P}\left(M_{(r,r,\ldots,r)-\boldsymbol{\epsilon}} > v_n\right)}{\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)}.$$

Kolejne twierdzenie prawdziwe jest dla szerszej klasy pól, jednak rezultat nie jest tak przejrzysty jak w przypadku Twierdzenia 2.63.

Twierdzenie 2.64. *Załóżmy, że $\theta \in (0,1]$ jest indeksem ekstremalnym wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Niech $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem spełniającym $n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau$ gdy $n \to \infty$, dla $\tau > 0$. Ponadto niech $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem takim jak w Twierdzeniu 2.61. Wtedy zachodzi:*

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^d} (-1)^{\epsilon_1+\epsilon_2+\ldots+\epsilon_d}\,\mathrm{P}\left(M_{(\varrho_n,\varrho_n,\ldots,\varrho_n)-\boldsymbol{\epsilon}} > v_n\right)}{\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)}. \tag{2.34}$$

Pragniemy przypominieć, że wzory, które otrzymaliśmy powyżej, to nie jedyne znane nam wzory na indeks ekstremalny pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Poza niepoprawnym wzorem (2.1) mamy także rezultat Turkmana [73, Theorem 1]. Autor ten uzasadnia (przeprowadzając szczegółowy dowód dla $d = 3$ proponuje metodę dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$), że jeśli liczba $\theta \in (0,1]$ jest indeksem ekstremalnym wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$ spełniającego warunek

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(M_{(1,\ldots,1,\underline{2},1,\ldots,1),(r_1,\ldots,r_{i-1},\underline{r_i},1,\ldots,1)} \leqslant x \mid M_{(1,\ldots,1,\underline{1},1,\ldots,1),(r_1,\ldots,r_{i-1},\underline{1},1,\ldots,1)} > x\right) \qquad (2.35)\\
&\geqslant \mathrm{P}\left(M_{(1,\ldots,1,\underline{2},1,\ldots,1),(r_1+l_1,\ldots,r_{i-1}+l_{i-1},\underline{r_i},1,\ldots,1)} \leqslant x \mid M_{(1,\ldots,1,\underline{1},1,\ldots,1),(r_1+l_1,\ldots,r_{i-1}+l_{i-1},\underline{1},1,\ldots,1)} > x\right)
\end{aligned}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, d$ oraz dla wszystkich dużych $r_1, r_2, \ldots, r_i, l_1, l_2, \ldots, l_{i-1} \in \mathbb{N}$ i $x < F_*$, to

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{d} \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{1}+\mathbf{e}_i,\mathbf{r}_i(n)} \leqslant v_n \mid M_{\mathbf{1},\mathbf{r}_{i-1}(n)} > v_n\right), \qquad (2.36)$$

gdzie $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest ciągiem spełniającym $n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau$ dla $\tau > 0$, $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ jest ciągiem o własnościach $k_n^d \beta_1(n) = o(1)$ i $k_n \frac{n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}}>v_n)}{\psi_i(n)} = o(1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, d$ oraz $\mathbf{e}_i := (0, \ldots, 0, \underline{1}, 0, \ldots, 0)$, $r_i(n) := \lfloor \psi_i(n)/k_n \rfloor$, $\mathbf{r}_i(n) := (r_1(n), \ldots, r_{i-1}(n), \underline{r_i(n)}, 1, \ldots, 1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, d$. (W powyższych formułach dla uproszczenia notacji podkreślono i-te współrzędne wektorów z $\mathbb{Z}^d$.)

Zauważmy, że gdy $d = 1$, to wzór (2.36) Turkmana pokrywa się z rezultatem (1.9) O'Briena. Jednak jeśli tylko $d > 1$, to formuły (2.36) nie można poprzez podstawienie $r_i(n) := m + 1$ (dla $i = 1, 2, \ldots, d$) sprowadzić do wzoru na indeks ekstremalny pola m-zależnego (patrz Przykład 2.42) tak jak robi się to w przypadku $d = 1$. Zainteresowani jesteśmy uogólnieniem rezultatu (1.9) O'Briena, które posiada powyższą własność. Wierzymy, że otrzymany przez zastosowanie nierówności typu Bonferroniego wzór (2.32) wskazuje nam właściwą drogę.

Problem 2.65. *Przypuśćmy, że $\theta \in (0,1]$ jest indeksem ekstremalnym wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$ dla pola $\{X_{\mathbf{n}}\}$. Niech ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ spełnia $n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n) \to \tau$ gdy $n \to \infty$, dla $\tau > 0$. Ponadto niech $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem takim, że*

$$k_n \to \infty, \quad k_n^d \beta_1(n) \to 0, \quad k_n \frac{n^d\,\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)}{\psi_i(n)} \to 0 \quad \textit{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, d, \quad \textit{gdy} \quad n \to \infty.$$

Oznaczmy $r_i(n) := \lfloor \psi_i(n)/k_n \rfloor$ dla $i = 1, 2, \ldots, d$ oraz $\mathbf{r}(n) := (r_1(n), r_2(n), \ldots, r_d(n))$.

Problem: Kiedy prawdziwa jest następująca formuła?

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^d} (-1)^{\epsilon_1+\epsilon_2+\ldots+\epsilon_d}\,\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{r}(n)-\boldsymbol{\epsilon}} > v_n\right)}{\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)}. \qquad (2.37)$$

- *Odpowiedź dla $d = 1$ dana przez O'Briena [56, Theorem 2.1]: zawsze.*

- *Częściowa odpowiedź dla $d = 2$ wynika z rezultatu (2.36) Turkmana. Po nietrudnych przekształceniach wzoru (2.36) otrzymujemy, że*

$$\theta = \frac{\left(\mathrm{P}\left(M_{\mathbf{r}(n)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{r}(n)-(0,1)} > v_n\right)\right)\left(1 - \frac{\mathrm{P}\left(M_{(r_1(n),1)-(1,0)} > v_n\right)}{\mathrm{P}\left(M_{(r_1(n),1)} > v_n\right)}\right)}{\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)} + o(1).$$

Wnioskujemy stąd, że jeżeli zachodzi (2.35) oraz spełnione są poniższe warunki:

$$\frac{\mathrm{P}\left(M_{(r_1(n),1)-(1,0)}>v_n\right)}{\mathrm{P}\left(M_{(r_1(n),1)}>v_n\right)} \cdot \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{r}(n)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{r}(n)-(1,0)} > v_n\right) = o(\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)),$$

$$\frac{\mathrm{P}\left(M_{(r_1(n),1)-(1,0)}>v_n\right)}{\mathrm{P}\left(M_{(r_1(n),1)}>v_n\right)} \cdot \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{r}(n)-(0,1)} > v_n\right) - \mathrm{P}\left(M_{\mathbf{r}(n)-(1,1)} > v_n\right) = o(\mathrm{P}(X_{\mathbf{1}} > v_n)),$$

to formuła (2.37) jest poprawna.

- *Częściowa odpowiedź dla $d \geqslant 3$ wynika z wzoru (2.36) podobnie jak w przypadku $d = 2$.*

3

Maksima stacjonarnych pól gaussowskich

3.1. Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale w centrum naszego zainteresowania znajduje się pole losowe $\{X(\mathbf{t}) : \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d\}$, którego wszystkie skończenie wymiarowe rozkłady są gaussowskie. Pole takie nazywamy *polem gaussowskim*. A zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$, dla dowolnych $\mathbf{t}(1), \mathbf{t}(2), \ldots, \mathbf{t}(n) \in \mathbb{R}^d$ oraz dla $\mathbf{Y} := (X(\mathbf{t}(1)), X(\mathbf{t}(2)), \ldots, X(\mathbf{t}(n)))$ spełniony jest warunek:

$$\mathrm{E}\, e^{i<\boldsymbol{\lambda},\mathbf{Y}>} = e^{i<\boldsymbol{\lambda},\mathrm{E}\,\mathbf{Y}>-\frac{1}{2}<\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}>} \quad \text{dla każdego } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie $\mathrm{E}\,\mathbf{Y} = (\mathrm{E}\,X(\mathbf{t}(1)), \mathrm{E}\,X(\mathbf{t}(2)), \ldots, \mathrm{E}\,X(\mathbf{t}(n)))$, $\boldsymbol{\Sigma}$ jest macierzą kowariancji o wymiarach $n \times n$ i współczynnikach $\boldsymbol{\Sigma}_{i,j} = \mathrm{Cov}((X(\mathbf{t}(i)), (X(\mathbf{t}(j)))$, natomiast $<\cdot,\cdot>$ oznacza standardowy iloczyn skalarny.

Przez cały ten rozdział zwykle zakładać będziemy, że rozważane pole gaussowskie $\{X(\mathbf{t})\}$ ma następujące własności:

- jest *stacjonarne* – jego skończenie wymiarowe rozkłady są niezmiennicze ze względu na przesunięcia (gaussowskie pola stacjonarne nazywa się często *jednorodnymi*);
- jest *scentrowane* – dla każdego $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ zachodzi $\mathrm{E}\,X(\mathbf{t}) = 0$;
- prawie wszystkie trajektorie są ciągłe.

Konsekwencją stacjonarności pola $\{X(\mathbf{t})\}$ jest niezmienniczość kowariancji ze względu na przesunięcia: $\mathrm{Cov}(X(\mathbf{t}+\mathbf{w}), X(\mathbf{w})) = \mathrm{Cov}(X(\mathbf{t}), X(\mathbf{0}))$ dla dowolnych $\mathbf{w}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Strukturę zależności rozważanego pola będziemy opisywać przy pomocy *funkcji kowariancji* określonej jako:

$$r(\mathbf{t}) := \mathrm{Cov}(X(\mathbf{t}), X(\mathbf{0})) \quad \text{dla} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d.$$

Zakładać będziemy, że dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in (0, 2]$ zachodzi:

$$r(\mathbf{t}) = 1 - |t_1|^{\alpha_1} - |t_2|^{\alpha_2} - \ldots - |t_d|^{\alpha_d} + o(|t_1|^{\alpha_1} + |t_2|^{\alpha_2} + \ldots + |t_d|^{\alpha_d}), \qquad (3.1)$$

gdy $\mathbf{t} \to \mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$.

Interesuje nas asymptotyczne zachowanie prawdopodobieństw

$$\mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}_u} X(\mathbf{t}) \leqslant u\right)$$

gdy $u \to \infty$, gdzie $\mathcal{P}_u$ jest d-wymiarową kostką o objętości proporcjonalnej do

$$\mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^d} X(\mathbf{t}) > u\right)^{-1}.$$

Punktem wyjścia dla naszych poszukiwań jest rezultat z teorii wartości ekstremalnych procesów gaussowskich, dotyczący scentrowanego stacjonarnego procesu gaussowskiego $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ spełniającego z pewną stałą $\alpha \in (0,2]$ warunek

$$r(t) = \mathrm{Cov}(X(|t|), X(0)) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad \text{gdy} \quad t \to 0, \tag{3.2}$$

oraz asymptotycznego zachowania supremum tego procesu na przedziale długości proporcjonalnej do

$$\mu(u) := \mathrm{P}\left(\max_{t\in[0,1]} X(t) > u\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

Poniższe twierdzenie podsumowuje wyniki Leadbettera, Lindgrena i Rootzéna [47, Theorem 12.3.4], Arendarczyka i Dębickiego [2, Lemma 4.3] dla ciągów słabo zależnych (część (i)) oraz Tana i Hashorvy [72, Lemma 3.3] dla ciągów mocno zależnych (część (ii)).

Twierdzenie 3.1. *Niech $\{X(t) : \ t \geqslant 0\}$ będzie scentrowanym stacjonarnym procesem gaussowskim spełniającym warunek (3.2) dla pewnej liczby $\alpha \in (0,2]$. Niech $0 < A < B < \infty$ będą dowolnymi stałymi.*

(i) Jeżeli warunek Bermana

$$r(t)\ln t \to 0 \quad \textit{gdy} \quad t \to \infty \tag{3.4}$$

zachodzi, to

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,x\mu(u)]} X(t) \leqslant u\right) \to e^{-x} \quad \textit{gdy} \quad u \to \infty,$$

jednostajnie dla $x \in [A,B]$.

(ii) Jeżeli $r(t)\ln t \to r \in (0,\infty)$ gdy $t \to \infty$, to

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,x\mu(u)]} X(t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-x\exp\left(-r+\sqrt{2r}\mathcal{W}\right)\right)\right) \in (0,\infty) \quad \textit{gdy } u \to \infty,$$

jednostajnie dla $x \in [A,B]$, gdzie $\mathcal{W}$ jest zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym.

Uwaga 3.2. Odpowiednik Twierdzenia 3.1 (ii) dla dyskretnych mocno zależnych ciągów gaussowskich to rezultat Mittala i Ylvisakera [52] (porównaj [47, Corollary 6.5.2]).

Istotną rolę w naszych rozważaniach odegrają *stałe Pickandsa* [58, 59]. Dla $\alpha \in (0,2]$ stałą $\mathcal{H}_\alpha$ definiuje się przy pomocy ułamkowego ruchu Browna $B_{\alpha/2}$ z parametrem Hursta $\alpha/2$ następująco:

$$\mathcal{H}_\alpha := \lim_{T\to\infty} \frac{H_\alpha(T)}{T},$$

gdzie $H_\alpha(T) := \mathrm{E}\exp(\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{2}B_{\alpha/2}(t) - t^\alpha)$ dla $T > 0$. Stałe Pickandsa zostały wykorzystane przez Piterbarga w następującym twierdzeniu [60, Theorem 7.1] opisującym asymptotykę supremum pola gaussowskiego po ograniczonym zbiorze.

Twierdzenie 3.3. *Niech funkcja kowariancji stacjonarnego scentrowanego pola gaussowskiego $\{X(\mathbf{t})\}$ spełnia warunki $r(\mathbf{t}) < 1$ dla $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$ oraz (3.1) dla pewnych stałych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in (0,2]$. Wtedy dla dowolnego domkniętego zbioru Jordana $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^d$ o mierze Lebesgue'a $\ell^d(\mathcal{J}) > 0$ zachodzi:*

$$\mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{J}} X(\mathbf{t}) > u\right) = \mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{H}_{\alpha_d}\ell^d(\mathcal{J})u^{2/\alpha_1+2/\alpha_2+\ldots+2/\alpha_d}\Psi(u)(1+o(1)),$$

gdy $u \to \infty$.

W rozważaniach tego rozdziału $\mathcal{W}$ zawsze będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$. Ponadto oznaczamy dystrybuantę i funkcję przetrwania zmiennej $\mathcal{W}$:

$$\Phi(u) := \mathrm{P}(\mathcal{W} \leqslant u), \quad \Psi(u) := \mathrm{P}(\mathcal{W} > u), \quad \text{dla} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Przypominamy, że ma miejsce następująca zależność:

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u}\exp\left(-u^2/2\right)(1+o(1)), \quad \text{gdy} \quad u \to \infty. \tag{3.5}$$

Naszym celem jest opis asymptotyki supremum stacjonarnego, scentrowanego pola gaussowskiego o ciągłych trajektoriach. Jednak zanim przedstawimy właściwe rezultaty, wyjaśnijmy, kiedy pole o żądanych własnościach istnieje. Ustalmy funkcję $r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Na podstawie twierdzenia Kołmogorowa o istnieniu procesu [7, Sekcja 36] wnioskujemy, że jeśli funkcja $\Sigma(\mathbf{w},\mathbf{t}) := r(\mathbf{w}-\mathbf{t})$ jest symetryczna i *nieujemnie określona*, czyli spełnia warunek:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_ic_j\Sigma(\mathbf{t}(i),\mathbf{t}(j)) \geqslant 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},\ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R},\ \mathbf{t}(1), \mathbf{t}(2), \ldots, \mathbf{t}(n) \in \mathbb{R}^d,$$

to istnieje scentrowany proces gaussowski $\{Y(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d\}$ z funkcją kowariancji r (uzasadnienie tego faktu można znaleźć np. u Gihmana i Skorohoda [29, strona 147]). Należy zapytać także o ciągłość trajektorii. Pokażemy, że jeżeli funkcja r jest taka, że (3.1) zachodzi, to spełniony jest warunek Kołmogorowa gwarantujący ciągłość trajektorii (porównaj rezutaty dla $d = 1$ [10, 68] i ich uogólnienia [1, 43]). Z założenia (3.1) wynika, że istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że

$$|1 - r(\mathbf{t})| \leqslant 2\left(|t_1|^{\alpha_1} + |t_2|^{\alpha_2} + \ldots + |t_d|^{\alpha_d}\right) \quad \text{gdy} \quad \|\mathbf{t}\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

a stąd

$$\mathrm{E}(Y(\mathbf{w}) - Y(\mathbf{t}))^2 \leqslant 4\left(|w_1 - t_1|^{\alpha_1} + |w_2 - t_2|^{\alpha_2} + \ldots + |w_d - t_d|^{\alpha_d}\right) \quad \text{gdy} \quad \|\mathbf{w} - \mathbf{t}\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Stosując powyższą nierówność oraz fakt, że $Y(\mathbf{w}) - Y(\mathbf{t})$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, dla $\mathbf{w}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ spełniających $\|\mathbf{w}-\mathbf{t}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,|Y(\mathbf{w}) - Y(\mathbf{t})|^{2k} &= \left(\mathrm{E}(Y(\mathbf{w}) - Y(\mathbf{t}))^2\right)^k \mathrm{E}\left(\frac{Y(\mathbf{w}) - Y(\mathbf{t})}{\sqrt{\mathrm{E}(Y(\mathbf{w}) - Y(\mathbf{t}))^2}}\right)^{2k} \\ &\leqslant 4^k\left(|w_1 - t_1|^{\alpha_1} + |w_2 - t_2|^{\alpha_2} + \ldots + |w_d - t_d|^{\alpha_d}\right)^k \mathrm{E}\,\mathcal{W}^{2k} \\ &\leqslant C_k\left(|w_1 - t_1|^{k\alpha_1} + |w_2 - t_2|^{k\alpha_2} + \ldots + |w_d - t_d|^{k\alpha_d}\right), \end{aligned}$$

gdzie $C_k := 4^k d^k \,\mathrm{E}\,\mathcal{W}^{2k} \in (0,\infty)$ oraz $k \in \mathbb{N}$ jest dowolne. Korzystając z twierdzenia Kołmogorowa-Chentsova [43, Theorem 1.4.1] dla pól wnioskujemy, że istnieje pole $\{X(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d\}$ takie, że prawie na pewno odwzorowanie $\mathbf{t} \mapsto X(\mathbf{t})$ jest ciągłe i zachodzi $\mathrm{P}(X(\mathbf{t}) = Y(\mathbf{t})) = 1$ dla każdego $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Podsumowując, jeżeli funkcja $r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest taka, że odwzorowanie $\Sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ określone powyżej jest symetryczne i nieujemnie określone oraz warunek (3.1) zachodzi, to istnieje stacjonarne, scentrowane pole gaussowskie $\{X(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d\}$ o funkcji kowariancji r, którego prawie wszystkie trajektorie są ciągłe.

Fakt 3.4. *Załóżmy, że funkcja kowariancji r stacjonarnego pola $\{X(\mathbf{t})\}$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$. Wtedy r jest ciągła na $\mathbb{R}^d$.*

Dowód. Ustalmy $\mathbf{t}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$. Wykorzystując nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

$$(\mathrm{E}\,UV)^2 \leqslant \mathrm{E}\,U^2\,\mathrm{E}\,V^2 \quad \left(\text{gdzie } U, V \text{ to zmienne losowe takie, że } \mathrm{E}\,U^2, \mathrm{E}\,V^2 < \infty\right) \tag{3.6}$$

i własności rozważanego pola $\{X(\mathbf{t})\}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (r(\mathbf{t}) - r(\mathbf{w}))^2 = (\mathrm{E}(X(\mathbf{t}) - X(\mathbf{w}))X(\mathbf{0}))^2 &\leqslant \mathrm{E}\,X(\mathbf{0})^2\,\mathrm{E}(X(\mathbf{t}) - X(\mathbf{w}))^2 \\ &= 2r(\mathbf{0})(r(\mathbf{0}) - r(\mathbf{t} - \mathbf{w})) \end{aligned}$$

Stąd $r(\mathbf{w}) \to r(\mathbf{t})$ gdy $\mathbf{w} \to \mathbf{t}$. □

Większą część niniejszego rozdziału stanowi podrozdział 3.2 zawierający rezultaty wraz z dowodami dla dwuwymiarowego pola gaussowskiego ($d = 2$). Rezultaty te są niewielkim uogólnieniem wyników z artykułu [15] napisanego przez autorkę we współpracy z Dębickim i Hashorvą. Ten sam tok rozumowania co dla $d = 2$ pozwala uzyskać analogiczne twierdzenia w przypadku dowolnego $d \in \mathbb{N}$. W podrozdziale 3.3 przedstawiamy ogólną wersję głównego rezultatu dla d-wymiarowego pola gaussowskiego.

3.2. Maksima dwuwymiarowych pól gaussowskich

W tym podrozdziale skupiamy się na przypadku $d = 2$ i badamy scentrowane stacjonarne pole gaussowskie $\{X(s,t) : s, t \in \mathbb{R}\}$, którego prawie wszystkie trajektorie są ciągłe. Główny rezultat stanowi Twierdzenie 3.8. Pozostała część podrozdziału jest poświęcona dowodowi tego twierdzenia (podrozdziały 3.2.2, 3.2.3) oraz pewnym zastosowaniom otrzymanych wyników (podrozdział 3.2.4). W szczególności wyznaczamy indeks ekstremalny pola losowego zdefiniowanego jako dyskretyzacja rozważanego pola $\{X(s,t)\}$ (patrz Twierdzenie 3.19).

Poniżej definiujemy warunki *A1-A3* opisujące zachowanie funkcji kowariancji r pola $\{X(\mathbf{t})\}$, którymi będziemy się posługiwać:

A1: dla pewnych stałych $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,2]$ mamy

$$r(s,t) = 1 - |s|^{\alpha_1} - |t|^{\alpha_2} + o(|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2}), \quad \text{gdy} \quad s,t \to 0;$$

A2: $r(s,t) < 1$ dla $(s,t) \neq (0,0)$;

A3: dla pewnego $r \in [0,\infty)$ zachodzi

$$r(s,t) \ln \sqrt{s^2 + t^2} \to r, \quad \text{gdy} \quad (s,t) \to \infty,$$

przy czym warunek *A3* rozumiemy następująco: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $K > 0$ takie, że $|r(s,t)\ln\sqrt{s^2+t^2} - r| < \varepsilon$, o ile $\sqrt{s^2+t^2} > K$. Zauważmy, że w przypadku $r = 0$ założenie *A3* jest uogólnionym warunkiem Bermana (porównaj (3.4)).

Fakt 3.5. *Funkcja kowariancji r pola $\{X(\mathbf{t})\}$ ma następujące własności:*

(i) Jeżeli $A1$ *zachodzi, to r jest ciągła.*

(ii) Jeżeli $r(0,0) = 1$, to $|r(s,t)| \leqslant 1$ dla każdego $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Jeżeli dodatkowo $A2$ *zachodzi, to $|r(s,t)| < 1$ dla wszystkich $(s,t) \neq (0,0)$. (W szczególności, jeśli spełnione są założenia* $A1$ *i* $A2$*, to $|r(s,t)| < 1$ dla $(s,t) \neq (0,0)$.)*

(iii) Jeżeli $r(s,t) \to 0$ gdy $(s,t) \to \infty$ oraz funkcja r jest ciągła, to zachodzi warunek $A2$*. W szczególności:* $A2$ *wynika z założeń* $A1$ *i* $A3$*.*

Dowód. Własność (i) jest konsekwencją Faktu 3.4. Dla dowodu części (ii) zauważmy, że na mocy nierówności (3.6) mamy

$$|r(s,t)| = |\operatorname{Cov}(X(s,t), X(0,0))| = |\operatorname{E} X(s,t)X(0,0)| \leqslant \sqrt{\operatorname{E} X(s,t)^2 \operatorname{E} X(0,0)^2} = 1.$$

Przypuśćmy, że dla pewnego $(s_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $r(s_0,t_0) = -1$. Wtedy dostajemy $\mathrm{P}(X(s_0,t_0) = -X(0,0)) = \mathrm{P}(X(2s_0,2t_0) = -X(s_0,t_0)) = 1$. Stąd wnioskujemy, że $\mathrm{P}(X(2s_0,2t_0) = X(0,0)) = 1$ i $r(2s_0,2t_0) = 1$, co jest sprzeczne z założeniem $A2$. Przechodzimy do dowodu punktu (iii). Przypuśćmy nie wprost, że $A2$ nie zachodzi. Na mocy przyjętych założeń oraz ponieważ r jako funkcja ciągła ma własność Darboux (tzn. obraz zbioru spójnego jest spójny) wnioskujemy, że $r(s_0,t_0) = 1$ dla pewnego $(s_0,t_0) \neq (0,0)$. Rozumując podobnie jak w dowodzie części (ii) dostajemy, że $r(ks_0,kt_0) = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem $r(s,t) \to 0$ gdy $(s,t) \to \infty$. □

Interesuje nas asymptotyczne zachowanie (gdy $u \to \infty$) supremum postaci

$$\sup_{(s,t)\in[0,xm_1(u)]\times[0,ym_2(u)]} X(s,t),$$

czyli supremum pola $\{X(s,t)\}$ w rosnącym prostokącie o wymiarach $xm_1(u) \times ym_2(u)$, dla $x,y > 0$. Jako funkcje $m_1, m_2 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ wyznaczające tempo wzrostu boków prostokąta wybieramy funkcje o własnościach:

$$m(u) := m_1(u)m_2(u) = \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} X(s,t) > u\right)^{-1} \quad \text{dla } u \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

oraz

$$m_1(u) = e^{\gamma_1 u^2} b_1(u) \ \text{ dla } u \in \mathbb{R}, \text{ gdzie } \gamma_1 \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \text{ i } \ln b_1(u) = o(u^2) \tag{3.8}$$

(w powyższym warunku stała $\gamma_1 \in (0, \frac{1}{2})$ jest dowolna oraz $b_1 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$).

Zauważmy, że zdefiniowana powyżej funkcja $m : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ jest 2-wymiarowym odpowiednikiem funkcji μ określonej jako (3.3). Z Twierdzenia 3.3 dostajemy następujący opis asymptotycznego zachowania funkcji m.

Fakt 3.6. *Funkcja m zdefiniowana poprzez (3.7) spełnia warunek:*

$$m(u) = \left(\mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2} u^{2/\alpha_1} u^{2/\alpha_2} \Psi(u)\right)^{-1} (1 + o(1)) \quad gdy \quad u \to \infty. \tag{3.9}$$

O pewnych istotnych dla nas własnościach funkcji m_1 i m_2 mówi poniższy lemat.

Lemat 3.7. *Niech funkcje $m_1, m_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ spełniają założenia (3.7) i (3.8). Wtedy:*

(i) dla $\gamma_2 := \frac{1}{2} - \gamma_1$ i dla pewnej funkcji $b_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o własności $\ln b_2(u) = o(u^2)$ (gdy $u \to \infty$) zachodzi równość:

$$m_2(u) = e^{\gamma_2 u^2} b_2(u) \quad dla\ u \in \mathbb{R};$$

(ii) $m_1(u) \to \infty$ oraz $m_2(u) \to \infty$, gdy $u \to \infty$;

(iii) dla $i = 1, 2$ mamy $\ln m_i(u) / \ln m(u) \to 2\gamma_i$ gdy $u \to \infty$.

Dowód. Aby dowieść własności (i) korzystamy z postaci (3.9) funkcji m i własności (3.5) rozkładu normalnego. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} m_2(u) = \frac{m(u)}{m_1(u)} &= \frac{\mathcal{H}_{\alpha_1}^{-1}\mathcal{H}_{\alpha_2}^{-1} u^{-2/\alpha_1 - 2/\alpha_2} \Psi(u)^{-1}(1 + o(1))}{e^{\gamma_1 u^2} b_1(u)} \\ &= \frac{\mathcal{H}_{\alpha_1}^{-1}\mathcal{H}_{\alpha_2}^{-1} \sqrt{2\pi} u^{1-2/\alpha_1-2/\alpha_2} e^{u^2/2}(1 + o(1))}{e^{\gamma_1 u^2} b_1(u)} \\ &= e^{\gamma_2 u^2} \cdot \frac{\mathcal{H}_{\alpha_1}^{-1}\mathcal{H}_{\alpha_2}^{-1} \sqrt{2\pi} u^{1-2/\alpha_1-2/\alpha_2}(1 + o(1))}{b_1(u)}. \end{aligned}$$

Stąd $m_2(u) = e^{\gamma_2 u^2} b_2(u)$, gdzie

$$b_2(u) = \frac{\mathcal{H}_{\alpha_1}^{-1}\mathcal{H}_{\alpha_2}^{-1} \sqrt{2\pi} u^{1-2/\alpha_1-2/\alpha_2}(1 + o(1))}{b_1(u)}.$$

Ponadto mamy:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\ln b_2(u)}{u^2} = \lim_{u\to\infty} \frac{(1 - 2/\alpha_1 - 2/\alpha_2)\ln u - \ln b_1(u)}{u^2} = 0.$$

Własności (ii) i (iii) to proste wnioski z (i) i założenia (3.8). □

3.2.1. Twierdzenie o zbieżności supremum pola gaussowskiego

Przedstawiamy główny rezultat tego podrozdziału, stanowiący odpowiednik Twierdzenia 3.1 dla pola gaussowskiego. Jest to uogólniona wersja wyniku z pracy autorki, Dębickiego i Hashorvy [15, Theorem 2].

Twierdzenie 3.8. *Załóżmy, że pole $\{X(s,t)\}$ jest takie, że jego funkcja kowariancji spełnia warunki A1, A2 oraz A3 z pewną stałą $r \in [0,\infty)$. Niech funkcje m_1, m_2 spełniają (3.7) i (3.8). Wtedy dla dowolnych stałych $0 < A < B < \infty$ zachodzi zbieżność:*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,xm_1(u)]\times[0,ym_2(u)]} X(s,t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-xy\exp\left(-\frac{r}{2\gamma} + \sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right), \quad (3.10)$$

gdy $u \to \infty$, jednostajna dla $(x,y) \in [A,B]^2$, gdzie $\gamma := \gamma_1 \vee (\frac{1}{2} - \gamma_1)$.

Dowód twierdzenia zostanie szczegółowo omówiony w podrozdziale 3.2.3. Tymczasem zwracamy uwagę na pewne konsekwencje płynące z powyższego rezultatu.

Wniosek 3.9. *Niech pole $\{X(s,t)\}$ spełnia założenia Twierdzenia 3.8. Ma miejsce zbieżność (3.10) jednostajna na dowolnym zbiorze $\mathcal{F} \subset [0,\infty)^2$ takim, że nie istnieje ciąg elementów z $\mathcal{F}$ zbieżny do punktu $(0,\infty)$ lub do punktu $(\infty,0)$.*

W sytuacji, gdy własność $A3$ zachodzi dla $r = 0$, czyli gdy zależność długiego zasięgu rozważanego pola jest bardzo słaba, powyższy wynik przybiera znacznie prostszą formę. Wyróżniamy tę sytuację poniżej.

Wniosek 3.10. *Niech pole $\{X(s,t)\}$ spełnia założenia Twierdzenia 3.8 ze stałą $r = 0$. Wtedy dla dowolnych $0 < A < B < \infty$ zachodzi zbieżność:*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,xm_1(u)]\times[0,ym_2(u)]} X(s,t) \leqslant u\right) \to e^{-xy},$$

gdy $u \to \infty$, jednostajna dla $(x,y) \in [A,B]^2$. (Mamy także zbieżność jednostajną dla $(x,y) \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest zbiorem z Wniosku 3.9.)

Zwracamy także uwagę na szczególną postać twierdzenia w sytuacji, gdy funkcje m_1, m_2 wybrane są jako $m_1(u) = m_2(u) := \sqrt{m(u)}$.

Wniosek 3.11. *Dla pola $\{X(s,t)\}$ spełniającego założenia Twierdzenia 3.8 oraz dla dowolnych $0 < A < B < \infty$ ma miejsce zbieżność:*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\left[0,x\sqrt{m(u)}\right]\times\left[0,y\sqrt{m(u)}\right]} X(s,t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-xy\exp\left(-2r + 2\sqrt{r}\mathcal{W}\right)\right)\right),$$

gdy $u \to \infty$, jednostajna dla $(x,y) \in [A,B]^2$. (Mamy także zbieżność jednostajną dla $(x,y) \in \mathcal{F}$, gdzie zbiór $\mathcal{F}$ jest taki jak we Wniosku 3.9.)

Jak zaobserwował Dębicki (porównaj [15, Theorem 2 (ii)]), zachodzi również ogólna wersja twierdzenia o zbieżności supremum pola $\{X(s,t)\}$ po zbiorze mierzalnym w sensie Jordana, co uzasadniamy poniżej.

Po zapoznaniu się z dowodem Twierdzenia 3.8 nietrudno zauważyć, że praktycznie możemy go powtórzyć i otrzymać rezultat analogiczny do tezy twierdzenia, tym razem dla supremum
$$\sup_{(s,t)\in\mathcal{J}_u} X(s,t)$$
po nieco bardziej skomplikowanym zbiorze $\mathcal{J}_u$. W powyższym zakładamy, że dla $u \in \mathbb{R}$ zbiór $\mathcal{J}_u$ jest postaci
$$\mathcal{J}_u = \{(x,y) : (x/m_1(u), y/m_2(u)) \in \mathcal{J}\}, \tag{3.11}$$
natomiast $\mathcal{J}$ jest pewnym zbiorem prostym (skończoną sumą rozłącznych prostokątów postaci $[A_1, B_1) \times [A_2, B_2)$). W konsekwencji, zbieżność z uogólnionego Twierdzenia 3.8 przyjmuje postać:
$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{J}_u} X(s,t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-\ell^2(\mathcal{J})\exp\left(-\frac{r}{2\gamma}+\sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right), \tag{3.12}$$
gdy $u \to \infty$. Dalej, korzystając z (3.12) wnioskujemy o zbieżności supremum dla zbioru $\mathcal{J}$ mierzalnego w sensie Jordana.

Twierdzenie 3.12. *Niech pole $\{X(s,t)\}$ i funkcje m_1, m_2 spełniają założenia Twierdzenia 3.8. Ponadto dla zbioru Jordana $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^2$ o mierze $\ell^2(\mathcal{J}) > 0$ określmy zbiór $\mathcal{J}_u$ za pomocą (3.11). Wtedy ma miejsce zbieżność*
$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{J}_u} X(s,t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-\ell^2(\mathcal{J})\exp\left(-\frac{r}{2\gamma}+\sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right),$$
gdy $u \to \infty$.

Dowód. Niech zbiór $\mathcal{J}$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Jordana. Wtedy, z definicji, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiory proste $\mathcal{L}_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ takie, że $\mathcal{L}_\varepsilon \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{U}_\varepsilon$ oraz mamy
$$\ell^2(\mathcal{J}) - \varepsilon \leqslant \ell^2(\mathcal{L}_\varepsilon) \leqslant \ell^2(\mathcal{J}) \leqslant \ell^2(\mathcal{U}_\varepsilon) \leqslant \ell^2(\mathcal{J}) + \varepsilon.$$
Dla dowolnego $u > 0$ określamy zbiory $\mathcal{L}_{\varepsilon,u} := (\mathcal{L}_\varepsilon)_u$ oraz $\mathcal{U}_{\varepsilon,u} := (\mathcal{U}_\varepsilon)_u$, zgodnie z definicją (3.11). Korzystając z (3.12) dla zbiorów prostych $\mathcal{L}_\varepsilon$ i $\mathcal{U}_\varepsilon$ otrzymujemy:
$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{L}_{\varepsilon,u}} X(s,t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-\ell^2(\mathcal{L}_\varepsilon)\exp\left(-\frac{r}{2\gamma}+\sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right),$$
$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{U}_{\varepsilon,u}} X(s,t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-\ell^2(\mathcal{U}_\varepsilon)\exp\left(-\frac{r}{2\gamma}+\sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right),$$
gdy $u \to \infty$. Z dowolności wyboru $\varepsilon > 0$ wnioskujemy, że
$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{J}_u} X(s,t) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-\ell^2(\mathcal{J})\exp\left(-\frac{r}{2\gamma}+\sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right),$$
gdy $u \to \infty$. $\square$

Stosując powyższe twierdzenie dla zbioru $\mathcal{B}(\mathbf{0}, x) := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2+t^2} \leqslant x\}$ będącego kulą domkniętą w $\mathbb{R}^2$ o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu $x > 0$ otrzymujemy, co następuje.

Fakt 3.13. *Jeśli spełnione są założenia Twierdzenia 3.8, to dla dowolnych stałych* $0 < A < B < \infty$ *ma miejsce zbieżność:*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{B}\left(\mathbf{0}, x\sqrt{m(u)}\right)} X(s,t) \leqslant u \right) \to \mathrm{E}\left(\exp(-\pi x^2 \exp(-2r + 2\sqrt{r}\mathcal{W}))\right), \tag{3.13}$$

gdy $u \to \infty$, *jednostajna dla* $x \in [A, B]$.

Dowód. Należy zastosować Twierdzenie 3.12 dla zbioru $\mathcal{J} := \mathcal{B}(\mathbf{0}, x)$ oraz funkcji m_1, m_2 postaci $m_1(u) = m_2(u) := \sqrt{m(u)}$. Zauważmy, że przy takim wyborze $\mathcal{J}, m_1, m_2$, otrzymujemy $\mathcal{J}_u = \mathcal{B}\left(\mathbf{0}, x\sqrt{m(u)}\right)$ oraz $\gamma = \frac{1}{4}$. □

3.2.2. Lematy pomocnicze

W tym podrozdziale dowodzimy kilku lematów, które odgrywają kluczową rolę w dowodzie Twierdzenia 3.8. Rozważamy pole $\{X(s,t)\}$ spełniające warunki *A1* (ze stałymi $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,2]$) oraz *A2*. Zakładamy, że funkcje m_1, m_2 są takie, że (3.7) i (3.8) zachodzą. Dla ustalonej liczby $a > 0$ określamy funkcje $q_1, q_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ następująco:

$$q_1(u) = au^{-2/\alpha_1}, \quad q_2(u) = au^{-2/\alpha_2}, \quad \text{dla} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, na potrzeby Lematu 3.15, dla dowolnej stałej $T > 0$ i liczby $r \geqslant 0$ z założenia *A3* definiujemy funkcje $\rho_T, \varrho_T : [-T, T]^2 \to \mathbb{R}$ jako:

$$\rho_T(s,t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant \max\{|s|,|t|\} < 1; \\ \left|r(s,t) - \frac{r}{\ln T}\right|, & \text{gdy} \quad 1 \leqslant \max\{|s|,|t|\} \leqslant T, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\varrho_T(s,t) = \begin{cases} |r(s,t)| + (1 - r(s,t))\frac{r}{\ln T}, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant \max\{|s|,|t|\} < 1; \\ \frac{r}{\ln T}, & \text{gdy} \quad 1 \leqslant \max\{|s|,|t|\} \leqslant T. \end{cases}$$

Funkcje te zostaną wykorzystane w dowodzie Twierdzenia 3.8.

Zauważmy, że warunek $A1$ implikuje, że dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2}(|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2}) \leqslant 1 - r(s,t) \leqslant 2(|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2}), \tag{3.15}$$

o ile $|s| \vee |t| \leqslant 3\varepsilon_0$. Poniżej dowodzimy lematu służącego do aproksymacji supremum pola $\{X(s,t)\}$ po prostokącie o przekątnej długości nie przekraczającej ε_0, którego jednowymiarową wersję znajdujemy u Leadbettera, Lindgrena i Rootzéna [47, Lemma 12.2.11].

Lemat 3.14. *Istnieje funkcja* $\xi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *o własności* $\xi(a) \to 0$, *gdy* $a \to 0$, *taka, że dla dowolnych stałych* $x, y \geqslant 0$, $g, h > 0$ *spełniających warunek* $\sqrt{g^2+h^2} \leqslant \varepsilon_0$ *i dla prostokąta* $I := (x,y) + [0,g]\times[0,h]$ *zachodzi oszacowanie:*

$$\mathrm{P}\left(X(jq_1, kq_2) \leqslant u;\ j,k \in \mathbb{N},\ (jq_1, kq_2) \in I\right) - \mathrm{P}\left(X(s,t) \leqslant u;\ (s,t) \in I\right) \leqslant \frac{gh\xi(a)}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right),$$

gdy $u \to \infty$. *(W powyższej nierówności* $m = m(u)$, $q_1 = q_1(u)$ *oraz* $q_2 = q_2(u)$.*)*

Dowód. Korzystając ze stacjonarności pola $\{X(s,t)\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathrm{P}\left(X(jq_1,kq_2)\leqslant u;\ (jq_1,kq_2)\in I\right)-\mathrm{P}\left(X(s,t)\leqslant u;\ (s,t)\in I\right)\\ &\leqslant \mathrm{P}\left(X(jq_1,kq_2)\leqslant u;\ (jq_1,kq_2)\in I_0\right)-\mathrm{P}\left(X(s,t)\leqslant u;\ (s,t)\in I_0\right)\\ &\quad +(\lfloor g/q_1\rfloor+\lfloor h/q_2\rfloor+1)\,\mathrm{P}(X(0,0)>u)\end{aligned}$$

dla $I_0=[0,g]\times[0,h]$. Ponieważ istnieje stała $K>0$ taka, że dla dużych u mamy

$$(\lfloor g/q_1\rfloor+\lfloor h/q_2\rfloor+1)\,\mathrm{P}(X(0,0)>u)m(u)\leqslant\frac{K(u^{2/\alpha_1}+u^{2/\alpha_2})\Psi(u)}{\mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2}u^{2/\alpha_1}u^{2/\alpha_2}\Psi(u)},$$

to $(\lfloor g/q_1\rfloor+\lfloor h/q_2\rfloor+1)\,\mathrm{P}(X(0,0)>u)=o\left(\frac{1}{m}\right)$ gdy $u\to\infty$. Wnioskujemy stąd, że wystrczy dowieść prawdziwości lematu dla prostokąta I_0, co czynimy poniżej.

Niech $T\in\mathbb{N}$ będzie dowolne. Wypełnijmy prostokąt I_0 małymi prostokątami $\square_{l,m}$ o długościach boków q_1T i q_2T w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\square_{1,1} &:= [0,q_1T]\times[0,q_2T],\\ \square_{l,m} &:= ((l-1)q_1T,(m-1)q_2T)+\square_{1,1},\end{aligned}$$

dla $l=1,\dots,\lfloor g/(q_1T)\rfloor$ oraz $n=1,\dots,\lfloor h/(q_2T)\rfloor$. Zauważmy, że dzięki nierówności Bonferroniego (2.21) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X(jq_1,kq_2)\leqslant u,\ (jq_1,kq_2)\in I_0)-\mathrm{P}(X(s,t)\leqslant u,\ (s,t)\in I_0)\\ &= \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I_0}X(s,t)>u\right)-\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in I_0}X(jq_1,kq_2)>u\right)\\ &\leqslant \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I_0}X(s,t)>u\right)-\sum_{l=1}^{\left\lfloor\frac{g}{q_1T}\right\rfloor}\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{h}{q_2T}\right\rfloor}\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{l,n}}X(jq_1,kq_2)>u\right)\\ &\quad+\sum_{(l,n)\neq(l',n')}\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{l,n}}X(jq_1,kq_2)>u,\ \max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{l',n'}}X(jq_1,kq_2)>u\right)\\ &= \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I_0}X(s,t)>u\right)-\Sigma_1(u)+\Sigma_2(u).\end{aligned}$$

W pierwszym kroku pokażemy, że suma Σ_2 spełnia

$$\Sigma_2(u)=o\left(\frac{1}{m}\right), \tag{3.16}$$

gdy $u\to\infty$. Rzeczywiście, mamy

$$\begin{aligned}&\sum_{(n,l)\neq(n',l')}\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{n,l}}X(jq_1,kq_2)>u,\ \max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{n',l'}}X(jq_1,kq_2)>u\right)\\ &\quad\leqslant\sum_{(n,l)\neq(n',l')}\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\square_{n,l}}X(s,t)>u,\ \sup_{(s,t)\in\square_{n',l'}}X(s,t)>u\right)=o\left(\frac{1}{m}\right),\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość jest konsekwencją dowodu Piterbarga [60, Lemma 7.1] (w tym miejscu korzystamy z założenia $\sqrt{g^2+h^2}\leqslant\varepsilon_0$).

Poniżej przedstawiamy najbardziej złożoną część dowodu dotyczącą aproksymacji sumy Σ_1. Korzystając z założenia o stacjonarności pola $\{X(s,t)\}$ otrzymujemy, że

$$\Sigma_1(u) \sim \frac{ghu^{2/\alpha_1}u^{2/\alpha_2}}{a^2T^2} \,\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{1,1}} X(jq_1,kq_2) > u\right). \tag{3.17}$$

Zbadamy asymptotyczne zachowanie prawdopodobieństwa postaci:

$$\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{1,1}} X(jq_1,kq_2) > u\right).$$

Naśladując kroki dowodu [60, Lemma D.1], dostajemy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{1,1}} X(jq_1,kq_2) > u\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2}\,\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{1,1}} X(jq_1,kq_2) > u \,\middle|\, X(0,0)=v\right) dv \qquad (3.18)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u}e^{-u^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/(2u^2)}\,\mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in\square_{1,1}} X(jq_1,kq_2) > u \,\middle|\, X(0,0)=u-\frac{w}{u}\right) dw\\
&\sim \Psi(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/(2u^2)}\,\mathrm{P}\left(\max_{(ja,ka)\in[0,aT]^2} \chi_u^{(w)}(ja,ka) > w \,\middle|\, X(0,0)=u-\frac{w}{u}\right) dw,
\end{aligned}$$

gdzie w (3.18) zastosowano podstawienie $v = u - \frac{w}{u}$, a pole losowe $\{\chi_u^{(w)}(s,t) : s,t \geqslant 0\}$ jest polem gaussowskim zdefiniowanym jako

$$\chi_u^{(w)}(s,t) = u(X(u^{-2/\alpha_1}s, u^{-2/\alpha_2}t) - u) + w.$$

Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do rozumowania Piterbarga [60, Lemma 6.1] otrzymujemy, że

$$\mathrm{P}\left(\max_{(ja,ka)\in[0,aT]^2} \chi_u^{(w)}(ja,ka) > w \,\middle|\, X(0,0)=u-\frac{w}{u}\right) \to \mathrm{P}\left(\max_{(ja,ka)\in[0,aT]^2} \chi(ja,ka) > w\right),$$

gdy $u \to \infty$, gdzie

$$\chi(s,t) := \sqrt{2}B_{\alpha_1/2}(s) + \sqrt{2}B_{\alpha_2/2}(t) - s^{\alpha_1} - t^{\alpha_2}$$

to przeskalowany ułamkowy 2-parametrowy ruch Browna z dryfem, a procesy $\{B_{\alpha_1/2}(s)\}$ i $\{B_{\alpha_2/2}(t)\}$ są niezależnymi kopiami ułamkowego ruchu Browna o parametrze Hursta $\alpha_1/2$ i $\alpha_2/2$, odpowiednio. Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (porównaj z dowodem Piterbarga [60, Lemma 6.1]) wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/(2u^2)}\,\mathrm{P}\left(\max_{(ja,ka)\in[0,aT]^2} \chi_u^{(w)}(ja,ka) > w \,\middle|\, X(0,0)=u-\frac{w}{u}\right) dw\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{w}\,\mathrm{P}\left(\max_{(ja,ka)\in[0,aT]^2} \chi(ja,ka) > w\right) dw = \mathrm{E}\exp\left(\max_{(j,k)\in[0,T]^2} \chi(ja,ka)\right).
\end{aligned}$$

Ponieważ $\{\chi(s,t)\}$ jest postaci:

$$\chi(s,t) = \chi^{(1)}(s) + \chi^{(2)}(t)$$

dla $\chi^{(1)}(s) := B_{\alpha_1/2}(s) - s^{\alpha_1}$, $\chi^{(2)}(t) := B_{\alpha_2/2}(t) - t^{\alpha_2}$, i procesy $\chi^{(1)}$ i $\chi^{(2)}$ są niezależne, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\exp\left(\max_{(j,k)\in[0,T]^2}\chi(ja,ka)\right) &= \mathrm{E}\exp\left(\max_{(j,k)\in[0,T]^2}\chi^{(1)}(ja)+\chi^{(2)}(ka)\right)\\
&= \mathrm{E}\exp\left(\max_{j\in[0,T]}\chi^{(1)}(ja)+\max_{k\in[0,T]}\chi^{(2)}(ka)\right)\\
&= \mathrm{E}\exp\left(\max_{j\in[0,T]}\chi^{(1)}(ja)\right)\mathrm{E}\exp\left(\max_{k\in[0,T]}\chi^{(2)}(ka)\right) = H_{\alpha_1}(T,a)H_{\alpha_2}(T,a),
\end{aligned}$$

gdzie stała

$$H_{\alpha_i}(T,a) := \mathrm{E}\exp\left(\max_{j\in[0,T]}\chi^{(i)}(ja)\right)$$

jest taka jak u Leadbettera i in. (porównaj (12.2.6) w dowodzie [47, Lemma 12.2.11]). Powyższe rozważania wraz z obserwacją (3.17) implikują, że

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(u) &= \frac{ghu^{2/\alpha_1}u^{2/\alpha_2}}{a^2T^2}\Psi(u)H_{\alpha_1}(T,a)H_{\alpha_2}(T,a)(1+o(1))\\
&= ghu^{2/\alpha_1}u^{2/\alpha_2}\Psi(u)\left(\frac{H_{\alpha_1}(T,a)}{aT}\right)\left(\frac{H_{\alpha_2}(T,a)}{aT}\right)(1+o(1)), \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

gdy $u\to\infty$.

Korzystając z Twierdzenia 3.3 oraz z wykazanych powyżej zależności (3.16) i (3.19) otrzymujemy, że dla dowolnych stałych $T\in\mathbb{N}$ i $a>0$ zachodzi

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\Big(X(jq_1,kq_2)\leqslant u,\ (jq_1,kq_2)\in I_0\Big) - \mathrm{P}\Big(X(s,t)\leqslant u,\ (s,t)\in I_0\Big)\\
&= \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I_0} X(s,t)>u\right) - \mathrm{P}\left(\max_{(jq_1,kq_2)\in I_0} X(jq_1,kq_2)>u\right)\\
&\leqslant ghu^{2/\alpha_1}u^{2/\alpha_2}\Psi(u)\left(\mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2} - \left(\frac{H_{\alpha_1}(T,a)}{aT}\right)\cdot\left(\frac{H_{\alpha_2}(T,a)}{aT}\right)\right)(1+o(1))\\
&= gh\frac{1-\left(\frac{H_{\alpha_1}(T,a)}{aT}\cdot\frac{H_{\alpha_2}(T,a)}{aT}\right)\mathcal{H}_{\alpha_1}^{-1}\mathcal{H}_{\alpha_2}^{-1}}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right),
\end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{H}_{\alpha_1}$ i $\mathcal{H}_{\alpha_2}$ oznaczają odpowiednie stałe Pickandsa. Ponieważ z ogólnie znanych faktów [47, Lemma 12.2.4 (i), Lemma 12.2.7 (i)] wynika, że

$$\lim_{a\to0}\lim_{T\to\infty}\frac{H_\alpha(T,a)}{aT} = \mathcal{H}_\alpha,$$

to dostajemy tezę lematu z funkcją ξ zadaną jako

$$\xi(a) := 1 - \lim_{T\to\infty}\left(\frac{H_{\alpha_1}(T,a)}{aT}\cdot\frac{H_{\alpha_1}(T,a)}{aT}\right)\mathcal{H}_{\alpha_1}^{-1}\mathcal{H}_{\alpha_2}^{-1}.$$

□

Kolejny lemat to 2-wymiarowy odpowiednik lematów uzyskanych dla jednowymiarowych procesów gaussowskich w przypadku $r=0$ [47, Lemma 12.3.1] oraz dla $r>0$ [72, Lemma 3.1].

Lemat 3.15. *Załóżmy, że funkcje $T_1, T_2 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ są takie, że zachodzi $T_1(u) \sim \tau m_1(u)$, $T_2(u) \sim \tau m_2(u)$ dla pewnego $\tau > 0$, gdy $u \to \infty$. Ponadto niech $T_{\max}(u) := T_1(u) \vee T_2(u)$. Jeżeli warunek A3 jest spełniony ze stałą $r \in [0,\infty)$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi*

$$\frac{T_1T_2}{q_1q_2} \sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{Q}} \rho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2) \exp\left(-\frac{u^2}{1+|r(jq_1,kq_2)| \vee \varrho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2)}\right) \to 0 \quad gdy\ u \to \infty,$$

gdzie $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(u) := [-T_1(u), T_1(u)] \times [-T_1(u), T_1(u)] \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$, a funkcje $\rho_T = \rho_T(u)$ i $\varrho_T = \varrho_T(u)$ są określone poprzez (3.14).

Dowód. Ponieważ warunek (3.7) jest spełniony, to $T_1(u)T_2(u) \sim \tau^2 m(u)$ gdy $u \to \infty$. Korzystając z postaci funkcji m danej przez (3.9) otrzymujemy:

$$\ln(T_1T_2) + \ln\left(\frac{\mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2}}{\sqrt{2\pi}}\right) + \left(\frac{2}{\alpha_1}+\frac{2}{\alpha_2}-1\right)\ln u - \frac{u^2}{2} \to 2\ln\tau \quad \text{gdy} \quad u \to \infty$$

Stąd wynika, że

$$u^2 \sim 2\ln(T_1T_2) \tag{3.20}$$

oraz

$$\ln u = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\ln(T_1T_2) + o(1).$$

Ponadto

$$u^2 = 2\ln(T_1T_2) + \left(\frac{2}{\alpha_1}+\frac{2}{\alpha_2}-1\right)\ln\ln(T_1T_2) + K + o(1). \tag{3.21}$$

ze stałą $K := 2\ln\left(\mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2}2^{1/\alpha_1+1/\alpha_2-1}/\sqrt{\pi}\right) - 4\ln\tau$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnej liczby $T > 0$ połóżmy

$$\delta(T) := \sup_{(s,t)\in[-T,T]^2\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)^2} |r(s,t)| \vee \varrho_T(s,t).$$

Ponieważ $r(s,t) \to 0$ gdy $(s,t) \to \infty$, to $|r(s,t)| \leqslant \frac{1}{2}$, o ile $(s,t) \notin \mathcal{B}(\mathbf{0},R)$ dla pewnej stałej $R > 0$. Korzystając ze zwartości zbioru $\mathcal{K} := \mathcal{B}(\mathbf{0},R)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ otrzymujemy, że $\sup\{|r(s,t)| : (s,t) \in \mathcal{K}\} = |r(s_0,t_0)| < 1$ dla pewnego punktu $(s_0,t_0) \in \mathcal{K}$. Stąd $M := \sup\{|r(s,t)| : s,t \in \mathbb{R}\} < 1$. Natomiast dla funkcji ϱ_T zachodzi

$$\sup_{(s,t)\in[-T,T]^2\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)^2} \varrho_T(s,t) \leqslant \max\left\{M + \frac{2r}{T}, \frac{r}{T}\right\}.$$

Na podstawie powyższych obserwacji dostajemy, że $\delta_T < \delta$ dla dostatecznie dużych T, dla pewnej stałej $\delta < 1$.

Niech β będzie liczbą o własności $0 < \beta < (1-\delta)/(1+\delta)$ oraz $T_1^\beta := (T_1)^\beta$, $T_2^\beta := (T_2)^\beta$. Podzielmy zbiór $\mathcal{Q}$ na dwa podzbiory:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}' &:= \left\{(s,t) \in \mathcal{Q} : |s| \leqslant T_1^\beta, |t| \leqslant T_2^\beta\right\},\\ \mathcal{S} &:= \mathcal{Q} \setminus \mathcal{S}'.\end{aligned}$$

Na początek pokażemy, że

$$\frac{T_1T_2}{q_1q_2} \sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{S}'} \rho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2) \exp\left(-\frac{u^2}{1+|r(jq_1,kq_2)| \vee \varrho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2)}\right) \to 0, \tag{3.22}$$

gdy $u \to \infty$. Z własności (3.21) otrzymujemy, że $\exp(-u^2/2) \leqslant K_1/(T_1T_2)$ dla pewnej stałej $K_1 > 0$. Wykorzystując ponadto definicję liczby δ, warunek (3.20) oraz równość $u^{2/\alpha_1}q_1 = u^{2/\alpha_2}q_2 = a$, dla dostatecznie dużych u otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\frac{T_1T_2}{q_1q_2} \sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{S}'} \rho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2) \exp\left(-\frac{u^2}{1+|r(jq_1,kq_2)| \vee \varrho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2)}\right) \\
&\quad \leqslant \frac{T_1T_2}{q_1q_2}\left(\frac{2T_1^\beta}{q_1}+1\right)\left(\frac{2T_2^\beta}{q_2}+1\right)\exp\left(-\frac{u^2}{1+\delta}\right) \sim 4\frac{(T_1T_2)^{\beta+1}}{q_1^2q_2^2}\left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right)^{\frac{2}{1+\delta}} \\
&\quad \leqslant 4K_1^{\frac{2}{1+\delta}} \frac{(T_1T_2)^{\beta+1-\frac{2}{1+\delta}}}{q_1^2q_2^2} \sim \frac{2^{2/\alpha_1+2/\alpha_2+2}K_1^{\frac{2}{1+\delta}}}{a^4}\big(\ln(T_1T_2)\big)^{2/\alpha_1+2/\alpha_2}(T_1T_2)^{\beta-\frac{1-\delta}{1+\delta}}.
\end{aligned}$$

Ponieważ β było wybrane tak, aby $\beta < \frac{1-\delta}{1+\delta}$, to (3.22) zachodzi.

By zakończyć dowód wystarczy pokazać, że

$$\frac{T_1T_2}{q_1q_2} \sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{S}} \rho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2) \exp\left(-\frac{u^2}{1+|r(jq_1,kq_2)| \vee \varrho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2)}\right) \to 0, \tag{3.23}$$

gdy $u \to \infty$. W tym celu zaobserwujmy, że istnieją stałe $K_2, K_3 > 0$, dla których

$$\big(|r(s,t)| \vee \varrho_{T_{\max}}(s,t)\big) \cdot \ln\left(\sqrt{s^2+t^2}\right) \leqslant K_3$$

dla wszystkich dużych u i punktów $(s,t) \in \mathcal{Q}$ spełniających $|s| \vee |t| \geqslant K_2$. Połóżmy $T_{\min} = T_{\min}(u) := T_1(u) \wedge T_2(u)$. Zauważmy, że $T_{\min}^\beta := (T_{\min})^\beta > K_2$ dla dużych u. Wtedy też dla par $(jq_1,kq_2) \in \mathcal{Q}$, dla których $|jq_1| \vee |kq_2| \geqslant T_{\min}^\beta$, otrzymujemy

$$|r(jq_1,kq_2)| \vee \varrho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2) \leqslant \frac{K_3}{\ln T_{\min}^\beta}.$$

Stąd dla każdego dużego u zachodzi:

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{u^2}{1+|r(jq_1,kq_2)| \vee \varrho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2)}\right) &\leqslant \exp\left(-\frac{u^2}{1+\frac{K_3}{\ln T_{\min}^\beta}}\right) \\
&\leqslant \exp\left(-u^2\left(1-\frac{K_3}{\ln T_{\min}^\beta}\right)\right),
\end{aligned}$$

co prowadzi do następującego ciągu nierówności:

$$\begin{aligned}
&\frac{T_1T_2}{q_1q_2} \sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{S}} \rho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2) \exp\left(-\frac{u^2}{1+|r(jq_1,kq_2)| \vee \varrho_{T_{\max}}(jq_1,kq_2)}\right) \\
&\quad \leqslant \frac{T_1T_2}{q_1q_2} \sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{S}} \left|r(jq_1,kq_2) - \frac{r}{\ln T_{\max}}\right| \cdot \exp\left(-u^2\left(1-\frac{K_3}{\ln T_{\min}^\beta}\right)\right) \\
&\quad \leqslant 4\frac{T_1^2T_2^2}{q_1^2q_2^2}\exp\left(-u^2\left(1-\frac{K_3}{\ln T_{\min}^\beta}\right)\right)\frac{1}{\ln T_{\min}^\beta} \\
&\qquad \times \frac{q_1q_2\ln T_{\min}^\beta}{T_1T_2} \sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{S}} \left|r(jq_1,kq_2) - \frac{r}{\ln T_{\max}}\right| =: I_1(u) \times I_2(u).
\end{aligned}$$

W następnym kroku pokażemy, że czynnik I_1 jest ograniczony. Na początek zaobserwujmy, że na podstawie (3.21) mamy

$$-u^2\left(1-\frac{K_3}{\ln T_{\min}^{\beta}}\right)=-u^2+K_3\frac{2\ln(T_1T_2)+\left(\frac{2}{\alpha_1}+\frac{2}{\alpha_2}-1\right)\ln\ln(T_1T_2)+O(1)}{\ln T_{\min}^{\beta}}.$$

Korzystając z Faktu 3.7 (iii) dostajemy, że $\ln T_1 \sim \gamma u^2$ oraz $\ln T_1 \sim (\frac{1}{2}-\gamma)u^2$, a stąd

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\ln(T_1T_2)}{\ln T_{\min}}=\frac{1}{2\min\{\gamma,\frac{1}{2}-\gamma\}}<\infty. \tag{3.24}$$

Dlatego też z pewną stałą $K_4>0$ dla dużych u zachodzi

$$-u^2\left(1-\frac{K_3}{\ln T_{\min}^{\beta}}\right)\leqslant -u^2+K_4.$$

Po zastosowaniu (3.21) dostajemy, że

$$\exp\left(-u^2\left(1-\frac{K_3}{\ln T_{\min}^{\beta}}\right)\right)\leqslant e^{K_4}\exp(-u^2)\leqslant K_5(T_1T_2)^{-2}(\ln(T_1T_2))^{1-2/\alpha_1-2/\alpha_2},$$

dla pewnych stałych $K_4, K_5>0$. Korzystając z otrzymanych powyższej nierówności, a następnie kolejno z równości $u^{2/\alpha_1}q_1=u^{2/\alpha_2}q_2=a$, z (3.20) i w ostatnim kroku z (3.24), możemy wnioskować, że dla dużych u zachodzi:

$$\begin{aligned}
I_1(u) &= 4\frac{T_1^2T_2^2}{q_1^2q_2^2}\exp\left(-u^2\left(1-\frac{K_3}{\ln T_{\min}^{\beta}}\right)\right)\frac{1}{\ln T_{\min}^{\beta}}\\
&\leqslant 4K_5\frac{T_1^2T_2^2}{q_1^2q_2^2}(T_1T_2)^{-2}(\ln(T_1T_2))^{1-2/\alpha_1-2/\alpha_2}\frac{1}{\ln T_{\min}^{\beta}}\\
&\sim \frac{2^{2/\alpha_1+2/\alpha_2+2}K_5}{a^4}(\ln(T_1T_2))^{2/\alpha_1+2/\alpha_2}(\ln(T_1T_2))^{1-2/\alpha_1-2/\alpha_2}\frac{1}{\ln T_{\min}^{\beta}}\\
&\sim \frac{2^{2/\alpha_1+2/\alpha_2+1}K_5}{a^4\beta\min\{\gamma,\frac{1}{2}-\gamma\}}<\infty.
\end{aligned}$$

Stąd I_1 jest ograniczone.

Pozostało wykazać, że $I_2(u)\to 0$ gdy $u\to\infty$. W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned}
I_2(u) &= \frac{q_1q_2\ln T_{\min}^{\beta}}{T_1T_2}\sum_{(jq_1,kq_2)\in\mathcal{S}}\left|r(jq_1,kq_2)-\frac{r}{\ln T_{\max}}\right|\\
&\leqslant \frac{q_1q_2}{T_1T_2}\sum_{(jq_1,kq_2)\in S}\left|r(jq_1,kq_2)\ln\sqrt{(jq_1)^2+(kq_2)^2}-r\right|\\
&\quad+\beta r\frac{q_1q_2}{T_1T_2}\sum_{(jq_1,kq_2)\in S}\left|1-\frac{\ln T_{\max}}{\ln(\sqrt{(jq_1)^2+(kq_2)^2}}\right| =: J_1(u)+J_2(u).
\end{aligned}$$

Zaczniemy od pokazania, że $J_1(u)\to 0$ gdy $u\to\infty$. Ustalmy $\epsilon>0$. Z założenia $A3$ wnioskujemy, że $|r(s,t)\ln\sqrt{s^2+t^2}-r|\leqslant\epsilon$, o ile $\sqrt{s^2+t^2}>R_\epsilon$, dla pewnej stałej $R_\epsilon>0$. A zatem dla u takich, że $T_{\min}^{\beta}>R_\epsilon$ zachodzi

$$J_1(u)\leqslant\frac{q_1q_2}{T_1T_2}\cdot\frac{(T_1+q_1)(T_2+q_2)}{q_1q_2}\cdot\epsilon\leqslant 2\epsilon.$$

Na mocy dowolności wyboru $\epsilon > 0$ otrzymujemy $J_1(u) = o(1)$. Dla składnika $J_2(u)$ korzystamy z następującego oszacowania (porównaj z [47, strona 135]):

$$\begin{aligned} J_2(u) &\leqslant \frac{\beta r}{\ln T_{\min}^{\beta}} \frac{q_1 q_2}{T_1 T_2} \sum_{(jq_1, kq_2) \in \mathcal{S}} \left| \ln \sqrt{(jq_1)^2 + (kq_2)^2} - \ln T_{\max} \right| \\ &= \frac{r}{\ln T_{\min}} \frac{q_1 q_2}{T_1 T_2} \sum_{(jq_1, kq_2) \in \mathcal{S}} \left| \ln \left(\frac{\sqrt{(jq_1)^2 + (kq_2)^2}}{T_{\max}} \right) \right| . \end{aligned}$$

Bez zmniejszania ogólności dowodu zakładamy, że $T_{\max} = T_1$. Wtedy

$$\begin{aligned} &\frac{q_1 q_2}{T_1 T_2} \sum_{(jq_1, kq_2) \in S} \left| \ln \left(\frac{\sqrt{(jq_1)^2 + (kq_2)^2}}{T_{\max}} \right) \right| \\ &\quad = \frac{q_1 q_2}{T_1 T_2} \sum_{(jq_1, kq_2) \in S} \left| \ln \left(\sqrt{ \left(\frac{jq_1}{T_1} \right)^2 + \left(\frac{kq_2}{T_2} \right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 } \right) \right| \\ &\quad \leqslant \frac{q_1 q_2}{T_1 T_2} \sum_{(jq_1, kq_2) \in S} \left(\left| \ln \left(\sqrt{ \left(\frac{jq_1}{T_1} \right)^2 + \left(\frac{kq_2}{T_2} \right)^2 } \right) \right| + \left| \ln \left| \frac{jq_1}{T_1} \right| \right| \right) \end{aligned}$$

dla dużych u, a stąd

$$J_2(u) = \frac{r}{\ln T_{\min}} O \left(\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left| \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right| dx dy + \int_{-1}^{1} |\ln |x|| dx \right)$$

i dlatego (3.23) zachodzi. Zestawiając (3.22) oraz (3.23) otrzymujemy tezę lematu. □

Lemat 3.16. *Jeśli funkcja* $T : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *jest taka, że* $T(u) \to \infty$ *(gdy* $u \to \infty$*) oraz* $r \geqslant 0$ *jest dowolną stałą, to istnieje* $\varepsilon > 0$*, dla którego*

$$\begin{aligned} \frac{m}{q_1 q_2} \sum_{\substack{j,k \in \mathbb{Z} \\ 0 < \max\{|jq_1|, |kq_2|\} < \varepsilon}} & \left((1 - r(jq_1, kq_2)) \frac{r}{\ln T} \left(1 - \left(r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2)) \frac{r}{\ln T} \right)^2 \right)^{-1/2} \right. \\ & \left. \times \exp \left(- \frac{u^2}{1 + r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2)) \frac{r}{\ln T}} \right) \right) \to 0, \end{aligned}$$

gdy $u \to \infty$*. (W powyższym:* $T = T(u)$*,* $m = m(u)$*,* $q_1 = q_1(u)$ *oraz* $q_2 = q_2(u)$*.)*

Dowód. Na początek zauważmy, że dla dostatecznie małej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi warunek (3.15) o ile $0 \leqslant \max\{|s|, |t|\} < \varepsilon$, zgodnie z założeniem *A1*. Ponadto, dla u dużego na tyle, że $\ln T > r$, dla dowolnego $(s, t) \neq (0, 0)$ otrzymujemy

$$\left(r(s, t) + (1 - r(s, t)) \frac{r}{\ln T} \right) < 1, \tag{3.25}$$

na mocy warunku *A2*. Konsekwencją powyższych obserwacji jest, że dla dużych u, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ i dla $j, k \in \mathbb{Z}$ spełniających $0 < \max\{|jq_1|, |kq_2|\} < \varepsilon$ zachodzi

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \left(r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}\right)^2\right)^{-1/2} \\
&\leqslant \left(1 - \left(r(jq_1, kq_2) + (1-r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}\right)\right)^{-1/2} = \left((1-r(jq_1, kq_2))\left(1-\frac{r}{\ln T}\right)\right)^{-1/2} \\
&\leqslant \left(\frac{|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}}{4}\right)^{-1/2} \leqslant \left(\frac{\max\left(|jq_1|^{\alpha_1}, |kq_2|^{\alpha_2}\right)}{4}\right)^{-1/2} \leqslant \left(\frac{\min\left(q_1^{\alpha_1}, q_2^{\alpha_2}\right)}{4}\right)^{-1/2} = Ku,
\end{aligned}$$

dla pewnej stałej $K > 0$. Zestawiając otrzymaną powyżej nierówność z (3.15) oraz korzystając z postaci funkcji m danej przez (3.9) i definicji funkcji q_1 i q_2, dostajemy:

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{q_1 q_2} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z} \\ 0<\max\{|jq_1|,|kq_2|\}<\varepsilon}} \Bigg((1-r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}\left(1-\left(r(jq_1, kq_2) + (1-r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}\right)^2\right)^{-1/2} \\
&\qquad\qquad \times \exp\left(-\frac{u^2}{1 + r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}}\right)\Bigg) \\
&\leqslant K' u e^{u^2/2} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z} \\ 0<\max\{|jq_1|,|kq_2|\}<\varepsilon}} \Bigg(\left(|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}\right)\frac{ru}{\ln T} \\
&\qquad\qquad \times \exp\left(-\frac{u^2}{2 - \frac{1}{2}\left(|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{r}{\ln T}\right)}\right)\Bigg) \\
&= K'\frac{ru^2}{\ln T} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z} \\ 0<\max\{|jq_1|,|kq_2|\}<\varepsilon}} \Bigg(\left(|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}\right) \\
&\qquad\qquad \times \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}u^2\left(|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{r}{\ln T}\right)}{4 - \left(|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{r}{\ln T}\right)}\right)\Bigg) \\
&\leqslant K'\frac{ru^2}{\ln T}\frac{16}{u^2} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z} \\ 0<\max\{|jq_1|,|kq_2|\}<\varepsilon}} \frac{u^2}{16}\left(|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}\right)\exp\left(-\frac{u^2\left(|jq_1|^{\alpha_1} + |kq_2|^{\alpha_2}\right)}{16}\right) \\
&= \frac{16rK'}{\ln T} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z} \\ 0<\max\{|jq_1|,|kq_2|\}<\varepsilon}} \left(\frac{|aj|^{\alpha_1}}{16} + \frac{|ak|^{\alpha_2}}{16}\right)\exp\left(-\left(\frac{|aj|^{\alpha_1}}{16} + \frac{|ak|^{\alpha_2}}{16}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{\ln T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(|x|^{\alpha_1} + |y|^{\alpha_2}\right)e^{-\left(|x|^{\alpha_1}+|y|^{\alpha_2}\right)}\,dxdy\right),
\end{aligned}$$

dla dużych u, gdzie $K' > 0$ jest pewną stałą dodatnią. Ponieważ z założenia mamy $\ln T(u) \to \infty$ gdy $u \to \infty$, a całka pojawiająca się w ostatnim wyrażeniu jest skończona, dowiedliśmy tezy lematu. $\square$

3.2.3. Dowód twierdzenia o zbieżności supremum

Przystępujemy do dowodu Twierdzenia 3.8 stanowiącego główny rezultat rozdziału. Niech $a > 0$ oraz $q_1 := q_1(u) = au^{-\alpha_1/2}$, $q_2 := q_2(u) = au^{-\alpha_2/2}$. Wiemy, że istnieje stała $L > 0$ taka, że dla każdego prostokąta I o wymiarach nie przekraczających L zachodzi:

$$\mathrm{P}\Big(X(jq_1, kq_2) \leqslant u;\ j,k \in \mathbb{N},\ (jq_1, kq_2) \in I\Big) - \mathrm{P}\Big(X(s,t) \leqslant u;\ (s,t) \in I\Big) \leqslant \frac{gh\xi(a)}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right), \quad (3.26)$$

gdy $u \to \infty$, gdzie $\xi(a) \to 0$ gdy $a \to 0$ (patrz Lemat 3.14). Aby nie utracić przejrzystości przedstawionych rozumowań zakładać będziemy, że $L \geqslant 1$. Podział płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na kwadraty $[i-1,i] \times [j-1,j]$ o boku długości 1 odegra szczególną rolę w naszych rozważaniach. Dowód twierdzenia dla $L < 1$ przeprowadza się w analogiczny sposób, dzieląc płaszczyznę na kwadraty postaci $[(i-1)L, iL] \times [(j-1)L, jL]$.

Rozważmy pola losowe $\{X^{(i,j)}(s,t) :\ s,t \in \mathbb{R}\}$ dla $i,j \in \mathbb{N}$ będące niezależnymi kopiami pola $\{X(s,t) :\ s,t \in \mathbb{R}\}$. Określamy $\{\eta(s,t) :\ s,t \in \mathbb{R}\}$ jako $\eta(s,t) := X^{(i,j)}(s,t)$ dla $(s,t) \in [i-1,i) \times [j-1,j)$. Dla ustalonego $T > 0$ definiujemy gaussowskie pole losowe $\{Y_T(s,t) :\ (s,t) \in [0,T]^2\}$ w następujący sposób:

$$Y_T(s,t) := \left(1 - \frac{r}{\ln T}\right)^{1/2} \eta(s,t) + \left(\frac{r}{\ln T}\right)^{1/2} \mathcal{W}, \quad (3.27)$$

gdzie $\mathcal{W}$ jest zmienną o standardowym rozkładzie normalnym, niezależną od pola η. Wtedy kowariancja pola $\{Y_T(s,t)\}$ wynosi

$$\mathrm{Cov}(Y_T(s_0,t_0), Y_T(s_0+s, t_0+t)) = \begin{cases} r(s,t) + (1 - r(s,t))\frac{r}{\ln T}, & \text{gdy } \lfloor s_0 \rfloor = \lfloor s_0 + s \rfloor \\ & \text{i } \lfloor t_0 \rfloor = \lfloor t_0 + t \rfloor; \\ \frac{r}{\ln T}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ustalmy $0 < A < B < \infty$. Dla $x, y \in [A,B]$ określmy funkcje $N_x, N_y : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$ jako $N_x(u) := \lfloor x m_1(u) \rfloor$ oraz $N_y(u) := \lfloor y m_2(u) \rfloor$. Ponieważ zachodzi

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,N_x+1]\times[0,N_y+1]} X(s,t) \leqslant u\right) \leqslant \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,xm_1(u)]\times[0,ym_2(u)]} X(s,t) \leqslant u\right) \leqslant \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,N_x]\times[0,N_y]} X(s,t) \leqslant u\right)$$

oraz

$$\mathrm{P}\left(\sup_{\substack{(s,t)\in[0,N_x+1]\times[0,N_y+1] \\ (s,t)\notin[0,N_x]\times[0,N_y]}} X(s,t) > u\right) \leqslant \frac{(N_x + N_y + 1)}{m}(1 + o(1)) = o(1),$$

wystarczy zbadać asymptotykę $\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,N_x]\times[0,N_y]} X(s,t) \leqslant u\right)$ gdy $u \to \infty$. Ustalmy $\varepsilon \in (0,1)$. Pokryjmy prostokąt $[0,N_x] \times [0,N_y]$ kwadratami o boku długości 1, a następnie każdy z $N_x N_y$ jednostkowych kwadratów rozbijmy na dwa podzbiory $I'_{l,n}$ i $I_{l,n}$ następująco:

$$\begin{aligned} I_{l,n} &:= [(l-1)+\varepsilon, l] \times [(n-1)+\varepsilon, n], \\ I'_{l,n} &:= [l-1, l] \times [n-1, n] \setminus I_{l,n}, \end{aligned}$$

gdzie $l = 1, \ldots, N_x$, $n = 1, \ldots, N_y$.

KROK 1. W pierwszym kroku dowiedziemy, że

$$\limsup_{u\to\infty} \left| \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,N_x]\times[0,N_y]} X(s,t) \leqslant u \right) - \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\bigcup_{l=1}^{N_x}\bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n}} X(s,t) \leqslant u \right) \right| \leqslant \xi_1(\varepsilon),$$

jednostajnie dla $(x,y) \in [A,B]^2$, gdzie $\xi_1(\varepsilon) \to 0$ gdy $\varepsilon \to 0$. Powyższa własność jest konsekwencją nierówności:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\bigcup_{l=1}^{N_x}\bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n}} X(s,t) \leqslant u \right) - \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,N_x]\times[0,N_y]} X(s,t) \leqslant u \right) \\ &\leqslant N_x N_y \, \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I'_{1,1}} X(s,t) > u \right) \leqslant B^2 m \, \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I'_{1,1}} X(s,t) > u \right) \end{aligned}$$

oraz asymptotyki

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I'_{1,1}} X(s,t) > u \right) = \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{m}(1 + o(1)), \quad \text{gdy} \quad u \to \infty,$$

wynikającej z Twierdzenia 3.3.

KROK 2. Twierdzimy, że zachodzi

$$\limsup_{u\to\infty} \left| \mathrm{P}\left(X(s,t) \leqslant u; (s,t) \in \bigcup_{l=1}^{N_x}\bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n} \right) - \mathrm{P}\left(X(jq_1, kq_2) \leqslant u; (jq_1, kq_2) \in \bigcup_{l=1}^{N_x}\bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n} \right) \right| \leqslant \xi_2(a),$$

jednostajnie dla $(x,y) \in [A,B]^2$, z pewną funkcją ξ_2 spełniającą $\xi_2(a) \to 0$ gdy $a \to 0$. Rzeczywiście, jest to wynik następującego rozumowania:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathrm{P}\left(X(s,t) \leqslant u; (s,t) \in \bigcup_{l=1}^{N_x}\bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n} \right) - \mathrm{P}\left(X(jq_1, kq_2) \leqslant u; (jq_1, kq_2) \in \bigcup_{l=1}^{N_x}\bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n} \right) \\ &\leqslant N_x N_y \max_{l,n} \left(\mathrm{P}\left(X(jq_1, kq_2) \leqslant u; (jq_1, kq_2) \in I_{l,n} \right) - \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I_{l,n}} X(s,t) \leqslant u \right) \right) \\ &\leqslant N_x N_y (1-\varepsilon)^2 \left(\frac{\xi(a)}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right) \right) \qquad (3.28) \\ &\leqslant B^2 \xi(a) + B^2 m \cdot o\left(\frac{1}{m}\right) = B^2 \xi(a) + o(1), \end{aligned}$$

gdzie nierówność (3.28) wynika z własności (3.26) oraz $\xi(a) \to 0$ gdy $a \to 0$.

KROK 3. W kolejnym kroku dowodu skorzystamy z twierdzenia o porównywaniu rozkładów gaussowskich [47, Theorem 4.2.1]:

Twierdzenie 3.17. *Niech* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *oraz* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ *będą wektorami o rozkładach gaussowskich, o współrzędnych scentrowanych i unormowanych, i o macierzach kowariancji* $r^{\mathbf{X}} = \{r^{\mathbf{X}}_{i,j}\}_{i=1\ldots n, j=1\ldots n}$ *oraz* $r^{\mathbf{Y}} = \{r^{\mathbf{Y}}_{i,j}\}_{i=1\ldots n, j=1\ldots n}$ *(odpowiednio). Określamy* $\delta_{i,j} := |r^{\mathbf{X}}_{i,j}| \vee |r^{\mathbf{Y}}_{i,j}|$ *i* $\delta := \max_{i \neq j} \delta_{i,j}$. *Jeżeli* $\delta < 1$, *to prawdziwe są nierówności:*

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{P}(X_i \leqslant u_i;\, i = 1,2,\ldots,n) - \mathrm{P}(Y_i \leqslant u_i;\, i = 1,2,\ldots,n)| \\
&\leqslant \frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \frac{|r^{\mathbf{X}}_{i,j} - r^{\mathbf{Y}}_{i,j}|}{\sqrt{1-\delta^2_{i,j}}} \exp\left(-\frac{u_i^2 + u_j^2}{2(1+\delta_{i,j})} \right) \leqslant \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\delta^2}} \sum_{i \neq j} |r^{\mathbf{X}}_{i,j} - r^{\mathbf{Y}}_{i,j}| \exp\left(-\frac{u_i^2 + u_j^2}{2(1+\delta_{i,j})} \right),
\end{aligned}
$$

dla dowolnych $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$.

Niech $T = T(u) := Bm_1(u) \vee Bm_2(u)$. Chcemy wykazać, że

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}&\left(X(jq_1, kq_2) \leqslant u; (jq_1, kq_2) \in \bigcup_{l=1}^{N_x} \bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n} \right) \\
&\qquad - \mathrm{P}\left(Y_T(jq_1, kq_2) \leqslant u; (jq_1, kq_2) \in \bigcup_{l=1}^{N_x} \bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n} \right) \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

gdy $u \to \infty$, jednostajnie dla $(x, y) \in [A, B]^2$. W tym celu zauważmy, że dla wystarczająco dużych T otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\big|\operatorname{Cov}(X(jq_1, kq_2), X(j'q_1, k'q_2)) - \operatorname{Cov}(Y_T(jq_1, kq_2), Y_T(j'q_1, k'q_2))\big| \\
&\qquad\qquad \leqslant \rho_T((j-j')q_1, (k-k')q_2)
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\big|\operatorname{Cov}(Y_T(jq_1, kq_2), Y_T(j'q_1, k'q_2))\big| \leqslant \varrho_T((j-j')q_1, (k-k')q_2),
$$

gdzie funkcje ρ_T i ϱ_T są zdefiniowane poprzez (3.14). Ponadto, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ i dla wszystkich $(jq_1, kq_2), (j'q_1, k'q_2) \in \bigcup_{l=1}^{N_x} \bigcup_{n=1}^{N_y} I_{l,n}$, dla których spełniony jest warunek $\max\{|j-j'|q_1, |k-k'|q_2\} < \varepsilon$, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\big|\operatorname{Cov}(X(jq_1, kq_2), X(j'q_1, k'q_2)) - \operatorname{Cov}(Y_T(jq_1, kq_2), Y_T(j'q_1, k'q_2))\big| \\
&\qquad\qquad = \big(1 - r((j-j')q_1, (k-k')q_2)\big) \frac{r}{\ln T}
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
\max&\left\{ |\operatorname{Cov}(X(jq_1, kq_2), X(j'q_1, k'q_2))|, |\operatorname{Cov}(Y_T(jq_1, kq_2), Y_T(j'q_1, k'q_2))| \right\} \\
&= \operatorname{Cov}(Y_T(jq_1, kq_2), Y_T(j'q_1, k'q_2)) \\
&= r((j-j')q_1, (k-k')q_2) + \big(1 - r((j-j')q_1, (k-k')q_2)\big) \frac{r}{\ln T}.
\end{aligned}
$$

Definiujemy

$$
\delta(T) := \sup_{(s,t) \in [-T,T]^2 \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)^2} |r(s,t)| \vee \varrho_T(s,t).
$$

Na mocy obserwacji poczynionej w dowodzie Lematu 3.15 zachodzi $\delta(T) < \delta < 1$ dla pewnej stałej δ i dla dostatecznie dużych T. Stosując Twierdzenie 3.17 dostajemy:

$$\left| \mathrm{P}\left(X(jq_1, kq_2) \leqslant u; (jq_1, kq_2) \in \bigcup_{l,n} I_{l,n} \right) - \mathrm{P}\left(Y_T(jq_1, kq_2) \leqslant u; (jq_1, kq_2) \in \bigcup_{l,n} I_{l,n} \right) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi} \frac{N_x N_y}{q_1 q_2} \sum_{0<\max\{|jq_1|,|kq_2|\}<\varepsilon} \left(\frac{(1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}}{\sqrt{(1 - \left(r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}\right)^2}} \right.$$
$$\left. \times \exp\left(- \frac{u^2}{1 + r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}} \right) \right)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{N_x N_y}{q_1 q_2} \sum_{\substack{(jq_1,kq_2)\in[-N_x,N_x]\times[-N_y,N_y] \\ (jq_1,kq_2)\notin(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)}} \left(\rho_T(jq_1, kq_2) \right.$$
$$\left. \times \exp\left(- \frac{u^2}{1 + |r(jq_1, kq_2)| \vee \varrho_T(jq_1, kq_2)} \right) \right)$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi} \frac{B^2 m}{q_1 q_2} \sum_{0<|jq_1|\vee|kq_2|<\varepsilon} \left(\frac{(1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}}{\sqrt{(1 - \left(r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}\right)^2}} \right.$$
$$\left. \times \exp\left(- \frac{u^2}{1 + r(jq_1, kq_2) + (1 - r(jq_1, kq_2))\frac{r}{\ln T}} \right) \right)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{B^2 m}{q_1 q_2} \sum_{\substack{(jq_1,kq_2)\in[-Bm_1,Bm_1]\times[-Bm_2,Bm_2] \\ (jq_1,kq_2)\notin(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)}} \left(\rho_T(jq_1, kq_2) \right.$$
$$\left. \times \exp\left(- \frac{u^2}{1 + |r(jq_1, kq_2)| \vee \varrho_T(jq_1, kq_2)} \right) \right)$$

$$=: I_1(u) + I_2(u).$$

Zauważmy teraz, że na mocy Lematu 3.16 mamy $I_1(u) \to 0$ gdy $u \to \infty$. Natomiast korzystając z Lematu 3.15 wnioskujemy, że $I_2(u) \to 0$ gdy $u \to \infty$.

KROK 4. Niech funkcja T będzie taka jak w kroku 3. Zauważmy, że wtedy zachodzi $T(u) = e^{\gamma u^2} c(u)$ dla pewnej funkcji $c : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o własności $\ln c(u)/u^2 \to 0$, gdy $u \to \infty$, i stałej $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ z tezy dowodzonego twierdzenia. Korzystając z definicji pola $\{Y_T(s,t)\}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}\left(Y_T(jq_1,kq_2) \leqslant u; (jq_1,kq_2) \in \bigcup_{l,n} I_{l,n}\right) \\
= \; & \mathrm{P}\left(\left(1-\frac{r}{\ln T}\right)^{1/2}\eta(jq_1,kq_2) + \left(\frac{r}{\ln T}\right)^{1/2}\mathcal{W} \;\leqslant\; u;\; (jq_1,kq_2) \in \bigcup_{l,n} I_{l,n}\right) \\
= \; & \mathrm{P}\left(\left(1-\frac{r}{\ln T}\right)^{1/2} \sup_{(jq_1,kq_2)\in\bigcup_{l,n} I_{l,n}} \eta(jq_1,kq_2) + \left(\frac{r}{\ln T}\right)^{1/2}\mathcal{W} \;\leqslant\; u\right) \\
= \; & \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(jq_1,kq_2)\in\bigcup_{l,n} I_{l,n}} \eta(jq_1,kq_2) \;\leqslant\; \frac{u-(r/\ln T)^{1/2}z}{(1-r/\ln T)^{1/2}}\right) d\Phi(z). \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Wtedy, dla dowolnego $z \in \mathbb{R}$, funkcja $u \mapsto u_z$ zdefiniowana jako

$$u_z := \frac{u-(r/\ln T)^{1/2}z}{(1-r/\ln T)^{1/2}}$$

spełnia

$$\begin{aligned}
u_z &= \left(u-(r/\ln T)^{1/2}z\right)\left(1+\frac{1}{2}(r/\ln T)+o(r/\ln T)\right) \\
&= u + \frac{-\sqrt{\frac{r}{\gamma}}z+\frac{r}{2\gamma}}{u} + o(1/u),
\end{aligned}$$

gdy $u \to \infty$ (porównaj z rozważaniami Tana i Hashorvy [72, Lemma 3.3]), a stąd

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m(u_z)} &= \mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2} u_z^{2/\alpha_1} u_z^{2/\alpha_2} \Psi(u_z) \\
&= \mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2} u_z^{2/\alpha_1} u_z^{2/\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_z} e^{-\frac{1}{2}u_z^2}(1+o(1)) \\
&= \mathcal{H}_{\alpha_1}\mathcal{H}_{\alpha_2} u^{2/\alpha_1} u^{2/\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-\frac{1}{2}u^2} \exp\left(-\frac{r}{2\gamma}+\sqrt{\frac{r}{\gamma}}z\right)(1+o(1)) \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{r}{2\gamma}+\sqrt{\frac{r}{\gamma}}z\right)}{m(u)}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Wykorzystując kolejno: strukturę zależności pola $\{\eta(s,t)\}$, stacjonarność pola $\{X(s,t)\}$, własność (3.26), asymptotykę opisaną przez Twierdzenie 3.3, definicję funkcji m oraz wynik powyższych rozważań, dostajemy, że dla $z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\sup_{(jq_1,kq_2)\in\bigcup_{l,n} I_{l,n}} \eta(jq_1,kq_2) \leqslant u_z\right) &= \prod_{l,n} \mathrm{P}\left(\sup_{(jq_1,kq_2)\in I_{l,n}} X(jq_1,kq_2) \leqslant u_z\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\sup_{(jq_1,kq_2)\in I_{1,1}} X(jq_1,kq_2) \leqslant u_z\right)^{N_x N_y} (1+o(1)) \\
&= \left(\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in I_{1,1}} X(s,t) \leqslant u_z\right) + \frac{\xi_1^*(a,\varepsilon)}{m(u_z)} + \frac{o(1)}{m(u_z)}\right)^{N_x N_y} (1+o(1)) \\
&= \left(\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in [0,1]^2} X(s,t) \leqslant u_z\right) + \frac{\xi_1^*(a,\varepsilon)}{m(u_z)} + \frac{\xi_2^*(\varepsilon)}{m(u_z)} + \frac{o(1)}{m(u_z)}\right)^{N_x N_y} (1+o(1)) \\
&= \left(1 - \frac{1}{m(u_z)} + \frac{\xi_1^*(a,\varepsilon)}{m(u_z)} + \frac{\xi_2^*(\varepsilon)}{m(u_z)} + \frac{o(1)}{m(u_z)}\right)^{xym(u)} (1+o(1)) \\
&= \left(1 - \frac{\exp\left(-\frac{r}{2\gamma} + \sqrt{\frac{r}{\gamma}} z\right)(1 - \xi_1^*(a,\varepsilon) - \xi_2^*(\varepsilon) + o(1))}{m(u)}\right)^{xym(u)} (1+o(1)),
\end{aligned}$$

gdy $u \to \infty$, jednostajnie dla $(x,y) \in [A,B]^2$, gdzie $0 \leqslant \xi_1^*(a,\varepsilon) \leqslant (1-\varepsilon)^2 \xi(a)$ (ξ jest funkcją z założenia (3.26)) oraz $0 \leqslant \xi_2^*(\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2$. Stąd wnioskujemy, że

$$\lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(jq_1,kq_2)\in\bigcup_{l,n} I_{l,n}} \eta(jq_1,kq_2) \leqslant u_z\right) = \exp\left(-xy\exp\left(-\frac{r}{2\gamma} + \sqrt{\frac{r}{\gamma}} z\right)(1 - \xi_1^*(a,\varepsilon) - \xi_2^*(\varepsilon))\right),$$

jednostajnie dla $(x,y) \in [A,B]^2$, a w konsekwencji:

$$\lim_{u\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(jq_1,kq_2)\in\bigcup_{l,n} I_{l,n}} \eta(jq_1,kq_2) \leqslant u_z\right) d\Phi(z) = \mathrm{E}\exp\left(-xy\exp\left(-\frac{r}{2\gamma} + \sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)(1 - \xi_1^*(a,\varepsilon) - \xi_2^*(\varepsilon))\right),$$

jednostajnie dla $(x,y) \in [A,B]^2$. Pamiętając, że $\xi_1^*(a,\varepsilon) \to 0$ i $\xi_2^*(\varepsilon) \to 0$ gdy $a \to 0$, $\varepsilon \to 0$, dostajemy:

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(Y_T(jq_1,kq_2) \leqslant u; (jq_1,kq_2) \in \bigcup_{l,n} I_{l,n}\right) = \mathrm{E}\exp\left(-xy\exp\left(-\frac{r}{2\gamma} + \sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right),$$

jednostajnie dla $(x,y) \in [A,B]^2$. Zestawiając powyższy wynik z rezultatami kroków 1–3 (gdy $\varepsilon \to 0$ i $a \to 0$) otrzymujemy tezę dowodzonego twierdzenia.

3.2.4. Zastosowania twierdzenia o zbieżności supremum

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy pewne wyniki zastosowania Twierdzenia 3.8 do badania asymptotyki maksimum pola gaussowskiego po losowym zbiorze i do opisu struktury zależności rozważanego pola gaussowskiego w języku indeksu ekstremalnego.

Supremum pola gaussowskiego po losowym zbiorze

W tej części podrozdziału przedstawiamy twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu (gdy $u \to \infty$) prawdopodobieństw

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{B}(\mathbf{0},T)} X(s,t) > u\right)$$

dla nieujemnej zmiennej losowej T, niezależnej od pola $\{X(s,t)\}$. Rozważamy sytuację, gdy założenie *A1* zachodzi ze stałymi $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2 \in (0,2]$ oraz

$$m_1(u) = m_2(u) := \sqrt{m(u)} = \left(\mathcal{H}_\alpha^2 u^{4/\alpha}\Psi(u)\right)^{-1/2}(1+o(1)).$$

Przytoczony poniżej rezultat dowiedziony przez Hashorvę [15, Proposition 1] stanowi uogólnienienie rozważań prowadzonych w ostatnich latach dla 1-wymiarowego procesu gaussowskiego [2,72].

Twierdzenie 3.18. *Niech pole $\{X(s,t)\}$ spełnia A1-A3 ze stałymi $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2 \in (0,2]$ i $r \in [0,\infty)$ oraz niech T będzie nieujemną zmienną losową niezależną od $\{X(s,t)\}$. Określamy $F(x) := \mathrm{P}(T > x)$ dla $x \in [0,\infty)$.*

(1) Jeśli $\mathrm{E}\,T^2 < \infty$, to

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{B}(0,T)} X(s,t) > u\right) = \pi\,\mathrm{E}\,T^2\mathcal{H}_\alpha^2 u^{4/\alpha}\Psi(u)(1+o(1)), \quad \text{gdy} \quad u\to\infty.$$

(2) Jeśli F jest funkcją regularnie zmieniającą się w nieskończoności o stopniu $\lambda < 2$, to

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{B}(0,T)} X(s,t) > u\right) = 2\pi k\,\mathrm{P}\left(T > \sqrt{m(u)}\right)(1+o(1)), \quad \text{gdy} \quad u\to\infty,$$

gdzie $k := \int_0^\infty x^{1-\lambda}\,\mathrm{E}\left(\exp(-\pi x^2\exp(\mathcal{V}_r)+\mathcal{V}_r)\right)dx$, $\mathcal{V}_r := 2\sqrt{r}\mathcal{W} - 2r$.

(3) Jeśli F jest funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności, to

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in\mathcal{B}(0,T)} X(s,t) > u\right) = \mathrm{P}\left(T > \sqrt{m(u)}\right)(1+o(1)), \quad \text{gdy} \quad u\to\infty.$$

Indeks ekstremalny zdyskretyzowanego pola gaussowskiego

W dalszej kolejności zastosujemy Twierdzenie 3.8, aby opisać strukturę zależności rozważanego pola gaussowskiego $\{X(s,t)\}$. Posłużymy się pojęciem indeksu ekstremalnego pola wprowadzonym w podrozdziale 2.2 (patrz definicja (2.12)).

Z polem $\{X(s,t)\}$ stowarzyszamy dyskretne pole losowe $\{\widetilde{X}_{(j,k)} : \ j,k \in \mathbb{N}\}$ określone następująco:

$$\widetilde{X}_{(j,k)} := \sup_{(s,t)\in[j-1,j]\times[k-1,k]} X(s,t) \quad \text{dla} \quad j,k\in\mathbb{N}.$$

Poniżej dowodzimy faktu, który mówi, w jaki sposób zależność długiego zasięgu pola $\{X(s,t)\}$ wyrażona poprzez warunek *A3* ze stałą $r \in [0,\infty)$ wpływa na istnienie indeksu ekstremalnego θ zdyskretyzowanego pola $\{\widetilde{X}_{(j,k)}\}$. W rozważaniach tego podrozdziału badamy indeks ekstremalny pola $\{\widetilde{X}_{(j,k)}\}$ wzdłuż $\boldsymbol{\psi}$, gdzie $\boldsymbol{\psi}(n) := (\lfloor m_1(u_n)\rfloor, \lfloor m_2(u_n)\rfloor)$ dla $n \in \mathbb{N}$ i dla pewnego rosnącego ciągu $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Przypominamy, że zagadnienia związane z indeksem ekstremalnym pól dyskretnych zostały szczegółowo omówione w rozdziale 2.

Twierdzenie 3.19. *Załóżmy, że pole $\{X(s,t)\}$ spełnia warunki A1-A3.*

(i) Jeśli $r = 0$, to indeks ekstremalny pola $\{\widetilde{X}_{(j,k)}\}$ istnieje i $\theta = 1$.

(ii) Jeśli $r > 0$, to pole $\{\widetilde{X}_{(j,k)}\}$ nie posiada indeksu ekstremalnego.

Dowód. Przeprowadzimy dowód kolejno dla części (i) oraz (ii).
(i) Przypuśćmy, że warunek *A3* zachodzi z $r = 0$. Aby dowieść, że indeks ekstremalny pola dyskretnego $\{\widetilde{X}_{(j,k)}\}$ istnieje i $\theta = 1$, pokażemy, że

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,f(u)]\times[0,g(u)]} X(s,t) \leqslant z(u)\right) - \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant z(u)\right)^{f(u)g(u)} \to 0, \quad (3.30)$$

gdy $u \to \infty$, dla każdej funkcji ciągłej $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i wszystkich par funkcji $f, g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ postaci $f(u) = c_1(u)m_1(a(u))$ i $g(u) = c_2(u)m_2(a(u))$, gdzie $c_1(u), c_2(u) \in [1/C, C]$ dla pewnej stałej $C > 0$ i wszystkich $u \in \mathbb{R}$ oraz $a(u) \to \infty$ gdy $u \to \infty$. Powołując się na Fakt 2.28 zauważamy, że wystarczy rozważyć dwa przypadki: (a) $z(u) \nearrow \infty$ gdy $u \to \infty$; (b) $z(u) \leqslant K$ dla pewnej stałej $K \in \mathbb{R}$.

Załóżmy, że (a) zachodzi. Wtedy warunek (3.30) jest równoważny warunkowi

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,f(z^{-1}(u))]\times[0,g(z^{-1}(u))]} X(s,t) \leqslant u\right) - \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant u\right)^{f\left(z^{-1}(u)\right)g\left(z^{-1}(u)\right)} \to 0,$$

gdzie przez z^{-1} oznaczyliśmy funkcję odwrotną do z. Przypominamy, że na podstawie Twierdzenia 3.8 i Wniosku 3.10 wiemy, że

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,xm_1(u)]\times[0,ym_2(u)]} X(s,t) \leqslant u\right) \to e^{-xy} \quad \text{gdy} \quad u \to \infty, \quad (3.31)$$

jednostajnie dla $(x,y) \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F} \subset [0,\infty)^2$ jest dowolnym zbiorem takim, że nie istnieje ciąg elementów z $\mathcal{F}$ zbieżny do punktu $(0,\infty)$ lub do punktu $(\infty,0)$. Ponadto, na takim zbiorze $\mathcal{F}$ mamy również zbieżność jednostajną jak poniżej:

$$\left(\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant u\right)\right)^{xy\cdot m(u)} \to e^{-xy} \quad \text{gdy} \quad u \to \infty. \quad (3.32)$$

Z funkcjami f, g i z stowarzyszamy funkcje $\overline{f}, \overline{g}$ zdefiniowane dla $u \in \mathbb{R}$ następująco:

$$\begin{aligned} \overline{f}(u) &= \frac{f\left(z^{-1}(u)\right)}{m_1(u)}, \\ \overline{g}(u) &= \frac{g\left(z^{-1}(u)\right)}{m_2(u)}. \end{aligned}$$

Stosując ponownie Fakt 2.28 dokonujemy fundamentalnej obserwacji: aby udowodnić zbieżność (3.30) w rozważanej sytuacji (a), wystarczy skupić się na przypadku, gdy mamy $\overline{f}(u) \to x_0 \in [0, \infty]$ oraz $\overline{g}(u) \to y_0 \in [0, \infty]$, gdy $u \to \infty$. Po uwzględnieniu szczególnej postaci funkcji f i g, na mocy Lematu 2.31 otrzymujemy, że zbiór

$$\mathcal{F} := \left\{ \left(\overline{f}(u), \overline{g}(u) \right) : u \in \mathbb{R} \right\}$$

spełnia założenie Wniosku 3.10. Stąd zbieżność (3.31) jest jednostajna na tak określonym zbiorze $\mathcal{F}$, a więc mamy:

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,f(z^{-1}(u))]\times[0,g(z^{-1}(u))]} X(s,t) \leqslant u \right) \\ &\quad = \lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,\overline{f}(u)m_1(u)]\times[0,\overline{g}(u)m_2(u)]} X(s,t) \leqslant u \right) = e^{-x_0 y_0}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, na mocy (3.32), dostajemy:

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant u \right)^{f\left(z^{-1}(u)\right)g\left(z^{-1}(u)\right)} \\ &\quad = \lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant u \right)^{\overline{f}(u)\overline{g}(u)\cdot m(u)} = e^{-x_0 y_0} \end{aligned}$$

Otrzymane wyżej zbieżności pociągają (3.30), a tym samym kończą dowód przypadku (a).

Rozpatrzmy sytuację (b), gdy $z(u) \leqslant K$ dla pewnej stałej $K \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant z(u) \right)^{f(u)g(u)} = o(1)$$

wynika z faktu, że $f(u)g(u) \to \infty$ oraz

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant z(u) \right) \leqslant \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,1]^2} X(s,t) \leqslant K \right) < 1.$$

Aby wykazać (3.30) należy pokazać, że również

$$\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,f(u)]\times[0,g(u)]} X(s,t) \leqslant z(u) \right) = o(1).$$

Ustalmy ciągłą funkcję $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rosnącą do nieskończoności na tyle wolno, aby jej funkcja odwrotna l^{-1} rosła do nieskończoności tak szybko, że funkcje $\overline{f}, \overline{g}$ zdefiniowane jako

$$\overline{f}(u) := \frac{f\left(l^{-1}(u)\right)}{m_1(u)}, \quad \overline{g}(u) := \frac{g\left(l^{-1}(u)\right)}{m_2(u)}$$

spełniają $\overline{f}(u) \to \infty$, $\overline{g}(u) \to \infty$ gdy $u \to \infty$. Zauważmy, że dla dużych $u \in \mathbb{R}$ mamy $z(u) \leqslant K \leqslant l(u)$. Wtedy

$$\lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,f(u)]\times[0,g(u)]} X(s,t) \leqslant z(u)\right) \leqslant \lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,f(u)]\times[0,g(u)]} X(s,t) \leqslant K\right)$$
$$\leqslant \lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,f(u)]\times[0,g(u)]} X(s,t) \leqslant l(u)\right) = 0,$$

gdzie ostatnia równość jest wnioskiem z rozważań dotyczących punktu (a), co kończy dowód przypadku (b).

(ii) Niech $r > 0$ oraz $\mathcal{V}_r := 2\sqrt{r}\mathcal{W} - 2r$. Na podstawie Twierdzenia 3.8 dostajemy:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\exp(-\exp(\mathcal{V}_r))\right) &= \mathrm{E}\left(\exp\left(-2\exp\mathcal{V}_r\right)\right) - \left(\mathrm{E}\left(\exp(-\exp\mathcal{V}_r)\right)\right)^2\\
&= \lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,2m_1(u)]\times[0,m_2(u)]} X(s,t) \leqslant u\right)\\
&\quad - \left(\lim_{u\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,m_1(u)]\times[0,m_2(u)]} X(s,t) \leqslant u\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Przypuśćmy nie wprost, że indeks ekstremalny rozważanego pola istnieje i $\theta \in (0,1]$. Wtedy dla dowolnego ciągu $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ rosnącego do nieskończoności zachodzi:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,2m_1(v_n)]\times[0,m_2(v_n)]} X(s,t) \leqslant v_n\right) - \left(\mathrm{P}\left(\sup_{(s,t)\in[0,m_1(v_n)]\times[0,m_2(v_n)]} X(s,t) \leqslant v_n\right)\right)^2\\
&= \mathrm{P}\left(\max_{\substack{j\leqslant 2\lfloor m_1(v_n)\rfloor,\\ k\leqslant\lfloor m_2(v_n)\rfloor}} \widetilde{X}_{(j,k)} \leqslant v_n\right) - \left(\mathrm{P}\left(\max_{\substack{j\leqslant \lfloor m_1(v_n)\rfloor,\\ k\leqslant\lfloor m_2(v_n)\rfloor}} \widetilde{X}_{(j,k)} \leqslant v_n\right)\right)^2 + o(1)\\
&= \mathrm{P}\left(\max_{\substack{j\leqslant 2\lfloor m_1(v_n)\rfloor,\\ k\leqslant\lfloor m_2(v_n)\rfloor}} \widetilde{X}_{(j,k)} \leqslant v_n\right) - \mathrm{P}\left(\widetilde{X}_{(1,1)} \leqslant v_n\right)^{2\lfloor m_1(v_n)\rfloor\lfloor m_2(v_n)\rfloor\theta}\\
&\quad + \left(\mathrm{P}\left(\widetilde{X}_{(1,1)} \leqslant v_n\right)^{\lfloor m_1(v_n)\rfloor\lfloor m_2(v_n)\rfloor\theta}\right)^2 - \left(\mathrm{P}\left(\max_{\substack{j\leqslant \lfloor m_1(v_n)\rfloor,\\ k\leqslant\lfloor m_2(v_n)\rfloor}} \widetilde{X}_{(j,k)} \leqslant v_n\right)\right)^2 + o(1)\\
&= o(1),
\end{aligned}$$

gdy $n \to \infty$, co implikuje, że $\operatorname{Var}\left(\exp(-\exp\mathcal{V}_r)\right) = 0$ i w konsekwencji zmienna losowa $\exp(-\exp\mathcal{V}_r)$ jest stała prawie wszędzie. Pamiętając, że $\mathcal{W}$ to zmienna o standardowym rozkładzie normalnym i $r > 0$, otrzymujemy sprzeczność, a tym samym koniec dowodu części (ii) twierdzenia. $\square$

3.3. Maksima pól gaussowskich dowolnego wymiaru

W niniejszym podrozdziale podajemy ogólną wersję Twierdzenia 3.8 dla pola gaussowskiego dowolnego wymiaru $d \geqslant 1$. Dowód rezultatu jest analogiczny do dowodu przedstawionego w podrozdziale 3.2.3 i zostaje pominięty.

Rozważamy pole $\{X(\mathbf{t}):\ \mathbf{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_d)\in\mathbb{R}^d\}$, które jest scentrowanym stacjonarnym polem gaussowskim o ciągłych trajektoriach i o funkcji kowariancji

$$r(\mathbf{t}):=\mathrm{Cov}(X(\mathbf{t}),X(\mathbf{0}))$$

spełniającej warunki analogiczne do warunków *A1-A3* wprowadzonych wcześniej:

A1: dla pewnych stałych $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d\in(0,2]$ zachodzi

$$r(\mathbf{t})=1-|t_1|^{\alpha_1}-|t_2|^{\alpha_2}-\ldots-|t_d|^{\alpha_d}+o(|t_1|^{\alpha_1}+|t_2|^{\alpha_2}+\ldots+|t_d|^{\alpha_d}),$$

gdy $t_1,t_2,\ldots,t_d\to 0$;

A2: $r(\mathbf{t})<1$ dla $\mathbf{t}\neq\mathbf{0}$;

A3: dla pewnej stałej $r\in[0,\infty)$ zachodzi

$$r(\mathbf{t})\ln\sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_d^d}\to r\quad\text{gdy}\quad(t_1,t_2,\ldots,t_d)\to\infty,$$

tzn. dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $K>0$ takie, że $\left|r(\mathbf{t})\ln\sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_d^d}-r\right|<\varepsilon$ o ile $|t_1|,|t_2|,\ldots,|t_d|>K$.

Określamy funkcję $m:\mathbb{R}\to[1,\infty)$ jako:

$$m(u):=\mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^d}X(s,t)>u\right)^{-1}.$$

Dalej, niech $m_1,m_2,\ldots,m_d:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ będą funkcjami takimi, że

$$m_1(u)m_2(u)\cdots m_d(u)=m(u)\quad\text{dla}\quad u\in\mathbb{R}$$

oraz niech dla każdego $i=1,2,\ldots,d$ zachodzi

$$m_i(u)=e^{\gamma_i u^2}b_i(u)$$

z pewną stałą $\gamma_i\in(0,\frac{1}{2})$, dla pewnej funkcji $b_i:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ spełniającej warunek $\ln b_i(u)=o(1/u^2)$ gdy $u\to\infty$. Taki wybór funkcji $m_1,m_2,\ldots,m_d$ implikuje, że mamy $\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_d=\frac{1}{2}$. Interesuje nas asymptotyczne zachowanie prawdopodobieństw

$$\mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}_u^{\mathbf{x}}}X(\mathbf{t})\leqslant u\right),$$

gdy $u\to\infty$, gdzie dla $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in[0,\infty)^d$ przez $\mathcal{P}_u^{\mathbf{x}}$ oznaczamy d-wymiarową kostkę postaci

$$\mathcal{P}_u^{\mathbf{x}}:=[0,x_1m_1(u)]\times[0,x_2m_2(u)]\times\ldots\times[0,x_dm_d(u)].$$

Poniżej przedstawiamy rezultat, którego dowodzi się naśladując kolejne kroki dowodu Twierdzenia 3.8.

Twierdzenie 3.20. *Załóżmy, że pole* $\{X(\mathbf{t})\}$ *oraz funkcje* $m_1, m_2, \ldots, m_d$ *spełniają powyższe założenia. Wtedy dla dowolnych stałych* $0 < A < B < \infty$ *ma miejsce zbieżność*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}_u^{\mathbf{x}}} X(\mathbf{t}) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-x_1 x_2 \ldots x_d \exp\left(-\frac{r}{2\gamma} + \sqrt{\frac{r}{\gamma}}\mathcal{W}\right)\right)\right),$$

gdy $u \to \infty$, *jednostajna dla* $\mathbf{x} \in [A, B]^d$, *gdzie* $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d)$.

Niniejszy rozdział kończymy wnioskiem płynącym z powyższego twierdzenia, który dotyczy sytuacji, gdy mamy $m_1(u) = m_2(u) = \ldots = m_d(u) := \sqrt[d]{m(u)}$.

Wniosek 3.21. *Niech pole* $\{X(\mathbf{t})\}$ *spełnia powyższe założenia. Wtedy dla dowolnych stałych* $0 < A < B < \infty$ *zachodzi zbieżność*

$$\mathrm{P}\left(\sup_{\mathbf{t}\in[x_1\sqrt[d]{m(u)}]\times\cdots\times[x_d\sqrt[d]{m(u)}]} X(\mathbf{t}) \leqslant u\right) \to \mathrm{E}\left(\exp\left(-x_1 x_2 \ldots x_d \exp\left(-dr + \sqrt{2dr}\mathcal{W}\right)\right)\right),$$

gdy $u \to \infty$, *jednostajna dla* $\mathbf{x} \in [A, B]^d$.

4

Wielowymiarowe maksima stacjonarnych ciągów wektorów

4.1. Wprowadzenie i podstawowe definicje

W niniejszym rozdziale rozważamy stacjonarny ciąg

$$\left\{\mathbf{X}_n = \left(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(w)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

w-wymiarowych wektorów losowych, gdzie wymiar $w \in \mathbb{N}$ jest dowolny. Ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ jest w szczególności ciągiem wektorów losowych o jednakowym rozkładzie wyznaczonym przez dystrybuantę $F(\mathbf{x}) := \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{x})$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^w$. Pytamy o asymptotykę (gdy $n \to \infty$) maksimów wielowymiarowych:

$$\mathbf{M}_n = \left(M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \ldots, M_n^{(w)}\right) := \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^{(1)}, \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^{(2)}, \ldots, \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^{(w)}\right).$$

Będziemy zakładać, że ciąg jednowymiarowy $\{X_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ma dystrybuantę pozorną regularną w sensie O'Briena dla każdego $i = 1, 2, \ldots, w$. (Przypominamy, że teoria dla ciągów zmiennych losowych została omówiona w rozdziale 1.)

Dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^w$ będziemy stosować notację $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_w)$. Ponadto oznaczamy $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1)$ i $\boldsymbol{\infty} := (\infty, \infty, \ldots, \infty)$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^w$ rozważamy częściowy porządek po współrzędnych ($\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$, o ile $x_i \leqslant y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, w$) oraz zbieżność ciągów po współrzędnych ($\mathbf{x}(n) \to \mathbf{x}$ gdy $n \to \infty$, o ile $x_i(n) \to x_i$ gdy $n \to \infty$ dla $i = 1, 2, \ldots, w$).

W podrozdziale 4.2 przedstawiamy znane rezultaty na temat słabej zbieżności scentrowanych i unormowanych maksimów dla ciągów słabo zależnych w sensie wielowymiarowego warunku $D(\mathbf{u}_n)$ (patrz definicja 4.12). Zakładamy, że ma miejsce zbieżność:

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \left(a_n^{(1)} x_1 + b_n^{(1)}, a_n^{(2)} x_2 + b_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(w)} x_w + b_n^{(w)}\right)\right) \to H(\mathbf{x}) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty \quad (4.1)$$

w punktach ciągłości $\mathbf{x}$ pewnej niezdegenerowanej dystrybuanty H oraz dla pewnych ciągów $\{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ i $\{b_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, w$. Przypominamy rezultaty o charakteryzacji *wielowymiarowych rozkładów ekstremalnych*, tj. rozkładów, które mogą pojawić się jako granica w (4.1).

Niech $i \in \{1, 2, \ldots, w\}$. Ustalmy liczbę $\rho_i \in (0, 1)$. Ponieważ założyliśmy, że ciąg $\{X_n^{(i)}\}$ posiada regularną dystrybuantę pozorną, to z Twierdzenia 1.27 wnioskujemy, że istnieje ciąg $\{v_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ taki, że

$$\mathrm{P}\left(M_n^{(i)} \leqslant v_n^{(i)}\right) \to \rho_i \quad \text{gdy} \quad n \to \infty \tag{4.2}$$

oraz $\{X_n^{(i)}\}$ spełnia warunek łamania $B_\infty(v_n^{(i)})$. Ze znanych rezultatów dla ciągów jednowymiarowych wynika, że wtedy

$$\mathrm{P}\left(M_n^{(i)} \leqslant v_{\lfloor ns_i \rfloor}^{(i)}\right) \to \rho_i^{1/s_i} \quad \text{gdy } n \to \infty, \quad \text{dla dowolnego } s_i \in [0,\infty]; \tag{4.3}$$

stosujemy konwencję: $v_0^{(i)} = -\infty$, $v_\infty^{(i)} = \infty$ oraz $\rho_i^{1/\infty} = 1$, $\rho_i^{1/0} = 0$.

W dalszych rozważaniach prowadzonych w podrozdziałach 4.3-4.5 rezygnujemy z liniowej postaci ciągów ograniczających (takich jak w założeniu (4.1)), podobnie jak robi to Perfekt [57]. Dla dowolnego $\mathbf{s} \in [0,\infty]^w$ określamy w-wymiarowy ciąg $\{\mathbf{v}_n(\mathbf{s})\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^w$ następująco:

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{s}) := \left(v_{\lfloor ns_1 \rfloor}^{(1)}, v_{\lfloor ns_2 \rfloor}^{(2)}, \ldots, v_{\lfloor ns_w \rfloor}^{(w)}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Jako podstawowe założenia zazwyczaj przyjmować będziemy, że zachodzi następujące uogólnienie warunku (1.7):

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right) = \rho(\hat{\mathbf{s}}) \quad \text{dla funkcji } \rho : \mathcal{L} \to (0,1) \text{ i dla wszystkich } \hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{L}, \tag{4.5}$$

gdzie $\mathcal{L} := \{\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_w) \in [1,\infty)^w : \min\{\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_w\} = 1\}$, oraz

$$B_\infty(\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})) \text{ zachodzi dla wszystkich } \hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{L}, \tag{4.6}$$

gdzie w-wymiarowy warunek łamania B_∞ definiujemy poniżej.

Definicja 4.1. Powiemy, że ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia *warunek* $B_\infty(\mathbf{u}_n)$ dla ciągu $\{\mathbf{u}_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$, o ile

$$\beta(n) := \sup_{p,q\in\mathbb{N}_0} \left| \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p+q} \leqslant \mathbf{u}_n\right) - \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_p \leqslant \mathbf{u}_n\right) \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_q \leqslant \mathbf{u}_n\right) \right| \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Fakt 4.2. *Niech ciąg* $\{\mathbf{u}_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$ *będzie taki, że* $\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n) \to \rho \in (0,1)$. *Wtedy warunek* $B_\infty(\mathbf{u}_n)$ *jest spełniony dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich* $T > 0$ *zachodzi warunek* $B_T(\mathbf{u}_n)$, *tzn.*

$$\beta_T(n) := \sup_{\substack{p,q\in\mathbb{N}_0,\\ p+q\leqslant T\cdot n}} \left| \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p+q} \leqslant \mathbf{u}_n\right) - \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_p \leqslant \mathbf{u}_n\right) \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_q \leqslant \mathbf{u}_n\right) \right| \to 0 \quad \textit{gdy} \quad n \to \infty.$$

Fakt 4.3. *Ciąg m-zależny* $\{\mathbf{X}_n\}$ *spełnia* $B_\infty(\mathbf{u}_n)$ *dla dowolnego ciągu* $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$ *o własności* $\mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \not\leqslant \mathbf{u}_n) = o(1)$.

Uwaga 4.4. W podrozdziale 4.3.1 uzasadnimy, że zbiór $\mathcal{L}$ z warunków (4.5) i (4.6) można zastąpić dowolnym gęstym podzbiorem $\mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$.

Podrodział 4.3 poświęcamy opisowi granicy prawdopodobieństw $\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$ gdy $n \to \infty$. Dowodzimy, że jeśli założenia (4.5) i (4.6) są spełnione, to ma miejsce zbieżność $\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) \to H(\mathbf{s})$ gdy $n \to \infty$ (dla $\mathbf{s} \in [0,\infty]^w$), gdzie funkcja H jest dystrybuantą wielowymiarowego rozkładu ekstremalnego. Analogicznego rezultatu dowodzi także Perfekt [57, Proposition 2.1]. Istotną obserwacją jest, że istnieją ciągi losowe spełniające założenia (4.5) i (4.6), dla których (4.1) nie zachodzi dla żadnego centrowania i normowania (porównaj Przykład 1.6).

W podrozdziale 4.4 dowodzimy twierdzeń o istnieniu i postaci regularnej dystrybuanty pozornej dla rozważanego ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$.

Definicja 4.5. Wielowymiarową dystrybuantę G nazywamy *wielowymiarową dystrybuantą pozorną* ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$, jeżeli

$$\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n) - G(\mathbf{u}_n)^n \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty$$

dla dowolnego ciągu $\{\mathbf{u}_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$.

Definicja 4.6. Niech F będzie w-wymiarową dystrybuantą o regularnych dystrybuantach brzegowych $F_1, F_2, \ldots, F_w$. Niech $\rho_i \in (0,1)$ oraz $\{v_n^{(i)}\} \subset \mathbb{R}$ (dla $i = 1, 2, \ldots, w$) będą takie, że

$$F_i\big(v_n^{(i)}\big)^n \to \rho_i \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Mówimy, że F jest *regularna*, jeśli dla pewnej funkcji $\rho : \mathcal{L} \to (0,1)$ i dla wszystkich $\hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$F(\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))^n \to \rho(\hat{\mathbf{s}}) \in (0,1) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Wprowadzone powyżej definicje dają uogólnienie znanych pojęć dla ciągów jednowymiarowych: dystrybuanty pozornej dla ciągu zmiennych losowych (definicja 1.24) oraz dystrybuanty regularnej w sensie O'Briena (patrz podrozdział 1.1).

Uwaga 4.7. W sytuacji gdy rozważany ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ jest ciągiem niezależnych wektorów o jednakowym rozkładzie założenie (4.5) równoważne jest regularności dystrybuanty $F(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{x})$.

W ostatnim podrozdziale 4.5 stosujemy podejście podobne do tego zastosowanego w podrozdziałach 2.2.4 i 2.2.5 w celu badania maksimów pola losowego. Korzystając z nierówności typu Bonferroniego z Lematu 2.35, opisujemy asymptotykę maksimów słabo zależnych ciągów wielowymiarowych spełniających pewne lokalne warunki mieszania (w szczególności ciągów m-zależnych). Pokazujemy także jak dla takich ciągów oblicza się wielowymiarowy indeks ekstremalny.

4.2. Granica scentrowanych i unormowanych maksimów

Podążając w kierunku wyznaczonym przez klasyczną teorię wartości ekstremalnych dla ciągów zmiennych losowych wielu autorów (patrz np. [18,20]) rozważa sytuację, gdy $\{\mathbf{X}_n\}$ jest ciągiem *niezależnych* wektorów losowych o jednakowym rozkładzie i zachodzi

$$P\left(M_n \leqslant \left(a_n^{(1)} x_1 + b_n^{(1)}, a_n^{(2)} x_2 + b_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(w)} x_w + b_n^{(w)}\right)\right) \to H(\mathbf{x}) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty \tag{4.7}$$

we wszystkich punktach ciągłości $\mathbf{x}$ dystrybuanty H o niezdegenerowanych rozkładach brzegowych $H_1, H_2, \ldots, H_w$, dla pewnych ciągów $\{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ i $\{b_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, w\}$. Rozkłady graniczne w (4.7) nazywa się *wielowymiarowymi rozkładami ekstremalnymi*.

W pierwszej części podrozdziału przypominamy rezultaty charakteryzujące klasę wielowymiarowych rozkładów ekstremalnych. Jak się okazuje, klasa typów tych rozkładów nie jest parametryzowalna (w przeciwieństwie do klasy typów jednowymiarowych rozkładów ekstremalnych; patrz Wniosek 1.4). Pełny opis rodziny wielowymiarowych rozkładów ekstremalnych znaleźć można m.in. u de Haana i Ferreiry [18] oraz u Falka, Hüslera i Reissa [20]. Natomiast pewne szczególne parametryzowalne podklasy wielowymiarowych rozkładów ekstremalnych podają Castillo [9] i Joe [41].

Na podstawie twierdzenia o typach ekstremalnych dla ciągów zmiennych losowych (Twierdzenie 1.3) wnioskuje się, że dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, w$ dystrybuanta H_i rozkładu brzegowego jest typu Gumbela, Weibulla lub Frécheta. Aby scharakteryzować dystrybuantę H wielowymiarowego rozkładu ekstremalnego należy opisać zależności pomiędzy współrzędnymi.

Rozważania dotyczące sytuacji, w której mamy asymptotyczną niezależność maksimów na współrzędnych (czyli gdy H jest postaci $H(\mathbf{x}) = H_1(x_1)H_2(x_2)\cdots H_w(x_w)$) znaleźć można w [32, 71]; patrz także [21].

Poniżej prezentujemy w jaki sposób zależności pomiędzy rozkładami brzegowymi dystrybuanty H opisuje się przy pomocy kopuli oraz za pomocą miary eksponencjalnej. Przypomnijmy, że *kopula* D_F to funkcja opisująca zależności pomiędzy współrzędnymi dowolnego wektora losowego o dystrybuancie F. Dla w-wymiarowego wektora losowego o ciągłych rozkładach brzegowych F_i określa się ją następująco [27]:

$$D_F(\mathbf{z}) := F(F_1^{-1}(z_1), F_2^{-1}(z_2), \dots, F_w^{-1}(z_w)), \quad \text{dla} \quad \mathbf{z} \in (0,1)^w.$$

Można pokazać [41], że rozkład zadany przez dystybuantę H jest wielowymiarowym rozkładem ekstremalnym dokładnie wtedy, gdy $H_1, H_2, \dots, H_w$ wyznaczają jednowymiarowe rozkłady ekstremalne oraz zachodzi

$$D_H(\mathbf{z})^a = D_H(z_1^a, z_2^a, \dots, z_w^a) \text{ dla każdego } a > 0. \tag{4.8}$$

Kopulę spełniającą warunek (4.8) nazywa się *kopulą ekstremalną*.

Korzystając ze znajomości rozkładów brzegowych można dokonać *standaryzacji*, czyli sprowadzić postawiony problem do sytuacji gdy H_i jest rozkładem Frécheta z parametrem $\alpha = 1$ dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, w$ (patrz [18, Theorem 6.1.1]). Dla ustandaryzowanej dystrybuanty H zachodzi następujące twierdzenie (porównaj [18, Theorem 6.1.5]):

Twierdzenie 4.8. *Istnieje dokładnie jedna miara borelowska ν na $[0,\infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\}$ zwana miarą eksponencjalną, dla której*

$$H(\mathbf{x}) = \exp(-\nu(B_{\mathbf{x}})) \quad \textit{dla każdego} \quad \mathbf{x} \in [0,\infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\},$$

gdzie $B_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{y} \in [0,\infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\} : \ y_i > x_i \textit{ dla pewnego } i \in \{1, 2, \dots, w\}\}$.

Uwaga 4.9. Rozkłady brzegowe $H_1, H_2, \dots, H_w$ wraz z miarą eksponencjalną ν w pełni opisują rozkład ekstremalny zadany przez H.

Pokazuje się [18, Theorem 6.1.9], że miara eksponencjalna ν jest *jednorodna* w następującym sensie:

Fakt 4.10. *Dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subset [0,\infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\}$ oddzielonego od zera (czyli takiego, że $\inf_{\mathbf{y}\in B} \max\{y_1, y_2, \ldots, y_w\} > 0$) oraz o brzegu zerowej miary zachodzi*

$$\nu(a \cdot B) = a^{-1}\nu(B) \quad \textit{dla dowolnego } a > 0,$$

gdzie $a \cdot B := \{a \cdot \mathbf{y} : \mathbf{y} \in B\}$.

Wniosek 4.11. *Z Faktu 4.10 wynika, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subset [0,\infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\}$ oddzielonego od zera mamy $\nu(B) < \infty$, natomiast miara eksponencjalna ν nie jest ograniczona [18, Remark 6.1.10].*

Nietrudno pokazać, że w przypadku ustandaryzowanego jak wyżej rozkładu ekstremalnego H, kopula ekstremalna D_H i miara eksponencjalna ν pozostają w następującym związku:

$$D_H(\mathbf{z}) = \exp(-\nu\{\mathbf{s} \in (0,\infty)^w : \ s_i > -1/\ln z_i \ \text{ dla pewnego } i \in \{1, 2, \ldots, w\}\}).$$

Wygodne narzędzie w badaniu maksimów wielowymiarowych stanowi następująca nierówność prawdziwa dla wielowymiarowego rozkładu ekstremalnego H o brzegowych $H_1, H_2, \ldots, H_w$ (patrz np. [27]):

$$H_1(x_1)H_2(x_2)\cdots H_w(x_w) \leqslant H(\mathbf{x}) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant w} H_i(x_i) \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^w. \tag{4.9}$$

W końcowej części niniejszego podrozdziału porzucamy założenie o niezależności wektorów $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3 \ldots$. Przedstawiamy twierdzenie o zbieżności scentrowanych i unormowanych maksimów $\mathbf{M}_n$ w sytuacji, gdy ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ jest stacjonarny i *słabo zależny*. Hsing [32] bada wielowymiarowe ciągi słabo zależne, spełniające uogólniony warunek Leadbettera D.

Definicja 4.12. Ciąg stacjonarny $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia *warunek* $D(\mathbf{u}_n)$ dla ciągu $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^w$, o ile dla $\alpha(n,l)$ określonych (dla $n, l \in \mathbb{N}$) jako

$$\alpha(n,l) := \max \left| \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{\{i_1,i_2,\ldots,i_p,j_1,j_2,\ldots,j_q\}} \leqslant \mathbf{u}_n\right) - \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{\{i_1,i_2,\ldots,i_p\}} \leqslant \mathbf{u}_n\right) \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{\{j_1,j_2,\ldots,j_q\}} \leqslant \mathbf{u}_n\right) \right|$$

(gdzie maksimum jest po $p, q \in \mathbb{N}$ i wszystkich układach $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p < j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leqslant n$ spełniających $j_1 - i_p > l$) istnieje ciąg $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $l_n = o(n)$ oraz $\alpha(n, l_n) \to 0$ gdy $n \to \infty$.

Uwaga 4.13. Nandagopalan [53] zaproponował inny warunek $\Delta(\mathbf{u}_n)$, który jest nieco mocniejszym niż $D(\mathbf{u}_n)$ uogólnieniem warunku Leadbettera.

Dla słabo zależnego ciągu wektorów Hsing dowodzi twierdzenia o zbieżności maksimów [32, Theorem 4.4]:

Twierdzenie 4.14. *Załóżmy, że dla stacjonarego ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ zachodzi zbieżność (4.7). Jeśli $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunek $D(\mathbf{u}_n^{\mathbf{x}})$ dla $\mathbf{u}_n^{\mathbf{x}} := (a_n^{(1)}x_1 + b_n^1, a_n^{(2)}x_2 + b_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(w)}x_w + b_n^{(w)})$ oraz dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^w$, to H należy dla klasy rozkładów ekstremalnych wyznaczonych przez ciągi niezależnych wektorów o jednakowym rozkładzie.*

4.3. Asymptotyka maksimów w ogólnym przypadku

W prowadzonych przez nas rozważaniach odchodzimy od klasycznego podejścia przedstawionego w poprzednim podrozdziale, zgodnie z którym bada się słabą zbieżność scentrowanych i unormowanych maksimów. Interesuje nas ogólna sytuacja, gdy dla ciągu stacjonarnego $\{\mathbf{X}_n\}$ zachodzi (4.5). Ponadto zakładać będziemy, że $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunek mieszania (4.6). Nasze podejście jest podobne do tego, którego używa Perfekt [57] do badania wielowymiarowego indeksu ekstremalnego.

Zaczynamy od dowodu faktu, który stwierdza, że rzeczywiście rozważana przez nas sytuacja jest bardziej ogólna niż ta z poprzedniego podrozdziału.

Fakt 4.15. *Niech ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia założenie (4.6). Jeśli zbieżność (4.7) zachodzi, to spełniony jest również warunek (4.5).*

Dowód. Ustalmy $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^w$ i niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^w$ będzie taki, że $x_i := H_i^{-1}(\rho_i^{1/s_i})$. Wtedy mamy

$$\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})\right) - \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \left(a_n^{(1)}x_1 + b_n^{(1)}, a_n^{(2)}x_2 + b_n^{(2)}, \dots, a_n^{(w)}x_w + b_n^{(w)}\right)\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{w}\left|\mathrm{P}\left(M_n^{(i)} \leqslant v_{\lfloor ns_i\rfloor}^{(i)}\right) - \mathrm{P}\left(M_n^{(i)} \leqslant a_n^{(i)}x_i + b_n^{(i)}\right)\right| = o(1)$$

na mocy własności (4.3) oraz wyboru punktu $\mathbf{x}$. Stąd otrzymujemy, że

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})\right) \to H(\mathbf{x}) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Ponadto $H(\mathbf{x}) \in (0,1)$ dla $\mathbf{s} \in (0,\infty)^w$ na podstawie nierówności (4.9) prawdziwej dla wielowymiarowych rozkładów ekstremalnych. □

4.3.1. Lematy na temat przyjętych założeń

Niech $\{\mathbf{v}_n(\mathbf{s})\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem określonym za pomocą (4.4) dla $\mathbf{s} \in [0,\infty]^w$, a ciągi $\{v_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dla $i \in \{1,2,\dots,w\}$ spełniają założenie (4.2). Niech $\mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$ oznacza dowolny zbiór gęsty w $\mathcal{L}$ (na przykład $\mathcal{Q} = \{\hat{\mathbf{s}} \in [1,\infty)^w \cap \mathbb{Q}^w : \min\{\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_w\} = 1\}$). W podrozdziale tym uzasadnimy, dlaczego zbiór $\mathcal{L}$ pojawiający się w sformułowaniach założeń (4.5) i (4.6) można zastąpić zbiorem $\mathcal{Q}$.

Lemat 4.16. *Warunek (4.5) zachodzi z funkcją $\rho : \mathcal{L} \to (0,1)$ dokładnie wtedy, gdy*

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right) \to \rho(\hat{\mathbf{s}}) \quad \textit{gdy} \quad n \to \infty, \quad \textit{dla wszystkich} \quad \hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{Q}. \tag{4.10}$$

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia (4.10) i ustalmy $\hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{L}\backslash\mathcal{Q}$. Niech ciągi $\{\hat{\mathbf{s}}'(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$, $\{\hat{\mathbf{s}}''(l)\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}$ będą takie, że $\hat{\mathbf{s}}'(l) \leqslant \hat{\mathbf{s}} \leqslant \hat{\mathbf{s}}''(l)$ dla $l \in \mathbb{N}$ oraz $\hat{\mathbf{s}}'(l) \to \hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\mathbf{s}}''(l) \to \hat{\mathbf{s}}$ gdy $l \to \infty$. Wtedy dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ mamy

$$0 < \rho(\hat{\mathbf{s}}'(l)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l)))$$
$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}''(l))) = \rho(\hat{\mathbf{s}}''(l)) < 1.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\rho\left(\hat{\mathbf{s}}''(l)\right)-\rho\left(\hat{\mathbf{s}}'(l)\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}''(l)),\ \mathbf{M}_n\nleqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{w}\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(v^{(i)}_{\lfloor n\hat{s}'_i(l)\rfloor}\leqslant M^{(i)}_n\leqslant v^{(i)}_{\lfloor n\hat{s}''_i(l)\rfloor}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{w}\left(\rho_i^{1/\hat{s}''_i(l)}-\rho_i^{1/\hat{s}'_i(l)}\right).\end{aligned}$$

Ponieważ prawa strona powyższego oszacowania zbiega do zera gdy $l\to\infty$, to ciąg $\{\mathrm{P}(\mathbf{M}_n\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny gdy $n\to\infty$ oraz mamy

$$\rho(\hat{\mathbf{s}}):=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(\mathbf{M}_n\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))\in(0,1).$$

□

Uwaga 4.17. W świetle Lematu 4.16 zbiór $\mathcal{L}$ w definicji dystrybuanty regularnej możne być zastąpiony przez dowolny gęsty podzbiór $\mathcal{Q}\subset\mathcal{L}$.

Lemat 4.18. *Jeśli założenie $B_\infty(\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))$ jest spełnione dla wszystkich $\hat{\mathbf{s}}\in\mathcal{Q}$, to zachodzi również warunek (4.6).*

Dowód. Przypuśćmy, że warunek $B_\infty(\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))$ jest spełniony dla każdego $\hat{\mathbf{s}}\in\mathcal{Q}$. Ustalmy $\hat{\mathbf{s}}\in\mathcal{L}\backslash\mathcal{Q}$. Na mocy Faktu 4.2, aby pokazać, że $B_\infty(\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))$ zachodzi, wystarczy dowieść warunku $B_T(\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))$ dla wszystkich $T>0$. W tym celu ustalmy dowolne $T>0$ i ciągi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}_0$ takie, że $p_n+q_n\leqslant T\cdot n$. Pokażemy, że zachodzi

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)\to 0\quad\text{gdy}\quad n\to\infty. \tag{4.11}$$

Rozważmy ciąg $\{\hat{\mathbf{s}}'(l)\}_{l\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{Q}$ taki, że $\hat{\mathbf{s}}'(l)\geqslant\hat{\mathbf{s}}$ oraz $\hat{\mathbf{s}}'(l)\to\hat{\mathbf{s}}$ gdy $l\to\infty$. Korzystając z nierówności trójkąta oraz z własności (2.5), dla dowolnego $l\in\mathbb{N}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)\mathrm{P}(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))\right|\\ &\quad\leqslant\ \left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)\mathrm{P}(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l)))\right|\\ &\qquad+\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)\right|\\ &\qquad+\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)\mathrm{P}(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}))\right|\\ &\quad\leqslant\ \left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)\right|\\ &\qquad+\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n+q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)\right|\\ &\qquad+\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{p_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)\right|\\ &\qquad+\left|\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l))\right)-\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{q_n}\leqslant\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}})\right)\right|\\ &\quad=:\ I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)+I_4(n).\end{aligned}$$

Na początek zauważmy, że $I_1(n)\to 0$ gdy $n\to\infty$ na mocy warunku $B_\infty(\mathbf{v}_n(\hat{\mathbf{s}}'(l)))$ zachodzącego dla $\hat{\mathbf{s}}'(l)\in\mathcal{Q}$. Dalej, korzystając dla $I_2(n)$ z następującego oszacowania:

$$I_2(n)\leqslant\sum_{i=1}^{w}\left(\mathrm{P}\left(M^{(i)}_{p_n+q_n}\leqslant v^{(i)}_{\lfloor n\hat{s}'_i(l)\rfloor}\right)-\mathrm{P}\left(M^{(i)}_{p_n+q_n}\leqslant v^{(i)}_{\lfloor n\hat{s}_i\rfloor}\right)\right)$$

dostajemy, że jeśli $p_n + q_n = o(n)$, to

$$\lim_{n\to\infty} I_2(n) \leqslant \sum_{i=1}^{w}(1-1) = 0.$$

Rozważmy sytuację, gdy $p_n + q_n = \Theta(n)$, czyli $1/C \leqslant \frac{p_n+q_n}{n} \leqslant C$ dla pewnego $C > 1$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_2(n) &\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{w} \left(\rho_i^{(p_n+q_n)/\lfloor n\hat{s}_i'(l)\rfloor} - \rho_i^{(p_n+q_n)/\lfloor n\hat{s}_i\rfloor}\right) + o(1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{w} \rho_i^{(p_n+q_n)/(n\hat{s}_i'(l))} \left(1 - \rho_i^{(\hat{s}_i'(l)-\hat{s}_i)(p_n+q_n)/(n\hat{s}_i\hat{s}_i'(l))}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{w} \rho_i^{A_i} \left(1 - \rho_i^{B_i(\hat{s}_i'(l)-\hat{s}_i)}\right) \;=:\; R_2(l)
\end{aligned}$$

dla stałych $A_i := (C\hat{s}_i'(1))^{-1}$ i $B_i := C/\hat{s}_i^2$. Ponadto $R_2(l) \to 0$ gdy $l \to \infty$. Analogicznie pokazuje się, że dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ mają miejsce oszacowania:

$$\lim_{n\to\infty} I_3(n) \leqslant R_3(l) \quad \text{gdy} \quad p_n = o(n) \quad \text{lub} \quad p_n = \Theta(n),$$

$$\lim_{n\to\infty} I_4(n) \leqslant R_4(l) \quad \text{gdy} \quad q_n = o(n) \quad \text{lub} \quad q_n = \Theta(n),$$

dla ciągów $\{R_3(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$ i $\{R_4(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$ spełniających $R_3(l) \to 0$ i $R_4(l) \to 0$ gdy $l \to \infty$. Przechodząc z l do nieskończoności otrzymujemy (4.11) pod warunkiem, że

$$(p_n = o(n) \quad \text{lub} \quad p_n = \Theta(n)) \quad \text{i} \quad (q_n = o(n) \quad \text{lub} \quad q_n = \Theta(n)).$$

Z Faktu 2.28 wnioskujemy, że (4.11) zachodzi dla dowolnych ciągów $\{p_n\}, \{q_n\} \subset \mathbb{N}_0$ o własności $p_n + q_n \leqslant T \cdot n$. □

4.3.2. Konsekwencje warunku łamania

W dalszej kolejności pytamy o konsekwencje warunków łamania $B_T(\mathbf{u}_n)$ i $B_\infty(\mathbf{u}_n)$. Poniższy lemat stanowi odpowiedź oraz podstawowe narzędzie w następujących po nim rozważaniach.

Lemat 4.19.

(1) *Załóżmy, że ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunek $B_T(\mathbf{u}_n)$ dla $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$ i pewnego $T > 0$. Niech $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem takim, że $k_n\beta_T(n) = o(1)$ i $k_n = o(n)$. Wtedy*

$$\sup_{\substack{p_1,p_2,\ldots,p_{k_n}\in\mathbb{N}_0,\\ p_1+p_2+\ldots+p_{k_n}\leqslant T\cdot n}} \left|\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_1+p_2+\ldots+p_{k_n}} \leqslant \mathbf{u}_n) - \Pi_{i=1}^{k_n} \mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_i} \leqslant \mathbf{u}_n)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(2) *Załóżmy, że $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunek $B_\infty(\mathbf{u}_n)$ dla $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$. Niech ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ będzie taki, że $k_n\beta(n) = o(1)$ i $k_n = o(n)$. Wtedy*

$$\sup_{p_1,p_2,\ldots,p_{k_n}\in\mathbb{N}_0} \left|\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_1+p_2+\ldots+p_{k_n}} \leqslant \mathbf{u}_n) - \Pi_{i=1}^{k_n} \mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_i} \leqslant \mathbf{u}_n)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(3) Załóżmy, że ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ *spełnia* $B_1(\mathbf{u}_n)$ *dla* $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$ *oraz* $\mathrm{P}\left(X_1^{(i)} > u_n^{(i)}\right) \to 0$ *dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, w$*. Dla dowolnego ciągu* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *spełniającego* $k_n \to \infty$, $k_n\beta_1(n) = o(1)$, $k_n = o(n)$ *oraz* $k_n \mathrm{P}(X_1^{(i)} > u_n^{(i)}) = o(1)$*, dla* $i = 1, 2, \ldots, w$*, zachodzi:*

$$\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n) = \exp\left(-k_n \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{\lfloor n/k_n\rfloor} \nleqslant \mathbf{u}_n\right)\right) + o(1).$$

Dowód. Aby dowieść (1) i (2) korzystamy z następującej obserwacji:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_1+p_2+\ldots+p_{k_n}} \leqslant \mathbf{u}_n) - \Pi_{i=1}^{k_n} \mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_i} \leqslant \mathbf{u}_n)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \left|\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_i+p_{i+1}+\ldots+p_{k_n}} \leqslant \mathbf{u}_n) - \mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_i} \leqslant \mathbf{u}_n)\,\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_{i+1}+\ldots+p_{k_n}} \leqslant \mathbf{u}_n)\right|,
\end{aligned}$$

przy czym prawa strona powyższej nierówności szacuje się z góry przez $k_n\beta_T(n)$ i przez $k_n\beta(n)$ w dowodach części (1) i (2) odpowiednio.

Dla dowodu (3) zauważmy, że

$$\left|\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n) - \mathrm{P}(\mathbf{M}_{k_n\lfloor n/k_n\rfloor} \leqslant \mathbf{u}_n)\right| \leqslant k_n \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \nleqslant \mathbf{u}_n) \leqslant \sum_{i=1}^{w} k_n \mathrm{P}\left(X_1^{(i)} > u_n^{(i)}\right) = o(1).$$

Dalej, korzystając z części (2) dowodzonego lematu, a następnie z Faktu 2.16, dostajemy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n\right) &= \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{k_n\lfloor n/k_n\rfloor} \leqslant \mathbf{u}_n\right) + o(1) \\
&= \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{\lfloor n/k_n\rfloor} \leqslant \mathbf{u}_n\right)^{k_n} + o(1) = \exp\left(-k_n \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{\lfloor n/k_n\rfloor} \nleqslant \mathbf{u}_n\right)\right) + o(1),
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Dla ciągów wektorów losowych mamy następujący odpowiednik Lematu 1.28.

Lemat 4.20. *Ustalmy* $\mathbf{s} \in [0, \infty]^w$*. Załóżmy, że ciąg* $\{\mathbf{X}_n\}$ *spełnia warunek* $B_\infty(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$ *i granica* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$ *istnieje. Wtedy dla dowolnego* $a > 0$ *mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(a \cdot \mathbf{s})) = \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))\right)^{1/a}.$$

Dowód. W dowodzie korzystamy z Lematu 4.19. Prowadząc rozumowanie analogiczne do rozumowania z dowodu Lematu 2.30 otrzymujemy tezę. □

4.3.3. Funkcja graniczna dla maksimów: istnienie i własności

Dla uproszczenia notacji w pozostałej części tego podrozdziału, korzystać będziemy z następującego oznaczenia:

$$H_n(\mathbf{s}) := \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})\right)$$

dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbf{s} \in [0, \infty]^w$. Zauważmy, że niezależnie od $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $H_n(\boldsymbol{\infty}) = 1$ oraz $H_n(\mathbf{s}) = 0$ dla każdego $\mathbf{s}$ takiego, że $s_i = 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, w\}$.

Twierdzenie 4.21. *Niech ciąg* $\{\mathbf{X}_n\}$ *spełnia założenia: (4.5) z funkcją* $\rho : \mathcal{L} \to (0, 1)$ *oraz (4.6).*

(i) Warunek $B_\infty(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$ *zachodzi dla dowolnego* $\mathbf{s} \in [0, \infty]^w$*.*

(ii) Istnieje funkcja $H : [0,\infty]^w \to [0,1]$ *taka, że*

$$H_n(\mathbf{s}) \to H(\mathbf{s}) \text{ gdy } n \to \infty, \text{ dla wszystkich } \mathbf{s} \in [0,\infty]^2.$$

Ponadto $H(\mathbf{s}) \in (0,1)$ *dla* $\mathbf{s}$ *spełniających* $\min\{s_1, s_2, \ldots, s_w\} \notin \{0,\infty\}$, $H(\mathbf{s}) = 0$ *dla* $\mathbf{s}$ *takich, że* $\min\{s_1, s_2, \ldots, s_w\} = 0$ *oraz* $H(\boldsymbol{\infty}) = 1$.

Dowód. Dowód twierdzenia zaczynamy od obserwacji, że dla dowolnego $\mathbf{s} \in (0,\infty)^w$ mamy $\mathbf{s} = a \cdot \hat{\mathbf{s}}$ dla $a := \min\{s_1, s_2, \ldots, s_w\} > 0$ oraz $\hat{\mathbf{s}} := a^{-1} \cdot \mathbf{s} \in \mathcal{L}$. Korzystając z Lematu 4.20 możemy zdefiniować funkcję H dla $\mathbf{s} \in (0,\infty)^w$ następująco:

$$H(\mathbf{s}) := \lim_{n\to\infty} H_n(\mathbf{s}) = \lim_{n\to\infty} H_n(a \cdot \hat{\mathbf{s}}) = \lim_{n\to\infty} H_n(\hat{\mathbf{s}})^{1/a} = \rho(\hat{\mathbf{s}})^{1/a} \in (0,1). \tag{4.12}$$

Przejdźmy do dowodu części (i) twierdzenia. W tym celu ustalamy $\mathbf{s} \in (0,\infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\}$ (teza dla pozostałych punktów $\mathbf{s}$ jest spełniona w sposób trywialny). Aby udowodnić warunek $B_\infty(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$ wystarczy pokazać, że $B_T(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$ zachodzi dla dowolnej stałej $T > 0$, na mocy Faktu 4.2. Ustalmy $T > 0$ i ciągi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ takie, że zachodzi $p_n + q_n \leqslant T \cdot n$. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{T\cdot n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{1})\right) = \rho(\mathbf{1})^T \in (0,1)$$

dzięki własności (4.12). Korzystając ponownie z własności (4.12) wnioskujemy, że istnieje niemalejący ciąg $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ taki, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i dla dużych $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) &\geqslant \mathrm{P}(\mathbf{M}_{T\cdot n} \leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) > 1 - 1/m, \\
\mathrm{P}(\mathbf{M}_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) &\geqslant \mathrm{P}(\mathbf{M}_{T\cdot n} \leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) > 1 - 1/m, \\
\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_n+q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) &\geqslant \mathrm{P}(\mathbf{M}_{T\cdot n} \leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) > 1 - 1/m.
\end{aligned}$$

Dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$ określamy wektor $\mathbf{z}(m) \in (0,\infty)^w$ jako taki, że $z_i(m) := s_i$ gdy $s_i < \infty$ oraz $z_i(m) := t_m$ gdy $s_i = \infty$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&|\,\mathrm{P}(M_{p_n+q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) - \mathrm{P}(M_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))\,\mathrm{P}(M_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))| \\
&\quad\leqslant\ |\,\mathrm{P}(M_{p_n+q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) - \mathrm{P}(M_{p_n+q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m)))| \\
&\qquad +|\,\mathrm{P}(M_{p_n+q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m))) - \mathrm{P}(M_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m)))\,\mathrm{P}(M_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m)))| \\
&\qquad +|\,\mathrm{P}(M_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m)))\,\mathrm{P}(M_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m))) - \mathrm{P}(M_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))\,\mathrm{P}(M_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))| \\
&\quad=:\ I_1(n,m) + I_2(n,m) + I_3(n,m).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$I_1(m,n) \leqslant \mathrm{P}(M_{p_n+q_n} \not\leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) \leqslant 1/m.$$

Na mocy założenia (4.6) dostajemy, że $I_2(n,m) < 1/m$ dla dużych $n \in \mathbb{N}$. Natomiast korzystając z nierówności (2.5) oraz z powyższych rozważań wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}
&I_3(n,m) \\
&\quad\leqslant\ |\,\mathrm{P}(M_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) - \mathrm{P}(M_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m)))| + |\,\mathrm{P}(M_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) - \mathrm{P}(M_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{z}(m)))| \\
&\quad\leqslant\ \mathrm{P}(M_{p_n} \not\leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) + \mathrm{P}(M_{q_n} \not\leqslant \mathbf{v}_n(t_m, t_m, \ldots, t_m)) \leqslant 1/m + 1/m.
\end{aligned}$$

Przechodząc z m do nieskończoności, otrzymujemy:

$$|\,\mathrm{P}(M_{p_n+q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) - \mathrm{P}(M_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))\,\mathrm{P}(M_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))| \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty,$$

co kończy dowód punktu (i).

Aby dowieść części (ii) twierdzenia ustalmy $\mathbf{s} \in [0,\infty]^w$. Teza dla każdego $\mathbf{s} \in (0,\infty)^w$ wynika z obserwacji poczynionej na wstępie niniejszego dowodu. Ponadto w oczywisty sposób otrzymujemy $H(\boldsymbol{\infty}) = 1$ i $H(\mathbf{s}) = 0$ gdy $\min\{s_1, s_2, \ldots, s_w\} = 0$. Pozostaje nam rozważyć $\mathbf{s}$ takie, że $\max\{s_1, s_2, \ldots, s_w\} = \infty$, $\min\{s_1, s_2 \ldots, s_w\} > 0$ i $\mathbf{s} \neq \boldsymbol{\infty}$. Z wzoru (4.12) wynika, że istnieje niemalejący ciąg $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ taki, że

$$H((t_m, t_m, \ldots, t_m)) = \lim_{n\to\infty} H_n((t_m, t_m, \ldots, t_m)) = \rho(\mathbf{1})^{1/t_m} > 1 - 1/m.$$

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Wtedy dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy również

$$H_n((t_m, t_m, \ldots, t_m)) > 1 - 1/m.$$

Określamy $\mathbf{z}(m) \in (0,\infty)^w$ jak w dowodzie części (i). Dla dużych $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$|H_n(\mathbf{z}(m)) - H(\mathbf{z}(m))| \leqslant 1/m,$$

co wynika z definicji (4.12) funkcji H na zbiorze $(0,\infty)^w$. Stąd dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} &|H_n(\mathbf{s}) - H(\mathbf{z}(m))| \\ \leqslant\ \ & |H_n(\mathbf{s}) - H_n(\mathbf{z}(m))| + |H_n(\mathbf{z}(m)) - H(\mathbf{z}(m))| \leqslant 1/m + 1/m. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ponieważ $\{H(\mathbf{z}(m))\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ jest ciągiem niemalejącym, to jest zbieżny do pewej granicy ze zbioru $(0,1]$. Korzystając z nierówności (4.13) wnioskujemy, że do tej samej granicy zbieżny jest również ciąg $\{H_n(\mathbf{s})\}_{n\in\mathbb{N}}$. Otrzymujemy:

$$H(\mathbf{s}) := \lim_{n\to\infty} H_n(\mathbf{s}) = \lim_{m\to\infty} H(\mathbf{z}(m)) \in (0,1].$$

Co więcej, dla $i = 1, 2, \ldots, w$ zachodzi

$$H(\mathbf{s}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_n^{(i)} \leqslant v_{\lfloor ns_i \rfloor}^{(i)}\right) = \rho_i^{-1/s_i},$$

a stąd $H(\mathbf{s}) \leqslant \min\{\rho_1^{-1/s_1}, \rho_2^{-1/s_2}, \ldots, \rho_w^{-1/s_w}\} < 1$. Podsumowując, pokazaliśmy, że ciąg funkcji H_n zbiega punktowo do funkcji H o żądanych własnościach, co kończy dowód części (ii), a zarazem całego twierdzenia. □

Uwaga 4.22. Przy powyższych założeniach wielowymiarowy ciąg $\{\mathbf{v}_n(\mathbf{1})\}$ i funkcja H z Twierdzenia 4.21 w pełni opisują asymptotykę maksimów $\mathbf{M}_n$ gdy $n \to \infty$.

Opis funkcji granicznej

Odtąd aż do końca tego podrozdziału zakładać będziemy, że stacjonarny ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunki (4.5) i (4.6). Teza Twierdzenia 4.21 mówi, że w rozważanej przez nas sytuacji istnieje funkcja graniczna $H : [0,\infty]^w \to [0,1]$ taka, że dla wszystkich $\mathbf{s} \in [0,\infty]^w$ zachodzi:

$$H_n(\mathbf{s}) = \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) \to H(\mathbf{s}) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{4.14}$$

W pozostałej części podrozdziału szczegółowo zbadamy tę zbieżność. W pierwszej kolejności opiszemy funkcję H (patrz Lemat 4.23 oraz Twierdzenie 4.24); w szczególności uzasadnimy, że H jest dystrybuantą pewnego wielowymiarowego rozkładu ekstremalnego. Następnie dowiedziemy prawdziwości Lematu 4.26 mówiącego, że zbieżność (4.14) jest jednostajna.

Lemat 4.23. *Własności funkcji H otrzymanej jako granica w Twierdzeniu 4.21:*

(1) monotoniczność: $H(\mathbf{s}) \leqslant H(\mathbf{t})$ dla $\mathbf{s} \leqslant \mathbf{t}$;

(2) dla wszystkich $\mathbf{s}(1) \leqslant \mathbf{s}(2)$ zachodzi:

$$\triangle_{\mathbf{s}(1)}^{\mathbf{s}(2)} := \sum_{\mathbf{l}\in\{1,2\}^w} (-1)^{l_1+l_2+\ldots+l_w} H(s_1(l_1), s_2(l_2), \ldots, s_w(l_w)) \geqslant 0;$$

(3) H jest funkcją ciągłą;

(4) dla dowolnego $a > 0$ i $\mathbf{s} \neq 0$ zachodzi $H(a\cdot\mathbf{s}) = H(\mathbf{s})^{1/a}$;

(5) dla dowolnego $i \in \{1,2,\ldots,w\}$ i $s_i > 0$ mamy

$$H(\infty,\ldots,\infty,s_i,\infty,\ldots,\infty) = \rho_i^{1/s_i}.$$

Dowód. Własność (1) wynika z monotoniczności prawdopodobieństwa. Dla dowodu części (2) lematu korzystamy z faktu, że $H(\mathbf{s}) = \lim_{n\to\infty} H_n(\mathbf{s})$. Dostajemy:

$$\begin{aligned}\triangle_{\mathbf{s}(1)}^{\mathbf{s}(2)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathbf{l}\in\{1,2\}^w} (-1)^{l_1+l_2+\ldots+l_w} H_n(s_1(l_1), s_2(l_2), \ldots, s_w(l_w)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}(1)) \not\leqslant \mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}(2))) \ \geqslant \ 0.\end{aligned}$$

Przechodzimy do dowodu części (3). Zaczynamy od zbadania ciągłości w punkcie $\mathbf{s} \in (0,\infty)^w$. W tym celu rozważmy ciąg $\{\mathbf{s}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)^w$ spełniający $\mathbf{s}(n) \to \mathbf{s}$. Zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$H(\mathbf{s} - (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)) \leqslant H(\mathbf{s}) \leqslant H(\mathbf{s} + (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)),$$

a stąd dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$H(\mathbf{s} - (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)) \leqslant H(\mathbf{s}(n)) \leqslant H(\mathbf{s} + (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)).$$

Ponadto

$$\begin{aligned}&H(\mathbf{s} + (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)) - H(\mathbf{s} - (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)) \\ &= \lim_{m\to\infty} \Big(H_m(\mathbf{s} + (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)) - H_m(\mathbf{s} - (\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)) \Big) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{w} \lim_{m\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(M^{(i)} \leqslant v^{(i)}_{\lfloor m(s_i+\varepsilon)\rfloor}\right) - \mathrm{P}\left(M^{(i)} \leqslant v^{(i)}_{\lfloor m(s_i-\varepsilon)\rfloor}\right) \right) = \sum_{i=1}^{w} \left(e^{-1/(s_i+\varepsilon)} - e^{-1/(s_i-\varepsilon)} \right).\end{aligned}$$

Przechodząc z ε do zera wnioskujemy, że $H(\mathbf{s}(n)) \to H(\mathbf{s})$ gdy $n \to \infty$.

W dalszej kolejności zbadajmy ciągłość w punkcie $\mathbf{s}$ takim, że $s_i = 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, w\}$; bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $s_1 = 0$. Niech ciąg $\{\mathbf{s}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty]^w$ będzie taki, że $\mathbf{s}(n) \to \mathbf{s}$ gdy $n \to \infty$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dla dużych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$0 \leqslant H(\mathbf{s}(n)) \leqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(1)} \leqslant v^{(1)}_{\lfloor ms_1(n)\rfloor}\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(1)} \leqslant v^{(1)}_{\lfloor m\varepsilon\rfloor}\right) = e^{-1/\varepsilon}.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ wnioskujemy, że $H(\mathbf{s}(n)) \to 0 = H(0, s_2, \dots, s_w)$.

Pozostaje nam sprawdzić ciągłość w punkcie $\mathbf{s}$, gdy $s_1, s_2, \dots, s_w \neq 0$ oraz $s_i = \infty$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, w\}$. Bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że $s_1 = \infty$. Rozważmy dowolny ciąg $\{\mathbf{s}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty]^w$ taki, że $\mathbf{s}(n) \to \mathbf{s}$. Przeprowadzimy dowód metodą indukcji matematycznej ze względu na $w \geqslant 2$. Na początek załóżmy, że $w = 2$. Niech $R > 0$ oraz $\varepsilon > 0$ będą dowolne. Przyjrzyjmy się sytuacji, gdy $s_2 \in (0,\infty)$. Wtedy dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$H(s_1(n), s_2(n)) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(2)} \leqslant v^{(2)}_{\lfloor ms_2(n)\rfloor}\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} P(M_m^{(2)} \leqslant v_{\lfloor m(s_2+\varepsilon)\rfloor}) = e^{-1/(s_2+\varepsilon)}.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} H(s_1(n), s_2(n)) &\geqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(\left(M_m^{(1)}, M_m^{(2)}\right) \leqslant \left(v^{(1)}_{\lfloor mR\rfloor}, v^{(2)}_{\lfloor m(s_2-\varepsilon)\rfloor}\right)\right) \\ &\geqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(1)} \leqslant v^{(1)}_{\lfloor mR\rfloor}\right) + \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(2)} \leqslant v^{(2)}_{\lfloor m(s_2-\varepsilon)\rfloor}\right) - 1 \\ &= e^{-1/R} + e^{-1/(s_2-\varepsilon)} - 1. \end{aligned}$$

Korzystając z dowolności $R, \varepsilon > 0$ otrzymujemy $H(s_1(n), s_2(n)) \to e^{-1/s_2} = H(\infty, s_2)$. Prowadząc podobne rozumowanie dla $s_2 = \infty$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1 \geqslant H(s_1(n), s_2(n)) &\geqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(1)} \leqslant v^{(1)}_{\lfloor mR\rfloor}\right) + \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(2)} \leqslant v^{(2)}_{\lfloor mR\rfloor}\right) - 1 \\ &\geqslant e^{-1/R} + e^{-1/R} - 1. \end{aligned}$$

Z dowolności $R > 0$ wnioskujemy, że $H(s_1(n), s_2(n)) \to 1 = H(\infty,\infty)$. Rozważmy $w > 2$ i załóżmy, że dowodzona teza zachodzi dla $w' \in \{2, 3, \dots, w-1\}$. Zauważmy, że dla każdego $R > 0$ i dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$H(\mathbf{s}(n)) \leqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(2)} \leqslant v^{(2)}_{\lfloor ms_2(n)\rfloor}, \dots, M_m^{(w)} \leqslant v^{(w)}_{\lfloor ms_w(n)\rfloor}\right) = \tilde{H}(s_2(n), \dots, s_w(n)),$$

gdzie funkcja $\tilde{H} : [0,\infty]^{w-1} \to [0,1]$ zdefiniowana jako

$$\tilde{H}(t_2, \dots, t_w) := \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(2)} \leqslant v^{(2)}_{\lfloor mt_2\rfloor}, \dots, M_m^{(w)} \leqslant v^{(w)}_{\lfloor mt_w\rfloor}\right) \text{ dla } (t_2, \dots, t_w) \in [0,\infty]^{w-1}$$

jest ciągła na mocy założenia indukcyjnego i wcześniejszej części dowodu. Ponadto mamy:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{s}(n)) &\geqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(1)} \leqslant v^{(1)}_{\lfloor mR\rfloor}, M_m^{(2)} \leqslant v^{(2)}_{\lfloor ms_2(n)\rfloor}, \dots, M_m^{(w)} \leqslant v^{(w)}_{\lfloor ms_w(n)\rfloor}\right) \\ &\geqslant \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(1)} \leqslant v^{(1)}_{\lfloor mR\rfloor}\right) + \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(M_m^{(2)} \leqslant v^{(2)}_{\lfloor ms_2(n)\rfloor}, \dots, M_m^{(w)} \leqslant v^{(w)}_{\lfloor ms_w(n)\rfloor}\right) - 1 \\ &= e^{-1/R} + \tilde{H}(s_2(n), \dots, s_w(n)). \end{aligned}$$

Korzystając z dowolności $R > 0$ oraz faktu, że funkcja $\tilde{H}$ jest ciągła dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} H(\mathbf{s}(n)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{H}(s_2(n), \dots, s_w(n)) = \tilde{H}(s_2, \dots, s_w) = H(\infty, s_2, \dots, s_w),$$

co kończy dowód ciągłości funkcji H w punkcie $\mathbf{s} = (\infty, s_2, s_3, \dots, s_w)$.

Własność (4) jest konsekwencją Lematu 4.20 oraz Twierdzenia 4.21 (i). Natomiast punkt (5) wynika z definicji funkcji H oraz równości (4.3). □

Korzystając z powyższego lematu dowodzimy twierdzenia, które mówi, że funkcja graniczna H wyznacza wielowymiarowy rozkład ekstremalny. Jest to rezultat otrzymany wcześniej przez Perfekta [57, Proposition 2.1] (porównaj także z wynikiem Hsinga [32, Theorem 4.2]).

Twierdzenie 4.24. *Funkcja $\bar{H} : [-\infty, \infty]^w \to [0, 1]$ określona jako*

$$\bar{H}(\mathbf{s}) := H(\mathbf{s}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty]^w}(\mathbf{s}) \quad dla \quad \mathbf{s} \in \overline{\mathbb{R}}^w$$

jest dystrybuantą wielowymiarowego rozkładu ekstremalnego. Ponadto dla każdego $i = 1, 2, \dots, w$ rozkład brzegowy $\bar{H}_i$ jest postaci $\bar{H}_i(-\ln \rho_i \cdot s) = G_{2,1}(s)$ dla $s \in \mathbb{R}$, gdzie przez $G_{2,1}$ oznaczamy dystrybuantę standardowego rozkładu Frécheta.

Dowód. Z definicji funkcji $\bar{H}$ mamy, że $\bar{H}(-\boldsymbol{\infty}) = 0$ i $\bar{H}(\boldsymbol{\infty}) = H(\boldsymbol{\infty}) = 1$. Skorzystamy z własności funkcji H dowiedzionych w Lemacie 4.23. Z podpunktów (1-3) tego lematu wnioskujemy, że funkcja H jest ciągłą wielowymiarową dystrybuantą. Ponadto, na mocy części (4), dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\bar{H}(n \cdot \mathbf{s})^n = \bar{H}(\mathbf{s}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{s} \in \overline{\mathbb{R}}^w,$$

a stąd wnioskujemy, że $\bar{H}$ wyznacza rozkład ekstremalny. Teza dotycząca rozkładów brzegowych jest bezpośrednią konsekwencją własności (5). □

Wniosek 4.25. *Przypuśćmy, że $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_w = e^{-1}$. Rozkład zadany przez H posiada reprezentację w języku miary eksponencjalnej jako rozkład ekstremalny (patrz podrozdział 4.2). A zatem istnieje jedyna miara borelowska ν na $[0, \infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\}$, dla której*

$$H(\mathbf{s}) = \exp(-\nu(B_{\mathbf{s}})) \quad dla \quad \mathbf{s} \in [0, \infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\},$$

gdzie $B_{\mathbf{s}} := \{\mathbf{y} \in [0, \infty]^w \backslash \{\mathbf{0}\} : \ y_i > s_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, w\}\}$. O najważniejszych własnościach miary eksponencjalnej ν mówiliśmy w podrozdziale 4.2.

Lemat 4.26. *Zachodzi zbieżność jednostajna:*

$$\sup_{\mathbf{s}\in[0,\infty]^w} |H_n(\mathbf{s}) - H(\mathbf{s})| \to 0 \quad gdy \quad n \to \infty.$$

Dowód. Rozważmy dowolny ciąg $\{\mathbf{s}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty]^w$ taki, że $\mathbf{s}(n) \to \mathbf{s}$ gdy $n \to \infty$. Naszym celem jest pokazać, że $H_n(\mathbf{s}(n)) \to H(\mathbf{s})$. Na początek załóżmy, że $\mathbf{s} \in (0, \infty)^w$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy: $\mathbf{s} - (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon) \leqslant \mathbf{s}(n) \leqslant \mathbf{s} + (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$. Korzystając dla takich n z monotoniczności funkcji H_n, dostajemy

$$H_n(\mathbf{s} - (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)) \leqslant H_n(\mathbf{s}(n)) \leqslant H_n(\mathbf{s} + (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)).$$

Przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy:

$$H(\mathbf{s} - (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)) \leqslant \liminf_{n\to\infty} H_n(\mathbf{s}(n)) \leqslant \limsup_{n\to\infty} H_n(\mathbf{s}(n)) \leqslant H(\mathbf{s} + (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)).$$

Na mocy ciągłości funkcji H i dowolności $\varepsilon > 0$ wnioskujemy, że $H(\mathbf{s}(n)) \to \mathbf{s}$.

W drugim kroku rozważamy przypadek, gdy punkt $\mathbf{s}$ jest taki, że $s_i = 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, w\}$; bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że $s_1 = 0$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$0 \leqslant H_n(\mathbf{s}(n)) \leqslant H_n((\varepsilon, s_2 + \varepsilon, \dots, s_w + \varepsilon)) \leqslant \mathrm{P}\left(M_n^{(1)} \leqslant v_{\lfloor n\varepsilon \rfloor}^{(1)}\right).$$

A ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(M_n^{(1)} \leqslant v_{\lfloor n\varepsilon \rfloor}^{(1)}\right) = \rho_1^{1/\varepsilon}$$

oraz $\varepsilon > 0$ jest dowolny, to wnioskujemy, że $H_n(\mathbf{s}(n)) \to 0 = H(0, s_2, \dots, s_w)$ gdy $n \to \infty$.

Pozostaje nam do rozważenia sytuacja, gdy $\min\{s_1, s_2, \dots, s_w\} > 0$ i $s_i = \infty$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, w\}$. Ze względu na przejrzystość dowodu założymy, że $s_1 = \infty$ oraz $s_2, s_3, \dots, s_w < \infty$; w pozostałych przypadkach tok rozumowania jest w pełni analogiczny. Ustalmy $\varepsilon, R > 0$. Dla dużych $n \in \mathbb{N}$ prawdą jest, że

$$H_n(R, s_2 - \varepsilon, s_3 - \varepsilon, \dots, s_w - \varepsilon) \leqslant H_n(\mathbf{s}(n)) \leqslant H_n(\infty, s_2 + \varepsilon, s_3 + \varepsilon, \dots, s_w + \varepsilon).$$

Przechodząc w powyższych nierównościach z n do nieskończoności, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &H(R, s_2 - \varepsilon, s_3 - \varepsilon, \dots, s_w - \varepsilon) \\ &\qquad \leqslant \liminf_{n\to\infty} H_n(\mathbf{s}(n)) \leqslant \limsup_{n\to\infty} H_n(\mathbf{s}(n)) \\ &\qquad\qquad \leqslant H(\infty, s_2 + \varepsilon, s_3 + \varepsilon, \dots, s_w + \varepsilon). \end{aligned}$$

Następnie, biorąc $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$ oraz korzystając z ciągłości funkcji H, dostajemy $H_n(\mathbf{s}(n)) \to H(\infty, s_2, s_3, \dots, s_w)$ gdy $n \to \infty$, co kończy dowód trzeciego a zarazem ostatniego przypadku. □

4.4. Dystrybuanta pozorna

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy nowe rezultaty dotyczące wielowymiarowej dystrybuanty pozornej. Uogólniamy Twierdzenie 1.27 mówiące o postaci i istnieniu dystrybuanty pozornej dla jednowymiarowych ciągów stacjonarych.

Twierdzenie 4.27. *Załóżmy, że $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunki (4.5) i (4.6). Funkcja G zadana wzorem*

$$G(\mathbf{x}) := H(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \quad dla \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_w) \in \overline{\mathbb{R}}^w,$$

gdzie $n_i(\mathbf{x}) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : v_n^{(i)} \leqslant x_i\}$ (dla $i = 1, 2, \dots, w$) oraz H oznacza funkcję z Twierdzenia 4.21, jest dystrybuantą pozorną ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$.

Dowód. Aby dowieść twierdzenia rozważmy ciąg $\left\{\mathbf{u}_n = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(w)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$ i określmy dla $i = 1,2,\ldots,w$ ciąg $\left\{l_n^{(i)}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ jako:

$$l_n^{(i)} := \sup\left\{l \in \mathbb{N}_0 :\ v_l^{(i)} \leqslant u_n^{(i)}\right\}.$$

Na początek rozważmy szczególny przypadek, kiedy zachodzi

$$\left(\frac{l_n^{(1)}}{n}, \frac{l_n^{(2)}}{n}, \ldots, \frac{l_n^{(w)}}{n}\right) \to \mathbf{s} \in [0,\infty]^w \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{4.15}$$

Wtedy otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \left(v^{(1)}_{l_n^{(1)}}, \ldots, v^{(w)}_{l_n^{(w)}}\right)\right) = H(\mathbf{s}),$$

na mocy jednostajnej zbieżności udowodnionej w Lemacie 4.26. Ponadto, korzystając z Lematu 4.23 (4), mamy

$$G(\mathbf{u}_n)^n \;=\; H\left(l_n^{(1)}, l_n^{(2)}, \ldots, l_n^{(w)}\right)^n = H\left(\frac{l_n^{(1)}}{n}, \frac{l_n^{(2)}}{n}, \ldots, \frac{l_n^{(w)}}{n}\right).$$

Stąd i z ciągłości funkcji H wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} G(\mathbf{u}_n)^n = \lim_{n\to\infty} H\left(\frac{l_n^{(1)}}{n}, \frac{l_n^{(2)}}{n}, \ldots, \frac{l_n^{(w)}}{n}\right) = H(\mathbf{s}).$$

A zatem dla ciągu $\{\mathbf{u}_n\}$ spełniającego (4.15) otrzymujemy

$$\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n) - G(\mathbf{u}_n)^n \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{4.16}$$

Niech teraz ciąg $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolny, niekoniecznie spełniający założenie (4.15). Ponieważ w dowolnym podciągu $\{\mathbf{u}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ możemy znaleźć dalszy podciąg $\{\mathbf{u}_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$, dla którego

$$\frac{l^{(i)}_{n_{k_j}}}{n_{k_j}} \to s_i \in [0,\infty] \quad \text{gdy } j \to \infty, \text{ dla wszystkich } i \in \{1,2,\ldots,w\},$$

to na podstawie Faktu 2.28 zbieżność (4.16) zachodzi także w tej sytuacji. Tym sposobem wykazaliśmy, że funkcja G jest wielowymiarową dystybuantą pozorną ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$. □

Twierdzenie 4.28. *Niech $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia założenia (4.2) i (4.5) dla pewnych ciągów $\{v_n^{(i)}\} \subset \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,w$. Wtedy ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ ma dystrybuantę pozorną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki łamania: (4.6) oraz $B_\infty(v_n^{(i)})$ dla $i = 1,2,\ldots,w$.*

Dowód. Niech ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia założenia twierdzenia. Przypuśćmy, że G jest dystrybuantą pozorną dla $\{\mathbf{X}_n\}$. Ustalmy punkt $\mathbf{s} \in [0,\infty]^w$ i rozważmy ciąg $\{\mathbf{v}_n(\mathbf{s})\} \subset [0,\infty]^w$. Pokażemy, że zachodzi $B_\infty(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$. Zauważmy, że korzystając z definicji dystrybuanty pozornej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_n+q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) - \mathrm{P}(\mathbf{M}_{p_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))\,\mathrm{P}(\mathbf{M}_{q_n} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) \\ &\quad= \; G(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))^{p_n+q_n} - G(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))^{p_n} G(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))^{q_n} + o(1) = o(1), \end{aligned}$$

dla wszystkich ciągów $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}_0$. Wnioskujemy, że warunek $B_\infty(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$ jest spełniony dla dowolnego $\mathbf{s} \in [0,\infty]^w$, a stąd w szczególności (4.6) oraz $B_\infty(v_n^{(i)})$ dla $i = 1,2,\ldots,w$ zachodzą. Implikacja przeciwna wynika z Twierdzenia 4.27. □

4.5. Zastosowanie nierówności typu Bonferroniego do badania asymptotyki maksimów

W tym podrozdziale korzystamy z nierówności typu Bonferroniego z Lematu 2.35 i opisujemy asymptotykę maksimów słabo zależnych ciągów wielowymiarowych, które spełniają pewne lokalne warunki mieszania. Stosujemy podejście podobne do tego, jakie zaproponowaliśmy w podrozdziałach 2.2.4 i 2.2.5 do badania maksimów pól losowych.

Na początek zwróćmy uwagę na następujący problem: kiedy maksima stacjonarnego ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ zachowują się tak samo jak maksima ciągu $\{\hat{\mathbf{X}}_n\}$ niezależnych wektorów losowych o jednakowym rozkładzie zadanym przez $F(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{x})$? Hsing [32] bada sytuację, w której słabo zależny ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia *lokalny warunek mieszania* $D'(\mathbf{u}_n)$ dla pewnego ciągu $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^w$, tzn.

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left(n \sum_{i_1=1}^{w} \sum_{i_2=1}^{w} \sum_{j=2}^{\lfloor n/k \rfloor} \mathrm{P}\left(X_1^{(i_1)} > u_n^{(i_1)}, X_j^{(i_2)} > u_n^{(i_2)} \right) \right) = 0.$$

Dowodzi poniższej wielowymiarowej wersji Faktu 1.23 [32, Lemma 4.4] (analogiczny rezultat można znaleźć również u Hüslera [36, Theorem 2.1]):

Fakt 4.29. *Załóżmy, że $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunki $D(\mathbf{u}_n)$ i $D'(\mathbf{u}_n)$ dla ciągu $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^w$. Niech $C > 0$. Wtedy $\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n) \to C$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $\mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{u}_n)^n \to C$.*

Będziemy poszukiwać uogólnień Faktu 4.29. Skupimy uwagę na stacjonarnych słabo zależnych wielowymiarowych ciągach losowych, dla których zachodzi zdefiniowany poniżej lokalny warunek mieszania $LD^{(r)}(\mathbf{u}_n)$ dla ciągu $\{\mathbf{u}_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$.

Definicja 4.30. Powiemy, że $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia *warunek $LD^{(r)}(\mathbf{u}_n)$* (dla pewnego $r \in \mathbb{R}$), o ile

$$k_n \sum_{\substack{j,l\in\{1,2,\dots,\lfloor n/k_n \rfloor\},\\ |j-l|\geqslant r}} \mathrm{P}\left(\mathbf{X}_j \nleqslant \mathbf{u}_n, \mathbf{X}_l \nleqslant \mathbf{u}_n \right) \to 0 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty, \tag{4.17}$$

dla pewnego ciągu $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ takiego, że $k_n\beta_1(n) \to 0$ (gdzie $\{\beta_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ to ciąg z definicji warunku $B_1(\mathbf{u}_n)$) oraz $k_n \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \nleqslant \mathbf{u}_n) \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Zauważmy, że do klasy ciągów spełniających $LD^{(1)}(\mathbf{u}_n)$ należą te ciągi, dla których zachodzą warunki $B_1(\mathbf{u}_n)$ i $D'(\mathbf{u}_n)$. Ponadto, dla dowolnego $m = 0, 1, 2, \dots$ szczególnym przypadkiem ciągów spełniających założenie $LD^{(m+1)}$ są ciągi m-zależne, zgodnie z następującym uogólnieniem Uwagi 2.4:

Uwaga 4.31. Przypuśćmy, że ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ jest m-zależny oraz ciąg $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest taki, że

$$\limsup_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}\left(X^{(i)} > u_n^{(i)} \right) < \infty \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, w.$$

Wtedy $\mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \nleqslant \mathbf{u}_n) \leqslant \sum_{i=1}^{w} \mathrm{P}(X^{(i)} > u_n^{(i)}) = o(1)$ oraz $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunek $B_1(\mathbf{u}_n)$ jako ciąg m-zależny (patrz Fakt 4.3), a stąd $\beta_1(n) \to 0$ gdy $n \to \infty$. Dlatego istnieje ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, dla którego $k_n \to \infty$, $k_n\beta_1(n) \to 0$ i $k_n \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \nleqslant \mathbf{u}_n) \to 0$, gdy $n \to \infty$. Ponadto

$$k_n \sum_{\substack{j,l\in\{1,2,\dots,\lfloor n/k_n \rfloor\},\\ |j-l|>m}} \mathrm{P}\left(\mathbf{X}_j \nleqslant \mathbf{u}_n, \mathbf{X}_l \nleqslant \mathbf{u}_n \right) \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{w} n\,\mathrm{P}\left(X_1^{(i)} > u_n^{(i)} \right) \right)^2}{k_n} = o(1),$$

a zatem warunek (4.17) jest spełniony z $r = m + 1$. Wnioskujemy, że m-zależny ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia $LD^{(r)}(\mathbf{u}_n)$ dla $r \geqslant m + 1$.

W naszych rozważaniach zastosujemy nierówność z Lematu 2.35, podobnie jak uczyniliśmy to dla pól losowych. Warto wspomnieć, że w przypadku ciągów alternatywę dla Lematu 2.35 stanowi wcześniejszy wynik Jakubowskiego [38, Lemma 3.2].

4.5.1. Maksima ciągów spełniających lokalne warunki mieszania

Poniżej dowodzimy twierdzenia, które opisuje asymptotyczne zachowanie maksimów wielowymiarowego ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ spełniającego warunek $LD^{(r)}$. Przypominamy, że podobne rozważania dla ciągów zmiennych losowych były prowadzone przez Chernicka, Hsinga i McCormicka [11]. Natomiast dla pól losowych odpowiadający rezultat stanowi Twierdzenie 2.34.

Twierdzenie 4.32. *Załóżmy, że $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunek $LD^{(r)}(\mathbf{u}_n)$ (dla pewnego $r \in \mathbb{N}$) oraz ciąg $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^w$ jest taki, że $\mathrm{P}(X_1^{(i)} > u_n^{(i)}) \to 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, w$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n\right) = \exp\left(-\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{r-1} \leqslant \mathbf{u}_n,\ \mathbf{X}_r \nleqslant \mathbf{u}_n\right)\right).$$

Dowód. Niech $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem z warunku $LD^{(r)}(\mathbf{u}_n)$. Przypominamy, że na mocy Lematu 4.19 (3) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}_n\right) = \exp\left(-\lim_{n\to\infty} k_n\,\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_n \nleqslant \mathbf{u}_n\right)\right). \tag{4.18}$$

Stosując Lemat 2.35 dla stacjonarnego ciągu wektorów

$$\mathbf{Z}_j := \left(\mathbb{1}_{\left\{X_j^{(1)} > u_n^{(1)}\right\}}, \mathbb{1}_{\left\{X_j^{(2)} > u_n^{(2)}\right\}}, \ldots, \mathbb{1}_{\left\{X_j^{(w)} > u_n^{(w)}\right\}}\right), \quad j \in \mathbb{N},$$

oraz $U := [0,\infty)^w \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$ i $m := r - 1$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\left|k_n\,\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{\lfloor n/k_n\rfloor} \nleqslant \mathbf{u}_n\right) - n\,\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{r-1} \leqslant \mathbf{u}_n,\ \mathbf{X}_r \nleqslant \mathbf{u}_n\right)\right| \\
&\quad\leqslant\ 2r^2 k_n\,\mathrm{P}\left(\mathbf{X}_1 \nleqslant \mathbf{u}_n\right) + 3rk_n \sum_{\substack{j,l\in\{1,2,\ldots,\lfloor n/k_n\rfloor\},\\ |j-l|\geqslant r}} \mathrm{P}\left(\mathbf{X}_j \nleqslant \mathbf{u}_n,\ \mathbf{X}_l \nleqslant \mathbf{u}_n\right) \ =:\ R(n).
\end{aligned}$$

Warunek $LD^{(r)}(\mathbf{u}_n)$ pociąga, że $R(n) \to 0$ gdy $n \to \infty$. Zestawiając powyższą nierówność oraz (4.18) dostajemy tezę twierdzenia. □

4.5.2. Wielowymiarowy indeks ekstremalny

W niniejszym podrozdziale przypomnimy pojęcie wielowymiarowego indeksu ekstremalnego zaproponowane przez Nandagopalana [53, 54]. Pokazujemy jak nierówność z Lematu 2.35 pozwala wyznaczyć indeks ekstremalny wielowymiarowego ciągu spełniającego lokalny warunek $LD^{(r)}$. Przytaczamy również rezultaty Perfekta [57], Smitha i Weissmana [70] oraz Roberta [63] dotyczące metod obliczania indeksu ekstremalnego w ogólnym przypadku.

Przypominamy, że w centrum naszej uwagi znajduje się stacjonarny ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ taki, że ciąg $\{X_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ posiada regularną dystrybuantę pozorną dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, w$. W tym podrozdziale zakładamy także, że $\{\mathbf{X}_n\}$ spełnia warunki (4.2), (4.5) oraz (4.6) dla ciągów $\{v_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{v_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots,$ $\{v_n^{(w)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Przyjęte przez nas założenia nie mówią wiele o zbieżności ciągu $\{n\,\mathrm{P}(X_1^{(i)} > v_n^{(i)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, w\}$. Korzystając z nierówności

$$1 - \mathrm{P}\left(M_n^{(i)} \leqslant v_n^{(i)}\right) = \mathrm{P}\left(X_j^{(i)} > v_n^{(i)} \text{ dla pewnego } j \in \{1, 2, \ldots, n\}\right) \leqslant n\,\mathrm{P}\left(X_1^{(i)} > v_n^{(i)}\right)$$

otrzymujemy jedynie, że

$$\liminf_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}\left(X_1^{(i)} > v_n^{(i)}\right) \geqslant 1 - \rho_i > 0.$$

W niniejszym podrozdziale interesuje nas sytuacja, gdy mamy

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{P}\left(X_1^{(i)} > v_n^{(i)}\right) = \tau_i \quad \text{dla pewnego } \tau_i \in (0, \infty) \quad (\text{dla } i = 1, 2, \ldots, w). \tag{4.19}$$

Przypuśćmy, że własność (4.19) zachodzi. Zauważmy, że w ponieważ stałe $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_w$ z warunku (4.2) były wybrane jako dowolne z przedziału $(0, 1)$, to możemy na nowo zdefiniować ciągi $\{v_n^{(1)}\}$, $\{v_n^{(2)}\} \ldots, \{v_n^{(w)}\} \subset \mathbb{R}$ oraz liczby $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_w \in (0, 1)$ tak, aby wszystkie przyjęte w tym podrozdziale założenia były spełnione oraz aby warunek (4.19) zachodził z $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_w = 1$. Odtąd zakładać będziemy, że dla $i = 1, 2, \ldots, w$ mamy:

$$n\,\mathrm{P}\left(X_1^{(i)} > v_n^{(i)}\right) \to 1 \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Definicja 4.33. Jeśli dla ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ spełniającego powyższe założenia zachodzi warunek

$$\mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) = \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))^{n\cdot\theta(\mathbf{s})} + o(1) \tag{4.20}$$

dla wszystkich $\mathbf{s} \in (0, \infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\}$ i dla pewnej funkcji $\theta : (0, \infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\} \to \mathbb{R}$, to mówimy, że θ jest *wielowymiarowym indeksem ekstremalnym* ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$.

Zauważmy, że zdefiniowany powyżej wielowymiarowy indeks ekstremalny jest funkcją, a nie (jak to jest w przypadku ciągów i pól o wartościach w $\mathbb{R}$) stałą.

Uwaga 4.34. Dla rozważanego ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ zbieżność (4.20) dla $\mathbf{s} := \mathbf{s}_0$ pociąga (4.20) dla $\mathbf{s} := a \cdot \mathbf{s}_0$, gdzie $a > 0$ jest dowolne; wtedy $\theta(\mathbf{s}_0) = \theta(a \cdot \mathbf{s}_0)$ [57, Proposition 2.3]. Dlatego w definicji 4.33 wystarczy żądać, aby dla każdego $\hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{L}$ istniała liczba $a > 0$ taka, że warunek (4.20) zachodzi dla $\mathbf{s} = a \cdot \hat{\mathbf{s}}$.

Przypuśćmy, że ciąg $\{\mathbf{X}_n\}$ posiada wielowymiarowy indeks ekstremalny θ. Poniżej przedstawiamy kilka podstawowych własności funkcji θ (porównaj [54, Theorem 1.1], [57, Proposition 2.5] oraz [69]):

(i) $0 < \theta(\mathbf{s}) \leqslant 1$ dla wszystkich $\mathbf{s} \in (0, \infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\}$;

(ii) $\theta(a \cdot \mathbf{s}) = \theta(\mathbf{s})$ dla wszystkich $a \in (0, \infty)$ i $\mathbf{s} \in (0, \infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\}$;

(iii) $\theta_i := \theta(\infty, \ldots, \infty, s_i, \infty, \ldots, \infty)$, gdzie $s_i \in (0, \infty)$, jest jednowymiarowym indeksem ekstremalnym ciągu $\{X_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, dla $i = 1, 2, \ldots, w$.

Uwaga 4.35. Czasem rozważa się sytuację, w której wielowymiarowy indeks ekstremalny może przyjąć wartość zero. Jednak w naszym przypadku założenie $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_w < 1$ implikuje, że indeksy jednowymiarowe na poszczegolnych współrzędnych spełniają warunek $\theta_i = -\ln \rho_i > 0$, a stąd $0 < \theta(\mathbf{s}) \leqslant 1$ (patrz [57, Proposition 2.5 (iv)]).

Twierdzenie 4.36. *Przypuśćmy, że istnieje indeks ekstremalny* $\theta : (0,\infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\} \to (0,1]$ *dla ciągu* $\{\mathbf{X}_n\}$. *Wtedy dla dowolnego* $\mathbf{s} \in (0,\infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\}$ *mamy:*

$$\theta(\mathbf{s}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{r-1} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}) \mid \mathbf{X}_r \nleqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})\right). \tag{4.21}$$

Dowód. Niech $\mathbf{s} \in (0,\infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\}$. Korzystając kolejno z założenia (4.20), z Twierdzenia 4.32 dla $\mathbf{u}_n := \mathbf{v}_n(\mathbf{s})$ oraz z Faktu 2.16, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))^{n\cdot\theta(\mathbf{s})} &= \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) + o(1) \\
&= \exp\left(-n\,\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{r-1} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}),\ \mathbf{X}_r \nleqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})\right)\right) + o(1) \\
&= \exp\left(-n\,\mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \nleqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) \cdot \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{r-1} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}) \mid \mathbf{X}_r \nleqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})\right)\right) + o(1) \\
&= \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))^{n\cdot \mathrm{P}(\mathbf{M}_{r-1}\leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}) \mid \mathbf{X}_r \nleqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))} + o(1).
\end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})) \in (0,1)$ oraz $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathbf{X}_1 \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}))^n \in (0,1)$, to powyższy ciąg równości prowadzi nas do wzoru (4.21), co kończy dowód. □

Znane metody obliczania wielowymiarowego indeksu ekstremalnego

Poniżej prezentujemy kilka znanych rezultatów, które mogą stanowić metodę obliczania wielowymiarowego indeksu ekstremalnego ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$.

Interesujące podejście proponują Smith i i Weissman [70]. Rozważają przypadek, gdy wektor losowy $\mathbf{X}_1$ ma ciągłe rozkłady brzegowe. Zauważają, że w tej sytuacji wielowymiarowy indeks ekstremalny jest niezmienniczy ze względu na ciągłe transformacje i sugerują, by obliczać indeks ekstremalny ciągu ustandaryzowanych wektorów o rozkładach brzegowych Frécheta z parametrem $\alpha = 1$ (tj. o dystrybuancie $G_{2,1}(x) = e^{-1/x}$ dla $x > 0$). Otrzymują $\theta(\mathbf{s})$ jako jednowymiarowy indeks ekstremalny ciągu losowego $\{V_n(\mathbf{s})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ skonstruowanego jako liniowa kombinacja ustandaryzowanych składowych ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ [70, Proposition 2.1].

Twierdzenie 4.37. *Załóżmy, że ciąg* $\{\mathbf{X}_n\}$ *wektorów o rozkładach brzegowych Frécheta* $G_{2,1}$ *ma indeks ekstremalny* θ. *Dla ustalonego* $\mathbf{s} \in (0,\infty]^w$ *określamy jednowymiarowy stacjonarny ciąg* $\{V_n(\mathbf{s})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *jako*

$$V_n(\mathbf{s}) := \max_{1\leqslant i\leqslant w} \frac{X_n^{(i)}}{s_i}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Wtedy $\theta(\mathbf{s})$ *jest jednowymiarowym indeksem ekstremalnym ciągu* $\{V_n(\mathbf{s})\}$.

Inni autorzy [4, 63] sugerują standaryzację rozkładów brzegowych wektorów losowych $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2, \ldots$ do rozkładu Pareto z parametrami kształtu 1 i skali 1 (tj. o dystrybuancie $F(x) = 1 - 1/x$ dla $x \geqslant 1$). Robert dowodzi twierdzenia dla ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ bez założenia o ciągłości rozkładów brzegowych [63, Proposition 2.1].

Twierdzenie 4.38. *Załóżmy, że ciąg* $\{\mathbf{X}_n\}$ *posiada indeks ekstremalny* θ. *Dla każdego ustalonego* $\mathbf{s} \in (0, \infty]^w$ *określamy jednowymiarowy stacjonarny ciąg* $\{V_n(\mathbf{s})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *jako*

$$V_n(\mathbf{s}) := \max_{1\leqslant j\leqslant w} \frac{Y_n^{(i)}}{s_i}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gdzie $Y_n^{(i)} := (1 - F_i^-(X_n^{(i)}))^{-1}$ *oraz* $F_i^-(x) := \mathrm{P}(X_n^{(i)} < x)$. *Wtedy* $\theta(\mathbf{s})$ *jest jednowymiarowym indeksem ekstremalnym ciągu* $\{V_n(\mathbf{s})\}$.

Perfekt [57, Proposition 2.6] proponuje klasyczne podejście (znane m.in. z rozważań O'Briena dotyczących ciągów jednowymiarowych [56]), które prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.39. *Załóżmy, że ciąg* $\{\mathbf{X}_n\}$ *posiada indeks ekstremalny* θ. *Niech* $\mathbf{s} \in (0, \infty]^w \backslash \{\boldsymbol{\infty}\}$ *oraz niech* $\{\beta_1(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *będzie ciągiem zbieżnym do zera z definicji warunku* $B_1(\mathbf{v}_n(\mathbf{s}))$. *Wtedy*

$$\theta(\mathbf{s}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\mathbf{M}_{r_n-1} \leqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s}) \mid \mathbf{X}_{r_n} \nleqslant \mathbf{v}_n(\mathbf{s})\right)$$

dla $r_n := \lfloor n/k_n \rfloor$, *gdzie* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *jest dowolnym ciągiem o własnościach* $k_n \to \infty$, $k_n = o(n)$ *oraz* $k_n\beta_1(n) \to 0$.

Lista skrótów i symboli, wybrane rozkłady

$\overset{D}{=}$	równość według rozkładu,
$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$	funkcja charakterystyczna zbioru $\mathcal{A}$,
$f(x) \sim g(x)$	$\lim_x f(x)/g(x) = 1$,
$f(x) = g(x) + o(1)$	$\lim_x (f(x) - g(x)) = 0$,
$f(x) = o(g(x))$	$\lim_x f(x)/g(x) = 0$,
$f(x) = O(g(x))$	$\lim_x f(x)/g(x) \leqslant C$ dla pewnej stałej $C > 0$,
$f(x) = \Theta(g(x))$	$f(x) = O(g(x))$ i $g(x) = O(f(x))$,
$f(x) \searrow a$	$\lim_x f(x) = a$ i f jest funkcją malejącą,
$f(x) \nearrow a$	$\lim_x f(x) = a$ i f jest funkcją rosnącą,
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych,
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,
$\lfloor x \rfloor$	część całkowita liczby x,
$x \vee y$	$\max\{x, y\}$,
$x \wedge y$	$\min\{x, y\}$,
$\lVert \mathbf{x} \rVert_\infty$	$\max\{\lvert x_1\rvert, \lvert x_2\rvert, \ldots, \lvert x_d\rvert\}$ dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,
$<\mathbf{x}, \mathbf{y}>$	standardowy iloczyn skalarny elementów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$,
$[\mathbf{j}, \mathbf{n}]$	$\{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{j} \leqslant \mathbf{l} \leqslant \mathbf{n}\}$ dla $\mathbf{j}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$,
$\mathcal{B}(\mathbf{0}, x)$	kula domknięta w $\mathbb{R}^d$ o środku $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ i promieniu $x > 0$,
F_*	$\sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$,
B_T	warunek łamania,
$\beta_T(n)$	ciąg z definicji warunku B_T,
$LD^{(r)}$	lokalny warunek mieszania,
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	rozkład normalny o wartości oczekiwanej m i wariancji σ^2,
$\mathcal{W}$	zmienna losowa o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$,
Φ	$\Phi(x) = \mathrm{P}(\mathcal{W} \leqslant x)$,
Ψ	$\Psi(x) = 1 - \Phi(x)$,
B_α	ułamkowy ruch Browna z parametrem Hursta α,
$\mathcal{H}_\alpha$	stała Pickandsa,
ℓ^d	d-wymiarowa miara Lebesgue'a

Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa:

Nazwa rozkładu	*Parametry*	*Oznaczenie*	*Opis*
normalny, Gaussa	$m \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 > 0$	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	gęstość: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$
d-wymiarowy normalny	$\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$ $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ $\mathbf{\Sigma} \geqslant 0$	$\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$	$\mathrm{E}^{i<\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{X}>} = e^{i<\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{X}> - \frac{1}{2}<\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}>}$ dla $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$
Gumbela		G_1	$\mathrm{P}(X \leqslant x) = \exp(-e^{-x})$
Frécheta	$\alpha > 0$	$G_{2,\alpha}$	$\mathrm{P}(X \leqslant x) = \exp(-x^{-\alpha})$ dla $x > 0$
Weibulla	$\alpha > 0$	$G_{3,\alpha}$	$\mathrm{P}(X \leqslant x) = \exp(-(-x)^{\alpha})$ dla $x < 0$
Pareto	$x_m > 0$ $\alpha > 0$		$\mathrm{P}(X \leqslant x) = (1 - (\frac{x_m}{x})^{\alpha})$ dla $x > x_m$
Poissona	$\lambda > 0$	$Pois(\lambda)$	$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ dla $k \in \mathbb{N}_0$

Bibliografia

[1] R. Adler, *The Geometry of Random Fields*, Wiley Ser. Probab. Stat., Wiley, New York (1981).

[2] M. Arendarczyk, K. Dębicki, Exact asymptotics of supremum of a stationary Gaussian process over a random interval, *Statist. Probab. Lett.* **82** (2012) 645–652.

[3] B. Basrak, A. Tafro, Extremes of moving averages and moving maxima on a regular lattice, *Probab. Math. Statist.* **34**(1) (2014) 61–79.

[4] J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Segers, J. Teugels, *Statistics of Extremes: Theory and Applications*, Wiley Ser. Probab. Stat., Wiley, Chichester (2004).

[5] S. M. Berman, Limiting distribution of the maximum term in sequences of dependent random variables, *Ann. Math. Statist.* **33** (1962) 894–908.

[6] S. M. Berman, Limit theorems for the maximum term in stationary sequences, *Ann. Math. Statist.* **35** (1964) 502–516.

[7] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley Ser. Probab. Stat., Wiley, New York (1995).

[8] C. E. Bonferroni, Teoria statistica delle classi e calcolo delle probabilità, *Pubbl. d. R. Ist. Super. di Sci. Econom. e Commerciali di Firenze* **8** (1936) 1–62.

[9] E. Castillo, *Extreme Value Theory in Engineering*, Statist. Model. Decis. Sci., Academic Press, New York (1988).

[10] N. N. Chentsov, Weak convergence of stochastic processes whose trajectories have no discontinuities of the second kind and the "heuristic" approach to the Kolmogorov-Smirnov tests, *Theory Probab. Appl.* **1**(1) (1956) 140–144.

[11] M. R. Chernick, T. Hsing, W. P. McCormick, Calculating the extremal index for a class of stationary sequences, *Adv. Appl. Prob.* **23**(4) (1991) 835–850.

[12] H. Choi, *Central limit theory and extremes of random fields*, rozprawa doktorska, Univ. North Carolina (2002).

[13] D. Cline, Infinite series of random variables with regularly varying tails, Technical Report 83-24, Institute of Applied Mathematics and Statistics, Univ. British Columbia (1983).

[14] H. Cramér, On the maximum of a normal stationary stochastic process, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962) 512–516.

[15] K. Dębicki, E. Hashorva, N. Soja-Kukieła, Extremes of homogeneous Gaussian fields: long-interval case, artykuł przyjęty do druku w *J. Appl. Probab.*

[16] P. Doukhan, A. Jakubowski, G. Lang, Phantom distribution functions for some stationary sequences, preprint.

[17] L. de Haan, Fighting the arch–enemy with mathematics, *Stat. Neerl.* **44**(2) (1990) 45–68.

[18] L. de Haan, A. Ferreira, *Extreme Value Theory: An Introduction*, Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng., Springer, New York (2006).

[19] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Stoch. Model. Appl. Probab 33, Springer, Berlin (2003).

[20] M. Falk, J. Hüsler, R.-D. Reiss, *Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events*, Birkhäuser, Basel (2011).

[21] H. Ferreira, Dependence between two multivariate extremes, *Statist. Probab. Lett.* **81**(5) (2011) 586–591.

[22] H. Ferreira, L. Pereira, How to compute the extremal index of stationary random fields, *Statist. Probab. Lett.* **78**(11) (2011) 1301–1304.

[23] C. A. T. Ferro, J. Segers, Inference for clusters of extreme values, *J. R. Statist. Soc.* B **65**(2) (2003) 545–556.

[24] R. A. Fisher, L. H. C. Tippet, Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **24**(2) (1928) 163–190.

[25] M. Fréchet, Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, *Ann. Soc. Polon. Math.* **6** (1927) 93–116.

[26] A. Gadidov, Sectorial convergence of U-statistics, *Ann. Probab.* **33**(2) (2005) 816–822.

[27] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley Ser. Probab. Stat., Wiley, New York (1978).

[28] J. Galambos, I. Simonelli, *Bonferroni-Type Inequalities with Applications*, Probab. Appl., Springer, New York (1996).

[29] I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *The theory of stochastic processes I*, Grundlehren Math. Wiss. 210, Springer, New York (1974).

[30] B. V. Gnedenko, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. of Math.* (2) **44** (1943) 423–453.

[31] A. Gut, *Probability: A Graduate Course*, Springer Texts Statist., Springer, New York (2005).

[32] T. Hsing, Extreme value theory for multivariate stationary sequences, *J. Multivariate Anal.* **29**(2) (1989) 274–291.

[33] T. Hsing, Estimating the parameters of rare events, *Stochast. Process. Appl.* **37**(1) (1991) 117–139.

[34] T. Hsing, Extremal index extimation for a weakly dependent stationary point sequence, *Ann. Statist.* **21**(4) (1993) 2043–2071.

[35] T. Hsing, J. Hüsler, M. R. Leadbetter, On the exceedance point process for stationary sequence, *Probab. Theory Related Fields* **78**(1) (1988) 97–112.

[36] J. Hüsler, Multivariate extreme values in stationary random sequences, *Stochastic Process. Appl.* **35**(1) (1990) 99–108.

[37] A. Jakubowski, Relative extremal index of two stationary processes, *Stochastic Process. Appl.* **37**(2) (1991) 281–297.

[38] A. Jakubowski, Minimal conditions in p-stable limit theorems II, *Stochastic Process. Appl.* **68**(1) (1997) 1–20.

[39] A. Jakubowski, J. Rosiński, Local dependencies in random fields via a Bonferroni type inequality, w: *Advances in stochastic inequalities*, red. T. P. Hill, C. Houdré, Contemp. Math. 234, American Mathematical Society, Providence (1999) 85-95.

[40] A. Jakubowski, N. Soja-Kukieła, Managing local dependencies in limit theorems for maxima of weakly dependent random fields, preprint.

[41] H. Joe, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Monogr. Statist. Appl. Probab., Chapman & Hall, London (1997).

[42] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux, *Bull. Soc. Math. France* **61** (1933) 55–62.

[43] H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Stud. Adv. Math. 24, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[44] F. Laurini, J. A. Tawn, New Estimators for the Extremal Index and Other Cluster Characteristics, *Extremes* **6**(3) (2004) 189–211.

[45] M. R. Leadbetter, On extreme values in stationary sequences, *Z. Wahrscheinlichkeit. Verw. Gebiete* **28**(4) (1974) 289–303.

[46] M. R. Leadbetter, Extremes and local dependence in stationary sequences, *Z. Wahrscheinlichkeit. Verw. Gebiete* **65**(2) (1983) 291–306.

[47] M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzén, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer Ser. Statist., Springer, New York (1983).

[48] M. R. Leadbetter, I. Weissman, L. de Haan, H. Rootzén, On clustering of high levels in statistically stationary series, w: *Proc. 4th Int. Meet. Statistical Climatology*, red. J. Samson, New Zealand Meteorological Service, Willington (1989) 217–222.

[49] M. R. Leadbetter, S. Nandagopalan, On exceedance point processes for stationary sequences under mild oscillation restrictions, w: *Extreme Value Theory*, red. J. Hüsler, R.-D. Reiss, Lect. Notes in Statistics 51, Springer, New York (1989) 69–80.

[50] M. R. Leadbetter, H. Rootzén, On extreme values in stationary random fields, w: *Stochastic Processes and Related Topics. In Memory of Stamatis Cambanis 1943–1995*, red. I. Karatzas, B. S. Rajput, M. S. Taqqu, Birkäuser, Boston (1998) 275–285.

[51] R. M. Loynes, Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes, *Ann. Math. Statist.* **36** (1965) 993–999.

[52] Y. Mittal, D. Ylvisaker, Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes, *Stochastic Process. Appl.* **3** (1975) 1–18.

[53] S. Nandagopalan, *Multivariate extremes and estimation of the extremal index*, rozprawa doktorska, Department of Statistics, Univ. North Carolina (1990).

[54] S. Nandagopalan, On the multivariate extremal index, *J. Res. Nat. Inst. Stand. Technol.* **99**(4) (1994) 543—550.

[55] G. L. O'Brien, Limit theorems for the maximum term of a stationary process, *Ann. Probab.* **2** (1974) 50–545.

[56] G. L. O'Brien, Extreme values for stationary and Markov sequences, *Ann. Probab.* **15** (1987) 281–191.

[57] R. Perfekt, Extreme value theory for a class of Markov chains with values in $\mathbb{R}^d$, *Adv. in Appl. Probab.* **29**(1) (1997) 138–164.

[58] J. Pickands III, Asymptotic properties of maximum in a stationary Gaussian process, *Trans. Amer. Soc.* **145** (1969) 75–86.

[59] V. I. Piterbarg, On the paper by J. Pickands "Upcrosssing probabilities for stationary Gaussian processes", *Vestnik Moscow. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* **27** (1972) 25–30.

[60] V. I. Piterbarg, *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields*, Transl. Math. Monogr. 148, Amer. Math. Soc., Providence (1996).

[61] M.-D. Reiss, M. Thomas, *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhäuser, Basel (2007).

[62] S. I. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng., Springer, Berlin (1987).

[63] C. Y. Robert, Estimating the multivariate extremal index function, *Bernoulli* **14**(4) (2008) 1027–1064.

[64] C. Y. Robert, Inference for the limiting cluster size distribution of extreme values, *Ann. Statist.* **37**(1) (2009) 271–310.

[65] C. Y. Robert, J. Segers, C. A. T Ferro, A sliding blocks estimator for the extremal index, *Electron. J. Statist.* **3** (2009) 993–1020.

[66] M. Rosenblatt, A central limit theorem and a strong mixing condition, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42** (1956) 43–47.

[67] J. Segers, Rare events, temporal dependence, and the extremal index, *J. Appl. Probab.* **43**(2) (2006) 463–485.

[68] E. Slutsky, Qualche proposizione relative alla teoria delle funzioni aleatorie, *Giorn. Ist. Attuari* **8** (1937) 183–199.

[69] R. L. Smith, I. Weissmann, Estimating the extremal index, *J. R. Statist. Soc.* B **56**(3) (1994) 515–528.

[70] R. L. Smith, I. Weissmann, Characterization and estimation of the multivariate extremal index, Technical Report, Univ. North Carolina (1996).

[71] R. Takahashi, Characterizations of a multivariate extreme value distribution, *Adv. Appl. Prob.* **20**(1) (1988) 235–236.

[72] Z. Tan, E. Hashorva, Exact tail asymptotics of the supremum of a strongly dependent Gaussian process over a random interval, *Lith. Math. J.* **53**(1) (2013) 91–102.

[73] K. F. Turkman, A note on the extremal index for space-time processes, *J. Appl. Prob.* **43**(1) (2006) 114–126.

[74] G. S. Watson, Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes, *Ann. Math. Statist.* **25** (1954) 798–800.

[75] I. Weissman, S. Yu. Novak, On blocks and runs estimators for the extremal index, *J. Stat. Plan. Inference* **66** (1954) 281–288.