Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki

PRACA DOKTORSKA

WŁASNOŚCI ASYMPTOTYCZNE ORAZ WŁASNOŚCI SZEGÖ DLA WYBRANYCH KLAS OPERATORÓW OGRANICZONYCH

Autor:
mgr Patryk Pagacz

Promotor:
dr hab. Marek Kosiek

Kraków 2014

Podziękowania

Pragnę serdecznie podziękować mojemu promotorowi dr. hab. Markowi Kosiekowi za zainteresowanie mnie tematyką asymptotycznych własności operatorów oraz współpracę nad tematyką związaną z własnościami Szegö. Chciałbym jednocześnie wyrazić szczególną wdzięczność za wielką życzliwość, wyrozumiałość i cierpliwość okazywaną mi podczas całych moich studiów doktoranckich.

Panu prof. dr. hab. Jaroslavowi Zemankowi dziękuję za wszelkie dyskusje matematyczne, w tym skierowanie mojej uwagi na operatory potęgowo ograniczone. Dziękuję za ciepłą gościnność, która towarzyszyła mi zarówno podczas półrocznego stażu w Polskiej Akademii Nauk w Warszawie jak i podczas seminarium "Teoria Operatorów".

Panom dr. Zbigniewowi Burdakowi oraz doc. dr. hab. Markowi Słocińskiemu dziękuję serdecznie za owocną współpracę nad wspólnym artykułem. Jestem również wdzięczny Panu dr. Zbigniewowi Burdakowi za pomoc w redakcji rozprawy doktorskiej.

Panu dr. Michałowi Wojtylakowi dziękuję za zainteresowanie mnie tematyką wykraczającą poza ramy rozprawy doktorskiej oraz wszelką pozytywną motywację.

Serdecznie dziękuję Panu prof. dr. hab. Janowi Stochelowi za wykłady, które zdecydowały o kierunku moich zainteresowań matematycznych oraz za wszelką udzieloną mi pomoc w trakcie studiów doktoranckich.

Panu prof. dr. hab. Yuriemu Tomilovowi dziękuję za wskazanie mi pominiętej literatury.

Dziękuję Pani mgr Ewie Jankowskiej oraz Panu mgr. Krzysztofowi Wilguckiemu za skierowanie mnie na ścieżki matematyki.

Wreszcie pragnę podziękować całej mojej rodzine, a przede wszystkim moim wspaniałym rodzicom Teresie i Jarosławowi oraz siostrze Małgorzacie.

Spis treści

Wstęp

Asymptotyka orbit operatorów ograniczonych na przestrzeniach Hilberta jest pojęciem często badanym zarówno z uwagi na samą Teorię Operatorów jak i na jej zastosowania w innych dziedzinach matematyki. W niniejszej rozprawie skupiliśmy się na dwóch aspektach asymptotyki operatorów ograniczonych rozumianej zgodnie z Definicją 1.0.1.

Pierwszym z nich jest rozwinięcie idei Putnama z 1975 roku przedstawionej w pracy [**49**]. Putnam pokazał, że zupełnie nieunitarna część hiponormalnej kontrakcji jest klasy $C_{\cdot 0}$. W ten sposób rozpoczęto badanie warunków normowych implikujących silną stabilność danej kontrakcji lub jej sprzężenia. Już w roku 1977 Okubo pokazał, że wynik ten można rozszerzyć na paranormalne kontrakcje (zob. [**43**]). Następnie w pracach [**16, 19**] Duggal oraz Kubrusly przenieśli wynik Putnama na klasę kontrakcji k-paranormalnych, $(p, 1)$-quasihiponormalnyh oraz $(1, k)$-quasihiponormalnych (zob. Definicje 2.4.2, 2.4.4). W rozprawie przedstawiono dalsze uogólnienia wyniku Putnama (zob. Podrozdział 2.4), m. in. na klasę n-hiperkontrakcji oraz (p, k)-quasinormalnych kontrakcji. Jednak głównym celem pierwszego rozdziału nie jest rozszerzenie wyniku Putnama na kolejne klasy kontrakcji, ale podanie kryterium, które pozwala na prostą weryfikację asymptotyki danej klasy operatorów. Narzędziem pozwalającym na skuteczą weryfikację warunków normowych definiujących klasy operatorów jest pojęcie tzw. ciągów wstecznych.

Definicja 2.2.1. *Dla operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ nazywamy* ciągiem wstecznym *(względem T) wtedy i tylko wtedy, gdy $Tx_{n+1} = x_n$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dodatkowo, jeżeli rozważany ciąg jest ograniczony, to nazwiemy go ograniczonym ciągiem wstecznym.

Wspomniane powyżej narzędzie można przedstawić w formie następującego kryterium.

TWIERDZENIE 2.4.1. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie kontrakcją. Następujące warunki są równoważne :*

- *dla każdego ograniczonego ciągu wstecznego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ względem T, ciąg jego norm $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest stały,*
- *zupełnie nieunitarna część operatora T jest klasy $C_{\cdot 0}$.*

□

Wynik ten poprzedziliśmy ogólniejszym rezultatem (zob. Twierdzenie 2.3.3) dotyczącym operatorów potęgowo ograniczonych. Jest to odpowiedź na pytanie Pana prof. dr. hab. Jaroslava Zemanka, dotyczące uogólnienia Twierdzenia 2.4.1. W celu rozszerzenia kryterium na operatory potęgowo ograniczone posłużyliśmy się konstrukcją asymptoty izometrycznej pochodzącą od Szökefalvi-Nagya (zob. [**51**]) rozwiniętą dalej przez Kérchy'ego (zob. [**29**]).

Część rozważań stojąca u podstaw wykorzystania ciągów wstecznych w przypadku operatorów potęgowo ograniczonych ma swój odpowiednik dla ograniczonych ciągłych półgrup operatorów na przestrzeni Banacha (zob. np. [**11, 14, 54**]). Ciągłym odpowiednikiem pojęcia ciągów wstecznych są tzw. zupełne trajektorie (zob. [**54**]). Dzięki uwagom Pana prof. dr. hab. Yuria Tomilova fakt ten nie pozostał pominięty. W tym miejscu pragnimy jednak zaznaczyć, że uzyskane wyniki dyskretne powstały bez wiedzy nt. przypadku ciągłego.

Ostatnim akcentem pierwszego rozdziału jest próba odniesienia uzyskanych rezultatów do ogólnego przypadku operatorów ograniczonych, nie koniecznie potęgowo ograniczonych. Własność asymptotycznej zbieżności zastąpiliśmy słabszym warunkiem, tzw. własnością Putnama-Fuglede (zob. Definicja 2.6.1) ściśle związanym z Twierdzeniem Putnama-Fuglede. Z uwagi na brak narzędzi odpowiadających asymptocie izometrycznej zdecydowaliśmy się na bezpośrednią weryfikację własności Putnama-Fuglede dla wcześniej rozpatrywanych klas operatorów. Między innymi ponownie wykorzystując technikę ciągów wstecznych pokazaliśmy, że operatory k^*-paranormalne posiadają własność Putnama-Fuglede. Jednak najważniejszym rezultatem uzyskanym na zakończenie pierwszego rozdziału jest przykład operatora paranormalnego nieposiadającego wspomnianej własności. Przykład ten przedstawia operator paranormalny S oraz operator unitarny U takie, że zachodzi $SX = XU$ dla pewnego operatora X, ale jednocześnie nie zachodzi warunek $S^*X = XU^*$. W ten sposób pokazaliśmy, że żadna asymetryczna wersja Twierdzenia Putnama-Fuglede dla operatorów paranormalnych nie jest prawdziwa.

Zdecydowana większość wyników zawartych w pierwszym rozdziale pochodzi z prac [**44, 45, 46**].

Drugim poruszanym aspektem własności asymptotycznych jest ich wpływ na Problem Podprzestrzeni Niezmienniczych (Problem 3.6.1). Problem ten w prosty sposób można sprowadzić do problemu dla kontrakcji klasy C_{10} oraz C_{00} (zob. Podrozdział 3.6). W świetle rezultatów uzyskanych w drugim rozdziale rozprawy doktorskiej redukujemy przypadek kontrakcji klasy C_{10} do przypadku kontrakcji klasy C_{10}, której asymptota izometryczna jest absolutnie ciągłym operatorem unitarnym bez wektorów wędrujących (zob. Twierdzenie 3.6.2), gdzie wektory wędrujące definujemy jak następuje.

DEFINICJA 3.1.3. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Wektor w nazwiemy* wędrującym *jeśli*

$$\langle V^n w, w \rangle = 0,$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Treść drugiego rozdziału rozprawy doktorskiej jest kontynuacją idei przedstawionych przez Mlaka, Foiaşa oraz Suciu dotyczących miar Szegö (zob. [**21, 39, 40**]). Skupiamy się w nim na rozkładach izometrii reprezentujących własności Szegö miar spektralnych. Tego typu rozkłady nazywamy rozkładami typu Szegö (zob. Definicja 3.2.1). Istotę rozważań prowadzonych w tym rozdziale zajmuje rozkład typu Szegö powstały dzięki domkniętemu liniowemu rozpięciu wszystkich wektorów wędrujących dla danej izometrii. Głównym rezultatem uzyskanym w tej części rozprawy doktorskiej jest opis rozważanego rozkładu w języku klasycznego rozkładu Lebesgue'a dla operatorów unitarnych. Wynik ten został opublikowany w pracy [**13**].

TWIERDZENIE (por. Twierdzenia 3.3.7, 3.2.3). *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią oraz niech H_w będzie domkniętą podprzestrzenią rozpinaną przez wszystkie wektory wędrujące dla V.*

Wtedy $\mathcal{H}_w$ jest podprzestrzenią redukującą izometrię V oraz rozkład $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$ można opisać jak następuje:

- *Jeśli V jest operatorem unitarnym nieposiadającym wektorów wędrujących, to $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$,*

- *w przeciwnym przypadku, mamy* $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{sing}$ *oraz* $\mathcal{H}_w = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s$.

$\square$

Dodatkowo podaliśmy inny rozkład typu Szegö (zob. Twierdzenie 3.5.2) oraz zaprezentowaliśmy jego częściowy opis (zob. Twierdzenie 3.5.3). Pytaniem otwartym pozostaje prawdziwość tego opisu w sytuacji ogólnej (zob. Problem 3.5.4).

ROZDZIAŁ 1

Preliminaria

Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ będą oznaczać odpowiednio zbiór liczb całkowitych nieujemnych, zbiór liczb całkowitych dodatnich, zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb rzeczywistych oraz zbiór liczb zespolonych.

Symbole $\mathcal{H}$ oraz $\mathcal{K}$ rezerwujemy dla zespolonych przestrzeni Hilberta. Przestrzeń zespolonych ciągów sumowalnych z kwadratem będziemy oznaczać przez l^2. Symbol $L^2(\sigma, \mu)$ rezerwujemy dla przestrzeni generowanej przez funkcje całkowalne z kwadratem względem miary μ o nośniku σ. Ponadto $L^2(\mu) := L^2(\mathbb{T}, \mu)$, gdzie przez $\mathbb{T}$ oznaczamy okrąg jednostkowy. Domknięcie w $L^2(\mu)$ algebry wszystkich wielomianów analitycznych oznaczamy przez $H^2(\mu)$. Jeśli m jest miarą Lebesgue'a na okręgu jednostkowym, to $H^2 := H^2(m)$ jest klasyczną przestrzenią Hardy'ego.

Domknięcie liniowego rozpięcia podzbioru A przestrzeni $\mathcal{H}$ będziemy oznaczać przez $\operatorname{span} A$.

Przez operator ograniczony na $\mathcal{H}$ rozumiemy liniowe odwzorowanie $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ograniczone na kuli jednostkowej, tzn. $\sup\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\| < \infty$. Przeciwobraz zera nazywamy jądrem operatora T oraz oznaczamy przez $\mathcal{N}(T)$. Obraz operatora T będzie oznaczać przez $\mathcal{R}(T)$. Algebrę operatorów ograniczonych na danej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oznaczamy przez $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Podprzestrzeń $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ nazywamy *redukującą* dla operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, gdy $\mathcal{M}$ jest niezmiennicza dla T oraz dla T^*, gdzie T^* oznacza operator sprzężony do operatora T. Operator T nazwiemy *normalnym*(*unitarnym*), jeśli zachodzi $T^*T = TT^*$ (odp. $T^*T = Id = TT^*$). Dalej, operator T nazwiemy *kontrakcją*(*izometrią*), jeśli $\|T\| \leqslant 1$ (odp. $T^*T{=}Id$). Klasą operatorów zachowującą wiele własności kontrakcji są tzw. operatory potęgowo ograniczone, gdzie operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy *potęgowo ograniczonym* wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy *dodatnim*(ozn. $T \geqslant 0$), gdy $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ dla $x \in \mathcal{H}$.

Spośród wszystkich operatorów ograniczonych możemy wyróżnić kilka klas operatorów posiadających szczególe własności asymptotyczne.

Definicja 1.0.1. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy*

- *operatorem* klasy $C_{0\cdot}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x\| = 0$, *dla dowolnego* $x \in \mathcal{H}$,
- *operatorem* klasy $C_{1\cdot}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x\| > 0$, *dla dowolnego* $x \in \mathcal{H}$,
- *operatorem* klasy $C_{\cdot 0}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* T^* *jest klasy* $C_{0\cdot}$,
- *operatorem* klasy $C_{\cdot 1}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* T^* *jest klasy* $C_{1\cdot}$,
- *operatorem* klasy C_{ij} *wtedy i tylko wtedy, gdy* T *jest operatorem klasy* $C_{i\cdot}$ *oraz* $C_{\cdot j}$, *dla* $i, j \in \{0, 1\}$.

Symbole $\sigma(T), \sigma_p(T)$ oraz $\sigma_{ap}(T)$ oznaczają odpowiednio widmo, widmo punktowe oraz widmo aproksymatywne operatora T. Dokładniej $\lambda \in \sigma(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ograniczony operator odwrotny do $\lambda - T$. Dalej $\lambda \in \sigma_p(T)$, gdy istnieje niezerowy $x \in \mathcal{H}$ taki, że $Tx = \lambda x$ oraz $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, gdy istnieje ciąg wektorów $x_n \in \mathcal{H}$ takich, że $\|x_n\| = 1$ oraz $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ dla $n \to \infty$.

Przypomnijmy dwa klasyczne rozkłady.

Twierdzenie 1.0.2 (Wold [**56**]). *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Wtedy istnieje jedyny redukujący rozkład $\mathcal{H} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{H}_s$ taki, że $V|_{\mathcal{H}_u}$ jest operatorem unitarnym, a $V|_{\mathcal{H}_s}$ jest przesunięciem jednostronnym.*

Ponadto,

$$\mathcal{H}_u = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_s = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^n(\mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}).$$

□

Dla izometrii V operator $V|_{\mathcal{H}_u}$ nazywamy *częścią unitarną* operatora V, a $V|_{\mathcal{H}_s}$ nazywamy *częścią przesunięcia jednostronnego* operatora V.

Niech E oznacza miarę spektralną minimalnego unitarnego rozszerzenia izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Wtedy nieujemną miarę borelowską na okręgu jednostkowym $\mathbb{B}(\mathbb{T}) \ni \omega \mapsto \langle E(\omega)x, x\rangle$ nazywamy *miarą elementarną*. Twierdzenie Lebesgue'a o rozkładzie miary (zob. [**23**]) mówi o tym, że każdą nieujemną miarę μ można zapisać jako sumę miary absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a oraz miary singularnej względem miary Lebesgue'a. W konsekwencji otrzymujemy rozkład Lebesgue'a dla operatorów unitarnych.

TWIERDZENIE 1.0.3 (Lebesgue). *Niech* $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *będzie operatorem unitarnym. Wtedy istnieje jedyny rozkład* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}$ *redukujący* V *taki, że*

- *przestrzeń* $\mathcal{H}_{ac}$ *składa się z wektorów, których miary elementarne są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a,*
- *przestrzeń* $\mathcal{H}_{sing}$ *składa się z wektorów, których miary elementarne są singularne względem miary Lebesgue'a.*

$\square$

Dla operatora unitarnego V operator $V|_{\mathcal{H}_{ac}}$ nazywamy *częścią absolutnie ciągłą* operatora V, a $V|_{\mathcal{H}_{sing}}$ nazywamy *częścią singularną* operatora V.

ROZDZIAŁ 2

Własności asymptotyczne

Ten rozdział rozprawy będzie głównie poświęcony własnościom asymptotycznym operatorów ograniczonych zaprezentowanym w Definicji 1.0.1.

2.1. Silna stabilność a klasa operatorów $C_{0\cdot}$

Silna stabilność operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (tzn. ciąg operatorów $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do 0 w silnej topologii operatorowej) implikuje przynależność do klasy operatorów $C_{0\cdot}$. Przeciwna implikacja nie jest jednak prawdziwa. Co więcej każda orbita operatora klasy $C_{0\cdot}$, może nie być zbieżna do zera. Aby to zobaczyć przyjrzyjmy się poniższemu przykładowi.

Przykład 2.1.1. Niech $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb naturalnych takim, że

$$\begin{cases} N_1 &= 1 \\ N_{k+1} &= 3N_k + 2N_k^2 \text{ , dla } k \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

Rozpatrzmy przesunięcie ważone S z wagami $w_1, w_2, ...$ (tzn. $S : l^2 \ni (x_1, x_2, ...) \mapsto (0, w_1x_1, w_2x_2, ...) \in l^2$), gdzie

$$\begin{cases} w_1 &= 1 \\ w_i &= \frac{1}{2} \text{ , dla } i = N_k + 1, N_k + 2, ..., 3N_k \\ w_i &= 2^{\frac{1}{N_k}} \text{ , dla } i = 3N_k + 1, 3N_k + 2, ..., N_{k+1}. \end{cases}$$

Przy tak określonych wagach otrzymujemy $w_{N_k+1}w_{N_k+2}\cdot\dots\cdot w_{N_{k+1}} = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$.

Niech $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oznacza bazę kanoniczną w l^2. Dla niezerowego elementu $x = (x_1, x_2, ...) \in l^2$ istnieje indeks i_0 taki, że $x_{i_0} \neq 0$. Na mocy definicji operatora S otrzymujemy $S^{N_k}e_1 = e_{N_k+1}$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Zatem $\|S^{N_k-i_0}x\| \geqslant \|S^{N_k-i_0}x_{i_0}e_{i_0}\| = \frac{1}{w_1w_2\cdot\dots\cdot w_{i_0}}|x_{i_0}|$. Ostatecznie, $S^n x \not\to 0$, dla dowolnego niezerowego elementu $x \in l^2$. Czyli S jest zupełnie nie silnie stabilny.

Wykażemy, że jest to operator klasy $C_{0\cdot}$. Aby się o tym przekonać ustalmy $x = (x_1, x_2, ...) \in l^2$, $\varepsilon > 0$ oraz bez straty dla ogólności rozumowania załóżmy, że $\|x\| = 1$. Ciąg $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest silnie rosnący, więc istnieje $N \in \{N_k | k = 1, 2, ...\}$ takie, że $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^2 < \frac{\varepsilon}{32}$ oraz $\left(\frac{1}{2^N}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Dzięki temu otrzymujemy:

$$\|S^{2N}x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \|S^{2N}e_i\|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2 \|S^{2N}e_j\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \|S^N(w_i w_{i+1} ... w_{i+N-1} e_{i+N})\|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2 |w_j w_{j+1} ... w_{j+2N-1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \|w_i w_{i+1} \cdot ... \cdot w_N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} S^N e_{i+N}\|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2 |\underbrace{2^{\frac{1}{N}} 2^{\frac{1}{N}} \cdot ... \cdot 2^{\frac{1}{N}}}_{2N}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \| \left(\frac{1}{2}\right)^{N} e_{i+2N}\|^2 + \frac{\varepsilon}{32} 16 \leqslant \|x\| \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Jednak kontrakcje klasy $C_0.$ są operatorami silnie stabilnymi. Podobnie, operator potęgowo ograniczony jest klasy $C_0.$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem silnie stabilnym.

Rzeczywiście, jeśli $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest operatorem klasy $C_0.$, to dla ustalonego $x \in \mathcal{H}$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\|T^k x\| < \varepsilon$. Zatem dla dowolnego $m > k$ otrzymujemy

$$\|T^m x\| = \|T^{m-k} T^k x\| \leqslant \|T^{m-k}\| \|T^k x\| \leqslant \varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|.$$

2.2. Ciągi wsteczne a asymptotyczne własności operatorów potęgowo ograniczonych

W ninejszym podrozdziale zaprezentujemy narzędzie, pozwalające na użyteczną charakteryzację asymptotycznych własności operatorów, czyli tzw. ograniczone ciągi wsteczne.

Definicja 2.2.1. *Dla operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ nazywamy* ciągiem wstecznym *(względem T) wtedy i tylko wtedy, gdy $Tx_{n+1} = x_n$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dodatkowo, jeżeli rozważany ciąg jest ograniczony, to nazwiemy go ograniczonym ciągiem wstecznym.

Większość rozważań prowadzonych w tym podrozdziale może, a nawet powinna być widziana jako dyskretna wersja rezultatów znanych dla ograniczonych ciągłych półgrup operatorów na przestrzeni Banacha (zob. np. [**11, 14, 54**]). Tak ciągłym odpowiednikiem pojęcia ciągów wstecznych są tzw. *zupełne trajektorie* (zob. [**54**]). Stabilność ciągłych półgrup operatorów jest tematem licznych prac. Pracą pozwalającą na zapoznanie się z tą tematyką jest przeglądowy artykuł [**14**]. W tym miejscu pragniemy jednak zaznaczyć, że uzyskane wyniki dyskretne powstały bez wiedzy nt. przypadku ciągłego.

Zanim przejdziemy do charakteryzacji operatorów potęgowo ograniczonych klasy $C_{\cdot 0}$ oraz $C_{\cdot 1}$, przypomnijmy konstrukcję pochodzącą od Szökefalvi-Nagya [**51**] (zob. również [**29**]).

Ustalmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ oraz operator potęgowo ograniczony $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dla ustalonej granicy Banacha ϕ forma półtoraliniowa

$$[x, y] := \phi(\{\langle T^{*n}x, T^{*n}y\rangle\}_{n\in\mathbb{N}})$$

jest semi-iloczynem skalarnym. Przestrzeń ilorazowa $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$, gdzie $\mathcal{H}_0 := \{x \in \mathcal{H} : [x, x] = 0\}$ wyposażona w iloczyn skalarny $[x+\mathcal{H}_0, y+\mathcal{H}_0] = [x, y]$ jest przestrzenią unitarną. Niech $\mathcal{K}$ oznacza przestrzeń Hilberta, która jest uzupełnieniem przestrzeni $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$ oraz niech X oznacza naturalny operator rzutowania, tzn. $X : \mathcal{H} \ni x \mapsto x + \mathcal{H}_0 \in \mathcal{K}$. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$ otrzymujemy

$$\|Xx\| = \|XT^*x\|.$$

Wobec tego istnieje izometria $V : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ taka, że $VX = XT^*$.

Izometria V nazywana jest *asymptotą izometryczną* operatora T^*.

Poniższy lemat pokazuje związek pomiędzy ciągami wstecznymi, a powyższą konstrukcją. Przyjmijmy oznaczenie $\mathcal{O}(T) := \{x \in \mathcal{H} :$ istnieje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograniczony ciąg wsteczny względem T taki, że $x = x_0\}$.

LEMAT 2.2.2. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem potęgowo ograniczonym. Wtedy*

$$X^*(\mathcal{K}) = \mathcal{O}(T),$$

gdzie X oznacza operator rzutowania zdefiniowany w powyższej konstrukcji.

DOWÓD. Ustalmy $x \in \mathcal{K}$. Niech $x_n := X^*V^nx$, gdzie V jest asymptotą izometryczną operatora T^*. Wtedy wobec równości $X^*V^* = TX^*$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$Tx_{n+1} = TX^*V^{n+1}x = X^*V^*V^{n+1}x = x_n.$$

Co więcej $\|x_n\| \leqslant \|X^*\|\|V^nx\| = \|X\|\|x\|$. Zatem $X^*x = x_0 \in \mathcal{O}(T)$. Wobec dowolności wyboru $x \in \mathcal{K}$ otrzymujemy $X^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{O}(T)$.

Dla dowodu przeciwnej inkluzji ustalmy $x \in \mathcal{O}(T)$. Z definicji zbioru $\mathcal{O}(T)$ wynika, że istnieje ograniczony ciąg wsteczny $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rozpoczynający się od x. Niech $y \in \mathcal{H}$, wówczas

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle T^n x_n, y\rangle| = |\langle x_n, T^{*n}y\rangle| \leqslant \|x_n\|\|T^{*n}y\|$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \liminf_{n\to\infty} \|T^{*n}y\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|\|Xy\|$, więc na mocy Twierdzenia 1 z [**50**] otrzymujemy że $x \in X^*(\mathcal{K})$.

□

Uwaga 2.2.3. *Operator X jest jednoznaczy z dokładnością do wyboru granicy Banacha, jednak obraz $X^*(\mathcal{K})$ nie jest zależny od wyboru granicy Banacha.*

Jak wspomnieliśmy we wcześniejszym podrozdziale dla operatora potęgowo ograniczonego $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ oraz ustalonego $x \in \mathcal{H}$, zachodzi

$$\|T^n x\| \to 0 \iff \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x\| = 0.$$

Wobec tego dla operatora potęgowo ograniczonego T oraz X pochodzącego z konstrukcji asymptoty izometrycznej mamy $\mathcal{N}(X) = \{x \in \mathcal{H} : T^{*n}x \to 0\}$. Zatem na mocy rozkładu $\mathcal{H} = \mathcal{N}(X) \oplus \overline{X^*(\mathcal{K})}$ otrzymujemy:

Wniosek 2.2.4. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem potęgowo ograniczonym, wówczas*

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{H} : T^{*n}x \to 0\} \oplus \overline{\mathcal{O}(T)}.$$

Na mocy powyższego wniosku otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.5. *Potęgowo ograniczony operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest klasy $C_{\cdot 1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\mathcal{O}(T)} = \mathcal{H}$.* □

Prostym jest fakt, że zbioru $\mathcal{O}(T)$ nie da się zastąpić zbiorem wszystkich początków ciągów wstecznych. Ciekawszym jest fakt, że rozważany zbiór $\mathcal{O}(T)$ może być istotnie mniejszy od zbioru początków ciągów wstecznych nawet w przypadku gdy ich domknięcia są równe (czyli w przypadku operatorów klasy $C_{\cdot 1}$). Aby się o tym upewnić przyjrzyjmy się poniższemu przykładowi.

Przykład 2.2.6. Niech $\mathcal{H} = l^2$. Rozważmy ośrodkową przestrzeń Hilberta $\mathbb{H} := l^2(\mathcal{H}) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H} | \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty\}$ z normą zadaną w naturalny sposób $\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\| := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2}$. Elementy przestrzeni $\mathbb{H}$ będziemy oznaczać przez $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Niech S_w oznacza ważone przesunięcie wsteczne z wagami $w = (w_1, w_2, ...)$, tzn. $S_w : \mathcal{H} \ni (x_1, x_2, ...) \mapsto (w_1x_2, w_2x_3...) \in \mathcal{H}$. Jeśli weźmiemy $w_i^n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $i > 2$ oraz $w_1^n = w_2^n = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$, to $T = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_{w^n}$ jest kontrakcją klasy $C_{\cdot 1}$.

Istotnie, mamy $T^m = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_{w^n}^m$, gdzie

$$S_{w^n}^m(x_1, x_2, x_3, ...) = (w_1^n w_2^n \cdot ... \cdot w_m^n x_{m+1}, w_2^n w_3^n \cdot ... \cdot w_{m+1}^n x_{m+2}, ...)$$

oraz $\lim_{m\to\infty} w_1^n w_2^n \cdot ... \cdot w_m^n = \lim_{m\to\infty} (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$.

Rozważmy teraz $x = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{n}, 0, 0, ...) \in \mathbb{H}$. Element x jest początkiem ciągu wstecznego $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_m = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_+} (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{m}, (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}, 0, 0, ...) \in \mathbb{H}$ dla $m \in \mathbb{N}$. Załóżmy teraz nie wprost, że $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}$ jest ciągiem wstecznym o początku w x. Wtedy $x = T^m b_m$, a zatem mamy $b_m = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (q_1, q_2, ..., q_m, (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}, 0, 0, ...)$ dla pewnych zespolonych liczb $q_1, q_2, ..., q_m$. Czyli $\|a_m\| \leqslant \|b_m\|$, ale $\|a_m\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{n})^{2(\frac{1}{2}+\frac{1}{m})} \to \infty$ (dla $m \to \infty$). Ostatecznie $x \notin \mathcal{O}(T)$. □

Kolejną ważną konsekwencją Wniosku 2.2.4 jest następujące, znane wcześniej, twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.7 (Vũ, [**55**]). *Potęgowo ograniczony operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest klasy $C_{\cdot 0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{O}(T) = \{0\}$.* □

Inny dowód tego twierdzenia (w przypadku operatorów potęgowo ograniczonych na przestrzeni Banacha) oraz analogicznej wersji w przypadku ciągłych półgrup można znaleść w pracy [**55**].

Wniosek 2.2.8. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie odwracalnym, potęgowo ograniczonym operatorem. Wówczas $T^{*n}x \to 0$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\|T^{-n}x\| \to \infty$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$.*

Dowód. Operator T^* jest potęgowo ograniczony. Dla dowodu pierwszej implikacji załóżmy, że T^* jest operatorem silnie stabilnym, czyli operatorem klasy $C_{0\cdot}$. Na mocy Twierdzenia 2.2.7 otrzymujemy, że każdy nietrywialny ciąg wsteczny operatora T^* jest nieograniczony. Dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$ ciąg $x_n = T^{-n}x$ jest ciągiem wstecznym. Zatem $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^{-n}x\| = \infty$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$.

Teraz jeśliby dla jakiegoś $x \in \mathcal{H}$ istniał wstępujący ciąg $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T^{-n_k}x\| < N$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymalibyśmy

$$\|T^{-n}x\| = \|T^{n_k-n}T^{-n_k}x\| \leqslant \|T^{n_k-n}\|\|T^{-n_k}x\| \leqslant N \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|,$$

gdyż $n_k > n$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji dla każdego $x \in \mathcal{H}$ mamy $\|T^{-n}x\| = \infty$.

Przeciwna implikacja jest automatyczną konsekwencją Twierdzenia 2.2.7. □

2.3. Postać potęgowo ograniczonych operatorów o normowo-stałych ciągach wstecznych

Do prezentacji centralnego wyniku tego rozdziału będziemy potrzebować następującego wyniku, który jest uogólnieniem Stwierdzenia VII.3.4 z [**52**].

Lemat 2.3.1 (Kérchy, [**29**]). *Jeśli $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest operatorem potęgowo ograniczonym, to T może być przedstawione w następującej postaci*

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.3.1}$$

gdzie T_{11}, T_{22} są potęgowo ograniczone, T_{11} jest klasy $C_{0\cdot}$ oraz T_{22} jest klasy $C_{1\cdot}$.

Dowód powyższego lematu można znaleźć w pracy [**29**], nie mniej jednak zaprezentujemy tu odrębne rozumowanie.

Dowód. Oznaczmy $\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{H} |\ T^n x \to 0\}$. Wtedy przestrzeń $\mathcal{N}$, z uwagi na potęgową ograniczoność T, jest domknięta. Ponadto przestrzeń ta jest niezmiennicza dla T. Zatem postać macierzowa operatora T względem rozkładu $\mathcal{H} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$ jest postaci (2.3.1). Wobec tego operator $T_{11} = T|_{\mathcal{N}}$ jest operatorem (potęgowo ograniczonym) klasy $C_{0\cdot}$. Przestrzeń $\mathcal{N}^\perp$ jest niezmiennicza dla T^* oraz zachodzi $T_{22}^* = T^*|_{\mathcal{N}^\perp}$. Zatem T_{22}^* jest operatorem potęgowo ograniczonym, a więc T_{22} jest potęgowo ograniczony.

Pozostało nam do wykazania, że T_{22} jest operatorem klasy $C_{1\cdot}$. Aby się o tym przekonać załóżmy, że $T_{22}^n f \to 0$ dla pewnego $f \in \mathcal{N}^\perp$. Zatem dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\|T_{22}^{n_0} f\| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

gdzie $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|$. Z definicji T_{22} mamy $(T - T_{22})x = P_{\mathcal{N}} T x \in \mathcal{N}$ dla każdego $x \perp \mathcal{N}$. Stąd dla dowolnego $k \in \{1, 2, 3, ..., n_0\}$ istnieje $m_k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\|T^{m'+k-1}(T - T_{22})T_{22}^{n_0-k} f\| = \|T_{11}^{m'+k-1}(T - T_{22})T_{22}^{n_0-k} f\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n_0}$$

dla wszystkich $m' \geqslant m_k$. Ostatecznie dla $m := \max\{m_k |\; k = 1, 2, ..., n_0\}$ otrzymujemy

$$\|T^{m+n_0} f\| = \|T^m(T^{n_0} - T^{n_0-1}T_{22} + T^{n_0-1}T_{22} - T^{n_0-2}T_{22}^2 + ... + \\ + TT_{22}^{n_0-1} - T_{22}^{n_0} + T_{22}^{n_0})f\| = \|\sum_{k=1}^{n_0} T^{m+k-1}(T - T_{22})T_{22}^{n_0-k} f + T^m T_{22}^{n_0} f\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \|T^{m+k-1}(T - T_{22})T_{22}^{n_0-k} f\| + \|T^m T_{22}^{n_0} f\| \leqslant n_0 \tfrac{\varepsilon}{2n_0} + M \tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Zatem $T^n f \to 0$, co wobec $f \in \mathcal{N}^{\perp}$ oznacza, że $f = 0$.

Ostatecznie T_{22} jest klasy $C_{1\cdot}$. □

UWAGA 2.3.2. *Powyższy lemat nie daje żadnych informacji o operatorze T_{21}.*

Przykład operatora $T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ *pokazuje, że operator* T_{21} *nie musi być operatorem potęgowo ogranicznym.*

Co więcej, nie dla każdego potęgowo ograniczonego operatora T_{21} *operator* T *zadany poprzez równość* (2.3.1) *jest operatorem potęgowo ograniczonym. Istotnie, niech* $T = \begin{bmatrix} S^* & \frac{1}{2}Id \\ 0 & S \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(l^2 \oplus l^2)$, *gdzie* S *oznacza przesunięcie jednostronne. Operator* T_{21} *jest potęgowo ograniczonym operatorem klasy* $C_{0\cdot}$ *(a nawet silną kontrakcją), jednak*

$$\|T^n(0 \oplus (1, 0, 0, ...))\| \to \infty \; (\text{dla } n \to \infty).$$

W oparciu o Lemat 2.3.1 udowodnijmy następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.3.3. *Niech* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *będzie operatorem potęgowo ograniczonym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- *dla każdego ograniczonego ciągu wstecznego* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *ciąg jego norm* $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest stały,*

- *operator T możne być przedstawiony jako $T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & U \end{bmatrix}$, gdzie U jest operatorem unitarnym, a T_{11} jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$.*

DOWÓD. Stosując Lemat 2.3.1 do operatora T^* możemy przyjąć, że $T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, gdzie operatory T_{11}, T_{22} są potęgowo ograniczone, $T_{11} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ jest klasy $C_{\cdot 0}$ oraz $T_{22} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ jest klasy $C_{\cdot 1}$. Przy czym $\mathcal{H}_2$ jest przestrzenią niezmienniczą dla T oraz $T_{22} = T|_{\mathcal{H}_2}$. Stąd każdy ograniczony ciąg wsteczny względem T_{22} jest ograniczonym ciągiem wstecznym względem T.

Zakładając, że każdy ciąg norm ograniczonego ciągu wstecznego jest stały otrzymujemy, że T_{22} jest izometrią na $\overline{\mathcal{O}(T_{22})}$. Ale dzięki Twierdzeniu 2.2.5 zachodzi $\overline{\mathcal{O}(T_{22})} = \mathcal{H}_2$. Zatem T_{22} jest izometrią. Na mocy rozkładu Wolda $T_{22} = U \oplus S$, gdzie U jest częścią unitarną T_{22} oraz S jest przesunięciem jednostronnym. Ale T_{22} jest operatorem klasy $C_{\cdot 1}$, więc $T_{22} = U$.

Dla dowodu przeciwnej implikacji załóżmy, że $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczonym ciągiem wstecznym względem T. Niech $x_n = a_n + b_n$, gdzie $a_n \in \mathcal{H}_1$ oraz $b_n \in \mathcal{H}_2$. Otrzymujemy

$$T_{11}a_{n+1} + (T_{21}a_{n+1} + Ub_{n+1}) = Ta_{n+1} + Tb_{n+1} = Tx_{n+1} = x_n = a_n + b_n.$$

Zatem $T_{11}a_{n+1} = a_n$ oraz $\|a_n\| \leqslant \|x_n\|$. Co oznacza, że $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczonym ciągiem wstecznym względem T_{11}, ale T_{11} jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$. Na mocy Twierdzenia 2.2.7 otrzymujemy $a_n \equiv 0$. Stąd

$$\|x_{n+1}\| = \|b_{n+1}\| = \|Ub_{n+1}\| = \|b_n\| = \|x_n\|.$$

□

2.4. Zastosowania w przypadku kontrakcji

Motywacją powyższego twierdzenia może być jego zastosowanie do badania asymptotycznych własności znanych klas kontrakcji. Twierdzenie 2.3.3 w przypadku kontrakcji przyjmuje nastepujacą postać.

TWIERDZENIE 2.4.1. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie kontrakcją. Następujące warunki są równoważne :*

- *dla każdego ograniczonego ciągu wstecznego $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ względem T, ciąg jego norm $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest stały,*
- *zupełnie nieunitarna część operatora T jest kontrakcją klasy $C_{\cdot 0}$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 2.3.3 operator T może być przedstawiony w odpowiedniej postaci macierzowej $T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & U \end{bmatrix}$, względem rozkładu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Ale $\|x\|^2 \geqslant \|T^*x\|^2 = \|T_{21}^*x\|^2 + \|U^*x\|^2 = \|T_{21}^*x\|^2 + \|x\|^2$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}_2$. Zatem $T_{21} = 0$. $\square$

W roku 1975 Putnam pokazał (zob. [**49**]), że zupełnie nieunitarna część hiponormalnej kontrakcji jest kontrakcją klasy $C_{\cdot 0}$. Wynik ten został rozszerzony na paranormalne kontrakcje w pracy [**43**]. W pracach [**16, 19**] Duggal oraz Kubrusly przenieśli wynik Putnama na klasę kontrakcji k-paranormalnych, p-hiponormalnych oraz na klasę kontrakcji $(1, k)$-quasihiponormalnych.

Powyższe twierdzenie jest narzędziem, które może być z powodzeniem użyte do rozstrzygnięcia czy część zupełnie nieunitarna kontrakcji spełniającej dany warunek normowy jest klasy $C_{\cdot 0}$.

Zaprezentujmy często rozważane w literaturze klasy operatorów(zob. np. [**1, 6, 15, 16, 19, 20, 22, 25, 26, 27, 36, 47, 53**]).

Definicja 2.4.2. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ spełniający warunek*

$$T^{*k}((T^*T)^p - (TT^*)^p)T^k \geqslant 0$$

dla $p > 0$ oraz dla $k \in \mathbb{N}$, nazywany jest (p, k)-quasihiponormalnym.

Operatory $(p, 0)$-quasihiponormalne są nazywane również operatorami *p-hiponormalnymi*. Kolejnym uogólnieniem klasy operatorów hiponormalnych są operatory *$k*$-paranormalne* oraz *k-paranormalne* (dla $k = 2$ nazywane odpowiednio operatorami *$*$-paranormalnymi* oraz *paranormalnymi*).

Definicja 2.4.3. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywany jest operatorem* $k*$-paranormalnym *jeśli*

$$\|T^*x\|^k \leqslant \|T^kx\|\|x\|^{k-1}$$

dla każdego $x \in \mathcal{H}$.

Definicja 2.4.4. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywany jest operatorem* k-paranormalnym *jeśli*

$$\|Tx\|^k \leqslant \|T^kx\|\|x\|^{k-1}$$

dla każdego $x \in \mathcal{H}$.

Agler w pracy [**1**] postawił następującą definicję.

Definicja 2.4.5. *Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Kontrakcja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywana jest n-hiperkontrakcją jeśli*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} T^{*k}T^k \geqslant 0.$$

Autorzy pracy [**20**] badają następującą klasę operatorów.

Definicja 2.4.6. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywany jest operatorem* klasy Q *jeśli*

$$\|Tx\|^2 \leqslant \frac{\|T^2x\|^2 + \|x\|^2}{2}$$

dla każdego $x \in \mathcal{H}$.

Zwróćmy uwagę, że kontrakcje klasy Q są 2-hiperkontrakcjami. Aronszajn w pracy [**4**] wykazał, że operator ograniczony może zostać rozszerzony do przesunięcia wstecznego na przestrzeni Bergmana (z jądrem reprodukującym $K(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-2}$) wtedy i tylko wtedy, gdy jest on 2-hiperkontrakcją klasy $C_{0\cdot}$. Wynik ten został uogólniony przez Aglera (zob. [**1**]). Mianowicie, operator ograniczony może zostać rozszerzony do przesunięcia wstecznego na przestrzeni Bergmana z jądrem reprodukującym $K(z,w) := (1 - z\overline{w})^{-n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on silnie stabilną n-hiperkontrakcją.

Przyjrzyjmy się teraz zależnością pomiędzy wspomnianymi klasami operatorów. Dla $p \geqslant q > 0$ każdy p-hiponormalny operator jest q-hiponormalny (zob. [**2**]). Wynika stąd, że każdy (p,k)-quasihiponormalny operator jest operatorem (q,l)-quasihiponormalnym, jeśli tylko $p \geqslant q$ oraz $k \leqslant l$. Dalej dzięki pracy [**53**] widzimy, że każdy p-hiponormalny operator jest paranormalny. Każdy operator paranormalny jest operatorem k-paranormalnym (zob. [**26**]). Operator hiponormalny jest zatem k-paranormalny, a więc w prosty sposób i $k*$- paranormalny.

Uwaga 2.4.7. *Jeśli $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest operatorem $k*$-paranormalnym, to otrzymujemy*

$$\|Tx\|^{2k} = \langle T^*Tx, x\rangle^k \leqslant \|T^*Tx\|^k\|x\|^k \leqslant \|T^k(Tx)\|\|Tx\|^{k-1}\|x\|^k$$

Co prowadzi do $\|Tx\|^{k+1} \leqslant \|T^{k+1}x\|\|x\|^k$, czyli T jest $(k+1)$-paranormalny.

Dzięki nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną, a średnią geometryczną operatory paranormalne są również operatorami klasy Q.

Poniższy diagram ilustruję inkluzję pomiędzy rozważanymi klasami operatorów (w istotnym przypadku $p \in (0, 1]$).

$$\begin{tikzcd}
 & k\,*\text{-paranormalny} \arrow[rr] & & k+1\text{-paranormalny} & \\
\text{hiponormalny} \arrow[ur] \arrow[rr] & & p\text{-hiponormalny} \arrow[rr] \arrow[d] & & \text{paranormalny} \arrow[ul] \arrow[d] \\
 & & (p,k)\text{-quasihiponormalny} & & \text{klasy } Q
\end{tikzcd}$$

Przejdźmy teraz do wykazania asymptotycznych własności kontrakcji należących do rozważanych klas.

Twierdzenie 2.4.8. *Część zupełnie nieunitarna kontrakcji (p, k)-quasihiponormalnej jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$.*

Dowód. Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie (p, k)-quasihiponormalną zupełnie nieunitarną kontrakcją. Dzięki pracy [**16**] część zupełnie nieunitarna p-hiponormalnej kontrakcji spełnia tezę. Załóżmy teraz, że $k \in \mathbb{N}_+$. Na mocy Twierdzenia 4 z [**53**] T spełnia nierówność

$$\|T^k x\|^2 \leqslant \|T^{k+1}x\|\|T^{k-1}x\|$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$ takich, że $\|x\| = 1$. Zgodnie z Twierdzeniem 2.4.1 ustalmy ograniczony ciąg wsteczny $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. Dzięki powyższej nierówności otrzymujemy

$$\|x_n\|^2 = \|x_{n+k}\|^2 \|T^k \frac{x_{n+k}}{\|x_{n+k}\|}\|^2 \leqslant \|x_{n+k}\|^2 \|T^{k+1} \frac{x_{n+k}}{\|x_{n+k}\|}\| \|T^{k-1} \frac{x_{n+k}}{\|x_{n+k}\|}\| =$$

$$= \|T^{k+1}x_{n+k}\|\|T^{k-1}x_{n+k}\| = \|x_{n-1}\|\|x_{n+1}\| \leqslant \left(\frac{\|x_{n-1}\| + \|x_{n+1}\|}{2} \right)^2$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$. Wynika stąd, że ciąg $\alpha_{n+1} := \|x_{n+1}\| - \|x_n\|$ jest niemalejący. Gdyby jednak $\alpha_i > 0$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, to $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie byłby ograniczony. Zatem $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem stałym. Ostatecznie na mocy Twierdzenia 2.4.1 otrzymujemy tezę. □

Zupełnie nieunitarne k-paranormalne kontrakcje również są operatorami klasy $C_{\cdot 0}$. Wynika to z ogólniejszego twierdzenia.

Twierdzenie 2.4.9. *Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie kontrakcją spełniającą następujący warunek:*

dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$ istnieje $k \in \{2, 3, ..., N\}$ takie, że

$$\|Tx\|^k \leqslant \|T^k x\| \|x\|^{k-1}.$$

Wtedy zupełnie nieunitarna część kontrakcji T jest klasy $C_{\cdot 0}$.

Dowód. Ustalmy ograniczony wsteczny względem T ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. W naturalny sposób możemy rozszerzyć ten ciąg na wszystkie liczby całkowice kładąc $x_{-n} := T^n x_0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Otrzymujemy teraz $Tx_{n+1} = x_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas na mocy założeń dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ istnieje $k_n \in \{2, 3, \cdots, N\}$ takie, że

$$\|x_n\| = \|Tx_{n+1}\| \leqslant (\|T^{k_n} x_{n+1}\| \|x_{n+1}\|^{k_n - 1})^{\frac{1}{k_n}} =$$

$$= (\|x_{n+1-k_n}\| \|x_{n+1}\|^{k_n-1})^{\frac{1}{k_n}}.$$

Stąd w oparciu o nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$\|x_n\| \leqslant (\|x_{n-k_n+1}\| \|x_{n+1}\|^{k_n-1})^{\frac{1}{k_n}} \leqslant \frac{\|x_{n-k_n+1}\| + (k_n - 1)\|x_{n+1}\|}{k_n}.$$

Czyli

$$\|x_n\| - \|x_{n-k_n+1}\| \leqslant (k_n - 1)(\|x_{n+1}\| - \|x_n\|).$$

Zatem dla pomocniczego ciągu $\alpha_n := \|x_n\| - \|x_{n-1}\|$, zachodzi

$$\frac{\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_{n-k_n}}{k_n - 1} \leqslant \alpha_{n+1}. \tag{2.4.1}$$

Z drugiej strony $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest ograniczonym ciągiem rosnącym, a więc $\alpha_n \geqslant 0$ oraz $\alpha_n \to 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$. Na mocy Twierdzenia 2.4.1 pozostaje wykazać, że $\alpha_n = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $\alpha_i > 0$. Wtedy dzięki nierówności (2.4.1) dla $n = i, i+1, \cdots, i+N-2$ otrzymujemy $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}, \ldots, \alpha_{i+N-1} > 0$. Zatem istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+N-1} > \varepsilon$. Ponownie dzięki (2.4.1), możemy indukcyjnie wykazać, że $\alpha_n > \varepsilon$ dla wszystkich $n > i$, co jest sprzeczne ze zbieżnością ciągu a_n do 0. □

Na zakończenie bieżącego paragrafu wykażmy, że zupełnie nieunitarna n-hiperkontrakcja jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$. Jak już wspomnieliśmy praca [**1**] zawiera charakteryzację n-hiperkontrakcji klasy $C_{0\cdot}$.

Najpierw pokażmy następujący techniczny lemat.

Lemat 2.4.10. *Niech $n \geqslant 2$. Jeśli ograniczony ciąg dwustronny liczb rzeczywistych $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ spełnia nierówność*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_{k+m} \geqslant 0, \tag{2.4.2}$$

dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$, to jest on ciągiem stałym.

Dowód. Przeprowadźmy dowód indukcyjny. Dla $n = 2$ nierówność (2.4.2) oznacza, że ciąg $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ jest wypukły, a wobec ograniczoności stały. Dla $n = 3$, połóżmy $b_m = a_{m+1} - a_m$, dla $m \in \mathbb{Z}$. Zatem nierówność (2.4.2) przyjmuje postać $b_{m+2} - 2b_{m+1} + b_m \geqslant 0$. Stąd oraz z ograniczoności ciągu $\{b_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ jest on stały. Zatem dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy $a_{m+1} = a_m + c$, dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Czyli, wobec ograniczoności ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, dostajemy $c = 0$.

Ustalmy $n > 3$ i załóżmy, że teza naszego lematu jest spełniona dla $2, 3, \dots, n-1$. Przyjmijmy, analogicznie jak wcześniej, że $b_m = \sum\limits_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{n}{k}a_{k+m}$. Wówczas nierówność (2.4.2) przyjmuje postać

$$b_{m+2} - 2b_{m+1} + b_m \geqslant 0.$$

Ponadto, $|b_m| \leqslant 2^{n-2}\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|$. Czyli $\{b_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ jest ciągiem wypukłym i ograniczonym, a zatem stałym. W zależności od znaku stałej dostajemy

$$\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{n}{k}a_{k+m} \geqslant 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{n}{k}\Big(-a_{k+m}\Big) \geqslant 0.$$

Zatem na mocy założenia dla $n-2$ otrzymujemy tezę. □

Przejdźmy teraz do dowodu zapowiedzianej własności.

Twierdzenie 2.4.11. *Ustalmy dowolne $n \geqslant 2$. Część zupełnie nieunitarna n-hiperkontrakcji jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$.*

Dowód. Ustalmy n-hiperkontrakcję $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zgodnie z Twierdzeniem 2.4.1 ustalmy ograniczony ciąg wsteczny $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Rozszerzmy nasz ciąg w sposób naturalny kładąc $x_{-k} := T^k x_0$ dla $k \in \mathbb{N}$. Z definicji n-hiperkontrakcji dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$ dostajemy

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\|T^k x_m\|^2 \geqslant 0.$$

Czyli

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{n-k} \|x_{m-k}\|^2 \geqslant 0.$$

Zatem na mocy Lematu 2.4.10 ciąg $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest stały, co zgodnie z Twierdzeniem 2.4.1 kończy dowód. □

Powyższa własność n-hiperkontrakcji w przypadku $n = 2$ przyjmuje następującą postać.

WNIOSEK 2.4.12. *Część zupełnie nieunitarna kontrakcji klasy Q jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$.*

2.5. Ograniczenia metody opartej na asymptocie izometrycznej

Wcześniejsze rozważania pokazują, że pojęcie ograniczonych ciągów wstecznych może być użytecznym narzędziem badania asymptotycznych własności operatorów potęgowo ograniczonych. Dzieje się tak dzięki istnieniu asymptoty izometrycznej oraz dzięki Lematowi 2.2.2. Zatem w celu rozszerzenia tej metody naturalnym krokiem jest uogólnienie asymptoty izometrycznej na przypadek operatorów niekoniecznie potęgowo ograniczonych.

Prosty przykład operatora skalarnego $\overline{\lambda}Id$, gdzie $|\lambda| > 1$ pokazuje, że w odróżnieniu od sytuacji potęgowo ograniczonej istnieją operatory należące do klasy operatorów $C_{\cdot 1}$ dla których nie istnieje nietrywialna para (V, X) izometrii i operatora ograniczonego taka, że $X\lambda = VX$. Co więcej, bez trudu możemy wskazać przykład operatora T takiego, że: widmo punktowe jego sprzężenia jest puste ($\sigma_p(T^*) = \emptyset$), dla T nie istnieje nietrywialna asymptota izometryczna oraz T nie jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$. Zdefiniujmy operator S na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z bazą ortonormalną $\{e\} \cup \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_+} \cup \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ jak następuje

$$\begin{cases} S(e) = f_1 + g_1, \\ S(f_k) = \alpha_k f_{k+1}, & k \in \mathbb{N}_+, \\ S(g_k) = \frac{1}{\alpha_k} g_{k+1}, & k \in \mathbb{N}_+, \end{cases}$$

gdzie

$$\alpha_k = \begin{cases} 2, & \text{gdy } k \in (2n^2 - n; 2n^2 + n], n \in \mathbb{N}_+, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } k \in (2n^2 - 3n + 1; 2n^2 - n], n \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

Pokażmy, że operator $T := S^*$ posiada postulowane własności. Operator S nie jest klasy $C_{0\cdot}$. Istotnie $\|S^n e\|^2 = |\alpha_1\alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{n-1}|^2 + |\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\cdot\dots\cdot\alpha_{n-1}}|^2 > 1$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$. Dalej nie istnieje nietrywialna asymptota izometryczna dla operatora S. Nie wprost, niech dla pewnej izometrii V oraz operatora X zachodzi związek $XS = VX$. Dzięki definicji α_i mamy $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) = (\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, 2, 2, \dots)$, a zatem $S^{2k^2-k} f_1 = \frac{1}{2^k} f_{2k^2-k+1}$. Wobec tego $\|XS^{2k^2-k} f_i\| \leqslant \|X\| \frac{1}{2^{k-i}}$ dla dowolnych $k, i \in \mathbb{N}$. Zatem

$$0 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|XS^n f_i\| = \|Xf_i\|$$

dla dowolnego $i \in \mathbb{N}_+$. Analogicznie $Xg_i = 0$, dla dowolnego $i \in \mathbb{N}_+$. Zatem $VXe = XSe = 0$. Ostatecznie $X = 0$. Dodatkowo z definicji S wynika, że $\sigma_p(S) = \emptyset$.

W pracy [**30**](zob. również [**31**]) L. Kérchy podaje konstrukcję asymptoty izometrycznej w przypadku tzw. operatorów normowo-regularnych. Zanim podamy definicję operatorów normowo-regularnych wprowadźmy następującą definicję.

Definicja 2.5.1 ([**38**]). *Powiemy, że ograniczony ciąg ξ jest* prawie zbieżny *do c, jeśli*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \xi(j) - c \right| = 0.$$

Ponadto, powiemy że ξ jest prawie zbieżny w silnym sensie *do c, jeśli ciąg $|\xi - c\boldsymbol{1}|$ jest prawie zbieżny do 0, gdzie $\boldsymbol{1} = (1, 1, 1, \dots)$.*

Operatory normowo-regularne definiujemy jak następuje.

Definicja 2.5.2. *Operator T nazwiemy normowo-regularnym jeśli istnieje funkcja $p : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ taka, że $\|T^n\| \leqslant p(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz istnieje $c > 0$ takie, że ciąg $\frac{p(n+1)}{p(n)}$ jest prawie zbieżny w silnym sensie do c.*

Jednak w kolejnej pracy (zob. [**32**]) L. Kérchy oraz V. Müller wskazali przykład ciągu $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że ważnone przesunięcie jednostronne o wagach $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ klasy $C_{1\cdot}$ nie jest operatorem normowo-regularnym.

Z drugiej strony dla dowolnego ważonego przesunięcia jednostornnego S_ω o wagach $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ należącego do klasy operatorów $C_{1\cdot}$ zachodzi $XS_\omega = SX$, gdzie S jest przesunięciem jednostronnym, a X jest operatorem diagonalnym takim, że $Xe_n = \frac{1}{\omega_0\omega_1\omega_2\cdot\dots\cdot\omega_{n-1}}e_n$, dla $n \in \mathbb{N}_+$, jeśli przyjmiemy $\omega_0 = 1$.

Zatem uogólnienie podanych twierdzeń opierające się na powyższej konstrukcji byłoby tylko częściowe. Wedle naszej wiedzy nie istnieje efektywna konstrukcja asymptoty izometrycznej w przypadku operatorów niepotęgowo ograniczonych.

2.6. Klasa operatorów $C_{\cdot 0}$ a własność Putnama-Fuglede

Twierdzenie Putnama-Fuglede (zob. [**48**]) głosi, że dla dowolnych ograniczonych operatorów normalnych A, B oraz dowolnego operatora ograniczonego X takiego, że $AX = XB$, zachodzi równość $A^*X = XB^*$. Twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy założymy jedynie, że operatory A oraz B^* są operatorami M-hiponormalnymi (zob. [**42**]). Przy czym operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy M-hiponormalnym, gdy zachodzi $\|T^*x\| \leqslant M\|Tx\|$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$. Klasa operatorów M-hiponormalnych uogólnia pojęcie operatorów hiponormalnych, ale różni się od klas rozpatrywanych w podrozdziale 2.4.

W szczególności nie trudno się przekonać, że operator $T := \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n$, gdzie $S_n : l^2 \ni (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, \frac{1}{n}x_1, \frac{1}{n^2}x_2, x_3, x_4, \dots) \in l^2$ jest operatorem $*$-paranormalnym, jak i operatorem $(p,1)-$quasihiponormalnym, ale nie jest operatorem M-hiponormalnym.

Rozważmy za [**17**] własność odnoszącą się do twierdzenia Putnama-Fuglede, a jednocześnie ściśle związaną z własnościami asymptotycznymi operatorów.

Definicja 2.6.1. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ma *własność Putnama-Fuglede* (w skrócie *własność PF*) wtedy i tylko wtedy, gdy równość $T^*X = XJ$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ oraz dla wszystkich izometrii $J \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takich, że $TX = XJ^*$.

Lemat 1 z pracy [**17**] charakteryzuje kontrakcje posiadające własność PF jako kontrakcje, których zupełnie nieunitarna część jest klasy $C_{\cdot 0}$. Zatem stosowane w poprzednim rozdziale Twierdzenie 2.4.1 może być zapisane w następującej formie.

Twierdzenie 2.6.2. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie kontrakcją. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *dla każdego ograniczonego ciągu wstecznego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ względem T, ciąg jego norm $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest stały,*

(2) *zupełnie nieunitarna część operatora T jest klasy $C_{\cdot 0}$*
(3) *operator T ma własność PF.*

□

W przypadku operatorów nie będących kontrakcją warunki 1. i 2. w powyższym twierdzeniu nie są równoważne, aby to zobaczyć wystarczy rozpatrzyć operator (potęgowo ograniczony) $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ działający na $\mathbb{C}^2$.

Warunki 2. i 3. pozostają równoważne w przypadku operatorów potęgowo ograniczonych. Zanim jednak przejdziemy do dowodu odpowiedniego twierdzenia, przypomnijmy następujący lemat.

LEMAT 2.6.3 ([**18**]). *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Jeśli istnieje podprzestrzeń redukująca operator T do nieunitarnej koizometrii, to T nie ma własności PF. W szczególności jeśli koizometria ma własność PF, to jest operatorem unitarnym.*

DOWÓD. Jeśli istnieje podprzestrzeń redukująca T do nieunitarnej koizometrii, to dzięki rozkładowi Wolda istnieje operator T' oraz przesunięcie jednostronne S takie, że $T = S^* \oplus T'$. Przyjmijmy teraz $J = S \oplus Id$ oraz $X = S^* \oplus 0$. Wtedy $TX = S^{*2} \oplus 0 = XJ^*$, ale $T^*X = SS^* \oplus 0 \neq Id \oplus 0 = S^*S \oplus 0 = XJ$. Zatem T nie ma własności PF. □

Przejdźmy teraz do sformułowania i dowodu zapowiedzianego twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.6.4. *Operator potęgowo ograniczony $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ posiada własność PF wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą prostą operatora unitarnego oraz operatora klasy $C_{\cdot 0}$.*

DOWÓD. Załóżmy, że T posiada własność PF. Na mocy konstrukcji asymptoty izometrycznej (zob. Podrozdział 2.2), istnieją: przestrzeń $\mathcal{K}$, izometria $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ oraz operator $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, takie, że

$$QT^* = VQ.$$

Dodatkowo $Q(\mathcal{H})$ jest gęste w $\mathcal{K}$. Zatem dzięki własności PF otrzymujemy

$$QT^* = VQ \Longleftrightarrow TQ^* = Q^*V^* \Longrightarrow T^*Q^* = Q^*V \Longleftrightarrow QT = V^*Q.$$

Stąd, $\mathcal{R}(Q^*)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla T oraz T^*. Czyli przestrzeń $\overline{\mathcal{R}(Q^*)}$ jest redukująca dla T.

Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$, mamy

$$\begin{aligned} &\langle Qx, Qy\rangle_{\mathcal{K}} = \langle V^n Qx, QT^{*n}y\rangle_{\mathcal{K}} = \\ &\langle Q^*V^nQx, T^{*n}y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle T^{*n}Q^*Qx, T^{*n}y\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Na mocy definicji operatora Q (zob. Podrozdział 2.2) otrzymujemy

$$\phi(\{\langle T^{*n}Q^*Qx, T^{*n}y\rangle_{\mathcal{H}}\}_{n\in\mathbb{N}}) = \langle QQ^*Qx, Qy\rangle_{\mathcal{K}}, \tag{2.6.2}$$

gdzie ϕ jest granicą Banacha ustaloną w trakcie konstrukcji asymptoty izometrycznej. Równości (2.6.1) oraz (2.6.2) prowadzą do równości $\langle Qx, Qy\rangle_{\mathcal{K}} = \langle Q(Q^*Qx), Qy\rangle_{\mathcal{K}}$. Skoro $\mathcal{R}(Q)$ jest przestrzenią gęstą w $\mathcal{K}$, to $Q = QQ^*Q$. Zatem $(Q^*Q)^2 = Q^*Q$. Czyli $P := Q^*Q$ jest projekcją ortogonalną. Dodatkowo dzięki (2.6.1) otrzymujemy $QQ^* = Id_{\mathcal{K}}$. Zatem, $\mathcal{R}(Q^*) = \mathcal{R}(Q^*QQ^*) \subset \mathcal{R}(Q^*Q) \subset \mathcal{R}(Q^*)$. A więc otrzymujemy $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(Q^*)$. Z drugiej strony dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$, mamy

$$\|Qx\|^2_{\mathcal{K}} = \langle Qx, Qx\rangle_{\mathcal{K}} = \langle Q^*Qx, x\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Px, x\rangle_{\mathcal{H}} = \|Px\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Zatem $\mathcal{N}(P) = \mathcal{H}_0 := \{x \in \mathcal{H} : \phi(\{\|T^{*n}x\|_{\mathcal{H}}\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0\}$. Stąd mamy $\mathcal{H} = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(P) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{R}(Q^*)$. Ustalmy $x \in \mathcal{R}(Q^*)$. Wówczas $T^*x \in \mathcal{R}(Q^*)$, ponieważ $\mathcal{R}(Q^*)$ redukuje operator T. Zatem

$$\|T^*x\|_{\mathcal{H}} = \|PT^*x\|_{\mathcal{H}} = \|QT^*x\|_{\mathcal{K}} = \|Qx\|_{\mathcal{K}} = \|Px\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Oznacza to, że T^* jest izometrią na $\mathcal{R}(Q^*)$, więc na mocy Lematu 2.6.3 operator T jest unitarny na $\mathcal{R}(Q^*)$.

Pozostaje wykazać, że operator $T|_{\mathcal{H}_0}$ jest klasy $C_{\cdot 0}$. Jako, że jest to operator potęgowo ograniczony jest to równoważne temu, że T^* jest silnie stabliny na $\mathcal{H}_0$. Ustalmy $x \in \mathcal{H}_0$. Wówczas $\liminf_{n\to\infty} \|T^{*n}x\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \phi(\{\|T^{*n}x\|^2_{\mathcal{H}}\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\|T^kx\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$, więc dla wszystkich $m > k$ mamy

$$\|T^mx\|_{\mathcal{H}} = \|T^{m-k}T^kx\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|T^{m-k}\|\|T^kx\|_{\mathcal{H}} \leqslant \varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|.$$

Czyli, $\lim_{n\to\infty} \|T^{*n}x\|_{\mathcal{H}} = 0$.

Dla dowodu przeciwnej implikacji załóżmy, że $T = U \oplus T_1$, gdzie $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_U)$ jest operatorem unitarnym, a operator $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{T_1})$ jest klasy $C_{\cdot 0}$. Ustalmy dowolną izometrię $J \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ oraz dowolny operator $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ takie, że $TX = XJ^*$. Z rozkładu Wolda dla izometrii J otrzymujemy $\mathcal{K} = \mathcal{K}_S \oplus \mathcal{K}_V$, gdzie $J|_{\mathcal{K}_S} =: S$ jest przesunięciem jednostronnym oraz $J|_{\mathcal{K}_V} =: V$ jest unitarny. Niech $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ będzie macierzą reprezentującą X odpowiadającą rozkładom $\mathcal{K} = \mathcal{K}_S \oplus \mathcal{K}_V$ oraz $\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus \mathcal{H}_{T_1}$. Wtedy równość $TX = XJ^*$ jest równoważna warunkowi

$$\begin{cases} UX_{11} = X_{11}S^*, \\ UX_{12} = X_{12}V^*, \\ T_1X_{21} = X_{21}S^*, \\ T_1X_{22} = X_{22}V^*. \end{cases}$$

Z pierwszej równości wynika, że $U^*X_{11} = U^*X_{11}S^*S = U^*UX_{11}S = X_{11}S$. Analogicznie dostajemy $U^*X_{12} = X_{12}V$. Z trzeciej równości wynika, że $\|X_{21}^*T_1^{*n}x\| = \|S^nX_{21}^*x\|$, czyli $\|X_{21}^*x\| \leqslant \|X_{21}^*\|\|T_1^{*n}x\|$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}_{T_1}$. Ale $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T_1^{*n}x\| = 0$. Zatem $X_{21} = 0$. Analogicznie, $X_{22} = 0$.

Zatem

$$\begin{cases} U^*X_{11} = X_{11}S, \\ U^*X_{12} = X_{12}V, \\ T_1^*X_{21} = X_{21}S, \\ T_1^*X_{22} = X_{22}V. \end{cases}$$

Czyli $T^*X = XJ$. Co kończy dowód. □

Uwaga 2.6.5. *Dowód drugiej implikacji pochodzi z pracy* [**18**] *i nie wykorzystuje założenia o potęgowej ograniczoności rozważanego operatora.*

Jeśli rozważymy operator skalarny $T = 2Id_{\mathcal{H}}$, to widzimy, że posiada on własność PF oraz nie jest operatorem klasy $C_{.0}$. Zatem powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe dla operatorów nie potęgowo ograniczonych.

2.7. Które klasy operatorów posiadają własność Putnama-Fuglede?

Zgodnie z Twierdzeniem 2.6.2 oraz Podrozdziałem 2.4 widzimy, że kontrakcje $k*$-paranormalne, k-paranormalne, (p,k)-quasihiponormalne oraz n-hiperkontrakcje (w szczególności kontrakcje klasy Q) posiadają własność PF. Operatory potęgowo ograniczone należące do którejś z powyższych klas są automatycznie kontrakcjami. Zatem w przypadku operatorów należących do którejkolwiek z powyższych klas Twierdzenie 2.6.4 nie daje nowych rezultatów. Naturalnym problemem w rozważaniu własności PF oraz w analizie poszczególnych klas operatorów jest rozstrzygnięcie, który z warunków normowych definiujących rozpatrywane klasy operatorów niezależnie od kontrakcyjności implikuje własność PF.

Z Twierdzenia 11 w pracy [**34**] bezpośrednio wynika, że każdy operator p-hiponormalny ma własność PF.

Przypomnijmy Lemat 1 z pracy [**33**].

LEMAT 2.7.1 (Kim, [**33**]). *Ustalmy $p \in (0,1]$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest operatorem (p,k)-quasihiponormalnym, to względem rozkładu $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(T^k)} \oplus \mathcal{N}(T^{*k})$ posiada on następującą reprezentację macierzową*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix},$$

gdzie T_1 jest operatorem p-hiponormalnym oraz $T_3^k = 0$.

Korzystając z powyższego lematu możemy uzyskać następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.7.2. *Ustalmy $p > 0$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Dowolny operator (p,k)-quasihiponormalny ma własność PF.*

DOWÓD. Wystarczy ograniczyć się do przypadku $p \in (0,1]$. Ustalmy operator (p,k)-quasihiponormalny $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dla sprawdzenia własności PF ustalmy izometrię $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ oraz operator $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, spełniające równanie

$$TX = XV^*. \tag{2.7.1}$$

Na mocy Lematu 2.7.1 operator T jest postaci

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix},$$

gdzie T_1 jest operatorem p-hiponormalnym oraz $T_3^k = 0$. Na mocy rozkładu Wolda izometria V jest postaci $V = S \oplus U$, gdzie S jest przesunięciem jednostronnym oraz U jest operatorem unitarnym. Niech

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

będzie macierzową reprezentacją operatora X ze względu na powyższe rozkłady dotyczące przestrzeni $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Wtedy równanie (2.7.1) jest równoważne warunkom

$$\begin{cases} T_1X_{11} + T_2X_{21} = X_{11}S^*, \\ T_1X_{12} + T_2X_{22} = X_{12}U^*, \\ T_3X_{21} = X_{21}S^*, \\ T_3X_{22} = X_{22}U^*. \end{cases}$$

Wobec surjektywności operatora S^{*k} oraz równości $0 = T_3^kX_{21} = X_{21}S^{*k}$, otrzymujemy że $X_{21} = 0$. Analogicznie, dostajemy $X_{22} = 0$. W konsekwencji dwie pierwsze równości upraszczają się. Następnie, dzięki Twierdzeniu 11 z pracy [**34**] wiemy, że operatory p-hiponormalne posidają własność PF, zatem otrzymujemy

$$\begin{cases} T_1^*X_{11} = X_{11}S, \\ T_1^*X_{12} = X_{12}U. \end{cases}$$

Czyli zachodzi równość $T^*X = XV$, co dowodzi własność PF. □

Używając metody ograniczonych ciągów wstecznych pokażmy teraz następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.7.3. *Każdy $k*$-paranormalny operator posiada własność PF.*

DOWÓD. Ustalmy liczbę naturalną $k \geqslant 2$. Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie $(k-1)*$-paranormalnym operatorem. Dla dowodu własności PF przypuśćmy, że $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ oraz izometria $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ są takie, że

$$TX = XV^*. \tag{2.7.2}$$

Przyjmijmy $x_0 \in \mathcal{R}(X)$. Wtedy istnieje $x \in \mathcal{K}$ takie, że $x_0 = Xx$. Zdefiniujmy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jak następuje:

$$x_n := \begin{cases} XV^nx, & n > 0, \\ XV^{*-n}x, & n < 0. \end{cases}$$

Dzięki (2.7.2) natychmiast otrzymujemy, że $Tx_{n+1} = x_n$. Dodatkowo zachodzi

$$\|x_n\| \leqslant \max\{\|XV^{|n|}x\|, \|XV^{*|n|}x\|\} \leqslant \|X\|\|x\| =: M, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zatem ciąg $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest ograniczony przez M. Na mocy Uwagi 2.4.7 operator T jest k-paranormalny. Stąd

$$\|x_n\|^k = \|Tx_{n+1}\|^k \leqslant \|T^k x_{n+1}\|\|x_{n+1}\|^{k-1} = \|x_{n-k+1}\|\|x_{n+1}\|^{k-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Korzystając z nierówności między średnia arytmetyczna, a geometryczną oraz kładąc $n+k-1$ zamiast n otrzymujemy

$$\|x_{n+k-1}\| \leqslant \frac{\|x_n\| + (k-1)\|x_{n+k}\|}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Następnie mnożąc obie strony nierówności przez k i odejmując

$$\|x_n\| + \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + ... + \|x_{n+k-1}\|, \tag{2.7.3}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} &-\|x_n\| - \|x_{n+1}\| - \|x_{n+2}\| + ... - \|x_{n+k-2}\| + (k-1)\|x_{n+k-1}\| \leqslant \\ &\leqslant -\|x_{n+1}\| - \|x_{n+2}\| - \|x_{n+3}\| + ... - \|x_{n+k-1}\| + (k-1)\|x_{n+k}\|. \end{aligned}$$

Zatem ciąg $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, gdzie

$$A_n := -\|x_n\| - \|x_{n+1}\| - \|x_{n+2}\| + ... - \|x_{n+k-2}\| + (k-1)\|x_{n+k-1}\|, n \in \mathbb{Z},$$

jest rosnący. Pokażmy teraz, że ciąg $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest stale równy 0. Zauważmy, że dla dostatecznie małego l oraz dostatecznie dużego m otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{n=l}^{m} A_n\Big| &= \Big|\sum_{n=l}^{m}(-\|x_n\| - \|x_{n+1}\| + ... - \|x_{n+k-2}\| + (k-1)\|x_{n+k-1}\|)\Big| = \\ &= |(k-1)\|x_{m+k-1}\| + (k-2)\|x_{m+k-2}\| + ... + \|x_{m+1}\| - \\ &-(\|x_l\| + 2\|x_{l+1}\| + 3\|x_{l+2}\| + ... + (k-1)\|x_{l+k-2}\|)| \leqslant Mk(k-1). \end{aligned}$$

Stąd

$$(m-l+1)A_l = \sum_{n=l}^{m} A_l \leqslant \sum_{n=l}^{m} A_n \leqslant Mk(k-1).$$

Zatem

$$A_l = \lim_{m\to\infty} \frac{m-l+1}{m} A_l \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{Mk(k-1)}{m} = 0.$$

Podobnie wnioskujemy, że

$$(m-l+1)A_m = \sum_{n=l}^{m} A_m \geqslant \sum_{n=l}^{m} A_n \geqslant -Mk(k-1).$$

W konsekwencji,

$$A_m = \lim_{l\to-\infty} \frac{m-l+1}{-l} A_m \geqslant \lim_{l\to-\infty} \frac{-Mk(k-1)}{-l} = 0.$$

Stąd $A_n = 0$, czyli

$$-\|x_n\| - \|x_{n+1}\| - \|x_{n+2}\| + ... - \|x_{n+k-2}\| + (k-1)\|x_{n+k-1}\| =$$
$$= -\|x_{n+1}\| - \|x_{n+2}\| - \|x_{n+3}\| + ... - \|x_{n+k-1}\| + (k-1)\|x_{n+k}\|.$$

Teraz obustronnie dodając wyrażenie (2.7.3) oraz dzieląc przez k otrzymujemy

$$\|x_{n+k-1}\| = \frac{\|x_n\| + (k-1)\|x_{n+k}\|}{k}. \tag{2.7.4}$$

Z drugiej strony

$$\frac{\|x_n\| + (k-1)\|x_{n+k}\|}{k} \geqslant \sqrt[k]{\|x_n\|\|x_{n+k}\|^{k-1}} \geqslant \|x_{n+k-1}\|,$$

zatem otrzymujemy równość w nierówności między średnia arytmetyczną, a średnią geometryczną. Czyli $\|x_n\| = \|x_{n+k}\|$, więc ponownie dzięki (2.7.4) wnioskujemy, że $\|x_n\| = \|x_{n+1}\|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. W szczególności $\|Tx_0\| = \|x_{-1}\| = \|x_0\|$. Zatem $\|Tx_0\| = \|x_0\|$ dla każdego $x_0 \in \mathcal{R}(X)$. To oznacza, że T w restrykcji do przestrzeni niezmienniczej $\overline{\mathcal{R}(X)}$ jest izometrią.

Dzięki $TX = XV^*$ otrzymujemy, że $T\mid_{\overline{\mathcal{R}(X)}}$ jest surjekcją, więc jest operatorem unitarnym. Zapiszmy operator T w postaci macierzowej jak następuje

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie $T_{11} = T\mid_{\overline{\mathcal{R}(X)}}$, $T_{21} \in \mathcal{B}(\mathcal{N}(X^*), \overline{\mathcal{R}(X)})$ oraz $T_{21} \in \mathcal{B}(\mathcal{N}(X^*))$. Stąd

$$T^* = \begin{bmatrix} T_{11}^* & 0 \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{bmatrix}.$$

Biorąc pod uwagę, że T jest operatorem $(k-1)*$-paranormalnym, otrzymujemy

$$(1 + \|T_{21}^*x\|^2)^{k-1} = (\|x\|^2 + \|T_{21}^*x\|^2)^{k-1} = \|T^*(x,0)\|^{2k-2} \leqslant$$
$$\leqslant \|T^{k-1}(x,0)\|^2 = \|T_{11}^{k-1}x\|^2 = \|x\|^2 = 1$$

dla każdego $x \in \overline{\mathcal{R}(X)}$ takiego, że $\|x\| = 1$. W rezultacie $T_{21} = 0$ oraz $T = T_{11} \oplus T_{22}$. Zatem skoro $TX = XV^*$, to otrzymujemy

$$XV = Id\mid_{\overline{\mathcal{R}(X)}} XV = T_{11}^*T_{11}XV = T^*TXV = T^*XV^*V = T^*X.$$

Co kończy dowód. □

Twierdzenia 2.7.2, 2.7.3 uogólniają wcześniejesze wyniki na dowolne operatory (p,k)-quasihiponormalne i $k*$-paranormalne, niekoniecznie będące kontrakcjami. Nie mniej jednak operatory paranormalne nie muszą posiadać własności PF. Zanim przejdziemy do odpowiedniego przykładu pokażemy następujący lemat.

LEMAT 2.7.4. *Istnieją ograniczone rzeczywiste ciągi* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ *oraz* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ *takie, że*

$$\begin{cases} x_n = y_n x_{n+1}, & n \in \mathbb{N}_+, \\ y_{n+1} = (x_{n+1}^2 + 1) y_n, & n \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

DOWÓD. Zdefiniujmy ciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ jak następuje

$$\begin{cases} y_1 = 1, y_2 = 2, \\ y_{n+2} = \frac{y_{n+1} - y_n + y_n y_{n+1}}{y_n}, & n \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

Jeśli przekształcimy drugie równanie do postaci

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_+, \tag{2.7.5}$$

to indukcyjnie możemy udowodnić, że ciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ jest dodatni oraz rosnący. Stąd natychmiast $y_n \geqslant 2$ dla $n \geqslant 2$. Ponadto, $y_3 - y_2 = 3 - 2 = 1$, więc ponownie korzystając z (2.7.5) możemy wykazać, że $y_{n+1} - y_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}$ dla $n \geqslant 2$. Zatem $y_n = \sum\limits_{i=2}^{n} (y_i - y_{i-1}) + y_1 \leqslant 4$. Wynika stąd, że dodatni ciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ jest ograniczony.

Definiując teraz

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{y_{n+1}}{y_n} - 1}, & n \in \mathbb{N}_+, \end{cases}$$

widzimy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ również jest dodatni oraz ograniczony. Bezpośrednie przeliczenie pokazuje, że tak zdefiniowane ciągi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ oraz $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ spełniają postulowany warunek. □

Przejdźmy teraz do obiecanego przykładu.

PRZYKŁAD 2.7.5. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$. Niech $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem zdefiniowanym przez następującą formułę

$$\begin{cases} S(e_k) = e_{k+1}, & k \in \mathbb{Z}, \\ S(f_k) = x_k e_k + y_k f_{k+1}, & k \in \mathbb{N}_+, \end{cases}$$

gdzie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ oraz $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ są ciągami spełniającymi tezę Lemmatu 2.7.4.

Skoro ciągi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ oraz $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ są ograniczone, operator S jest ograniczony.

Na podstawie pracy [**3**] wiemy, że operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest paranormalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|T^2h\|^2 - 2\lambda\|Th\|^2 + \lambda^2\|h\|^2 \geqslant 0$$

dla wszystkich $\lambda > 0$ oraz $h \in \mathcal{H}$. Korzystając z powyższego warunku pokażemy, że S jest operatorem paranormalnym. Ustalmy w tym celu dowolne $h = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n + \sum\limits_{k\in\mathbb{N}_+} \beta_k f_k \in \mathcal{H}$ oraz $\lambda > 0$. Zapiszmy h w postaci sumy ortogonalnych elementów $h = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} h_n + g$, gdzie $g := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} \alpha_k e_k$ oraz $h_n := \alpha_n e_n + \beta_{n+1} f_{n+1}$. Zauważmy, że $\|S^2 g\| = \|Sg\| = \|g\|$. Zatem $\|S^2g\|^2 - 2\lambda\|Sg\|^2 + \lambda^2\|g\|^2 = (\lambda-1)^2\|g\|^2$. Następnie pamiętając, że $y_{n+1}x_{n+2} = x_{n+1}$ przeprowadźmy przekształcenia:

$$\begin{aligned}
\|S^2h_n\|^2 - 2\lambda\|Sh_n\|^2 + \lambda^2\|h_n\|^2 &= \|S^2(\alpha_n e_n + \beta_{n+1}f_{n+1})\|^2 - \\
&- 2\lambda\|S(\alpha_n e_n + \beta_{n+1}f_{n+1})\|^2 + \lambda^2\|(\alpha_n e_n + \beta_{n+1}f_{n+1})\|^2 = \\
&= \|(2x_{n+1}\beta_{n+1} + \alpha_n)e_{n+2} + y_{n+1}y_{n+2}\beta_{n+1}f_{n+3}\|^2 - \\
&- 2\lambda\|(x_{n+1}\beta_{n+1} + \alpha_n)e_{n+1} + y_{n+1}\beta_{n+1}f_{n+2}\|^2 + \\
&+ \lambda^2\|(\alpha_n e_n + \beta_{n+1}f_{n+1})\|^2 = \\
&= |2x_{n+1}\beta_{n+1} + \alpha_n|^2 + |\beta_{n+1}|^2 y_{n+1}^2 y_{n+2}^2 - \\
&- 2\lambda(|x_{n+1}\beta_{n+1} + \alpha_n|^2 + |y_{n+1}\beta_{n+1}|^2) + \lambda^2(|\alpha_n|^2 + |\beta_{n+1}|^2) = \\
&= |(1-\lambda)\alpha_n + 2x_{n+1}\beta_{n+1}|^2 + \\
&+ |\beta_{n+1}|^2\Big(\lambda^2 - 2\lambda(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) + y_{n+1}^2 y_{n+2}^2\Big) = \\
&= |(1-\lambda)\alpha_n + 2x_{n+1}\beta_{n+1}|^2 + \\
&+ |\beta_{n+1}|^2\Big((\lambda - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2))^2 + y_{n+1}^2 y_{n+2}^2 - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2)^2\Big) = \\
&= |(1-\lambda)\alpha_n + 2x_{n+1}\beta_{n+1}|^2 + |\beta_{n+1}|^2(\lambda - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2))^2 + \\
&+ |\beta_{n+1}|^2\Big(y_{n+1}^2 y_{n+2}^2 - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2)^2\Big).
\end{aligned}$$

Ponownie korzystając z doboru ciągów $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ oraz $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ (zob. Lemat 2.7.4) zauważmy, że

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_{n+2}^2 y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+1}^2(x_{n+2}^2 + 1) = y_{n+1}y_{n+2}.$$

Zatem ostatni składnik powyższej sumy jest równy 0. Stąd

$$\|S^2h_n\|^2 - 2\lambda\|Sh_n\|^2 + \lambda^2\|h_n\|^2 \geqslant 0.$$

Ostatecznie zauważmy, że ciągi $\{g\} \cup \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Sg\} \cup \{Sh_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\{S^2g\} \cup \{S^2h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są ortogonalne. Zatem

$$\|S^2h\|^2 - 2\lambda\|Sh\|^2 + \lambda^2\|h\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\|S^2h_n\|^2 - 2\lambda\|Sh_n\|^2 + \lambda^2\|h_n\|^2) + \\ + \|S^2g\|^2 - 2\lambda\|Sg\|^2 + \lambda^2\|g\|^2 \geqslant 0.$$

Czyli S jest operatorem paranormalnym.

Pozostaje wykazać, że operator S nie posiada własności PF. Rzeczywiście, S spełnia równość $SP = PU^*$, gdzie P jest ortogonalną projekcją na $E := \overline{\operatorname{span}\{e_n | n \in \mathbb{Z}\}}$ oraz U jest sumą prostą wstecznego przesunięcia dwustronnego na E oraz identyczności. Z drugiej strony mamy

$$PSf_1 = x_1e_1 \neq 0 = U^*Pf_1.$$

Czyli $S^*P \neq PU$. □

Twierdzenie 7.1.7 z [**28**] mówi, że każdy paranormalny operator jest k-paranormalny dla ustalonego $k \geqslant 2$. W związku z tym operator S z powyższego przykładu jest jednocześnie k-paranormalny dla dowolnego $k = 2, 3, \ldots$. Operator S jest również operatorem klasy Q.

Uwaga 2.7.6. *Operatory klasy Q jak i operatory k-paranormalne mogą nie posiadać własności PF.*

Operator paranormalny S z przykładu 2.7.5 ma również tę własność, że zawężenie S do nietrywialnej podprzestrzeni E jest operatorem unitarnym, jednak E nie jest podprzestrzenią redukującą S.

Natomiast operatory $*$-paranormalne mają następującą własność.

Stwierdzenie 2.7.7. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem $*$-paranormalnym oraz niech $\mathcal{M}$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą dla T taką, że $T|_{\mathcal{M}}$ jest operatorem normalnym. Wtedy $\mathcal{M}$ redukuje T.*

Dowód. Zaprezentujmy konstrukcję Berberiana z pracy [**9**].

Ustalmy granicę Banacha ϕ. Oznaczmy

$$l^\infty(\mathcal{H}) := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\}$$

oraz wprowadźmy na $l^\infty(\mathcal{H})$ semi-iloczyn skalarny

$$\langle\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle := \phi(\{\langle x_n, y_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}).$$

Przestrzeń ilorazowa $l^\infty(\mathcal{H})/\mathcal{N}(\mathcal{H})$, gdzie

$$\mathcal{N}(\mathcal{H}) := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H} : \phi(\{\|x_n\|^2\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0\}$$

jest przestrzenią unitarną wyposażoną w iloczyn skalarny

$$\langle s, t\rangle := \phi(\{\langle x_n, y_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}),$$

gdzie s, t są odpowiednio klasami abstrakcji ciągów $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Niech $\mathcal{K}$ oznacza przestrzeń Hilberta powstałą przez uzupełnienie przestrzeni ilorazowej $l^\infty(\mathcal{H})/\mathcal{N}(\mathcal{H})$.

Dowolny operator $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ generuje operator $S^\circ \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ taki, że $S^\circ([\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}]) = [\{Sx_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$, gdzie $[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$ oznacza klasę abstrakcji ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset l^\infty(\mathcal{H})$. Przy czym odwzorowanie $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni S \mapsto S^\circ \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ jest izometrycznym $*$-izomorfizmem (zob. [**9**]). Na mocy Twierdzenia 1 z pracy [**9**] otrzymujemy $\sigma_{ap}(S) = \sigma_{ap}(S^\circ) = \sigma_p(S^\circ)$, dla dowolnego operatora $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dalej zauważmy, że podprzestrzeń $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ generuje podprzestrzeń $\mathcal{M}^\circ := \overline{l^\infty(\mathcal{M})/\mathcal{N}(\mathcal{M})}$ niezmienniczą dla T°. Rozkład $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ generuje rozkład $\mathcal{K} = \mathcal{M}^\circ \oplus (\mathcal{M}^\perp)^\circ$.

Rozważmy rozkład macierzowy operatora T względem rozkładu $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$

$$T = \begin{bmatrix} N & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

gdzie $T|_{\mathcal{M}} = N$.

Operator T jest $*$-paranormalny, zatem zachodzi

$$\|N^*x\|^2 + \|A^*x\|^2 = \|T^*x\|^2 \leqslant \|T^2x\|\|x\| = \|N^2x\|\|x\|,$$

dla dowolnego $x \in \mathcal{M}$.

Stąd dla dowolnego $s = [\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}] \in l^\infty(\mathcal{M})/\mathcal{N}(\mathcal{M})$, na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\|N^\circ s\|^2 + \|(A^*)^\circ s\|^2 = \|(T^*)^\circ s\|^2 = \phi(\|T^*x_n\|^2) \leqslant \\ &\leqslant \phi(\|T^2x_n\|\|x_n\|) \leqslant (\phi(\|T^2x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}(\phi(\|x_n\|^2))^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|(T^\circ)^2 s\|\|s\| = \|(N^\circ)^2 s\|\|s\|. \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Na mocy nierówności (2.7.6) dostajemy $(A^*)^\circ s = 0$ dla dowolnego $s \in \mathcal{K}$ wektora własnego N°. Widmo operatora normalnego jest równe widmu aproksymatywnemu. Zatem na mocy Twierdzenia 1 z pracy [**9**] dostajemy $\sigma(N^\circ) = \sigma_{ap}(N^\circ) = \sigma_p(N^\circ)$. Wobec tego zbiór wektorów własnych N° rozpina przestrzeń $\mathcal{M}$. Stąd $(A^*)^\circ = 0$, czyli $A^\circ = 0$. Ostatecznie $A = 0$. $\square$

ROZDZIAŁ 3

Rozkłady typu Szegö

3.1. Miary Szegö dla izometrii

Niech μ będzie nieujemną regularną miarą borelowską na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$. Oznaczmy przez χ_ω funkcję charakterystyczną zbioru ω oraz przypomnijmy, że $H^2(\mu)$ oznacza domknięcie w $L^2(\mu)$ algebry wszystkich wielomianów analitycznych.

Definicja 3.1.1 ([**21**]). *Niech μ będzie nieujemną regularną miarą borelowską na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$.*

Powiemy, że μ jest miarą Szegö, *gdy dla każdego zbioru borelowskiego $\omega \subset \mathbb{T}$, zachodzi $\mu(\omega) = 0$, jeśli tylko $\chi_\omega L^2(\mu) \subset H^2(\mu)$.*

Dodatkowo miarę μ nazywamy Szegö singularną, *gdy $H^2(\mu) = L^2(\mu)$.*

W książce [**24**] (zob. również [**21**]) miary Szegö zostały scharakteryzowne przez następujące warunki:

Stwierdzenie 3.1.2. *Miara μ jest Szegö wtedy i tylko wtedy, gdy*

(1) *μ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a m na $\mathbb{T}$,*
(2) *funkcja $\log \frac{d\mu}{dm}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.*

Zanim przejdziemy do własności Szegö spektralnych miar elementarnych przypomnijmy pomocniczą definicję.

Definicja 3.1.3. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Wektor w nazwiemy* wędrującym *jeśli*

$$\langle V^n w, w\rangle = 0,$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Stwierdzenie 3.1.4. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izomertią. Jeśli wektor $0 \neq w \in \mathcal{H}$ jest wędrujący, to miara elementarna $\mu_w := \langle E(\cdot)w, w\rangle$ pochodząca od miary spektralnej E najmniejszego unitarnego rozszerzenia V, jest miarą Szegö.*

Dowód. Ustalmy wektor wędrujący $w \in \mathcal{H}$. Zauważmy, że podprzestrzeń $\operatorname{span}\{\widehat{V}^n w : n \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\widehat{V}$ jest minimalnym rozszerzeniem izometrii V, redukuje $\widehat{V}$ do przesunięcia dwustronnego. Zatem miara μ_w jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a m. Zauważmy, że na mocy Twierdzenia Szegö (zob. [**24**]) mamy

$$\exp\left(\int \left(\log \frac{d\mu_w}{dm}\right) dm\right) = \inf_{p \in A_0} \int |1-p|^2 d\mu_w,$$

gdzie A_0 oznacza algebrę wszystkich wielomianów analitycznych znikających w 0. Dalej dostajemy

$$\inf_{p \in A_0} \int |1-p|^2 d\mu_w = \inf_{p \in A_0} \langle (Id - p(V^*))(Id - p(V))w, w\rangle =$$
$$= \inf_{p \in A_0} \|(Id - p(V))w\|^2 = \inf_{p \in A_0} \|w - p(V)w\|^2.$$

Skoro jednak w jest wędrujący mamy

$$\inf_{p \in A_0} \|w - p(V)w\|^2 = \|w\|^2 + \inf_{p \in A_0} \|p(V)w\|^2 = \|w\|^2 > 0$$

Stąd i na mocy Stwierdzenia 3.1.2 miara μ_w jest miarą Szegö. □

Stwierdzenie 3.1.5. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Niech F będzie podprzestrzenią redukującą dla V. Wówczas każda V-niezmiennicza podprzestrzeń F jest redukująca wtedy i tylko wtedy, gdy każda miara elementarna μ_x dla $x \in F$ jest miarą Szegö singularną.*

Dowód. Dla dowodu pierwszej implikacji załóżmy, że każda V-niezmiennicza podprzestrzeń F jest redukująca. Zatem F redukuje izometrię V do operatora unitarnego. Wobec tego każda V-niezmiennicza podprzestrzeń F jest redukująca dla $\widehat{V}$, minimalnego unitarnego rozszerzenia V.

Niech f będzie dowolnie ustalonym wielomianem złożonym z jednomianów o nieujemnych oraz ujemnych wykładnikach. Wtedy otrzymujemy

$$\|f(\widehat{V})x - p(V)x\|^2 = \int |f-p|^2 d\mu_x, \tag{3.1.1}$$

dla $x \in F$ oraz dla dowolnego wielomianu analitycznego p. Przestrzeń rozpięta przez wektory postaci $p(V)x$, gdzie p są wielomianami analitycznymi o nieujemnych wykładnikach, jest $\widehat{V}$-niezmiennicza, a jako podprzestrzeń F jest $\widehat{V}$ redukująca. W konsekwencji wektor $f(\widehat{V})x$ można aproksymować elementami postaci $p(V)x$. Zatem infimum po wszystkich wielomianach analitycznych lewej strony równości (3.1.1) wynosi 0. Stąd $f \in H^2(\mu_x)$. Skoro jednak wielomian f został ustalony dowolnie, otrzymujemy $H^2(\mu_x) = L^2(\mu_x)$. W konsekwencji miara μ_x jest Szegö singularna.

Dla dowodu drugiej implikacji załóżmy, że dla każdego $x \in F$ miara μ_x jest Szegö singularna. Jeśli M jest V-niezmienniczą podprzestrzenią F, to wektor $x \in M \ominus VM$ jest wędrujący, więc na mocy Stwierdzenia 3.1.4 mamy $x = 0$. □

3.2. Rozkłady typu Szegö

Ninejszy podrozdział rozpocznijmy od definicji, która wiąże izometrię z Szegö własnością miar.

DEFINICJA 3.2.1. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Rozkład $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$, redukujący dla V, nazwiemy* rozkładem typu Szegö, *gdy wszystkie miary elementarne pochodzące od wektorów H_1 są Szegö singularne oraz H_2 jest rozpięta przez wektory, których miary elementarne są miarami Szegö.*

Ponadto, przestrzeń H_2 będziemy nazywać podprzestrzenią typu Szegö.

W tym podrozdziale wykażemy, że dla każdej izometrii istnieje rozkład typu Szegö, choć nie musi on być jednoznaczny.

PRZYKŁAD 3.2.2. Niech $\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_3 := L^2(\mathbb{T}_+)$ oraz $\mathcal{H}_2 := L^2(\mathbb{T}_-)$, gdzie $\mathbb{T}_+ := \{z \in \mathbb{T} : \Im z \geqslant 0\}$, $\mathbb{T}_- := \{z \in \mathbb{T} : \Im z < 0\}$. Niech M_z będzie operatorem mnożenia przez zmienną niezależną $''z''$ działającym na przestrzeni $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$.

Operatory $M_z|_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}$, $M_z|_{\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3}$ są unitarnie równoważne przesunięciu dwustronnemu. Zatem przestrzenie $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ oraz $\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ są rozpięte przez wektory wędrujące. Wobec tego na mocy Stwierdzenia 3.1.4 są one rozpinane przez wektory, których miary są Szegö. Z kolei widmo operatorów unitarnych $M_z|_{\mathcal{H}_3}$ oraz $M_z|_{\mathcal{H}_1}$ wynosi $\mathbb{T}_+$. Zatem, żadna z przestrzeni $\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1$ nie zawierają wektorów wędrujących. Wobec Stwierdzenia 3.1.5 przestrzenie $\mathcal{H}_3$ oraz $\mathcal{H}_1$ składają się z wektorów, których miary elementarne są Szegö singularne.

Ostatecznie rozkłady $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \oplus \mathcal{H}_3$ oraz $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3)$ są dwoma różnymi rozkładami typu Szegö.

TWIERDZENIE 3.2.3. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Oznaczmy przez $\mathcal{H}_w$ domknięcie podprzestrzeni rozpiętej przez wszystkie wektory wędrujące dla V. Przyjmijmy $\mathcal{H}_0 := (\mathcal{H}_w)^{\perp}$.*

Wtedy przestrzeń $\mathcal{H}_w$ jest redukująca dla V oraz $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$ jest rozkładem typu Szegö.

Dowód. Wykażmy, że $\mathcal{H}_w$ jest podprzestrzenią redukującą dla V. Zbiór wektorów wędrujących jest niezmienniczy dla V. Zatem $V\mathcal{H}_w \subset \mathcal{H}_w$. Dla potrzeb dowodu V^*-niezmienniczości rozważmy rozkład Wolda $\mathcal{H} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{H}_s$, gdzie $V|_{\mathcal{H}_u}$ jest operatorem unitarnym, a $V|_{\mathcal{H}_s}$ jest przesunięciem jednostronnym. Niech P_u oraz P_s oznaczają projekcje ortogonalne odpowiednio na $\mathcal{H}_u$ oraz $\mathcal{H}_s$. Ustalmy wektor wędrujący $v \in \mathcal{H}_w$, wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ mamy

$$0 = \langle V^n v, v\rangle = \langle P_u V^n v, P_u v\rangle + \langle P_s V^n v, P_s v\rangle =$$

$$= \langle V^* P_u V^n v, V^* P_u v\rangle + \langle P_s V^n v, P_s v\rangle =$$

$$= \langle V^n P_u V^* v, P_u V^* v\rangle + \langle P_s V^n v, P_s v\rangle = \langle V^n v', v'\rangle,$$

gdzie $v' = P_u V^* v + P_s v$. Zatem v' jest wektorem wędrującym. Zauważmy, że $\mathcal{H}_s \subset \mathcal{H}_w$. Stąd $P_u V^* v = v' - P_s v \in \mathcal{H}_w$. Ostatecznie

$$V^* v = P_u V^* v + P_s V^* v \in \mathcal{H}_w.$$

Na mocy Stwierdzenia 3.1.4 podprzestrzeń $\mathcal{H}_w$ jest rozpięta przez wektory, których miary elementarne są Szegö. Jeśli $F \subset \mathcal{H}_0$ jest niezmienniczą podprzestrzenią dla V, to $F \ominus VF$ jest zbiorem wektorów wędrujących, zatem wobec definicji $\mathcal{H}_0$ mamy $F \ominus VF = \{0\}$. Na mocy Stwierdzenia 3.1.5, podprzestrzeń $\mathcal{H}_0$ składa się z wektorów, których miary miary elementarne są Szegö singularne. □

Bezpośrednio z dowodu powyższego twierdzenia otrzymujemy następującą uwagę.

Uwaga 3.2.4. *Każda niezmiennicza podprzestrzeń $\mathcal{H}_0$ jest redukująca.*

3.3. Opis rozkładu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$

Zanim przejdziemy do opisu podprzestrzeni $\mathcal{H}_w$ oraz $\mathcal{H}_0$ przypomnijmy znany wynik, którego postać dla operatora normalnego można znaleźć m. in. w [**7**] (str. 267).

Stwierdzenie 3.3.1. *Operator unitarny U jest $*$-cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy U jest unitarnie równoważny M_μ operatorowi mnożenia przez zmienną niezależną "z" na przestrzeni $L^2(\mu)$, gdzie μ jest miarą nieujemną na okręgu jednostrowym.*

UWAGA 3.3.2. *Jeśli e jest wektorem $*$-cyklicznym dla operatora unitarnego U, to miara μ (taka jak w powyższym stwierdzeniu) może być wybrana jako miara elementarna e, tzn. $\mu(\cdot) = \langle E(\cdot)e, e\rangle$, gdzie E jest miarą spektralną U.*

Przypomnijmy jeszcze jeden znany wynik (zob. [**24**] str. 53).

STWIERDZENIE 3.3.3. *Niech h będzie nieujemną funkcją określoną na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$. Załóżmy, że h jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Wtedy h jest postaci $h = |f|^2$, dla niezerowej funkcji $f \in H^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\log h$ jest całkowalny w sensie Lebesgue'a.*

STWIERDZENIE 3.3.4. *Niech μ będzie miarą nieujemną, skończoną, absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a m na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$. Niech $\sigma := supp\mu$.*

Wtedy M_μ operator mnożenia przez zmienną niezależną "z" na przestrzeni $L^2(\sigma, \mu)$ jest unitarnie równoważny M_z operatorowi mnożenia przez zmienną niezależną "z" na przestrzeni $L^2(\sigma, m)$, gdzie m jest miarą Lebesgue'a.

DOWÓD. Rozpatrzmy funkcje $h := \frac{d\mu}{dm}$. Dzięki skończoności miary μ widzimy, że dodatnia funkcja h jest całkowalna względem miary Lebesgue'a.

Zatem istnieje dodatnia funkcja $f \in L^2(\sigma, m)$ taka, że $h = f^2$. Rozważmy operator

$$U_f : L^2(\sigma, \mu) \ni u \to uf \in L^2(\sigma, m).$$

Ponieważ zachodzi $f^2 = \frac{d\mu}{dm}$, otrzymujemy

$$\int_\sigma uf\overline{vf}dm = \int_\sigma u\overline{v}f^2 dm = \int_\sigma u\overline{v}d\mu,$$

dla $u, v \in L^2(\sigma, \mu)$. Zatem operator U_f jest dobrze określony na $L^2(\sigma, \mu)$ oraz zachowuje iloczyn skalarny. Stąd $U_f : L^2(\sigma, \mu) \to \mathcal{R}(U_f)$ jest operatorem unitarnym. Aby wykazać, że $\mathcal{R}(U_f) = L^2(\sigma, m)$ ustalmy $v \in L^2(\sigma, m)$. Wtedy funkcja $\frac{v}{f}$ jest dobrze określona prawie wszędzie oraz

$$\int_\sigma |v|^2 dm = \int_\sigma \left|\frac{v}{f}f\right|^2 dm = \int_\sigma \left|\frac{v}{f}\right|^2 f^2 dm = \int_\sigma \left|\frac{v}{f}\right|^2 d\mu.$$

Zatem $v = uf$, gdzie $u = \frac{v}{f} \in L^2(\sigma, \mu)$.

Ponadto, $M_\mu = U_f^{-1} M_z U_f$, więc operator U_f wyznacza unitarną równoważność operatorów M_μ oraz M_z. □

Stosując rozkład Lebesgue'a do części unitarnej rozkładu Wolda izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ otrzymujemy (zob. Rozdział 1)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}, \tag{3.3.1}$$

gdzie $\mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing} = \mathcal{H}_u$.

Przejdźmy teraz do opisu rozkładu izometrii nieunitarnej z Twierdzenia 3.2.3.

TWIERDZENIE 3.3.5. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią nieunitarną. Wtedy*

$$\mathcal{H}_w = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s.$$

DOWÓD. Część singularna najmniejszego unitarnego rozszerzenia $\widehat{V} \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})$ izometrii V jest równa części singularnej $V|_{\mathcal{H}_{sing}}$ części unitarnej V. Dla wektora wędrującego w podprzestrzeń span$\{\widehat{V}^n w : n \in \mathbb{Z}\}$ redukuje $\widehat{V}$ do przesunięcia dwustronnego. Zatem miara elementarna dowolnego wektora wędrującego dla V jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Stąd podprzestrzeń singularna $\mathcal{H}_{sing}$ jest prostopadła do $\mathcal{H}_w$. Ponieważ jest ona redukująca dla V bez straty dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $\mathcal{H}_{sing} = \{0\}$, czyli $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s$.

Rozważmy wektor $x \in \mathcal{H}$ prostopadły do $\mathcal{H}_w$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $x \neq 0$. Podprzestrzeń $H_x :=$ span$\{V^n x : n \geqslant 0\} \subset \mathcal{H}_0$ jest niezmiennicza dla V. Zatem na mocy Uwagi 3.2.4 jest redukująca dla V. Dalej wektor x jest cykliczny dla $V|_{H_x}$. Zatem na mocy Stwierdzenia 3.3.1 operator $V|_{H_x}$ może być utożsamiony z operatorem mnożenia przez zmienną niezależną $''z''$ na przestrzeni $L^2(\sigma, \mu)$, gdzie μ jest skończoną miarą absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a oraz $\sigma := supp\mu$. Na mocy Stwierdzenia 3.3.4 operator unitarny $V|_{L^2(\sigma,\mu)}$ jest unitarnie równoważny mnożeniu przez zmienną niezależną $''z''$ na przestrzeni $L^2(\sigma, m)$. Po ewentualnym przejściu do podprzestrzeni redukującej możemy założyć, że zbiór $\mathbb{T} \setminus \sigma$ ma dodatnią miarę Lebesgue'a. Ustalmy funkcję

$$h(z) = \begin{cases} 1, & \text{dla } z \in \mathbb{T} \setminus \sigma, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } z \in \sigma. \end{cases}$$

Na mocy Stwierdzenia 3.3.3 istnieje $f \in H^2$ takie, że $|f|^2 = h$. Skoro V jest nieunitarną izometrią to bez straty dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $f \in H^2 \subset \mathcal{H}_s$. Ustalmy $g = \frac{\chi_\sigma}{\sqrt{2}} \in \mathcal{H}_0$. Zauważmy, że $|f|^2 + |g|^2 = 1$. (Funkcja $g \in L^2(\sigma, m) \subset L^2(\mathbb{T}, m)$ jest utożsamiana z funkcją określoną na całym okręgu jednostkowym.) Skoro $f \in \mathcal{H}_s \subset \mathcal{H}_w$, to funkcja f jest prostopadła do g. Można sprawdzić, że

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g|^2 dm =$$
$$= \Big(\frac{m(\sigma)}{2} + m(\mathbb{T} \setminus \sigma)\Big) + \frac{m(\sigma)}{2} = 1.$$

Podobnie,

$$\langle z^n(f+g), f+g\rangle = \langle z^n f, f\rangle + \langle z^n g, g\rangle =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} z^n(|f|^2 + |g|^2) dm = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} z^n dm = 0,$$

dla $n > 0$. Zatem wektor $f + g$ jest niezerowym wektorem wędrującym. Skoro g jest ortogonalne do $\mathcal{H}_w$, to dostajemy $\frac{m(\sigma)}{2} = \|g\|^2 = \langle f + g, g\rangle = 0$. Zatem otrzymujemy sprzeczność z niezerowością miary zbioru σ. □

Powyższe twierdzenie implikuje postać przestrzeni $\mathcal{H}_w$ dla części operatorów unitarnych.

Wniosek 3.3.6. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem unitarnym takim, że $\mathcal{H}_w \neq \{0\}$. Wtedy*

$$\mathcal{H}_w = \mathcal{H}_{ac}.$$

Dowód. Niech $v \in \mathcal{H}_w$ będzie niezerowym wektorem wędrującym. Ustalmy $L := \operatorname{span}\{v, Vv, V^2v, \dots\}$, $M = \{\dots, V^*v, v, Vv, V^2v, \dots\}^{\perp}$ oraz $\mathcal{K} = L \oplus M$. Izometria $V|_L$ jest jednostronnym przesunięciem oraz $V|_{\mathcal{K}}$ jest nieunitarną izometrią. Na mocy Twierdzenia 3.3.5 mamy $\mathcal{K}_w = L \oplus \mathcal{K}_{ac}$, gdzie podprzestrzenie są oznaczone analogicznie jak w Twierdzeniu 3.3.5. Podobnie dla każdego $\mathcal{K}^n := V^{*n}L \oplus M$ mamy $\mathcal{K}^n_w = V^{*n}L \oplus \mathcal{K}_{ac}$. Wektor wędrujący pozostaje wędrujący dla rozszerzenia izometrii. Stąd $\mathcal{K}^n_w \subset \mathcal{H}_w$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ostatecznie $\mathcal{H}_{ac} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} V^{*n}L \oplus \mathcal{K}_{ac} \subset \mathcal{H}_w \subset \mathcal{H}_{ac}$. □

Powyższe wyniki pozawalają nam na opis rozkładu z Twierdzenia 3.2.3.

Twierdzenie 3.3.7. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Wtedy rozkład z Twierdzenia 3.2.3 można opisać jak następuje:*

- *Jeśli V jest operatorem unitarnym nieposiadającym wektorów wędrujących, to $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$,*

- *w przeciwnym przypadku, mamy* $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{sing}$ *oraz* $\mathcal{H}_w = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s$.

□

Bezpośrednim wnioskiem z tego twierdzenia jest maksymalność rozkładu przestrzeni $\mathcal{H}_w$ w Twierdzeniu 3.2.3.

Ponadto z postaci przestrzeni $\mathcal{H}_0$ otrzymujemy następujący wniosek.

WNIOSEK 3.3.8. *Wektory ortogonalne do wszystkich wektorów wędrujących dla V są ortogonalne do wszystkich wektorów wędrujących dla minimalnego unitarnego rozszerzenia V.*

Na mocy hiperredukowalności rozkładu Lebesgue'a (zob. [**35**], [**41**]) dostajemy następujący wniosek.

WNIOSEK 3.3.9. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Wtedy rozkład $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$ jest hiperredukujący, tzn. przestrzenie $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_w$ redukują dowolny operator przemienny z izometrią V.*

3.4. Przykład

Twierdzenie 3.3.7 pokazuje w szczególności, że dla izometrii nieunitarnej takiej, że $\mathcal{H}_{ac} \neq \{0\}$, istnieją wektory wędrujące nie należące do podprzestrzeni $\mathcal{H}_s$.

W dowodzie Twierdzenia 3.3.5 konstruowaliśmy wektor wędrujący, którego projekcja na przestrzeń części unitarnej oraz części przesunięcia były niezerowe. Pokażmy teraz innym sposobem przykłady wektorów wędrujących dla izometrii, której część unitarna nie posiada żadnego wektora wędrującego.

PRZYKŁAD 3.4.1. Oznaczmy $\mathbb{T}_+ := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1, \Im z \geqslant 0\}$ oraz μ jako miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}_+$. Rozpatrzmy przestrzeń $\mathcal{H} := L^2(\mu) \oplus \bigoplus_{n=0}^{\infty} l^2$ oraz izometrię $V := U \oplus \bigoplus_{n=0}^{\infty} S$, gdzie S jest przesunięciem jednostronnym na l^2, a $U \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}_+, \mu))$ jest operatorem mnożenia przez zmienną niezależną $''z''$.

Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}_+$ rozważmy funkcję $f_k(z) := 1 - \frac{1}{k}(z^2 + z^4 + ... + z^{2k})$. Pokażmy, że

$$c_n^k := \langle U^n f_k, f_k \rangle = \int_{\mathbb{T}_+} z^n |1 - \frac{1}{k}(z^2 + z^4 + ... + z^{2k})|^2 dz = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Istotnie mamy
(3.4.1)

$$\int\limits_{\mathbb{T}_+} z^n |1 - \frac{1}{k}(z^2 + z^4 + ... + z^{2k})|^2 dz = \int\limits_{\mathbb{T}_+} z^n \Big(1 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k^2}(z^{2j} + \overline{z}^{2j})\Big) dz.$$

Dalej wobec

$$\int\limits_{\mathbb{T}_+} z^n dz = \begin{cases} -\frac{2}{1+n}, & \text{dla } 2|n, \\ 0, & \text{dla } 2 \not| n, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

otrzymujemy, że całka (3.4.1) wynosi 0 dla n nieparzystych oraz

$$\frac{-2(1+\frac{1}{k})}{1+2m} + \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k^2}\Big(\frac{2}{1+2(m-j)} + \frac{2}{1+2(m+j)}\Big)$$

dla $n = 2m$. Powyższą sumę można zapisać jako

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k^2}\Big(\frac{2}{1+2(m-j)} + \frac{2}{1+2(m+j)} - \frac{4}{1+2m}\Big).$$

Bezpośrednie rachunki ostatecznie pokazują, że

$$c_{2n}^k = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k^2} \frac{16j^2}{(1+2(2n-j))(1+2(2n+j))(1+4n)} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Zatem momenty funkcji f_k tworzą szereg zbieżny, tzn. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n^k| < \infty$. W konsekwencji poniższy wektor jest dobrze określony

$$b^k = \begin{bmatrix} \sqrt{c_1^k} & -\sqrt{c_1^k} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{c_2^k} & 0 & -\sqrt{c_2^k} & 0 & \cdots \\ \sqrt{c_3^k} & 0 & 0 & -\sqrt{c_3^k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} l^2.$$

Ponadto łatwo możemy policzyć m-ty moment $\langle \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^m(b^k), b^k \rangle$ elementu b^k. Mianowicie mamy

$$\left\langle \begin{bmatrix} \overbrace{0\ldots0}^{m} & \sqrt{c_1^k} & -\sqrt{c_1^k} & 0 & \cdots \\ 0\ldots0 & \sqrt{c_2^k} & 0 & -\sqrt{c_2^k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{c_1^k} & -\sqrt{c_1^k} & 0 & \cdots \\ \sqrt{c_2^k} & 0 & -\sqrt{c_2^k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \right\rangle = -c_m^k.$$

Zatem element $v := f_k \oplus b^k$ jest wektorem wędrującym, którego projekcja na przestrzeń $\mathcal{H}_u$ wynosi $f_k \neq 0$ oraz projekcja na $\mathcal{H}_s$ wynosi $b^k \neq 0$.

Co więcej wektor $v := z^n f_k \oplus b^k$ dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ jest również wektorem wędrującym. Przeprowadzając analogiczne obliczenia do powyższych, na mocy równości (3.4.2) otrzymujemy, że

$$\|1 - f_k\|^2 = \int_{\mathbb{T}_+} \Big(\frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} (z^{2j} + \overline{z}^{2j}) \frac{k-j}{k^2}\Big) dz = -\frac{2}{k} + 4 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{k-j}{k^2} \frac{1}{4j^2 - 1}.$$

Zatem $f_k \to 1$ w normie z przestrzeni $L^2(\mathbb{T}_+)$, czyli $z^n f_k \to z^n$ $(k \to \infty)$. Stąd zbiór projekcji wektorów wędrujących na przestrzeń unitarnej części $\mathcal{H}_u$ jest liniowo gęsty w $\mathcal{H}_u$.

□

Wykorzystując powyższy przykład możemy wykazać następujący fakt.

STWIERDZENIE 3.4.2. *Niech $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie singularnym operatorem unitarnym. Wtedy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle U^n x, x\rangle| = \infty$$

dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$.

DOWÓD. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje wektor $f \in \mathcal{H}$ taki, że $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle U^n f, f\rangle| < \infty$. Rozważmy wektor $b \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} l^2$ pochodzący od momentów wektora f, taki jak w Przykładzie 3.4.1. Wtedy wektor $v = f + b \in \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} l^2$ jest wędrujący dla operatora $V = U \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} S$, gdzie S jest przesunięciem jednostronnym o krotności 1.

Minimalne unitarne rozszerzenie izometrii V jest postaci $\widehat{V} = U \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \widehat{S}$. Przy czym U jest częścią singularną operatora $\widehat{V}$. Zatem mamy $v \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} l^2$. Czyli $f = 0$. Co daje sprzeczność z założeniem.

□

Dzięki Twierdzeniu 3.3.7 wiemy, że zbiór wektorów wędrujących dla izometrii, której część unitarna jest absolutnie ciągła jest gęsty. Jeśli odpowiedź na poniższe pytanie jest twierdząca, to możemy udowodnić ten fakt bezpośrednio korzystając z konstrukcji z Przykładu 3.4.1.

PROBLEM 3.4.3. *Niech $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie absolutnie ciągłym operatorem unitarnym. Czy zbiór $\{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^{\infty} |\langle U^n x, x\rangle| < \infty\}$ jest gęsty?*

3.5. Inny rozkład typu Szegö

Podprzestrzeń $\mathcal{H}_0$, rozważanego rozkładu typu Szegö $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$, można dodatkowo scharakteryzować w następujący sposób.

TWIERDZENIE 3.5.1. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Wtedy*

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap \mathcal{M}',$$

gdzie $\mathcal{M}' := \{M \subset \mathcal{H} : VM \subset M, \quad \bigvee_{k \in \mathbb{N}} V^{*k} M = \mathcal{H}\}$.

DOWÓD. Najpierw pokażmy, że $\bigcap \mathcal{M}' \subset \mathcal{H}_0$. Ustalmy wektor wędrujący $v \in \mathcal{H}$ oraz podprzestrzeń $M := \mathcal{H} \ominus \{v, V^* v, V^{2*} v, V^{3*} v, ...\}$. Podprzestrzeń M jest niezmiennicza dla V, gdyż jest dopełnieniem podprzestrzeni niezmieniczej dla V^*. Dalej skoro wektor v jest wędrujący, to $Vv \in M$. Stąd otrzymujemy $V^{*k} v = V^{*(k+1)} Vv \in V^{*(k+1)}(M)$. Czyli $\bigvee_{k \geqslant 0} V^{*k}(M) = \mathcal{H}$. Zatem $M \in \mathcal{M}$ oraz $v \perp M$. W konsekwencji podprzestrzeń $\bigcap \mathcal{M}'$ jest ortogonalna do wszystkich wektorów wędrujących dla V. Zatem $\bigcap \mathcal{M}' \subset \mathcal{H}_0$.

Pokażmy teraz przeciwną implikację $\mathcal{H}_0 \subset \bigcap \mathcal{M}'$. W tym celu ustalmy $M \in \mathcal{M}'$. Niech $M = M_u \oplus M_s$ będzie rozkładem Wolda dla izometrii $V|_M$. Skoro $V|_{M_u}$ jest operatorem unitarnym, to otrzymujemy $\mathcal{H} = \bigvee_{n \geqslant 0} V^{*n} M = M_u \oplus \bigvee_{n \geqslant 0} V^{*n} M_s$. Izometria $V|_{M_s}$ jest przesunięciem jednostronnym, więc przestrzeń $\bigvee_{n \geqslant 0} V^{*n} M_s$ jest rozpinana przez wektory wędrujące dla V. Stąd $\mathcal{H}_0 \subset M_u \subset M$. □

Ustalmy izometrię $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Niech $\widehat{V} \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})$ oznacza jej minimalne unitarne rozszerzenie. Zdefiniujmy

$$\mathcal{M} := \{M \subset \mathcal{H} : VM \subset M, \quad \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \widehat{V}^{*k} M = \widehat{\mathcal{H}}\}.$$

Innymi słowy $\mathcal{M}$ jest rodziną podprzestrzeni niezmienniczych dla V na tyle dużych, że minimalne unitarne rozszerzenie restrykcji $V|_M$ jest równe $\widehat{V}$, minimalnemu unitarnemu rozszerzeniu V.

TWIERDZENIE 3.5.2. *Dla izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ podprzestrzeń $\bigcap \mathcal{M}$ redukuje $\mathcal{H}$ generując rozkład typu Szegö.*
Ponadto, $\mathcal{H}_0 \subset \bigcap \mathcal{M}$.

DOWÓD. Zauważmy, że dla dowolnego $M \in \mathcal{M}$ mamy $VM \in \mathcal{M}$ oraz $VM \subset M$. Zatem $\bigcap \mathcal{M} \subset \bigcap_{M \in \mathcal{M}} VM \subset \bigcap \mathcal{M}$, więc $\bigcap \mathcal{M}$ redukuje V.

Wykażmy teraz, że dowolna niezmiennicza podprzestrzeń $\bigcap \mathcal{M}$ jest redukująca. Skoro $\bigcap \mathcal{M} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n M$, dla pewnego $M \in \mathcal{M}$, to $\bigcap \mathcal{M}$ redukuje V do operatora unitarnego. Ustalmy niezmienniczą podprzestrzeń $F \subset \bigcap \mathcal{M}$ oraz wektor wędrujący $x \in F \ominus VF$. Rozważmy podprzestrzeń $G := \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \{V^n x\}$, gdzie $V^n = V^{*|n|}$ dla $n < 0$. Wobec powyższego G redukuje V do przesunięcia dwustronnego. Niech $M_n := (\mathcal{H} \ominus G) \oplus \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \{V^{n+k} x\} \in \mathcal{M}$. Wtedy $x \in \bigcap \mathcal{M} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \mathcal{H} \ominus G$, czyli $x = 0$. Stąd $F \ominus VF = \{0\}$. Ostatecznie podprzestrzeń F redukuje V.

Aby na mocy Stwierdzeń 3.1.4 oraz 3.1.5 uzyskać, że $\mathcal{H} = \bigcap \mathcal{M} \oplus \left(\bigcap \mathcal{M}\right)^{\perp}$ jest rozkładem typu Szegö musimy wykazać, że $\mathcal{H}_0 \subset \bigcap \mathcal{M}$. Wówczas na mocy inkluzji $\left(\bigcap \mathcal{M}\right)^{\perp} \subset \mathcal{H}_w$ otrzymamy, że podprzestrzeń $\left(\bigcap \mathcal{M}\right)^{\perp}$ jest rozpinana przez wektory wędrujące.

W tym celu ustalmy dowolny element $x \in \mathcal{H}_0$ oraz rozważmy podprzestrzeń $L_x := \operatorname{span}\{V^n x : n \in \mathbb{N}\}$ niezmienniczą dla V. Mamy $L_x \subset \mathcal{H}_0$, zatem na mocy Uwagi 3.2.4 podprzestrzeń L_x redukuje V. Dodatkowo dla ustalonego $M \in \mathcal{M}$ rozpatrzmy podprzestrzeń $H_M := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n M \subset M$. Ponieważ $V(H_M) = H_M$, przestrzeń H_M redukuje V. Ponadto

$$\widehat{V}^{*k}(M) = H_M \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \widehat{V}^n(M \ominus \widehat{V}(M)) \oplus \bigoplus_{0\leqslant n\leqslant k} \widehat{V}^{*n}(M \ominus \widehat{V}(M)),$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Na mocy Wniosku 3.3.8 przestrzeń $L_x \subset \mathcal{H}_0$ jest prostopadła do $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \widehat{V}^n(M \ominus \widehat{V}(M)) \oplus \bigoplus_{0\leqslant n\leqslant k} \widehat{V}^{*n}(M \ominus \widehat{V}(M))$. Zatem $x \in L_x \subset H_M \subset M$. Czyli, wobec dowolności $M \in \mathcal{M}$ mamy $x \in \bigcap \mathcal{M}$. Ostatecznie $\mathcal{H}_0 \subset \bigcap \mathcal{M}$. □

Przejdźmy teraz do opisu związku pomiędzy dwoma wprowadzonymi rozkładami typu Szegö. Porównajmy podprzestrzenie $\mathcal{H}_0$ oraz $\bigcap \mathcal{M}$.

TWIERDZENIE 3.5.3. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią.*
Jeśli istnieją wektory wędrujące dla $V|_{\mathcal{H}_u}$, części unitarnej V, to

$$\bigcap \mathcal{M} = \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{sing}.$$

Jeśli nie istnieją wektory wędrujące dla $V|_{\mathcal{H}_u}$ oraz $\dim \mathcal{N}(V^*) < \infty$, to

$$\bigcap \mathcal{M} = \mathcal{H}_u.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że V posiada wektory wędrujące należące do $\mathcal{H}_u$. Jeśli $v \in \mathcal{H}_u$ jest dowolnie ustalonym wektorem wędrującym, to zauważmy, że $M := \Big(\mathcal{H} \ominus \{\dots, V^{*2}v, V^*v, v, Vv, V^2v, \dots\}\Big) \oplus \operatorname{span}\{V^n v : n \in \mathbb{N}_+\} \in \mathcal{M}$ oraz $v \perp M$. Zatem wobec $\mathcal{H}_s \perp \bigcap \mathcal{M}$ oraz Wniosku 3.3.6 otrzymujemy $\mathcal{H}_w \perp \bigcap \mathcal{M}$. Na mocy drugiej części Twierdzenia 3.5.2 dostajemy $\bigcap \mathcal{M} = \mathcal{H}_0$.

Teraz przeciwnie, niech V nie posiada wektorów wędrujących należących do $\mathcal{H}_u$. Ponadto niech V będzie operatorem, którego część przesunięcia jednostronnego $V|_{\mathcal{H}_s}$ ma skończoną krotność. Ustalmy przestrzeń $M \in \mathcal{M}$ i rozważmy rozkłady Wolda: $V = U \oplus S$ oraz $V|_M = U' \oplus S'$, gdzie U, U' są operatorami unitarnymi, a S, S' są przesunięciami jednostronnymi. Przestrzeń redukująca izometrię $V|_M$ do operatora unitarnego U' redukuje również izometrię V. Zatem $U = U' \oplus U''$ dla pewnego operatora unitarnego U''. Z definicji rodziny $\mathcal{M}$ otrzymujemy, że minimalne unitarne rozszerzenie $\widehat{V}$ izometrii V jest zarazem minimalnym unitarnym rozszerzeniem $\widehat{V|_M}$ izometrii $V|_M$. Zatem $U \oplus \widehat{S} = \widehat{V} = \widehat{V|_M} = U' \oplus \widehat{S'}$, gdzie $\widehat{S}, \widehat{S'}$ są minimalnymi przesunięciami dwustronnymi rozszerzającymi odpowiednio przesunięcia jednostronne S i S'. Wobec tego zachodzi równość $U'' \oplus \widehat{S} = \widehat{S'}$. Na mocy założeń przesunięcia jednostronne S oraz S' mają skończoną krotność. Zatem funkcja krotności spektralnej operatorów S i S' jest stała na okręgu jednostrowym. Dalej funkcja krotności spektralnej operatora U'' jest różnicą funkcji krotności S' oraz S. Wobec tego na mocy charakteryzacji operatorów unitarnych przy pomocy funkcji krotności spektralnych (zob. [**37**]) operator U'' jest przesunięciem dwustronnym lub operatorem na $\{0\}$. Jeśli jednak $\mathcal{H}_u$ nie zawiera wektorów wędrujących, to części unitarnej U nie można zredukować do przesunięcia dwustronnego. Zatem $U'' = 0$. W konsekwencji $\mathcal{H}_u \subset M$ dla dowolnego $M \in \mathcal{M}$. Ostatecznie $\bigcap \mathcal{M} = \mathcal{H}_u$. □

Problem 3.5.4. *Czy powyższe twierdzenie pozostanie prawdziwe bez założenia o skończonej krotności części przesunięcia jednostronnego?*

3.6. Redukcja Problemu Podprzestrzeni Niezmienniczej

Problem Podprzestrzeni Niezmienniczej jest obecnie najważniejszym nierozstrzygniętym problemem Teorii Operatorów na przestrzeni Hilberta.

PROBLEM 3.6.1. *Czy każdy operator ograniczony na przestrzeni Hilberta posiada nietrywialną (domkniętą) podprzestrzeń niezmienniczą?*

Jak dotąd uzyskano wiele częściowych wyników skupiających się na pewnych klasach operatorów. Zaprezentujmy tu redukcję Problemu 3.6.1 ze względu na własności asymptotyczne kontrakcji dyskutowane w Rozdziale 2.

Podprzestrzeń jest niezmiennicza dla operatora T wtedy i tylko wtedy, gdy jest niezmiennicza dla kontrakcji $\frac{T}{\|T\|}$. Zatem wystarczające jest rozstrzygnięcie pytania nt. istnienia podprzestrzeni niezmienniczych dla kontrakcji. Rozważając kontrakcję $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ widzimy, że podprzestrzeń $\{x \in \mathcal{H} : T^n x \to 0\}$ jest domknięta i niezmienicza dla T. Dalej podprzestrzeń $\mathcal{H} \ominus \{x \in \mathcal{H} : (T^*)^n x \to 0\}$ również jest podprzestrzenią niezmienniczą dla T. Zatem Problem 3.6.1 pozostaje interesujący jedynie w przypadku kontrakcji klasy C_{00}, C_{01}, C_{10} lub C_{11}. Kontrakcje klasy C_{11} są quasi-podobne do operatorów unitarnych, więc zgodnie z konstrukcją przeprowadzoną w [**52**] posiadają nietrywialne podprzestrzenie redukujące. Jeśli podprzestrzeń L jest niezmiennicza dla kontrakcji T, to podprzestrzeń $\mathcal{H} \ominus L$ jest niezmiennicza dla T^*. W konsekwencji Problem 3.6.1 można ograniczyć do kontrakcji klasy C_{00} oraz C_{10}. Zupełnie nieunitarne kontrakcje będące operatorami normalnymi lub zwartymi są klasy C_{00}. Dla tych klas operatorów, dzięki twierdzeniu spektralnemu oraz dzięki pracy [**5**] istnieją podprzestrzenie niezmiennicze. Są to częściowe wyniki dotyczące kontrakcji klasy C_{00}. Ogólne rozstrzygnięcie Problemu 3.6.1 dla kontrakcji klasy C_{00} oraz C_{10} nie jest znane.

Nie mniej jednak możemy sformułować następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3.6.2. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie kontrakcją klasy C_{10}.*
Wtedy część singularna asymptoty izometrycznej T jest zerowa. Ponadto jeśli asymptota izometryczna T posiada wektory wędrujące, to T posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą.

DOWÓD. Kontrakcja klasy C_{10} jest operatorem zupełnie nieunitarnym. Zatem na mocy Stwierdzenia XII.2.1 z [**8**] część singularna asymptoty izometrycznej jest zerowa.

Załóżmy teraz, że V, asymptota izometryczna T, posiada wektory wędrujące. Izometria V zawiera część przesunięcia jednostronnego lub jest unitarna. Jeśli izometria V jest unitarna, to dowolny wektor wędrujący w generuje przestrzeń $\operatorname{span}\{V^n : n \in \mathbb{Z}\}$, która redukuje V

do przesunięcia dwustronnego. Zatem V zawiera w sobie przesunięcie jedno lub dwustronne. Stąd $\mathbb{T} \subset \sigma(V)$. Dalej na mocy Twierdzenia 4 z [**29**] dostajemy $\sigma(V) \subset \sigma(T)$. Jednak każda kontrakcja, której widmo zawiera okrąg jednostkowy posiada podprzestrzeń niezmienniczą(zob. [**10**], [**12**]). Co kończy dowód. $\square$

Bibliografia

[1] J. Agler, *Hypercontractions and subnormality*, J. Operator Theory 13(1985), 203-217.

[2] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations Operator Theory 13(1990), 307-315.

[3] T. Andô, *Operators with a norm condition*, Acta Sci. Math. (Szeged) 33(1972), 169-178.

[4] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68(1950), 337-404.

[5] N. Aronszajn, K.T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. of Math. 60(1954), 345-350.

[6] S.C. Arora, J.K. Thukral, *On a class of operators*, Glas. Mat. Ser. III 21(1986), 381-386.

[7] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Sceond Edition, Springer-Verlag, New York, Inc., 1990.

[8] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland Mathematical Library, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1988.

[9] S.K. Berberian, *Approximate proper vectors*, Proc. Amer. Math. Soc., 13(1962), 111-114.

[10] H. Bercovici, *Notes on invariant subspaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 23(1990), 1-36.

[11] H. Bercovici, *Commuting power-bounded operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 57(1993), 55-65.

[12] S.W. Brown, B. Chevreau, C. Pearcy, *On the structure of contraction operators. II* J. Funct. Anal. 76 (1988), 30-55.

[13] Z. Burdak, M. Kosiek, P. Pagacz, M. Słociński, *Shift-type properties of commuting, completely non doubly commutiong pairs of isometries*, praca przyjęta do druku, Integral Equations Operator Theory, 2014.

[14] R. Chill, Y. Tomilov, *Stability of operator semigroups ideas and results*, Perspectives in operator theory, 71-109, Banach Center Publ., 75, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2007.

[15] R. Curto, P. Muhly, D. Xia, *A trace estimate for p-hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, 6(1983), 507-514.

[16] B.P. Duggal, *On unitary parts of contractions*, Indiana J. pure appl. Math. 25(1994), 1243-1247.

[17] B.P. Duggal, *On characterising contractions with C_{10} pure part*, Integral Equations and Operator Theory 27(1997), 314-323.

[18] B.P. Duggal, C.S. Kubrusly, *Contractions with $C_{\cdot 0}$ direct summands*, Adv. Math. Sci. Appl. 11(2001), 593-601.

[19] B.P. Duggal, C.S. Kubrusly, *Paranormal contractions have property PF*, Far East J. Math. 14(2004), 237-249.

[20] B.P. Duggal, C.S. Kubrusly, N. Levan, *Contractions of class Q and invariant subspaces*, Bull. Korean Math. Soc. 42(2005), 169-177.

[21] C. Foiaş, I. Suciu, *Szegö-measures and spectral theory in Hilbert spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 11(1966), 147-159.

[22] T. Furuta, *On the class of Paranormal operators*, Proc. Japan Acad. 43(1967), 594-598.

[23] P.R. Halmos, *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics 18, New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1974.

[24] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Inc., N. J., 1962.

[25] V.I. Istrăţescu, T. Saitô, T. Yoshino, *On a class of operators*, Tôhoku Math. J. 18(1966), 410-413.

[26] I. Istrăţescu, V. Istrăţescu, *On some classes of operators I*, Proc. Japan Acad. 43(1967), 605-606.

[27] I. Istrăţescu, V. Istrăţescu, *On some classes of operators II*, Proc. Japan Acad. 43(1967), 957-959.

[28] V.I. Istrăţescu, *Introduction to Linear Operator Theory*, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, 1981.

[29] L. Kérchy, *Isometric Asymptotes of Power Bounded Operators*, Indiana Univ. Math. J. 38(1989), 173-188.

[30] L. Kérchy, *Operators with regular norm-sequences*, Acta Sci. Math. (Szeged) 63(1997), 571-605.

[31] L. Kérchy, *Criteria of regularity for norm-sequences*, Integral Equations Operator Theory 34(1999), 458-477.

[32] L. Kérchy, V. Müller, *Criteria of regularity for norm-sequences II*, Acta Sci. Math. (Szeged) 65(1999), 131-138.

[33] I.H. Kim *On (p,k)-quasihyponormal operators* Math. Inequal. Appl. 7(2004), 629-638.

[34] I.H. Kim, *The Fulglede-Putnam theorem for (p,k)-quasihyponormal operators*, J. Inequal. Appl. Art. ID 47481 (2006), 7 pp.

[35] M. Kosiek, *Fuglede-type decompositions of representations*, Studia Math. 151(2002), 87-98.

[36] M.Y. Lee, S.H. Lee, C.S. Rhoo, *Some remarks on the structure of k^*-paranormal operators*, Kyungpook Math. J. 35(1995), 205-211.

[37] M. Lemańczyk, *Teoria spektralna dla ergodyków*, 2010, wykład dostępny na stronie http://www-users.mat.umk.pl/ mlem/didactics.php

[38] G.G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math. 80(1948), 167-190.

[39] W.Mlak, *Characterization of completely non-unitary contractions in Hilbert spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 11(1963), 111-113.

[40] W. Mlak, *A note on Szegö type properties of semi-spectral measures*, Studia Math. 31(1968), 241–251.

[41] W. Mlak, *Intertwinning operators*, Studia Math. 43(1972), 219–233.

[42] R.L. Moore, D.D. Rogers, T. T. Trent, *A note on intertwining M-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 514-516.

[43] K. Okubo, *The unitary part of paranormal operators*, Hokkaido Math. J. 6(1977), 273-275.

[44] P. Pagacz, *On Wold-type decomposition*, Linear Algebra Appl. 436(2012), 3065-3071.

[45] P. Pagacz, *The Putnam-Fuglede property for paranormal and *-paranormal operators*, Opuscula Math. 33(2013), 565-574.

[46] P. Pagacz, *On the power-bounded operators of classes $C_{0\cdot}$ and $C_{1\cdot}$*, arXiv:1206.0492v1.

[47] S.M. Patel, *Contributions to the study of spectraliod operators*, Rozprawa doktorska, Delhi University 1974.

[48] C.R. Putnam, *On normal operators in Hilbert space*, Amer. J. Math. 73(1951), 357-362.

[49] C.R. Putnam, *Hyponormal contractions and strong power convergence*, Pacific J. Math. 57(1975), 531-538.

[50] Z. Sebestyén, *On range of adjoint operators in Hilbert space*, Acta Sci. Math. (Szeged) 46(1983), 295-298.

[51] B. Sz.-Nagy, *On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space*, Acta Sci. Math. (Szeged) 11(1947), 152-157.

[52] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Harmonic Analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland, Amsterdam, London, 1970.

[53] K. Tanahashi, A. Uchiyama, M. Cho, *Isolated points of spectrum of (p,k)-quasihyponormal operators*, Linear Algebra Appl. 382(2004), 221-229.

[54] Q. P. Vũ, *On the spectrum, complete trajectories and asymptotic stability of linear semidynamical systems*, J. Differential Equations 105(1993), 30-45.

[55] Q. P. Vũ, *Almost periodic and strongly stable semigroups of operators*, Linear Operators (Warsaw, 1994), Banach Center Publ., vol. 38, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997, pp. 401-426.

[56] H. Wold, *A study in the analysis of stationary time series*, Almkvist and Wiksell, Stockholm, 1954.