Sylwester Zając

GEOMETRYCZNA TEORIA FUNKCJI W WYPUKŁYCH OBSZARACH TUBOWYCH I W DYNAMICE OPERATOROWEJ

Praca Doktorska

Promotor:
prof. dr hab. Armen Edigarian

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
Kraków 2014

Spis treści

Wstęp

Niniejsza praca składa się z dwóch niezależnych części, z których każda dotyczy zagadnień należących do analizy zespolonej.

Pierwszy rozdział poświęcony jest geometrycznej teorii funkcji w wypukłych obszarach tubowych w $\mathbb{C}^n$, a dokładniej badaniu geodezyjnych zespolonych dla takich obszarów. Najważniejszym wynikiem uzyskanym w tym rozdziale jest warunek równoważny na to, aby odwzorowanie holomorficzne z dysku jednostkowego w taki obszar było geodezyjną zespoloną. Uzyskany warunek okazuje się być bardzo przydatny do znajdowania konkretnych wzorów na geodezyjne zespolone w pewnych klasach wypukłych obszarów tubowych, w tym m. in. dla obszarów tubowych nakrywających ograniczone, pseudowypukłe, pełne obszary Reinhardta w $\mathbb{C}^n$ z usuniętymi osiami. Stosując następnie te wzory, otrzymujemy postać odwzorowań ekstremalnych dla funkcji Lemperta i metryki Kobayashi'ego-Roydena dla ograniczonych, pseudowypukłych, pełnych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^2$. Większość wyników przedstawionych w tym rozdziale można znaleźć w pracach [**Zaj14a**] i [**Zaj14b**].

Tematyka poruszana w drugim rozdziale niniejszej pracy leży na pograniczu analizy zespolonej wielu zmiennych i analizy funkcjonalnej. Zajmujemy się w nim badaniem operatorów kompozycji (składania) na przestrzeni funkcji holomorficznych $\mathcal{O}(\Omega)$ na spójnej rozmaitości Steina Ω. Operatory takie to odwzorowania postaci $f \mapsto f \circ \varphi$, zadane przez odwzorowania holomorficzne $\varphi : \Omega \to \Omega$. Rozważania nasze dotyczyć będą pojęcia hipercykliczności takich operatorów, czyli posiadania przez nie gęstej orbity. W publikacji [**Gro-Mor**] problem ten rozważany był w sytuacji, gdy Ω jest obszarem na płaszczyźnie zespolonej. W tej pracy zajmujemy się przypadkiem dowolnej spójnej rozmaitości Steina Ω, podając warunek równoważny na to, aby operator kompozycji zadany przez odwzorowanie holomorficzne φ był hipercykliczny. Wyniki w nim przedstawione znajdują się w artykule [**Zaj12**].

W trzecim rozdziale, zatytułowanym „Dodatek”, przypominamy najważniejsze informacje dotyczące rozważanych obiektów, które będą wykorzystywane w pracy.

Całość pracy zamyka spis podstawowych symboli oraz wykaz cytowanych prac.

Podziękowania

W tym miejscu pragnę serdecznie podziękować mojemu promotorowi, profesorowi Armenowi Edigarianowi, oraz profesorowi Włodzimierzowi Zwonkowi za życzliwość, opiekę naukową oraz wszelką pomoc, jaką od nich otrzymałem w trakcie moich studiów doktoranckich.

Chciałbym też bardzo podziękować profesorowi Pawłowi Domańskiemu, pod którego opieką odbywałem staż na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, za wielką życzliwość oraz owocną współpracę.

Pragnę także podziękować wszystkim uczestnikom seminarium „Geometryczna Teoria Funkcji", w tym przede wszystkim profesorowi Markowi Jarnickiemu.

Ogromne podziękowania chciałbym złożyć dr. Łukaszowi Kosińskiemu za poświęcony mi czas i wiele wysiłku włożonego w mój rozwój oraz za jego cenne uwagi dotyczące zarówno tej, jak i pozostałych moich prac.

Na koniec chciałbym podziękować dr. Przemysławowi Klisiowi za wiele godzin interesujących i motywujących rozmów na temat tej pracy.

Powstanie tej pracy było współfinansowane przez grant Narodowego Centrum Nauki **DEC-2012/05/N/ST1/02911**.

ROZDZIAŁ 1

Geodezyjne zespolone w wypukłych obszarach tubowych

1.1. Wprowadzenie i przedstawienie wyników

Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy obszarem tubowym, jeżeli $D = \Omega + i\mathbb{R}^n$ dla pewnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. W takiej sytuacji Ω nazywamy *bazą* obszaru tubowego D i oznaczamy przez $\operatorname{Re} D$. W tym rozdziale podamy warunek równoważny na geodezyjne zespolone w wypukłych obszarach tubowych oraz jawne wzory na geodezyjne zespolone w pewnych klasach takich obszarów. Odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będziemy nazywać *geodezyjną zespoloną* dla wypukłego obszaru D, jeżeli istnieje *lewa odwrotna* dla φ, tj. funkcja holomorficzna $f : D \to \mathbb{D}$ taka, że $f \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Geodezyjne zespolone dla D to dokładnie te odwzorowania holomorficzne, które są izometriami pomiędzy kołem jednostkowym $\mathbb{D}$ wyposażonym w odległość Poincaré'go, a obszarem D wyposażonym w (pseudo)odległość Carathéodory'ego.

Punktem wyjścia dla naszych rozważań jest następująca charakteryzacja geodezyjnych zespolonych dla wypukłych obszarów ograniczonych (zob. [**Roy-Won**], [**Jar-Pfl**, podrozdział 8.2]):

Twierdzenie 1.1.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem wypukłym i niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Wtedy φ jest geodezyjną zespoloną dla D wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $h \in H^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ takie, że*

$$\operatorname{Re}\left[\bar{\lambda} h^*(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda))\right] < 0 \textit{ dla wszystkich } z \in D \textit{ i } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\textit{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T}. \tag{1.1.1}$$

Przez $\varphi^*(\lambda)$ oznaczyliśmy tutaj *granicę radialną* w $\mathbb{C}$ odwzorowania φ w punkcie $\lambda \in \mathbb{T}$ (o ile istnieje), tj. $\varphi^*(\lambda) = \lim_{r \to 1^-} \varphi(r\lambda)$. Wiadome jest, że jeśli φ jest ograniczone, to ma $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie wszystkie granice radialne. W powyższym warunku wyrażenie „dla wszystkich $z \in D$ i $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$" należy rozumieć tak, że warunek zachodzi dla wszystkich $(z, \lambda) \in D \times A$, gdzie $A \subset \mathbb{T}$ jest pewnym borelowskim podzbiorem pełnej miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. Innymi słowy, owo "prawie wszędzie" nie zależy od z. Podobnie należy rozumieć tę sentencję w kolejnych twierdzeniach.

Powyższa charakteryzacja nie jest prawdziwa dla klasy obszarów tubowych, a dokładniej - warunek (1.1.1) w ogólności nie wystarcza do tego, aby φ było geodezyjną zespoloną. Widać to na prostym przykładzie: $D = \mathbb{H}_-$ i $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}$. Odwzorowanie φ oczywiście nie jest geodezyjną zespoloną dla D, a dość łatwo sprawdzić, że spełnia (1.1.1) z funkcją $h(\lambda) = \lambda$. Jak zobaczymy w dalszej części, warunek (1.1.1) okaże się być warunkiem koniecznym na to, aby φ było geodezyjną zespoloną. Dlatego warto zwrócić uwagę na następującą własność: jeżeli D jest obszarem tubowym, h jest klasy $H^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ i dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$ odwzorowanie $z \mapsto \operatorname{Re}(\bar{\lambda} h^*(\lambda) \bullet z)$ jest ograniczone z góry na D, to h musi być postaci

$$h(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + b\lambda + a$$

dla pewnych $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Założenia te są spełnione np. wtedy, gdy zachodzi warunek (1.1.1) z pewnym $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Dlatego też w warunkach równoważnych na geodezyjną zespoloną dla obszaru tubowego odwzorowania powyższej postaci zajmą miejsce odwzorowań klasy H^1. Dla uproszczenia wypowiedzi twierdzeń wprowadźmy oznaczenia na następujące rodziny odwzorowań:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n &:= \{h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) : \bar{\lambda} h(\lambda) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{T}\},\\ \mathcal{H}^n_+ &:= \{h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) : \bar{\lambda} h(\lambda) \in [0, \infty)^n, \lambda \in \mathbb{T}\}.\end{aligned}$$

Jak stwierdziliśmy,

$$\mathcal{H}^n = \{h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) : \exists a \in \mathbb{C}^n, b \in \mathbb{R}^n : h(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + b\lambda + a, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Ponadto (zob. np. [**Jar-Pfl**, Lemat 8.4.6]),

$$\mathcal{H}^1_+ = \{h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : \exists c \geq 0, d \in \overline{\mathbb{D}} : h(\lambda) = c(\lambda - d)(1 - \bar{d}\lambda), \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

W problemie scharakteryzowania geodezyjnych zespolonych w wypukłych obszarach tubowych można w naturalny sposób zawęzić rozważania do tych spośród nich, których baza nie zawiera żadnej afinicznej prostej rzeczywistej (Obserwacja 1.2.3). Warunek ten jest równoważny temu, że sam obszar tubowy nie zawiera żadnej afinicznej prostej zespolonej, a to z kolei (w klasie obszarów wypukłych) jest równoważne temu, że obszar jest typu *taut* ([**Bra-Sor**, Twierdzenie 1.1]). Jak zobaczymy w Obserwacji 1.2.4, gdy $D \subset \mathbb{C}^n$ jest wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych, to dowolne odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \mathbb{D} \to D$ ma prawie wszystkie granice radialne oraz miarę graniczną. Szczególnie ważne jest dla nas istnienie miar granicznych, gdyż właśnie przy ich pomocy podamy główną charakteryzację geodezyjnych zespolonych i wyliczymy geodezyjne w pewnych szczególnych klasach obszarów.

W podrozdziale 1.3 udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1.2. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych i niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Wtedy φ jest geodezyjną zespoloną dla D wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $h \in \mathcal{H}^n$ takie, że:*

(i) $\operatorname{Re}\left[\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda))\right] < 0$ *dla wszystkich $z \in D$ i $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$,*

(ii) $\operatorname{Re}\left[h(\lambda) \bullet \frac{\varphi(0) - \varphi(\lambda)}{\lambda}\right] < 0$ *dla każdego $\lambda \in \mathbb{D}_*$.*

Ponadto, jeżeli D ma ograniczoną bazę, to warunek (ii) *można pominąć.*

Różnica w stosunku do opisu z Twierdzenia 1.1.1 jest taka, że odwzorowanie h, zgodnie z naszą wcześniejszą obserwacją, stało się odwzorowaniem o składowych będących wielomianami drugiego stopnia, a prócz tego pojawił się warunek (ii). Dowód, że warunek z Twierdzenia 1.1.2 wystarcza do tego, aby φ było geodezyjną, jest bardzo podobny do dowodu warunku wystarczającego w Twierdzeniu 1.1.1, zaprezentowanym w [**Jar-Pfl**] jako Lemat 8.2.2. Właściwie, jedyne różnice występują tam, gdzie w dowodzie wspomnianego lematu używane było następujące rozumowanie, oparte na zasadzie maksimum dla funkcji harmonicznych: jeżeli u jest funkcją harmoniczną w $\mathbb{D}$ oraz $u^* < 0$ p.w. na $\mathbb{T}$, to $u < 0$ w $\mathbb{D}$. Rozumowanie to jest poprawne jedynie przy pewnych dodatkowych założeniach, np. że funkcja u jest ograniczona z góry w $\mathbb{D}$ (np. $u(\lambda) = \operatorname{Im}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 - 1$ nie jest, i nie jest ujemna w $\mathbb{D}$, a łatwo sprawdzić, że

$u^* = -1$ p.w. na $\mathbb{T}$). W dowodzie [**Jar-Pfl**, Lemat 8.2.2], prowadzonym dla przypadku ograniczonego obszaru D, wszystkie funkcje harmoniczne, do których stosowano powyższe rozumowanie, były ograniczone z góry, gdyż wynikało to z ograniczoności odwzorowania φ i samego obszaru. Jednakże, gdy przejdziemy do obszarów tubowych, wspomniana ograniczoność nie zachodzi i potrzebne jest dodatkowe założenie. Tę rolę pełni (nieco techniczny) warunek (ii).

Warunek (i) z Twierdzenia 1.1.2 daje nam pewne informacje na temat wartości radialnych odwzorowania φ: wynika z niego, że dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie każdej $\lambda \in \mathbb{T}$ wektor $\bar{\lambda}h(\lambda)$ zadaje płaszczyznę wspierającą dla obszaru $\operatorname{Re} D$ w punkcie brzegowym $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda)$ (co w pewnych sytuacjach pozwala jednoznacznie wyrazić $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda)$ przez $\bar{\lambda}h(\lambda)$). Niemniej jednak, sam warunek (i) jest za słaby na to, aby przy jego pomocy wyliczyć geodezyjne zespolone, gdyż wartości radialne φ^* nie pozwalają wyznaczyć odwzorowania φ, jeżeli nie jest ono klasy $H^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ - a z taką właśnie sytuacją będziemy mieli do czynienia w obszarach tubowych z nieograniczoną bazą. Z drugiej strony, warunek (ii) nie jest warunkiem „brzegowym" i może być trudno zastosować go do wyznaczania wzorów na geodezyjne zespolone dla konkretnych obszarów. Okazuje się jednak, że możliwe jest zastąpienie tych dwóch warunków przez jeden, odnoszący się jedynie do brzegowych własności odwzorowania φ, a konkretnie: do miary granicznej tego odwzorowania, która wyznacza φ jednoznacznie z dokładnością do stałej urojonej. Przypomnijmy, że borelowską miarę rzeczywistą (tj. miarę zespoloną o wartościach rzeczywistych) μ na $\mathbb{T}$ nazywamy *miarą graniczną* funkcji holomorficznej $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, jeżeli zachodzi następujący wzór:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+\lambda}{\zeta-\lambda}\, d\mu(\zeta) + i\operatorname{Im} f(0),\ \lambda \in \mathbb{D}.$$

Miara graniczna, o ile istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie (więcej szczegółów w podrozdziale 1.2). Jeżeli $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ i $\mu_1, \ldots, \mu_n$ są miarami granicznymi dla $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, to zestawienie $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ również będziemy nazywać miarą graniczną odwzorowania φ. W podrozdziale 1.3 udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1.3. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych i niech $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o mierze granicznej μ. Wtedy φ jest geodezyjną zespoloną dla D wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $h \in \mathcal{H}^n$ takie, że*

$$h \not\equiv 0$$

i dla każdego $z \in D$ miara

$$\bar{\lambda}h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda))$$

jest niedodatnia.

Dodatkowo, okazuje się że odwzorowania h w Twierdzeniach 1.1.2 i 1.1.3 to w istocie to samo odwzorowanie (Lemat 1.3.8). Miara $\bar{\lambda}h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda))$ z powyższego twierdzenia oznacza po prostu borelowską miarę rzeczywistą

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}h_j(\lambda)(\operatorname{Re} z_j\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu_j(\lambda))$$

na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$ (więcej szczegółów w podrozdziale 1.2).

Niech $\mathcal{D}_n$ oznacza rodzinę wypukłych obszarów tubowych $D \subset \mathbb{C}^n$ takich, że $\operatorname{Re} D \subset a + (-\infty, 0)^n$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}^n$ oraz $x + (-\infty, 0)^n \subset \operatorname{Re} D$ dla każdego $x \in \operatorname{Re} D$. Obszary z rodziny $\mathcal{D}_n$ to dokładnie te, które pokrywają (poprzez nakrycie $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (e^{z_1}, \ldots, e^{z_n})$) obszary postaci $G \cap \{z_1 \neq 0, \ldots, z_n \neq 0\}$, przy G będącym ograniczonym, pseudowypukłym i pełnym obszarem Reinhardta w $\mathbb{C}^n$. Jeżeli obszar D należy do rodziny $\mathcal{D}_n$, to oczywiście nie zawiera afinicznych prostych zespolonych. Korzystając z Twierdzenia 1.1.3, podamy dokładny opis geodezyjnych zespolonych dla obszarów z rodziny $\mathcal{D}_n$ przy $n \geq 2$ (Twierdzenie 1.1.4).

Dla wypukłego obszaru tubowego $D \subset \mathbb{C}^n$ i wektora $v \in \mathbb{R}^n$ zdefiniujmy

$$P_D(v) := \{p \in \overline{\operatorname{Re} D} : \langle x - p, v \rangle < 0 \text{ dla każdego } x \in \operatorname{Re} D\}.$$

Dla każdego $v \in \mathbb{R}^n$ zbiór $P_D(v)$ jest domkniętym, wypukłym podzbiorem $\partial \operatorname{Re} D$ (może też być pusty). Pewne własności zbiorów $P_D(v)$ prezentuje Obserwacja 1.2.5.

Dla $j \in \{1, \ldots, n\}$ oznaczmy przez $\widehat{\pi}_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ rzutowanie zaniedbujące j-tą współrzędną, tj.

$$\widehat{\pi}_j(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n),$$

natomiast δ_a niech oznacza deltę Diraca w punkcie $a \in \mathbb{T}$ traktowaną jako miara zespolona na $\mathbb{T}$.

Opis geodezyjnych w obszarach z rodziny $\mathcal{D}_n$ jest następujący:

Twierdzenie 1.1.4. *Niech $D \in \mathcal{D}_n$, $n \geq 2$ i niech $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o mierze granicznej μ. Wtedy*

$$\varphi(\mathbb{D}) \subset D \text{ i } \varphi \text{ jest geodezyjną zespoloną dla obszaru } D$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jeden *z poniższych warunków:*

(i) $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$ oraz istnieje $j \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $\widehat{\pi}_j \circ \varphi$ jest geodezyjną zespoloną dla obszaru $\widehat{\pi}_j(D)$, lub

(ii) μ jest dane wzorem

$$\mu = g\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1 \delta_{\lambda_1}, \ldots, \alpha_n \delta_{\lambda_n}) \tag{1.1.2}$$

dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (-\infty, 0]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$, $g = (g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{H}_+^n$ takich, że $h_1 \not\equiv 0, \ldots, h_n \not\equiv 0$,

$$\alpha_1 h_1(\lambda_1) = \ldots = \alpha_n h_n(\lambda_n) = 0,$$

funkcje $g_1, \ldots, g_n$ są całkowalne względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$ i zachodzą warunki

$$g(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda} h(\lambda)) \text{ dla } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\text{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T}$$

oraz

$$\frac{1}{2\pi} \mu(\mathbb{T}) \in \operatorname{Re} D.$$

Ponadto, jeżeli φ jest geodezyjną zespoloną dla D, a odwzorowanie $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{H}_+^n$ jest jak w Twierdzeniu 1.1.3, to:

(a) jeśli $h_1 \not\equiv 0, \ldots, h_n \not\equiv 0$, to warunek (ii) *zachodzi z $g(\lambda) = \operatorname{Re} \varphi^*(\lambda)$ i z tym właśnie h, tzn. można dobrać parametry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tak, żeby z tymi odwzorowaniami g, h spełniały wszystkie warunki w* (ii),

(b) jeśli liczba $j \in \{1, \dots, n\}$ jest taka, że $h_j \equiv 0$, to warunek (i) *zachodzi z tą właśnie liczbą j.*

Przez $\mu(\mathbb{T})$ rozumiemy tutaj punkt $(\mu_1(\mathbb{T}), \dots, \mu_n(\mathbb{T}))$, gdzie $(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu$.

Jeżeli w Twierdzeniu 1.1.4 zachodzi przypadek (ii), to ze wzoru (1.1.2) wynika, że odwzorowanie g musi być $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie wszędzie równe $\operatorname{Re}\varphi^*$ (szczegóły w podrozdziale 1.2), a dla $\lambda \in \mathbb{T}$ warunek $g(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda}h(\lambda))$ jest równoważny warunkowi

$$\operatorname{Re}\left[\bar{\lambda}h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda))\right] < 0, \ z \in D,$$

ponieważ $\bar{\lambda}h(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$. W tej sytuacji mamy też konkretną formułę na współrzędne $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ odwzorowania φ:

$$\varphi_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + \lambda}{\zeta - \lambda}\, g_j(\zeta)\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta) + \frac{\alpha_j}{2\pi}\,\frac{\lambda_j + \lambda}{\lambda_j - \lambda} + i\operatorname{Im}\varphi_j(0), \ \lambda \in \mathbb{D}.$$

Gdy zachodzi przypadek (i), bez dodatkowej wiedzy często nie jest możliwe uzyskanie dokładnego wzoru na φ - uzyskujemy jedynie warunek, że $\widehat{\pi}_j \circ \varphi$ jest geodezyjną dla $\widehat{\pi}_j(D)$, i żadnej innej informacji na temat zachowania składowej φ_j z wyjątkiem tej, że $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$. Jest tak dlatego, że - patrząc z drugiej strony - warunek, że odwzorowanie $\widehat{\pi}_j \circ \varphi$ jest geodezyjną w $\widehat{\pi}_j(D)$, sam w sobie wystarcza do tego, aby φ było geodezyjną dla D, o ile tylko $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$. To, który z dwóch warunków w Twierdzeniu 1.1.4 spełnia odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będące geodezyjną, zależy jedynie od odwzorowania h z Twierdzenia 1.1.3 znalezionego dla φ (części (a), (b) Twierdzenia 1.1.4); odnotujmy, że h nie musi być wyznaczone przez φ jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez stałą rzeczywistą.

Twierdzenie 1.1.4 daje nam metodę na znajdowanie wszystkich geodezyjnych zespolonych dla obszarów z klasy $\mathcal{D}_n$. Mając dany obszar $D \in \mathcal{D}_n$ i geodezyjną zespoloną $\varphi : \mathbb{D} \to D$, mamy gotowy wzór na φ, jeżeli zachodzi przypadek (ii), albo możemy "zejść" wymiar niżej, tj. do obszaru $\widehat{\pi}_j(D) \in \mathcal{D}_{n-1}$, jeżeli zachodzi przypadek (i). Całą procedurę kończymy schodząc do wymiaru 1, gdzie geodezyjne zespolone są odwzorowaniami konforemnymi z dysku jednostkowego w półpłaszczyznę i mają wiadomą postać. Odwzorowania h, przy pomocy których wyznaczamy wzory na geodezyjne zespolone w punkcie (ii), są zadane jedynie przez parametry $c_1, \dots, c_n \in (0, \infty)$, $d_1, \dots, d_n \in \overline{\mathbb{D}}$, natomiast zbiory $P_D(v)$ są jednoznacznie wyznaczone przez obszar D.

Dodatkowo, w podrozdziale 1.4 podamy szereg faktów upraszczających opis z Twierdzenia 1.1.4. Wykażemy na przykład, że jeżeli brzeg bazy obszaru D nie zawiera żadnej półprostej, to w Twierdzeniu 1.1.4 nie trzeba rozważać przypadku (i), tzn. dowolna geodezyjna jest dana jawnym wzorem, jak w (ii). Mówi o tym Propozycja 1.4.2. Podamy też pewne uproszczenia w przypadku dwuwymiarowym. Jeżeli obszar D należy do rodziny $\mathcal{D}_2$, to dla części odwzorowań $h \in \mathcal{H}^2_+$ istnieje co najwyżej jedno (z dokładnością do zbioru o zerowej mierze Lebesgue'a) odwzorowanie $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$, dla którego $g(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda}h(\lambda))$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$. W takiej sytuacji g jest oczywiście jednoznacznie wyznaczone przez h. Własności te zostały sformułowane w Propozycji 1.4.4 i Uwadze 1.4.5.

Na zakończenie rozważań na temat geodezyjnych zespolonych w obszarach tubowych podamy pewne zastosowanie wspomnianych wcześniej wyników. Mianowicie, w podrozdziale 1.6 uzyskamy postać (warunek konieczny) odwzorowań ekstremalnych względem funkcji Lemperta i metryki Kobayashi'ego-Roydena w pełnych, pseudowypukłych, ograniczonych obszarach Reinhardta w $\mathbb{C}^2$.

1.2. Podstawowe pojęcia i definicje

W tym podrozdziale podamy podstawowe pojęcia i przypomnimy pewne fakty istotnie dla naszych dalszych rozważań.

Rozdział 1 tej pracy poświęcony jest głównie badaniu geodezyjnych zespolonych w pewnej klasie obszarów wypukłych. Z tego powodu, wystarczająca dla naszych rozważań jest następująca definicja geodezyjnej zespolonej:

Definicja 1.2.1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem wypukłym i niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Odwzorowanie φ nazywamy *geodezyjną zespoloną* dla D, jeżeli istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ taka, że $f \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. W takiej sytuacji funkcję f nazywamy *lewą odwrotną* dla φ.

Geodezyjne zespolone to dokładnie te odwzorowania holomorficzne $\varphi : \mathbb{D} \to D$, które są izometriami pomiędzy dyskiem jednostkowym $\mathbb{D}$ wyposażonym w odległość Poincaré'go a obszarem D wyposażonym w (pseudo)odległość Carathéodory'ego. Jeżeli obszar wypukły D jest typu taut, to pseudoodległość Carathéodory'ego staje się odległością, i na mocy twierdzenia Lemperta przez dowolne dwa punkty obszaru D przechodzi pewna geodezyjna zespolona. Jak wspomniano wcześniej, w klasie obszarów wypukłych własność bycia typu taut jest równoważna temu, że obszar nie zawiera żadnej zespolonej prostej afinicznej.

Definicja 1.2.2. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *obszarem tubowym*, jeżeli $D = \Omega + i\mathbb{R}^n$ dla pewnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. W takiej sytuacji Ω nazywamy *bazą* obszaru D i oznaczamy przez $\operatorname{Re} D$.

Poniższa obserwacja przedstawia pewnego rodzaju rozkład wypukłych obszarów tubowych:

Obserwacja 1.2.3. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym. Wtedy istnieją liczba $k \in \{0, \dots, n\}$, wypukły obszar tubowy $G \subset \mathbb{H}^k_-$ i zespolony izomorfizm afiniczny $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ takie, że $\Phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ oraz $\Phi(D) = G \times \mathbb{C}^{n-k}$.*

Ponadto, odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \mathbb{D} \to D$ jest geodezyjną zespoloną dla D wtedy i tylko wtedy, gdy $(\Phi_1, \dots, \Phi_k) \circ \varphi$ jest geodezyjną zespoloną dla G.

Warunek $\Phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ w Obserwacji 1.2.3 pociąga za sobą to, że odwzorowanie Φ przekształca obszary tubowe w obszary tubowe. Obserwacja 1.2.3 pozwala nam zawęzić nasze rozważania do wypukłych obszarów tubowych niezawierających afinicznych prostych zespolonych. Ta ostatnia własność jest równoważna temu, że baza obszaru D nie zawiera afinicznych prostych rzeczywistych, lub też temu, że obszar jest typu taut. Jeżeli D jest wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych, to $k = n$ i $\Phi(D) \subset \mathbb{H}^n_-$. Ta ostatnia własność pociąga za sobą istnienie prawie wszystkich granic radialnych dowolnego odwzorowania holomorficznego $\varphi : \mathbb{D} \to D$, a także - jak się przekonamy - istnienie miary granicznej takiego odwzorowania.

Dowód Obserwacji 1.2.3. Niech k będzie takie, że $n-k$ jest maksymalnym możliwym wymiarem podprzestrzeni afinicznej zawartej w $\operatorname{Re} D$. Możemy założyć, że $\operatorname{Re} D = V \times \mathbb{R}^{n-k}$ dla pewnego obszaru wypukłego $0 \in V \subset \mathbb{R}^k$ niezawierającego afinicznych prostych rzeczywistych.

Wystarczy teraz udowodnić następującą własność: istnieją wypukły obszar $U \subset (-\infty, 0)^k$ oraz izomorfizm afiniczny $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $\Psi(V \times \mathbb{R}^{n-k}) = U \times \mathbb{R}^{n-k}$. Będziemy postępować podobnie jak w dowodzie [**Bra-Sor**, Propozycja 3.5]. Skonstruujemy indukcyjnie punkty $p_1, \ldots, p_k \in \partial V$ i liniowo niezależne wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k$ takie, że $\langle x - p_j, v_j \rangle < 0$ dla $x \in V$, $j = 1, \ldots, k$. Skoro $0 \in V$, to istnieją punkt $p_1 \in \partial V$ i wektor v_1 takie, że $\langle x - p_1, v_1 \rangle < 0$ dla $x \in V$. Załóżmy teraz, że mamy już zdefiniowane punkty $p_1, \ldots, p_j$ i liniowo niezależne wektory $v_1, \ldots, v_j$, gdzie $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Skoro $0 \in V$ i V nie zawiera prostych afinicznych, to przecięcie $\partial V \cap \{v_1, \ldots, v_j\}^\perp$ jest niepuste. Jako p_{j+1} weźmy jakikolwiek punkt należący do tego przecięcia, a jako v_{j+1} wektor taki, że $\langle x - p_{j+1}, v_{j+1} \rangle < 0$ dla $x \in V$. Jeżeli liczby rzeczywiste $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j+1}$ są takie, że $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j+1} v_{j+1} = 0$, to

$$0 = \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j+1} v_{j+1}, p_{j+1} \rangle = \alpha_{j+1} \langle v_{j+1}, p_{j+1} \rangle,$$

więc $\alpha_{j+1} = 0$, a to wobec liniowej niezależności wektorów $v_1, \ldots, v_j$ pociąga za sobą $\alpha_1 = \ldots = \alpha_j = 0$. Zatem wektory $v_1, \ldots, v_{j+1}$ są liniowo niezależne.

Skonstruowaliśmy więc pożądane punkty $p_1, \ldots, p_k$ i wektory $v_1, \ldots, v_k$. Niech

$$\psi : \mathbb{R}^k \ni x \mapsto (\langle x - p_1, v_1 \rangle, \ldots, \langle x - p_k, v_k \rangle) \in \mathbb{R}^k$$

oraz $U := \psi(V) \subset (-\infty, 0)^k$. Połóżmy

$$\Psi(x, y) := (\psi(x), y), \ (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Jest to izomorfizm afiniczny $\mathbb{R}^n$ spełniający wymagane warunki. □

Teraz przypomnimy pewne fakty związane z miarami zespolonymi na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$. W tym rozdziale będziemy rozważać jedynie miary borelowskie, więc będziemy na ogół pomijać słowo „borelowskie". Każda skończona borelowska miara nieujemna na $\mathbb{T}$ jest regularna, tzn. miara dowolnego zbioru może być przybliżana przez miary jego zwartych podzbiorów i otwartych nadzbiorów. Podobnie, każda miara zespolona ν na $\mathbb{T}$ jest regularna, tj. jej wahanie $|\nu|$ jest miarą regularną. Z twierdzenia Riesza wynika, że miary zespolone na $\mathbb{T}$ mogą być utożsamione z ciągłymi funkcjonałami liniowymi na przestrzeni funkcji ciągłych na $\mathbb{T}$ wyposażonej w normę supremum; przestrzeń tę oznaczamy symbolem $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. W tej pracy na ogół będziemy pracować z miarami rzeczywistymi. Przez miarę rzeczywistą rozumiemy miarę zespoloną przyjmującą wyłącznie wartości rzeczywiste. W tym rozdziale będziemy używali klasycznego skrótu „ν-p.w." na oznaczenie sentencji „prawie wszędzie" lub „prawie wszystkie" względem miary ν. Samo wyrażenie „prawie wszędzie" (bez podawania miary) odnosi się do miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$, którą oznaczamy przez $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$.

W tej pracy będziemy w naturalny sposób używać klasycznych symboli $\bullet$ i $\langle \cdot, \cdot \cdot \rangle$ także dla miar i funkcji. Przykładowo, jeżeli $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ jest zestawieniem n miar zespolonych, a $v = (v_1, \ldots, v_n)$ jest wektorem lub borelowskim odwzorowaniem $\mathbb{T} \to \mathbb{C}^n$, to przez $v \bullet \mu$ rozumiemy miarę $\sum_{j=1}^n v_j \, d\mu_j$, a przez $\langle d\mu, v \rangle$ miarę $\sum_{j=1}^n \overline{v_j} \, d\mu_j$, itp. Przez całkę z funkcji względem zestawienia miar $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ będziemy rozumieć zestawienie całek z tej funkcji względem miar $\mu_1, \ldots, \mu_n$, a samo

μ będziemy czasem traktować jako funkcję o wartościach w $\mathbb{C}^n$. Jeżeli miara rzeczywista ν jest nieujemna (odpowiednio: niedodatnia, zerowa), to będziemy zapisywali ten fakt krótko jako $\nu \geq 0$ (odpowiednio: $\nu \leq 0$, $\nu = 0$).

Przybliżymy teraz pojęcie miar granicznych odwzorowań holomorficznych, które będziemy intensywnie wykorzystywali w naszych rozważaniach. Zdefiniujmy rodzinę

$$\mathcal{M} := \{f_\mu + i\alpha : \mu \text{ jest borelowską miarą rzeczywistą na } \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}\},$$

gdzie $f_\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną daną wzorem

$$f_\mu(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + \lambda}{\zeta - \lambda} d\mu(\zeta), \ \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.2.1}$$

Rozwijając tę funkcję w szereg Taylora o środku w punkcie 0, otrzymujemy równość

$$f_\mu(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\mu(\mathbb{T}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \bar{\zeta}^n \, d\mu(\zeta), \ \lambda \in \mathbb{T}. \tag{1.2.2}$$

W szczególności, ciąg współczynników w tym rozwinięciu jest ograniczony, a to pociąga za sobą $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{O}(\mathbb{D})$, gdyż, przykładowo, funkcja $\lambda \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n$ jest holomorficzna na $\mathbb{D}$, a ciąg jej współczynników jest nieograniczony. Z równości (1.2.1) wynika, że jeżeli miara rzeczywista μ na $\mathbb{T}$ i funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ są takie, że

$$\operatorname{Re} f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\lambda|^2}{|\zeta - \lambda|^2} d\mu(\zeta), \ \lambda \in \mathbb{D}, \tag{1.2.3}$$

to $f \in \mathcal{M}$, a μ jest miarą graniczną dla f. Wyrażenie po prawej stronie (1.2.3) to oczywiście część rzeczywista prawej strony równości (1.2.1).

Konsekwencją rozwinięcia (1.2.2) jest to, że miara rzeczywista μ jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję f_μ. Rzeczywiście, współczynniki f_μ w rozwinięciu Taylora w punkcie 0 wyznaczają wartości całek $\int_{\mathbb{T}} \bar{\zeta}^n \, d\mu(\zeta)$ dla $n \geq 0$, a te z kolei, wobec założenia iż μ jest miarą rzeczywistą, wyznaczają wartości tych całek dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$. To z kolei jednoznacznie określa funkcjonał $\mathcal{C}(\mathbb{T}) \ni u \mapsto \int_{\mathbb{T}} u \, d\mu \in \mathbb{C}$, który, wobec twierdzenia Riesza, jednoznacznie wyznacza miarę μ. W szczególności, każda funkcja $f \in \mathcal{M}$ ma jedyny rozkład $f = f_\mu + i\alpha$ i w rozkładzie tym zachodzi równość $\alpha = \operatorname{Im} f(0)$. W takiej sytuacji μ jest nazywana *miarą graniczną* funkcji f.

Wiadome jest (np. [**Koo**, str. 10]), że przy $r \to 1^-$ miary $\operatorname{Re} f_\mu(r\lambda) d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda)$, rozumiane jako ciągłe funkcjonały liniowe na $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, zmierzają *-słabo do miary μ, tj. dla każdej funkcji $u \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{T}} u(\lambda) \operatorname{Re} f_\mu(r\lambda) d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} u(\lambda) d\mu(\lambda), \text{ gdy } r \to 1^-.$$

Stąd oraz z równości (1.2.3) wynika następujący fakt: jeżeli $f \in \mathcal{M}$, to $\operatorname{Re} f \geq 0$ na $\mathbb{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy miara graniczna funkcji f jest nieujemna. Z drugiej strony, wiadome jest (np. [**Koo**, str. 5]), że każda funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ o nieujemnej części rzeczywistej należy do rodziny $\mathcal{M}$.

Zauważmy, że jeśli μ jest miarą rzeczywistą na $\mathbb{T}$, to funkcja holomorficzna f o mierze granicznej μ ma prawie wszystkie *granice radialne*, tzn. dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie każdej $\lambda \in \mathbb{T}$ istnieje granica

$$f^*(\lambda) := \lim_{r \to 1^-} f(r\lambda) \in \mathbb{C}.$$

Istotnie, rozkładając μ na części nieujemną i niedodatnią widzimy, że wystarczy rozważyć jedynie przypadek, gdy μ jest miarą nieujemną i $\mu \neq 0$. W takiej sytuacji obraz f leży w półpłaszczyźnie $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta > 0\}$, więc funkcja $g := \frac{f-1}{f+1}$ należy do rodziny $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Stąd wynika, że dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie każdej $\lambda \in \mathbb{T}$ istnieje granica radialna $g^*(\lambda) \in \overline{\mathbb{D}}$. Ponadto, skoro $g \not\equiv 1$, dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$ musi być $g^*(\lambda) \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, a to daje $f(r\lambda) \to \frac{1+g^*(\lambda)}{1-g^*(\lambda)}$, gdy $r \to 1^-$.

Niech μ będzie miarą rzeczywistą na $\mathbb{T}$. Rozważmy rozkład Lebesgue'a-Radona-Nikodyma

$$\mu = g\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_s$$

miary μ względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, gdzie μ_s jest (jednoznacznie wyznaczoną) miarą rzeczywistą na $\mathbb{T}$, singularną względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, a $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$ (jedyną z dokładnością do zbioru o zerowej mierze $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$). Z twierdzenia Radona-Nikodyma (zob. np. [**Jar**, Twierdzenie 6.9.2]) wynika, że pochodna funkcji $(0, 2\pi) \ni t \mapsto \mu(\{e^{is} : s \in [0, t)\}) \in \mathbb{R}$ dla $\mathcal{L}^1$-p.w. $t \in \mathbb{R}$ istnieje i jest równa $g(e^{it})$ (w szczególności, gdyby miara μ była singularna względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, to pochodna ta byłaby $\mathcal{L}^1$-p.w. równa 0). Fakt ten, wraz z twierdzeniem Fatou (zob. [**Koo**, str. 11]), daje następujący wniosek: jeśli μ jest miarą graniczną funkcji $f \in \mathcal{M}$, to $\operatorname{Re} f^*(\lambda) = g(\lambda)$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$. W szczególności, funkcja $\operatorname{Re} f^*$ jest całkowalna względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, a rozkład Lebesgue'a-Radona-Nikodyma miary μ przyjmuje postać

$$\mu = \operatorname{Re} f^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_s.$$

Jeżeli funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ jest klasy H^1, to należy do rodziny $\mathcal{M}$, jej miarą graniczną jest $\operatorname{Re} f^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, a funkcje $\lambda \mapsto f(r\lambda)$ zmierzają do f^* w normie L^1 względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, gdy $r \to 1^-$ ([**Koo**, str. 35]). Taka sytuacja ma miejsce na przykład wtedy, gdy część rzeczywista funkcji f jest ograniczona ([**Koo**, str. 87]). Jednakże, na ogół miarą graniczną funkcji $f \in \mathcal{M}$ nie jest $\operatorname{Re} f^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$ i wzór (1.2.3) nie zachodzi dla f i miary $\operatorname{Re} f^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. Przykładowo, dla $f(\lambda) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ mamy $\operatorname{Re} f^*(\lambda) = 0$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, ale $\mu = 2\pi\delta_1$.

W dalszej części tego rozdziału przez $\mathcal{M}^n$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich odwzorowań holomorficznych $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ takich, że $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{M}$. Miarą graniczną odwzorowania $\varphi \in \mathcal{M}^n$ będziemy nazywać zestawienie miar $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, w którym μ_j jest miarą graniczną funkcji φ_j dla $j = 1, \dots, n$. Zachodzi wzór

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + \lambda}{\zeta - \lambda} d\mu(\zeta) + i\operatorname{Im}\varphi(0),\ \lambda \in \mathbb{D} \tag{1.2.4}$$

(jak pisaliśmy, całka względem zestawienia miar $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ oznacza po prostu zestawienie całek względem $\mu_1, \dots, \mu_n$). Podobnie jak poprzednio, φ ma $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie wszystkie granice radialne. Przez rozkład Lebesgue'a-Radona-Nikodyma zestawienia $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ będziemy rozumieć rozkład

$$\mu = \operatorname{Re} \varphi^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_s,$$

gdzie $\mu_s = (\mu_{s,1}, \dots, \mu_{s,n})$, a każde $\mu_{s,j}$ jest jedyną miarą singularną względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$ spełniającą równość

$$\mu_j = \operatorname{Re} \varphi_j^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_{s,j}.$$

Jeżeli odwzorowanie $\varphi \in \mathcal{M}^n$ ma miarę graniczną μ, to ze wspomnianej *-słabej zbieżności miar wynika następująca własność: jeśli V jest rzeczywistą macierzą wymiaru $m \times n$ i $b \in \mathbb{R}^m$, to odwzorowanie $\lambda \mapsto V \cdot \varphi(\lambda) + b$ należy do rodziny $\mathcal{M}^m$, a jego miarą graniczną jest $V \cdot \mu + b\,d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. Z dotychczasowych rozważań wynika także, iż rodzina $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{H}^n_-)$ zawiera się w $\mathcal{M}^n$.

Obserwacja 1.2.3 oraz uwagi poczynione w ostatnim akapicie pozwalają nam stwierdzić następujący ważny fakt:

Obserwacja 1.2.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych i niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Wtedy φ należy do rodziny $\mathcal{M}^n$, czyli ma miarę graniczną.*

Dowód. Niech Φ będzie jak w Obserwacji 1.2.3. Odwzorowanie Φ jest postaci $\Phi(z) = V \cdot z + b$ dla pewnej macierzy odwracalnej V i wektora $b \in \mathbb{C}^n$. Skoro $\Phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, macierz V i wektor b mają wszystkie wyrazy rzeczywiste. Połóżmy $\widetilde{\varphi}(\lambda) := V \cdot \varphi(\lambda) + b$. Mamy $\Phi(D) \subset \mathbb{H}^n_-$, a więc $\widetilde{\varphi}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}^n_-$, czyli odwzorowanie $\widetilde{\varphi}$ należy do rodziny $\mathcal{M}^n$. Niech $\widetilde{\mu}$ oznacza miarę graniczną $\widetilde{\varphi}$. Zdefiniujmy $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n) := V^{-1} \cdot (\widetilde{\mu} - b\,d\mathcal{L}^{\mathbb{T}})$. Nietrudno sprawdzić, że dla każdego $j = 1, \dots, n$ równość (1.2.3) zachodzi dla funkcji φ_j i miary μ_j. $\square$

Dla wypukłego obszaru tubowego $D \subset \mathbb{C}^n$ i wektora $v \in \mathbb{R}^n$ zdefiniujmy

$$P_D(v) := \{p \in \overline{\operatorname{Re} D} : \langle x - p, v\rangle < 0 \text{ dla każdego } x \in \operatorname{Re} D\}$$

oraz

$$W_D := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in \operatorname{Re} D} \langle x, v\rangle < \infty \right\}.$$

Podstawowe własności zbiorów $P_D(v)$ i W_D przedstawia następująca obserwacja:

Obserwacja 1.2.5. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym i niech $v \in \mathbb{R}^n$. Wtedy:*

(i) *$P_D(v)$ jest wypukłym i domkniętym podzbiorem $\partial \operatorname{Re} D$,*
(ii) *jeżeli $p, q \in P_D(v)$, to wektory $p - q$ i v są prostopadłe,*
(iii) *jeżeli $P_D(v) \neq \varnothing$, to $v \in W_D$,*
(iv) *W_D jest zbiorem wypukłym,*
(v) *jeżeli $(v_m)_{m=1}^\infty \in \mathbb{R}^n$, $v_m \to v$, $v \neq 0$, $p_m \in P_D(v_m)$ oraz $p_m \to p \in \overline{\operatorname{Re} D}$, to $p \in P_D(v)$.*
(vi) *jeżeli $D \in \mathcal{D}_n$, to $W_D \subset [0, \infty)^n$ oraz $e_1, \dots, e_n \in W_D$,*
(vii) *jeżeli obszar $\operatorname{Re} D$ jest ściśle wypukły, to zbiór $P_D(v)$ zawiera co najwyżej jeden element.*

Dowód. Ad. (i). Wypukłość zbioru $P_D(v)$ jest oczywista. Jeżeli $(p_n)_n \subset P_D(v)$ oraz $p_n \to p \in \partial \operatorname{Re} D$, to dla $x \in \operatorname{Re} D$ zachodzi $\langle x - p, v\rangle \leq 0$. Ale ta nierówność jest w istocie silna dla $x \in \operatorname{Re} D$, bowiem odwzorowanie $x \mapsto \langle x - p, v\rangle$ jest otwarte. Jego otwartość wynika z tego, że $P_D(v) \neq \varnothing$, a więc $v \neq 0$.

Ad. (ii). Jeżeli $p, q \in P_D(v)$, to $\frac{1}{2}(p + q) \in P_D(v)$. Zatem, skoro $p, q \in \overline{\operatorname{Re} D}$, to $\langle p - \frac{1}{2}(p + q), v\rangle \leq 0$ oraz $\langle q - \frac{1}{2}(p + q), v\rangle \leq 0$, a to daje $\langle p - q, v\rangle = 0$.

Ad. (iii), (iv), (vii). Dowody są natychmiastowe.

Ad. (v). Mamy $\langle x-p_m, v_m\rangle < 0$ dla $x \in \operatorname{Re} D$ i $m \in \mathbb{N}$, a więc $\langle x-p, v\rangle \leq 0$. Skoro $v \neq 0$, to odwzorowanie $x \mapsto \langle x-p, v\rangle$ jest otwarte, a więc poprzednia nierówność jest silna dla każdego $x \in \operatorname{Re} D$.

Ad. (vi). Jeżeli $v = (v_1, \ldots, v_n) \in W_D$, to dla $x \in \operatorname{Re} D$, $t < 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ mamy $x + te_j \in \operatorname{Re} D$, a więc $\langle x + te_j, v\rangle \leq C$ dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$ zależnej jedynie od v. W takim razie $tv_j \leq C - \langle x, v\rangle$. Jeżeli $v_j < 0$, to dążąc z t to $-\infty$ otrzymujemy sprzeczność. $\square$

1.3. Warunki równoważne na geodezyjną zespoloną

Ten podrozdział zaczniemy od sformułowania i udowodnienia Lematów 1.3.1 i 1.3.4, dających warunki konieczne i wystarczające na to, aby odwzorowanie holomorficzne było geodezyjną zespoloną w wypukłym obszarze w $\mathbb{C}^n$ (niekoniecznie tubowym). Jako wniosek ze wspomnianych lematów uzyskamy Twierdzenie 1.1.2. Następnie podamy Lemat 1.3.8, który wraz z Twierdzeniem 1.1.2 da nam główny wynik w tym rozdziale, czyli Twierdzenie 1.1.3. Podrozdział ten zakończymy udowodnieniem dwóch Lematów opisujących własności części absolutnie ciągłej i singularnej w rozkładzie Lebesgue-Radona-Nikodyma miary granicznej geodezyjnej zespolonej względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, które znajdą zastosowanie w podrozdziale 1.4.

Zacznijmy od wprowadzenia rodziny funkcji $(\psi_z)_{z\in\mathbb{C}^n} \subset \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, którą wykorzystamy w Lematach 1.3.1, 1.3.4 i 1.3.8. Dla odwzorowań $\varphi, h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ i punktu $z \in \mathbb{C}^n$ zdefiniujmy funkcję $\psi_z \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ wzorem

$$\psi_z(\lambda) := \tfrac{\varphi(0)-\varphi(\lambda)}{\lambda} \bullet h(\lambda) + \tfrac{h(\lambda)-h(0)}{\lambda} \bullet (z - \varphi(0)) + \lambda\, \overline{h(0) \bullet (z - \varphi(0))}. \tag{1.3.1}$$

Funkcję ψ_z można też zapisać w postaci:

$$\psi_z(\lambda) = \frac{h(\lambda) \bullet (z - \varphi(\lambda)) - h(0) \bullet (z - \varphi(0))}{\lambda} + \lambda\, \overline{h(0) \bullet (z - \varphi(0))}. \tag{1.3.2}$$

Zachodzi następująca własność: jeżeli $\lambda \in \mathbb{T}$ jest taka, że granice radialne odwzorowania h i funkcji $\varphi \bullet h$ istnieją w punkcie λ, to dla każdego $z \in \mathbb{C}^n$ istnieje granica radialna $\psi_z^*(\lambda)$ i zachodzi równość

$$\operatorname{Re} \psi_z^*(\lambda) = \operatorname{Re}\left[\bar{\lambda} h^*(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda))\right],\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{1.3.3}$$

Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, iż

$$\psi_{\varphi(0)}(0) = -h(0) \bullet \varphi'(0). \tag{1.3.4}$$

Na ogół będzie całkowicie jasne, dla jakich odwzorowań φ, h rozważamy funkcje ψ_z, dlatego pozostaniemy przy krótkim oznaczeniu ψ_z, nie wymieniając tych odwzorowań w dodatkowych indeksach.

Lemat 1.3.1. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Załóżmy, że istnieje odwzorowanie $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ takie, że*

$$\operatorname{Re}\,[h(0) \bullet \varphi'(0)] \neq 0$$

oraz zachodzi warunek

$$\operatorname{Re} \psi_z(\lambda) \leq 0,\ \lambda \in \mathbb{D}, z \in D,$$

gdzie ψ_z są zdefiniowane wzorem (1.3.1). *Wtedy odwzorowanie φ ma lewą odwrotną w obszarze D.*

Uwaga 1.3.2. Ustalmy $\varphi, h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$, $z \in \mathbb{C}^n$. Nierówność

$$\operatorname{Re} \psi_z(\lambda) \leq 0,\ \lambda \in \mathbb{D},$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

(i) $\operatorname{Re} \psi_z$ jest ograniczona z góry,

(ii) $\operatorname{Re} \psi_z^*(\lambda) \leq 0$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$.

Jest to natychmiastowa konsekwencja zasady maksimum. Z równości (1.3.3) wynika, że warunek w Lemacie 1.3.1 „odpowiada" warunkom (i), (ii) w Twierdzeniu 1.1.2. Powodem, dla którego Lemat 1.3.1 sformułowany jest w inny sposób niż Twierdzenie 1.1.2, jest uniknięcie używania granic radialnych odwzorowania φ, które mogą nie istnieć. Z założenia, że $\operatorname{Re} \psi_z(\lambda) \leq 0$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{D}$, $z \in D$, wynika jedynie to, że istnieją $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie wszystkie granice radialne odwzorowania h oraz funkcji $\varphi \bullet h$. Ich istnienie jest konsekwencją istnienia granic radialnych odwzorowań ψ_z, co z kolei wynika z faktu, iż funkcje $\operatorname{Re} \psi_z$ są ograniczone z góry na $\mathbb{D}$.

Uwaga 1.3.3. Chociaż Lemat 1.3.1 zachodzi dla wszystkich obszarów $D \subset \mathbb{C}^n$, a nie tylko dla wypukłych, to i tak nie wykracza on daleko poza przypadek obszaru wypukłego. Okazuje się bowiem, że jeżeli $D \subset \mathbb{C}^n$ jest dowolnym obszarem, a odwzorowania φ i h spełniają założenia Lematu 1.3.1 dla obszaru D, to spełniają one założenia tego lematu także dla obszaru $\operatorname{conv} D$. Korzystając z lematu dla tego większego obszaru, otrzymamy tak na prawdę lewą odwrotną dla φ należącą do rodziny $\mathcal{O}(\operatorname{conv} D, \mathbb{D})$. Obserwacja ta jest konsekwencją następującej, łatwej do sprawdzenia równości:

$$\psi_{\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n} = \alpha_1 \psi_{z_1} + \ldots + \alpha_n \psi_{z_n},$$

zachodzącej dla $z_1, \ldots, z_n \in D$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ takich, że $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

Dowodząc Lemat 1.3.1 będziemy naśladowali dowód Lematu 8.2.2 w [**Jar-Pfl**]. Wspomniany lemat jest podobny do naszego, ale działa dla obszarów ograniczonych i jest nieco inaczej sformułowany. W dowodzie Lematu 8.2.2 w [**Jar-Pfl**] kilkakrotnie wykorzystywana jest pewna wersja zasady maksimum dla funkcji harmonicznych, która przestaje działać, gdy opuścimy założenie o ograniczoności obszaru D. Przyjęte w Lemacie 1.3.1 założenie, że $\operatorname{Re} \psi_z(\lambda) \leq 0$, pozwala nam ominąć ten problem i argumentować jak w dowodzie Lematu 8.2.2. w [**Jar-Pfl**].

Dowód Lematu 1.3.1. Dla $\epsilon \geq 0$ zdefiniujmy

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(z, \lambda) &= (z - \varphi(\lambda)) \bullet h(\lambda) - \epsilon\lambda,\ z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{D}, \\ \Psi_\epsilon(z, \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \Phi_\epsilon(z, \lambda),\ z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{D}_*. \end{aligned}$$

Funkcja $\Psi_\epsilon(\varphi(0), \cdot)$ przedłuża się holomorficznie przez 0. Zachodzi równość

$$\Psi_\epsilon(\varphi(0), \lambda) = \psi_{\varphi(0)}(\lambda) - \epsilon,\ \lambda \in \mathbb{D}, \epsilon \geq 0,$$

a z niej wynika, że

$$\operatorname{Re} \Psi_\epsilon(\varphi(0), \lambda) < 0,\ \lambda \in \mathbb{D}, \epsilon > 0. \tag{1.3.5}$$

Ponadto, skoro $\operatorname{Re} \psi_{\varphi(0)}(0) = -\operatorname{Re}\, [h(0) \bullet \varphi'(0)] \neq 0$ i $\operatorname{Re} \psi_{\varphi(0)} \leq 0$, to $\operatorname{Re} \psi_{\varphi(0)} < 0$ na $\mathbb{D}$. W konsekwencji,

$$\operatorname{Re} \Psi_0(\varphi(0), \lambda) < 0,\ \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.3.6}$$

Z nierówności (1.3.5) i (1.3.6) wynika, że dla dowolnego $\epsilon \geq 0$ jedynym pierwiastkiem funkcji holomorficznej $\Phi_\epsilon(\varphi(0), \cdot)$ leżącym w $\mathbb{D}$ jest 0, i jest to pierwiastek pojedynczy.

Załóżmy chwilowo, że

$$\text{istnieje } f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D}) \text{ takie, że } \Phi_0(z, f(z)) = 0, \ z \in D. \tag{1.3.7}$$

Pokażemy, że f jest lewą odwrotną dla φ. Mamy $f(\varphi(0)) = 0$, ponieważ 0 jest jedynym pierwiastkiem funkcji $\Phi_0(\varphi(0), \cdot)$ w $\mathbb{D}$. Połóżmy

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(z, f(z)) : z \in D\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\varphi(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathbb{D}\}. \end{aligned}$$

Oczywiście $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Phi_0^{-1}(0)$. Mamy $\Phi_0(\varphi(0), 0) = 0$, a z nierówności (1.3.6) wynika, że $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda}(\varphi(0), 0) = \Psi_0(\varphi(0), 0) \neq 0$. Na mocy twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym, istnieje otwarte otoczenie $U \subset D \times \mathbb{D}$ punktu $(\varphi(0), 0)$ takie, że zbiór $U \cap \Phi_0^{-1}(0)$ jest wykresem pewnej funkcji holomorficznej zmiennej z, zdefiniowanej w otoczeniu punktu $\varphi(0)$ i przyjmującej w tym punkcie wartość 0. Zmniejszając w razie konieczności zbiór U, uzyskujemy równość $U \cap \Phi_0^{-1}(0) = U \cap \Gamma_1$, ponieważ $(\varphi(0), 0) \in \Gamma_1$. Stąd wynika inkluzja $U \cap \Gamma_2 \subset U \cap \Gamma_1$, która daje $(\varphi(\lambda), \lambda) \in U \cap \Gamma_1$ dla λ bliskich 0. A więc $f(\varphi(\lambda)) = \lambda$ dla λ bliskich 0, i w konsekwencji, na całym dysku $\mathbb{D}$.

Pozostaje wykazać (1.3.7), a w tym celu wystarczy udowodnić, że

$$\text{dla każdego } \epsilon > 0 \text{ istnieje } f_\epsilon \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D}) \text{ takie, że } \Phi_\epsilon(z, f_\epsilon(z)) = 0, \ z \in D. \tag{1.3.8}$$

Rzeczywiście, na mocy Twierdzenia Montela znajdziemy ciąg $(f_{\epsilon_k})_k$ ($\epsilon_k \to 0$, gdy $k \to \infty$) zbieżny do pewnej funkcji holomorficznej $f : D \to \mathbb{C}$. Skoro 0 jedynym pierwiastkiem funkcji $\Phi_\epsilon(\varphi(0), \cdot)$, mamy $f_\epsilon(\varphi(0)) = 0$, a więc $f(D) \subset \mathbb{D}$, co daje (1.3.7).

Warunek (1.3.8) wynika z następującej obserwacji:

$$\begin{aligned} &\text{dla dowolnych } \epsilon > 0 \text{ i } K \subset\subset D \text{ istnieje } r \in (0,1) \text{ takie, że} \\ &\operatorname{Re} \Psi_\epsilon(z, \lambda) < 0 \text{ dla } z \in K, |\lambda| \in [r, 1). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Rzeczywiście, załóżmy że zachodzi (1.3.9) i ustalmy $\epsilon > 0$. Weźmy $z \in D$ i niech $r = r(\epsilon, z)$ będzie jak wyżej, dobrane do zbioru $K = \{z\}$. Funkcja $\Phi_\epsilon(z, \cdot)$ nie ma pierwiastków w zbiorze $\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}$, gdyż $\operatorname{Re} \Psi_\epsilon(z, \lambda) < 0$ dla $|\lambda| \in [r, 1)$. Ponadto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{r\mathbb{T}} \frac{\frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial \lambda}(z, \lambda)}{\Phi_\epsilon(z, \lambda)} d\lambda = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{r\mathbb{T}} \frac{\frac{\partial \Psi_\epsilon}{\partial \lambda}(z, \lambda)}{\Psi_\epsilon(z, \lambda)} d\lambda = 1 \tag{1.3.10}$$

Ostatnia całka to indeks krzywej $s \mapsto \Psi_\epsilon(z, re^{is})$ w punkcie 0, równy 0 wobec (1.3.9). Stąd wynika, że $\Phi_\epsilon(z, \cdot)$ ma tylko jeden pierwiastek w $\mathbb{D}$ (licząc z krotnościami). Oznaczmy ten pierwiastek przez $f_\epsilon(z)$. Daje nam to funkcję $f_\epsilon : D \to \mathbb{D}$ taką, że $\Phi_\epsilon(z, f_\epsilon(z)) = 0$. Pokażemy, że jest ona holomorficzna.

Ustalmy $K \subset\subset D$ i niech $r = r(\epsilon, K)$ będzie jak w (1.3.9). Jak poprzednio, funkcja $\Phi_\epsilon(z, \cdot)$ nie ma pierwiastków w zbiorze $\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}$ dla $z \in K$, więc $f_\epsilon(K) \subset r\mathbb{D}$. Skoro $f_\epsilon(z)$ jest jedynym pierwiastkiem $\Phi_\epsilon(z, \cdot)$ i należy do $r\mathbb{D}$, zachodzi wzór

$$f_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r\mathbb{T}} \lambda \frac{\frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial \lambda}(z, \lambda)}{\Phi_\epsilon(z, \lambda)} d\lambda, \ z \in K, \tag{1.3.11}$$

z którego wynika, że f_ϵ jest holomorficzna w $\operatorname{int} K$. Skoro K był dowolny, otrzymujemy $f_\epsilon \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$.

Pozostaje jeszcze wykazać (1.3.9). Ustalmy $\epsilon > 0$ i zbiór $K \subset\subset D$. Dla $z \in K$ i $\lambda \in \mathbb{D}_*$ zachodzi

$$\operatorname{Re}\Psi_\epsilon(z,\lambda) = \operatorname{Re}\psi_z(\lambda) + \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\lambda}\, h(0)\bullet(z-\varphi(0)) - \lambda\,\overline{h(0)\bullet(z-\varphi(0))}\right] - \epsilon.$$

Drugi składnik wyrażenia po prawej stronie zmierza jednostajnie na K (jako ciąg funkcji zmiennej z) do zera, gdy $|\lambda| \to 1$, a pierwszy składnik jest niedodatni. To daje (1.3.9) i kończy dowód. □

Dla obszarów wypukłych Lemat 1.3.1 można odwrócić, otrzymując warunek konieczny na geodezyjną zespoloną. Mówi o tym Lemat 1.3.4. Wraz z Lematem 1.3.1 daje on warunek równoważny na to, aby odwzorowanie holomorficzne było geodezyjną zespoloną w wypukłym obszarze w $\mathbb{C}^n$.

Lemat 1.3.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem wypukłym, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ będzie geodezyjną zespoloną dla D i niech $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ będzie lewą odwrotną dla φ. Połóżmy*

$$h(\lambda) := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\varphi(\lambda)), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(\varphi(\lambda))\right),\ \lambda \in \mathbb{D}.$$

Wtedy

$$\operatorname{Re}\,[h(0)\bullet\varphi'(0)] \neq 0$$

oraz

$$\operatorname{Re}\psi_z(\lambda) \le 0,\ \lambda \in \mathbb{D}, z \in D,$$

gdzie ψ_z są zdefiniowane wzorem (1.3.1).

Przed przystąpieniem do dowodu Lematu 1.3.4, przypomnijmy następujący fakt (patrz np. [**Aba89**], Lemat 1.2.4):

Lemat 1.3.5. *Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, to zachodzi nierówność*

$$\frac{1-|f(\lambda)|}{1-|\lambda|} \ge \frac{1-|f(0)|}{1+|f(0)|},\ \lambda \in \mathbb{D}.$$

Dowód Lematu 1.3.4. Różniczkując stronami równość $f(\varphi(\lambda)) = \lambda$ otrzymujemy

$$h(\lambda)\bullet\varphi'(\lambda) = 1,\ \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.3.12}$$

W szczególności,

$$\operatorname{Re}\,[h(0)\bullet\varphi'(0)] \neq 0.$$

Dla $z \in D$, $t \in [0,1]$ połóżmy

$$f_{z,t}(\lambda) := f((1-t)\varphi(\lambda) + tz),\ \lambda \in \mathbb{D}.$$

Zachodzi $f_{z,t} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ oraz $f_{z,0}(\lambda) = \lambda$. Nietrudno sprawdzić, że

$$\left.\frac{d|f_{z,t}(\lambda)|^2}{dt}\right|_{t=0} = 2\operatorname{Re}\left[\bar\lambda h(\lambda)\bullet(z-\varphi(\lambda))\right],\ \lambda \in \mathbb{D}, z \in D. \tag{1.3.13}$$

Z drugiej strony, na mocy Lematu 1.3.5, mamy

$$|f_{z,t}(\lambda)| - |\lambda| \le \frac{2|f_{z,t}(0)|}{1+|f_{z,t}(0)|}(1-|\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{D}, z \in D.$$

Stąd

$$\frac{|f_{z,t}(\lambda)|^2 - |f_{z,0}(\lambda)|^2}{t} = \frac{|f_{z,t}(\lambda)|^2 - |\lambda|^2}{t} \le 2\,\frac{|f_{z,t}(\lambda)| - |\lambda|}{t} \le \frac{4|\frac{1}{t} f_{z,t}(0)|}{1 + |f_{z,t}(0)|}(1 - |\lambda|).$$

Dążąc z t to 0, dostajemy

$$\left.\frac{d|f_{z,t}(\lambda)|^2}{dt}\right|_{t=0} \le 4(1 - |\lambda|) \left|\left.\frac{df_{z,t}(0)}{dt}\right|_{t=0}\right| \le 4(1 - |\lambda|)\,|h(0) \bullet (z - \varphi(0))|. \quad (1.3.14)$$

Podsumowując, z (1.3.13) i (1.3.14) wynika następująca nierówność:

$$\mathrm{Re}\,\left[\bar\lambda h(\lambda) \bullet (z - \varphi(\lambda))\right] \le 2(1 - |\lambda|)\,|h(0) \bullet (z - \varphi(0))|,\ \lambda \in \mathbb{D}, z \in D.$$

Dzieląc ją przez $|\lambda|^2$, otrzymujemy

$$\mathrm{Re}\,\left[\frac{h(\lambda) \bullet (z - \varphi(\lambda))}{\lambda}\right] \le 2\,\frac{1 - |\lambda|}{|\lambda|^2}\,|h(0) \bullet (z - \varphi(0))|,\ \lambda \in \mathbb{D}_*, z \in D. \quad (1.3.15)$$

Ustalmy $z \in D$. Wobec nierówności powyższej i równości (1.3.2), funkcja $\mathrm{Re}\,\psi_z$ jest ograniczona z góry na zbiorze $\mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D}$. Z zasady maksimum wynika więc, że jest ona ograniczona z góry na $\mathbb{D}$. W szczególności, istnieją $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie wszystkie jej granice radialne i, wobec (1.3.2) i (1.3.15), dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$ spełniają

$$\mathrm{Re}\,\psi_z^*(\lambda) \le 0.$$

Wobec zasady maksimum, $\mathrm{Re}\,\psi_z(\lambda) \le 0$ dla $\lambda \in \mathbb{D}$. Dowód jest zakończony. □

Przystąpimy teraz do dowodu Twierdzenia 1.1.2. Istotną rolę odegrają w nim wykazane właśnie Lematy 1.3.1 i 1.3.4.

Dowód Twierdzenia 1.1.2. Załóżmy, że φ jest geodezyjną zespoloną dla D. Niech $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ będzie lewą odwrotną dla φ. Połóżmy

$$h(\lambda) := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\varphi(\lambda)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(\varphi(\lambda))\right),\ \lambda \in \mathbb{D},$$

i oznaczmy $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Pokażemy, że $h \in \mathcal{H}^n$ i spełnione są warunki (i), (ii) z Twierdzenia 1.1.2. Z Lematu 1.3.4 wynika, że $\mathrm{Re}\,\psi_{\varphi(0)}(0) = -\mathrm{Re}\,[h(0) \bullet \varphi'(0)] \neq 0$, $h \not\equiv 0$ oraz

$$\mathrm{Re}\,\psi_z(\lambda) \le 0,\ \lambda \in \mathbb{D}, z \in D.$$

W szczególności, $\mathrm{Re}\,\psi_{\varphi(0)}(\lambda) < 0$ dla $\lambda \in \mathbb{D}$, co daje punkt (ii).

Ustalmy $\lambda \in \mathbb{D}_*$ oraz $j \in \{1, \ldots, n\}$. Skoro $\varphi(0) + ise_j \in D$ dla $s \in \mathbb{R}$, to funkcja $\mathbb{R} \ni s \mapsto \mathrm{Re}\,\psi_{\varphi(0)+ise_j}(\lambda) \in \mathbb{R}$ przyjmuje tylko wartości niedodatnie. Z formuły (1.3.1) wynika więc, że funkcja

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto s\,\mathrm{Re}\,\left[\frac{i}{\lambda}\,(h_j(\lambda) - h_j(0)) - i\lambda\,\overline{h_j(0)}\right] \in \mathbb{R}$$

jest ograniczona z góry. W konsekwencji,

$$\mathrm{Re}\,\left[\frac{i}{\lambda}\,(h_j(\lambda) - h_j(0)) - i\lambda\,\overline{h_j(0)}\right] = 0,\ \lambda \in \mathbb{D}_*.$$

Funkcja w nawiasach kwadratowych jest holomorficzna na $\mathbb{D}$, a więc musi być ona tożsamościowo równa ib_j dla pewnej stałej rzeczywistej b_j. Stąd wynika, że

$$h_j(\lambda) = \overline{h_j(0)}\lambda^2 + b_j\lambda + h_j(0),\ \lambda \in \mathbb{D},$$

a więc $h \in \mathcal{H}^n$.

Skoro obszar tubowy D nie zawiera afinicznych prostych zespolonych, to istnieją prawie wszystkie granice radialne φ. Jeżeli $\lambda \in \mathbb{T}$ jest taka, że $\varphi^*(\lambda)$ istnieje, to na mocy (1.3.3) zachodzi nierówność

$$\mathrm{Re}\ \left[\bar{\lambda}h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda))\right] \leq 0,\ z \in D.$$

To oznacza, że odwzorowanie

$$\mathbb{C}^n \ni z \mapsto \mathrm{Re}\ \left[\bar{\lambda}h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda))\right] \in \mathbb{R}$$

przyjmuje na D jedynie wartości niedodatnie. Jeżeli dodatkowo $h(\lambda) \neq 0$, to odwzorowanie powyższe, jako $\mathbb{R}$-afiniczne i niestałe, jest otwarte, a więc w istocie przyjmuje na D wartości ujemne. W ten sposób wykazaliśmy punkt (i) i zakończyliśmy dowód pierwszej części twierdzenia.

Załóżmy teraz, że $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$, $h \in \mathcal{H}^n$ są spełniają warunki (i), (ii). Posługując się Lematem 1.3.1 pokażemy, że φ jest geodezyjną zespoloną dla D. Prawie wszystkie wartości radialne φ istnieją, składowe odwzorowania h są wielomianami, a z równości (1.3.3) wynika, że

$$\mathrm{Re}\,\psi_z^*(\lambda) < 0 \text{ dla wszystkich } z \in D \text{ i } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\text{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T}.$$

Z warunku (ii) wynika, że dla każdego $z \in D$ funkcja $\mathrm{Re}\,\psi_z$ jest ograniczona z góry na $\mathbb{D}$. Korzystając z powyższej nierówności i z zasady maksimum, otrzymujemy $\mathrm{Re}\,\psi_z(\lambda) < 0$ dla wszystkich $z \in D$, $\lambda \in \mathbb{D}$, a więc spełnione są założenia Lematu 1.3.1, a więc φ jest geodezyjną zespoloną dla D.

Ostatnia część Twierdzenia 1.1.2 jest natychmiastową konsekwencją zasady maksimum. Jeżeli obszar D ma ograniczoną bazę, to część rzeczywista odwzorowania φ jest ograniczona, a więc samo φ jest klasy H^1. Skoro h jest ograniczone na $\mathbb{D}$, to funkcja $\lambda \mapsto h(\lambda) \bullet \frac{\varphi(0)-\varphi(\lambda)}{\lambda}$ jest klasy H^1, a więc warunek (ii) wynika z zasady maksimum i warunku (i) dla $z = \varphi(0)$. □

Uwaga 1.3.6. Sam warunek (i) w Twierdzeniu 1.1.2 na ogół nie wystarcza do tego, aby φ było geodezyjną zespoloną dla D. Na przykład, weźmy $D = \mathbb{H}_-$ i $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}$. Nietrudno sprawdzić, że φ spełnia (i) dla $h(\lambda) = \lambda$, ale oczywiście nie jest geodezyjną zespoloną dla D i nie spełnia (ii). Warunek (ii) nie wynika z zasady maksimum i warunku (i) dla $z = \varphi(0)$, ponieważ funkcja harmoniczna w (ii) nie musi być ograniczona z góry.

Uwaga 1.3.7. Z dowodu Twierdzenia 1.1.2 wynika, że jeżeli φ jest geodezyjną zespoloną dla D, to:

(i) warunek (i) z tego twierdzenia zachodzi tak na prawdę dla każdego $z \in D$ i każdej $\lambda \in \mathbb{T}$ takiej, że $h(\lambda) \neq 0$, a granica radialna $\varphi^*(\lambda)$ istnieje,

(ii) jeśli $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ jest lewą odwrotną dla φ, to odwzorowanie $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ zdefiniowane wzorem

$$h(\lambda) := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\varphi(\lambda)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(\varphi(\lambda)) \right), \ \lambda \in \mathbb{D},$$

należy do rodziny $\mathcal{H}^n$ i spełnia wszystkie warunki z Twierdzenia 1.1.2. Dodatkowo, w tej sytuacji sam warunek $h \in \mathcal{H}^n$ można natychmiast otrzymać z ogólniejszego twierdzenia - patrz [**Edi-Zwo**, Twierdzenie 3].

Odnotujmy jeszcze, że warunek (i) z Twierdzenia 1.1.2 jest równoważny warunkowi

$$\operatorname{Re} \varphi^*(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda} h(\lambda)) \text{ dla } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\text{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T},$$

ponieważ $\bar{\lambda} h(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$.

Lemat 1.3.8. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych, niech $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o mierze granicznej μ, i niech $h \in \mathcal{H}^n$, $h \not\equiv 0$. Wtedy*

$$\text{miara } \bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda)) \text{ jest niedodatnia dla każdego } z \in D \tag{m}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe dwa warunki:

(i) $\operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda)) \right] < 0$ *dla wszystkich* $z \in D$ *i* $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$*-p.w.* $\lambda \in \mathbb{T}$,

(ii) $\operatorname{Re} \left[h(\lambda) \bullet \frac{\varphi(0) - \varphi(\lambda)}{\lambda} \right] < 0$ *dla każdego* $\lambda \in \mathbb{D}_*$.

Wszystkie miary w warunku (m) są regularne i rzeczywiste. Natychmiastowym wnioskiem z powyższego lematu i Twierdzenia 1.1.2 jest główny wynik w tym rozdziale, tj. Twierdzenie 1.1.3.

Dowód lematu 1.3.8. Przypomnijmy, że granice radialne φ istnieją $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. na $\mathbb{T}$, a jeżeli $\lambda \in \mathbb{T}$ jest taka, że $\varphi^*(\lambda)$ istnieje, to dla każdego $z \in D$ istnieje $\psi_z^*(\lambda)$ i zachodzi równość (1.3.3), tj.

$$\operatorname{Re} \psi_z^*(\lambda) = \operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda)) \right], \ z \in D.$$

Na początku pokażemy, że koniunkcja (i) $\wedge$ (ii) jest równoważna warunkowi:

$$\operatorname{Re} \psi_z(\lambda) \leq 0 \text{ dla wszystkich } \lambda \in \mathbb{D}, z \in D. \tag{1.3.16}$$

Istotnie, jeżeli zachodzą (i) oraz (ii), to każde $\operatorname{Re} \psi_z$ jest ograniczone z góry na $\mathbb{D}$ i $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. na $\mathbb{T}$ mamy $\operatorname{Re} \psi_z^* < 0$, a stąd, na mocy zasady maksimum, otrzymujemy warunek (1.3.16).

Z drugiej strony, jeżeli zachodzi (1.3.16), to dla każdej $\lambda \in \mathbb{T} \setminus h^{-1}(0)$, dla której $\varphi^*(\lambda)$ istnieje, odwzorowanie

$$\mathbb{C}^n \ni z \mapsto \operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda)) \right] \in \mathbb{R}$$

jest otwarte (jako $\mathbb{R}$-afiniczne i niestałe) i przyjmuje jedynie wartości niedodatnie na zbiorze D. To oznacza, że w rzeczywistości przyjmuje ono na D wartości ujemne, co daje (i). Natomiast warunek (ii) wynika z tego, że $\operatorname{Re} \psi_{\varphi(0)} \leq 0$ na $\mathbb{D}$ oraz, wobec (i), $\operatorname{Re} \psi_{\varphi(0)}^* < 0$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$.

Niech ν_z oznacza miarę w warunku (m), to znaczy

$$\nu_z = \bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda)).$$

Wykażemy, że formuła (1.2.3) zachodzi dla funkcji ψ_z i miar ν_z, tj.

$$\operatorname{Re}\psi_z(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\lambda|^2}{|\zeta-\lambda|^2} d\nu_z(\zeta), \ \lambda \in \mathbb{D}, z \in D. \tag{1.3.17}$$

To zakończy dowód Lematu 1.3.8. Rzeczywiście, jeżeli równość (1.3.17) jest prawdziwa, to $\psi_z \in \mathcal{M}$, a ν_z jest miarą graniczną dla ψ_z, co z kolei oznacza, że warunki (1.3.16) i (m) są równoważne.

Ustalmy $z \in D$ i połóżmy

$$\begin{aligned}
\nu_{z,1} &= \bar{\lambda}h(\lambda) \bullet \left(\operatorname{Re}\varphi(0) d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda)\right), \\
\nu_{z,2} &= \operatorname{Re}\left[\bar{\lambda}\left(h(\lambda) - h(0)\right) \bullet (z - \varphi(0))\right] d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda), \\
\nu_{z,3} &= \operatorname{Re}\left[\bar{\lambda}h(0) \bullet (z - \varphi(0))\right] d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda).
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\psi_{z,1}(\lambda) &= \tfrac{\varphi(0)-\varphi(\lambda)}{\lambda} \bullet h(\lambda), \\
\psi_{z,2}(\lambda) &= \tfrac{h(\lambda)-h(0)}{\lambda} \bullet (z - \varphi(0)), \\
\psi_{z,3}(\lambda) &= \lambda\,\overline{h(0) \bullet (z - \varphi(0))}.
\end{aligned}$$

Funkcje $\psi_{z,1}$, $\psi_{z,2}$, $\psi_{z,3}$ są holomorficzne na $\mathbb{D}$, a miary $\nu_{z,1}$, $\nu_{z,2}$, $\nu_{z,3}$ są rzeczywiste. Z formuły (1.3.1) wynika, że zachodzi równość

$$\psi_z = \psi_{z,1} + \psi_{z,2} + \psi_{z,3},$$

natomiast z faktu, że $\bar{\lambda}h(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$, wynika iż

$$\nu_z = \nu_{z,1} + \nu_{z,2} + \nu_{z,3}.$$

Aby wykazać równość (1.3.17) i zakończyć tym samym dowód lematu, wystarczy udowodnić, że składniki obu powyższych sum „odpowiadają” sobie, to jest, że dla $k = 1, 2, 3$ zachodzi równość

$$\operatorname{Re}\psi_{z,k}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\lambda|^2}{|\zeta-\lambda|^2} d\nu_{z,k}(\zeta), \ \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.3.18}$$

Skoro

$$\nu_{z,2} = \operatorname{Re}\left[\tfrac{h(\lambda)-h(0)}{\lambda} \bullet (z - \varphi(0))\right] d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda)$$

oraz

$$\nu_{z,3} = \operatorname{Re}\left[\lambda\,\overline{h(0) \bullet (z - \varphi(0))}\right] d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda),$$

to na mocy klasycznego wzoru Poissona dla funkcji harmonicznych w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$, równość (1.3.18) zachodzi dla $k = 2, 3$. Pozostała do wykazania równość dla $k = 1$.

Skorzystamy z następującej ogólnej własności: jeśli $u \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, σ, σ_r ($r \in (0,1)$) są zespolonymi miarami borelowskimi na $\mathbb{T}$ takimi, że σ_r zmierzają *-słabo do σ przy $r \to 1^-$, to miary $ud\sigma_r$ zmierzają *-słabo do $ud\sigma$.

Oznaczmy $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ i $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Skoro dla $j = 1, \ldots, n$ miary $\operatorname{Re}\varphi_j(r\lambda)d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda)$ zmierzają *-słabo do μ_j, a funkcja $\lambda \mapsto \bar{\lambda}h_j(\lambda)$ jest ciągła na $\mathbb{T}$, to miary $\bar{\lambda}h_j(\lambda)\operatorname{Re}\varphi_j(r\lambda)d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda)$ zmierzają do $\bar{\lambda}h_j(\lambda)d\mu_j(\lambda)$. To daje *-słabą zbieżność

$$\bar{\lambda}h_j(\lambda)\operatorname{Re}\left(\varphi_j(0) - \varphi_j(r\lambda)\right)d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) \longrightarrow \bar{\lambda}h_j(\lambda)(\operatorname{Re}\varphi_j(0)d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu_j(\lambda)).$$

Sumując po $j = 1, \dots, n$ i korzystając z tego, że $\bar{\lambda} h_j(\lambda) \in \mathbb{R}$, otrzymujemy

$$\lim_{r \to 1^-} \operatorname{Re} \left[\tfrac{\varphi(0) - \varphi(r\lambda)}{\lambda} \bullet h(\lambda) \right] d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) = \nu_{z,1}.$$

Dla $r \in (0,1)$ funkcja $\lambda \mapsto \operatorname{Re} \left[\tfrac{\varphi(0) - \varphi(r\lambda)}{\lambda} \bullet h(\lambda) \right]$ jest harmoniczna w otoczeniu $\overline{\mathbb{D}}$. Na mocy klasycznego wzoru Poissona, dla ustalonej $\lambda \in \mathbb{D}$ mamy

$$\operatorname{Re} \left[\tfrac{\varphi(0) - \varphi(r\lambda)}{\lambda} \bullet h(\lambda) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\lambda|^2}{|\zeta - \lambda|^2} \operatorname{Re} \left[\tfrac{\varphi(0) - \varphi(r\zeta)}{\zeta} \bullet h(\zeta) \right] d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta).$$

Zmierzając z r do 1 otrzymujemy równość (1.3.18) dla $k = 1$. Dowód lematu jest zakończony. □

Udowodnimy teraz dwa lematy, które znajdą zastosowanie zarówno w dowodzie Twierdzenia 1.1.4, jak i przy wyznaczaniu wzorów na geodezyjne w pewnych obszarach nienależących do rodziny $\mathcal{D}_n$. Lematy opisują własności części absolutnie ciągłej i singularnej w rozkładzie Lebesgue'a-Radona-Nikodyma miary μ względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$.

Lemat 1.3.9. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych, $h \in \mathcal{H}^n$, $h \not\equiv 0$, niech $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o mierze granicznej μ, a*

$$\mu = \operatorname{Re} \varphi^* \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_s$$

niech będzie rozkładem Lebesgue'a-Radona-Nikodyma miary μ względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. Wtedy

$$\text{miara } \bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda)) \text{ jest niedodatnia dla każdego } z \in D \tag{m}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe dwa warunki:

(i) $\operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda)) \right] < 0$ *dla wszystkich $z \in D$ i $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$,*

(ii) $\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet d\mu_s(\lambda)$ *jest miarą nieujemną na $\mathbb{T}$.*

Dowód. Niech $\mu_s = (\mu_{s,1}, \dots, \mu_{s,n})$. Z własności rozkładu Lebesgue'a-Radona-Nikodyma wiemy, że istnieje zbiór borelowski $S \subset \mathbb{T}$ taki, że

$$\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(S) = 0, \ |\mu_{s,1}|(\mathbb{T} \setminus S) = \ldots = |\mu_{s,n}|(\mathbb{T} \setminus S) = 0.$$

Zachodzą równości

$$\chi_S \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} = 0, \ \chi_{\mathbb{T} \setminus S} \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} = \mathcal{L}^{\mathbb{T}}, \ \chi_S \, d\mu = \mu_s, \ \chi_{\mathbb{T} \setminus S} \, d\mu = \operatorname{Re} \varphi^* \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}. \tag{1.3.19}$$

Dla $z \in D$ oznaczmy

$$\nu_z := \bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda)).$$

Mamy $\nu_z = \chi_{\mathbb{T} \setminus S} \, d\nu_z + \chi_S \, d\nu_z$, a z (1.3.19) wynika, że

$$\chi_{\mathbb{T} \setminus S} \, d\nu_z = \bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} \varphi^*(\lambda)) \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) \tag{1.3.20}$$

oraz

$$\chi_S \, d\nu_z = -\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet d\mu_s(\lambda). \tag{1.3.21}$$

Jeżeli zachodzi warunek (m), tj. ν_z jest miarą niedodatnią dla każdego $z \in D$, to (i) wynika z Lematu 1.3.8, a (ii) z równości (1.3.21). Jeżeli zaś spełnione są warunki

(i) oraz (ii), to z (1.3.20) i (1.3.21) wynika, że dla każdego $z \in D$ miary $\chi_{\mathbb{T}\setminus S}\, d\nu_z$ i $\chi_S\, d\nu_z$ są niedodatnie, a więc miara ν_z także. $\square$

Lemat 1.3.10. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych, niech $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o mierze granicznej μ, a*

$$\mu = \operatorname{Re} \varphi^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_s$$

niech będzie rozkładem Lebesgue'a-Radona-Nikodyma miary μ względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. Wtedy dla każdego $w \in \overline{W_D}$ miara $\mu_s \bullet w$ jest niedodatnia.

Dowód. Niech zbiór borelowski $S \subset \mathbb{T}$ będzie taki, że zachodzi (1.3.19). Jeżeli $v \in W_D$, to dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$ jest $\langle x, v\rangle < C$, gdy $x \in \operatorname{Re} D$. W szczególności, $\langle \operatorname{Re} \varphi(\lambda), v\rangle < C$ dla $\lambda \in \mathbb{D}$, a to pociąga za sobą następującą nierówność dla miar:

$$\langle \operatorname{Re} \varphi(r\lambda)\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda), v\rangle \le C\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}},\ r \in (0,1).$$

Przechodząc z r do 1 otrzymujemy

$$\langle d\mu, v\rangle \le C\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}.$$

To oznacza, że

$$\langle \chi_S\, d\mu, v\rangle \le C\chi_S\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}},$$

a stąd i z (1.3.19) mamy

$$\mu_s \bullet v \le 0.$$

Jeżeli w jest takie jak w założeniach, to istnieje ciąg $(v_n)_n$ zbieżny do w i taki, że $\sup_{x\in \operatorname{Re} D}\langle x, v_n\rangle < \infty$ dla każdego n. Miara $\mu_s \bullet w$ jest *-słabą granicą miar niedodatnich $\mu_s \bullet v_n$, a więc także jest niedodatnia. $\square$

1.4. Geodezyjne w specjalnych klasach obszarów tubowych

W tym podrozdziale udowodnimy Twierdzenie 1.1.4 i podamy kilka faktów, które w pewnych szczególnych przypadkach pozwalają uprościć opis geodezyjnych zespolonych z tego twierdzenia.

Na początku zwróćmy uwagę na kilka użytecznych faktów:

Uwaga 1.4.1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych i niech $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o mierze granicznej μ.

(i) Jeżeli φ jest geodezyjną zespoloną dla D, to odwzorowania h w Twierdzeniach 1.1.2 i 1.1.3 oraz Lematach 1.3.8 i 1.3.9 to w istocie to samo odwzorowanie.

(ii) Jeżeli φ jest geodezyjną zespoloną dla D, a $h \in \mathcal{H}^n$ jest takie jak w Twierdzeniu 1.1.3, to warunek

$$\operatorname{Re}\left[\bar\lambda h(\lambda) \bullet (z - \varphi^*(\lambda))\right] < 0 \text{ dla wszystkich } z \in D \text{ i } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\text{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T},$$

wobec faktu, że $\bar\lambda h(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$, jest równoważny warunkowi

$$\operatorname{Re} \varphi^*(\lambda) \in P_D(\bar\lambda h(\lambda)) \text{ dla } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\text{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T}.$$

W szczególności oznacza to, że

$$P_D(\bar\lambda h(\lambda)) \ne \varnothing \text{ dla } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\text{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T}.$$

W sytuacji, gdy obszar D należy do rodziny $\mathcal{D}_n$, wobec Obserwacji 1.2.5 (iii) i (vi) oraz ciągłości h, mamy $\bar{\lambda}h_j(\lambda) \geq 0$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{T}$, $j = 1, \ldots, n$. Wtedy też $\bar{\lambda}h_j(\lambda) > 0$ dla p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, o ile $h_j \not\equiv 0$, a to oznacza, że będziemy mogli stosować do funkcji $h_1, \ldots, h_n$ rozumowanie przedstawione w punkcie (v) niniejszej uwagi.

(iii) Jeżeli dla pewnych $p, v \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność

$$\langle \operatorname{Re} z - p, v \rangle < 0, \ z \in D,$$

to w oczywisty sposób mamy $\langle \operatorname{Re} \varphi(\lambda) - p, v \rangle < 0$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{D}$. Z faktu, że μ jest *-słabą granicą miar $\operatorname{Re} \varphi(r\lambda) d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda)$ wynika, że podobna nierówność zachodzi dla miary granicznej odwzorowania φ, a dokładniej:

$$\langle \mu - p\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}, v \rangle \text{ jest miarą niedodatnią na } \mathbb{T}.$$

(iv) Niech ν będzie nieujemną miarą borelowską na $\mathbb{T}$, a $u : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ funkcją **ciągłą** taką, że $u^{-1}(\{0\}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{T}$. Jeżeli miara $u\, d\nu$ jest miarą zerową, to

$$\nu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta_{\lambda_j}$$

dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$.

(v) Jeżeli $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną klasy H^1 taką, że $\bar{\lambda}h^*(\lambda) \geq 0$ dla p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, to na mocy [**Jar-Pfl**, Lemat 8.4.6] mamy $h(\lambda) = c(\lambda - d)(1 - \bar{d}\lambda)$ dla pewnych $c \geq 0$, $d \in \overline{\mathbb{D}}$, co z kolei daje

$$\bar{\lambda}h(\lambda) = c|\lambda - d|^2, \ \lambda \in \mathbb{T}.$$

W szczególności, jeżeli $c > 0$, to funkcja h ma co najwyżej jedno zero na $\mathbb{T}$ (licząc bez wielokrotności). W takiej sytuacji, jeżeli ν jest skończoną, borelowską, niedodatnią miarą na $\mathbb{T}$ taką, że $\bar{\lambda}h(\lambda)d\nu(\lambda)$ jest miarą zerową na $\mathbb{T}$, to

$$\nu = \alpha\delta_{\lambda_0}$$

dla pewnych $\alpha \leq 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ takich, że

$$\alpha h(\lambda_0) = 0$$

(bierzemy $\lambda_0 = d$ jeżeli $d \in \mathbb{T}$, a w przeciwnym razie ν jest miarą zerową, więc $\alpha = 0$ i λ_0 dowolne).

(vi) Jeżeli $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym i wypukłym, ν jest borelowską miarą probabilistyczną na $\mathbb{T}$, a odwzorowanie $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ jest borelowskie i takie, że $f_1, \ldots, f_n$ są całkowalne względem miary ν oraz $f(\lambda) \in X$ dla ν-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, to $\int_{\mathbb{T}} f\, d\nu \in X$.

Przejdziemy teraz do dowodu Twierdzenia 1.1.4.

Dowód Twierdzenia 1.1.4. Niech $\varphi : \mathbb{D} \to D$ będzie geodezyjną zespoloną dla D. Weźmy $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{H}^n$ takie, jak w Twierdzeniu 1.1.3. Pokażemy, że spełniony jest jeden z warunków (i), (ii).

Załóżmy, że istnieje j takie, że $h_j \equiv 0$. Wtedy odwzorowanie $\widehat{\pi}_j \circ \varphi$ spełnia warunek z Twierdzenia 1.1.3 dla obszaru tubowego $\widehat{\pi}_j(D) \in \mathcal{D}_{n-1}$ z odwzorowaniem $\widehat{h} := \widehat{\pi}_j \circ h$ położonym w miejsce h. Istotnie, wobec $h \not\equiv 0$ i $h_j \equiv 0$ mamy $\widehat{h} \not\equiv 0$, a miarą graniczną dla odwzorowania $\widehat{\pi}_j \circ \varphi$ jest $\widehat{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_n)$. Dla $z \in D$ zachodzi

$$\bar{\lambda}\widehat{h}(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} \widehat{\pi}_j(z)\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\widehat{\mu}(\lambda)) = \bar{\lambda}h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda)) \leq 0.$$

Zatem $\widehat{\pi}_j \circ \varphi$ jest geodezyjną zespoloną dla obszaru $\widehat{\pi}_j(D)$, a więc spełniony jest warunek (i).

Załóżmy teraz, że $h_1 \not\equiv 0, \ldots, h_n \not\equiv 0$. Niech

$$\mu = \operatorname{Re} \varphi^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_s$$

będzie rozkładem Lebesgue'a-Radona-Nikodyma miary μ względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$. Oznaczmy $\mu_s = (\mu_{s,1}, \ldots, \mu_{s,n})$.

Skoro $D \in \mathcal{D}_n$, to $e_1, \ldots, e_n \in W_D$, a więc na mocy Lematu 1.3.10 miary $\mu_{s,1}, \ldots, \mu_{s,n}$ są niedodatnie. Z Uwagi 1.4.1 (ii) wiemy, że dla **wszystkich** $\lambda \in \mathbb{T}$ jest $\bar{\lambda}h_j(\lambda) \geq 0$, a więc

$$\bar{\lambda}h_j(\lambda)\, d\mu_{s,j}(\lambda) \leq 0,\ j = 1, \ldots, n, \tag{1.4.1}$$

i w szczególności

$$\bar{\lambda}h(\lambda) \bullet d\mu_s(\lambda) \leq 0.$$

Z kolei, z Lematu 1.3.9 mamy

$$\bar{\lambda}h(\lambda) \bullet d\mu_s(\lambda) \geq 0.$$

Tak więc

$$\bar{\lambda}h_1(\lambda)\, d\mu_{s,1}(\lambda) + \ldots + \bar{\lambda}h_n(\lambda)\, d\mu_{s,n}(\lambda) = 0.$$

Wobec (1.4.1), powyższa miara jest sumą miar niedodatnich, a to oznacza, że wszystkie one muszą być miarami zerowymi, tj.

$$\bar{\lambda}h_j(\lambda)\, d\mu_{s,j}(\lambda) = 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Skoro dla każdego j jest $\bar{\lambda}h_j(\lambda) \geq 0$ na $\mathbb{T}$ oraz $h_j \not\equiv 0$, to h_j ma co najwyżej jedno zero na $\mathbb{T}$ (licząc bez wielokrotności), a więc na mocy Uwagi 1.4.1 (v) mamy

$$\mu_{s,j} = \alpha_j \delta_{\lambda_j}$$

dla pewnych $\alpha_j \leq 0$, $\lambda_j \in \mathbb{T}$ takich, że $\alpha_j h_j(\lambda_j) = 0$. Udowodniliśmy zatem, że

$$\mu = \operatorname{Re} \varphi^*\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1 \delta_{\lambda_1}, \ldots, \alpha_n \delta_{\lambda_n}).$$

Warunek, że $\operatorname{Re} \varphi^*(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda}h(\lambda))$ dla p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, wynika z Lematu 1.3.9, natomiast warunek $\frac{1}{2\pi}\mu(\mathbb{T}) \in \operatorname{Re} D$ łatwo wynika z faktu, że $\varphi(0) \in D$.

Wykażemy teraz drugą część twierdzenia, tj. że jeżeli odwzorowanie $\varphi \in \mathcal{M}^n$ o mierze granicznej μ spełnia warunek (i) lub (ii), to $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$, a samo φ jest geodezyjną zespoloną dla obszaru D.

Jeżeli zachodzi (i), to istnieje lewa odwrotna dla odwzorowania $\widehat{\pi}_j \circ \varphi$ i obszaru $\widehat{\pi}_j(D)$, tj. istnieje $f \in \mathcal{O}(\widehat{\pi}_j(D), \mathbb{D})$ takie, że $f \circ \widehat{\pi}_j \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Stąd widać, że funkcja $f \circ \widehat{\pi}_j \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ jest lewą odwrotną dla odwzorowania φ i obszaru D.

Załóżmy teraz, że zachodzi warunek (ii), tj.

$$\mu = g\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1 \delta_{\lambda_1}, \ldots, \alpha_n \delta_{\lambda_n})$$

dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $g = (g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{H}^n_+$ jak w wypowiedzi twierdzenia. Chcemy udowodnić, że $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$ i że φ, h spełniają warunek z Twierdzenia 1.1.3.

Zacznijmy od wykazania inkluzji $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$. Ustalmy $\lambda \in \mathbb{D}$. Skoro zbiór $\overline{\operatorname{Re} D}$ jest wypukły oraz

$$g(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda} h(\lambda)) \subset \overline{\operatorname{Re} D} \text{ dla } \mathcal{L}^{\mathbb{T}}\text{-p.w. } \lambda \in \mathbb{T},$$

to na mocy Uwagi 1.4.1 (vi) zachodzi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\lambda|^2}{|\zeta - \lambda|^2} g(\zeta)\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta) \in \overline{\operatorname{Re} D},$$

gdyż powyższa całka jest całką z odwzorowania g względem miary probabilistycznej $\frac{1}{2\pi} \frac{1-|\lambda|^2}{|\zeta-\lambda|^2}\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta)$. Dla obszarów z rodziny $\mathcal{D}_n$ mamy $\overline{\operatorname{Re} D} + (-\infty, 0]^n \subset \overline{\operatorname{Re} D}$, a więc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\lambda|^2}{|\zeta - \lambda|^2} g(\zeta)\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta) + \left(\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{1-|\lambda|^2}{|\lambda_1 - \lambda|^2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{2\pi} \frac{1-|\lambda|^2}{|\lambda_n - \lambda|^2} \right) \in \overline{\operatorname{Re} D}.$$

Wyrażenie to jest równe $\operatorname{Re} \varphi(\lambda)$, a więc otrzymaliśmy inkluzję $\operatorname{Re} \varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\operatorname{Re} D}$, czyli $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{D}$. Z założenia, że $\operatorname{Re} \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \mu(\mathbb{T}) \in \operatorname{Re} D$ wynika, iż $\varphi(0) \in D$. Korzystając z wypukłości obszaru D łatwo wnioskujemy, że $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$.

Pokażemy teraz, że φ, h spełniają warunki z Twierdzenia 1.1.3, co zakończy dowód Twierdzenia 1.1.4. Ustalmy $z \in D$. Mamy

$$\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda)) = \bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z - g(\lambda))\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{\lambda} h_j(\lambda) \delta_{\lambda_j}.$$

Z równości $\alpha_j h_j(\lambda_j) = 0$ wynika, że miara $\alpha_j \bar{\lambda} h_j(\lambda)\, d\delta_{\lambda_j}(\lambda)$ jest miarą zerową. Z kolei warunek $g(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda} h(\lambda))$ pociąga za sobą nierówność $\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z - g(\lambda)) \leq 0$ dla wszystkich $z \in D$ i $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$. To oznacza, że miara

$$\bar{\lambda} h(\lambda) \bullet (\operatorname{Re} z\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) - d\mu(\lambda))$$

jest niedodatnia dla dowolnego $z \in D$. Dowód twierdzenia jest zakończony. □

Propozycja 1.4.2. *Niech obszar $D \in \mathcal{D}_n$ będzie taki, że brzeg obszaru $\operatorname{Re} D$ nie zawiera żadnej półprostej. Wtedy, jeżeli $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest geodezyjną zespoloną dla D, a $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{H}^n$ jest takie jak w Twierdzeniu 1.1.3, to $h_1 \not\equiv 0, \ldots, h_n \not\equiv 0$.*

Z powyższej propozycji wynika, że wyznaczając geodezyjne zespolone w niektórych obszarach z rodziny $\mathcal{D}_n$, nie trzeba rozważać sytuacji z punktu (i) Twierdzenia 1.1.4. Dzięki temu, każda geodezyjna w takich obszarach będzie postaci przedstawionej w punkcie (ii) tego twierdzenia, a więc będzie dana jawnym wzorem. Warunek, że $\partial \operatorname{Re} D$ nie zawiera żadnej półprostej, jest spełniony np. gdy obszar $\operatorname{Re} D$ jest ściśle wypukły (w geometrycznym sensie, tj. gdy dla dowolnych $x, y \in \overline{\operatorname{Re} D}$, $t \in (0,1)$, zachodzi $tx + (1-t)y \in \operatorname{Re} D$).

Dowód Propozycji 1.4.2. Wykażemy następującą własność: jeżeli $\lambda_0 \in \mathbb{T}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ są takie, że $h_j(\lambda_0) = 0$, istnieje granica radialna $\varphi^*(\lambda_0)$ i zachodzi

$$\bar{\lambda}_0 h(\lambda_0) \bullet (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} \varphi^*(\lambda_0)) < 0, \ z \in D, \tag{1.4.2}$$

to półprosta $\{\operatorname{Re} \varphi^*(\lambda_0) + t e_j : t < 0\}$ zawiera się w $\partial \operatorname{Re} D$. Z własności tej wynika teza, gdyż jeśli $h_j \equiv 0$ dla pewnego j, to - wobec Lematu 1.3.8 - prawie każda $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ spełnia powyższe warunki.

Załóżmy więc, że j, λ_0 są takie, że $h_j(\lambda_0) = 0$, istnieje $\varphi^*(\lambda_0)$ i zachodzi (1.4.2). Pokażemy, że $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda_0) + te_j \in \partial\operatorname{Re} D$ dla $t < 0$. Z (1.4.2) wynika, że $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda_0) \in \partial\operatorname{Re} D$, a więc

$$\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda_0) + te_j \in \overline{\operatorname{Re} D} \text{ dla } t < 0,$$

bowiem $D \in \mathcal{D}_n$. Skoro $h(\lambda_0) \bullet e_j = h_j(\lambda_0) = 0$, to

$$\bar{\lambda}_0 h(\lambda_0) \bullet (\operatorname{Re} z - (\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda_0) + te_j)) < 0, \ z \in D, t < 0.$$

To oznacza, że $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda_0) + te_j \notin \operatorname{Re} D$, a więc $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda_0) + te_j \in \partial\operatorname{Re} D$ dla $t < 0$. □

Odnotujmy, że jeżeli spełnione są wszystkie założenia Propozycji 1.4.2, to chociaż warunek (1.4.2) zachodzi dla prawie każdej $\lambda_0 \in \mathbb{T}$, żadna z nich nie spełnia $h_j(\lambda_0) = 0$ dla żadnego j. W tej sytuacji może się zdarzyć, że $h_1, \dots, h_n$ mają (różne) pierwiastki na $\mathbb{T}$. Sytuacja taka ma miejsce w Przykładzie 1.5.4.

Wykażemy teraz pewne fakty upraszczające opis z Twierdzenia 1.1.4 w sytuacji dwuwymiarowej. Dla wypukłego obszaru tubowego $D \subset \mathbb{C}^2$ zdefiniujmy

$$V_D := \{v \in \mathbb{R}^2 : \text{ zbiór } P_D(v) \text{ jest jednoelementowy}\}$$

i oznaczmy przez p_D jedyne odwzorowanie

$$p_D = (p_{D,1}, p_{D,2}) : V_D \to \partial\operatorname{Re} D,$$

które wektorowi $v \in V_D$ przypisuje (jedyny) punkt $p_D(v) \in P_D(v)$. Mamy więc

$$P_D(v) = \{p_D(v)\}, \ v \in V_D.$$

Obserwacja 1.4.3. *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie wypukłym obszarem tubowym. Wtedy:*

(i) Istnieje co najwyżej przeliczalny podzbiór A okręgu jednostkowego w $\mathbb{R}^2$ taki, że

$$\{v \in \mathbb{R}^2 : \textit{zbiór } P_D(v) \textit{ ma więcej niż jeden element}\} = \bigcup_{v \in A} v \cdot (0, \infty),$$

(ii) zbiór $V_D \subset \mathbb{R}^2$ jest borelowski,

(iii) odwzorowanie $p_D : V_D \to \mathbb{R}^2$ jest ciągłe.

Szkic dowodu. Oznaczmy

$$B := \{v \in \mathbb{R}^2 : \text{zbiór } P_D(v) \text{ ma więcej niż jeden element}\}.$$

Ad. (i). Jeżeli wektor jednostkowy v należy do B, to zbiór $P_D(v) \subset \partial\operatorname{Re} D$ zawiera nietrywialny odcinek. Odcinki odpowiadające takim wektorom można wybrać tak, żeby różnym wektorom odpowiadały rozłączne odcinki. Brzeg obszaru wypukłego w $\mathbb{R}^2$ może zawierać co najwyżej przeliczalnie wiele parami rozłącznych odcinków, a więc do zbioru B należy co najwyżej przeliczalnie wiele wektorów jednostkowych.

Ad. (ii). Niech B_j będzie otwartą kulą euklidesową w $\mathbb{R}^2$ o środku 0 i promieniu j. Połóżmy $U_j := B_j \cap \operatorname{Re} D$; możemy założyć, że $U_1 \neq \varnothing$. Weźmy gęsty w $\operatorname{Re} D$, przeliczalny zbiór $L \subset \operatorname{Re} D$. Można sprawdzić, że zachodzi następująca równość:

$$B \cup V_D = \{v \in \mathbb{R}^2 : P_D(v) \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \sup_{x \in L \cap U_j} \langle x, v \rangle = \sup_{x \in L} \langle x, v \rangle\}.$$

Zbiory sumowane po prawej stronie równości są borelowskie, ponieważ supremum w ich definicji brane jest po zbiorach przeliczalnych. Stąd i z punktu (i) wynika, że borelowski jest także zbiór V_D.

Ad. (iii). Ustalmy wektor $v \in V_D$ oraz ciąg $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset V_D$ zbieżny do v. Pokażemy, że $p_D(v_j) \to p_D(v)$, gdy $j \to \infty$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $v = (1, 0)$ oraz $v_j \in (0, \infty)^2$ dla wszystkich j. Wtedy $p_D(v_1) \in p_D(v) + (-\infty, 0) \times (0, \infty)$. Niech $w \in (0, \infty)^2$ będzie wektorem prostopadłym do prostej przechodzącej przez punkty $p_D(v)$, $p_D(v_1)$. Rozważmy zbiór

$$U := \{x \in \operatorname{Re} D : \langle x - p_D(v), w\rangle > 0\}.$$

Jest on ograniczony, gdyż zawiera się z trójkącie, którego jeden bok stanowi odcinek $[p_D(v), p_D(v_1)]$, a pozostałe dwa boki są prostopadłe odpowiednio do wektorów v, v_1. Ponadto, jeżeli wektor v_j leży „pomiędzy" v a v_1, to

$$\sup_{x\in\operatorname{Re} D} \langle x, v_j\rangle = \max_{x\in\overline{U}} \langle x, v_j\rangle.$$

Ciąg funkcji $\overline{U} \ni x \mapsto \langle x, v_j\rangle$ zmierza jednostajnie do $\overline{U} \ni x \mapsto \langle x, v\rangle$, a funkcje te przyjmują silne maksima globalne odpowiednio w punktach $p_D(v_j)$, $p_D(v)$. To oznacza, że $p_D(v_j) \to p_D(v)$, gdy $j \to \infty$. □

Propozycja 1.4.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}^2$ będzie wypukłym obszarem tubowym niezawierającym afinicznych prostych zespolonych. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest geodezyjną zespoloną dla D, odwzorowanie $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2$ jest jak w Twierdzeniu 1.1.3 i funkcje h_1, h_2 są liniowo niezależne, to dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$ zachodzi $\bar\lambda h(\lambda) \in V_D$ oraz*

$$\operatorname{Re} \varphi^*(\lambda) = p_D(\bar\lambda h(\lambda)),$$

a funkcje $\lambda \mapsto p_{D,1}(\bar\lambda h(\lambda))$, $\lambda \mapsto p_{D,2}(\bar\lambda h(\lambda))$ są całkowalne względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$.

Rozważana powyżej liniowa niezależność funkcji $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ to niezależność nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ - tutaj obie te własności są równoważne, ponieważ $\bar\lambda h_1(\lambda), \bar\lambda h_2(\lambda) \in \mathbb{R}$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$.

Całkowalność funkcji $\lambda \mapsto p_{D,1}(\bar\lambda h(\lambda))$, $\lambda \mapsto p_{D,2}(\bar\lambda h(\lambda))$, o której mówi druga część Propozycji 1.4.4, okazuje się mieć wpływ na postać geodezyjnych zespolonych w niektórych obszarach tubowych. Dokładniej, jeżeli któraś z tych funkcji nie jest całkowalna względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, a h_1, h_2 są liniowo niezależne, to odwzorowanie h nie spełnia warunku z Twierdzenia 1.1.3 dla żadnej geodezyjnej φ. Obserwacja ta czasem pozwoli nam, podczas szukania formuł na geodezyjne w pewnych obszarach z rodziny $\mathcal{D}_2$, odrzucić część odwzorowań h. W Przykładzie 1.5.3 analizujemy obszar

$$D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} z_1 < 0, \operatorname{Re} z_2 < 0, \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 > 1\}$$

należący do rodziny $\mathcal{D}_2$, w którym ma miejsce taka sytuacja. W obszarze tym składowe h_1, h_2 każdego odwzorowania h „pochodzącego" od pewnej geodezyjnej zespolonej φ okażą się nie mieć zer na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$, o ile tylko są liniowo niezależne. Wywnioskujemy z tego, że φ rozszerza się holomorficznie na otoczenie dysku domkniętego $\overline{\mathbb{D}}$.

Dowód Propozycji 1.4.4. Gdyby zbiór

$$B := \{\lambda \in \mathbb{T} : P_D(\bar\lambda h(\lambda)) \text{ ma więcej niż jeden element}\}$$

był dodatniej miary Lebesgue'a, to wobec Obserwacji 1.4.3, dla pewnego wektora jednostkowego $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ dodatnią miarę miałby zbiór $\{\lambda \in \mathbb{T} : \bar\lambda h(\lambda) \in v \cdot \mathbb{R}\}$, a to na mocy zasady identyczności dałoby $v_2 h_1 \equiv v_1 h_2$, co przeczy liniowej niezależności funkcji h_1, h_2. Tak więc zbiór B jest miary zero. Z drugiej strony, z Lematu 1.3.8 wynika, że $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda) \in P_D(\bar{\lambda}h(\lambda)) \neq \varnothing$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$. To oznacza, że $\bar{\lambda}h(\lambda) \in V_D$ i w konsekwencji $\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda) = p_D(\bar{\lambda}h(\lambda))$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$. Natomiast całkowalność funkcji $\lambda \mapsto p_{D,1}(\bar{\lambda}h(\lambda))$, $\lambda \mapsto p_{D,2}(\bar{\lambda}h(\lambda))$ wynika z faktu, iż funkcje $\operatorname{Re}\varphi_1^*$, $\operatorname{Re}\varphi_2^*$ są całkowalne względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. $\square$

Na zakończenie tego podrozdziału podamy pewne uwagi dotyczące Twierdzenia 1.1.4 w sytuacji dwuwymiarowej:

Uwaga 1.4.5. Niech $D \in \mathcal{D}_2$.

(i) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest geodezyjną zespoloną dla D, $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}_+^2$ jest jak w Twierdzeniu 1.1.3 oraz $\bar{\lambda}h(\lambda) \in V_D$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$ (ma to miejsce np. gdy funkcje h_1, h_2 są liniowo niezależne - Propozycja 1.4.4), to:
- $h_1 \not\equiv 0$, $h_2 \not\equiv 0$, a w Twierdzeniu 1.1.4 zachodzi warunek (ii) z tym h,
- odwzorowanie g z Twierdzenia 1.1.4 jest jedyne (z dokładnością do zbioru o zerowej mierze $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$) i jest nim

$$g(\lambda) = p_D(\bar{\lambda}h(\lambda)),$$

- funkcje $\lambda \mapsto p_{D,1}(\bar{\lambda}h(\lambda))$, $\lambda \mapsto p_{D,2}(\bar{\lambda}h(\lambda))$ są całkowalne względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$.

(ii) Na odwrót, jeżeli $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}_+^2$ jest takie, że:
- funkcje h_1, h_2 są liniowo niezależne,
- funkcje $\lambda \mapsto p_{D,1}(\bar{\lambda}h(\lambda))$, $\lambda \mapsto p_{D,2}(\bar{\lambda}h(\lambda))$ są całkowalne względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$ (wiemy, że są one $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-prawie wszędzie dobrze określone, bowiem $\bar{\lambda}h(\lambda) \in V_D$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, i mierzalne, wobec Obserwacji 1.4.3),
- g jest dane wzorem $g(\lambda) := p_D(\bar{\lambda}h(\lambda))$,
- $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, 0]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ są takie, że $\alpha_1 h_1(\lambda_1) = \alpha_2 h_2(\lambda_2) = 0$ oraz

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_D(\bar{\lambda}h(\lambda))\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) + \frac{1}{2\pi}(\alpha_1, \alpha_2) \in \operatorname{Re} D,$$

to wobec Twierdzenia 1.1.4, odwzorowanie holomorficzne o mierze granicznej μ danej wzorem (1.1.2) ma obraz w D i jest geodezyjną zespoloną dla D.

(iii) Jeżeli odwzorowanie $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ o mierze granicznej μ jest geodezyjną zespoloną dla D, $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}_+^2$ jest jak w Twierdzeniu 1.1.3, $h_1 \not\equiv 0$, $h_2 \not\equiv 0$ oraz $h_2 \equiv \gamma h_1$ dla pewnej stałej $\gamma > 0$, to:
- w Twierdzeniu 1.1.4 zachodzi warunek (ii) z tym h,
- $P_D(\bar{\lambda}h(\lambda)) = P_D((1, \gamma))$ oraz $g(\lambda) \in P_D((1, \gamma))$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$,
- $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ (ponieważ obraz g leży w odcinku $P_D((1, \gamma)) \subset \partial\operatorname{Re} D$, a musi być $\frac{1}{2\pi}\mu(\mathbb{T}) \in \operatorname{Re} D$), funkcje h_1, h_2 mają wspólne zero na $\mathbb{T}$, a punkty $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ można wziąć tak, że $\lambda_1 = \lambda_2$ oraz $h_1(\lambda_1) = h_2(\lambda_2) = 0$,
- μ jest dane wzorem

$$\mu = g\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1, \alpha_2)\delta_{\lambda_1},$$

- jeśli dodatkowo $(1, \gamma) \in V_D$, to $g = p_D((1, \gamma))$ prawie wszędzie, a więc

$$\mu = p_D((1, \gamma))\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1, \alpha_2)\delta_{\lambda_1}.$$

1.5. Przykłady

W tym podrozdziale podamy wzory na geodezyjne zespolone w pewnych klasach wypukłych obszarów tubowych niezawierających afinicznych prostych zespolonych.

Uwaga 1.5.1. Ustalmy funkcję $h \in \mathcal{H}^1$, $h(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + b\lambda + a$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$, i załóżmy dodatkowo, że $|b| < 2|a|$; to ostatnie założenie jest równoważne temu, że $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\{\lambda \in \mathbb{T} : \bar{\lambda}h(\lambda) > 0\}) \in (0, 2\pi)$. Rozważmy odwzorowanie holomorficzne $\varphi_h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ o mierze granicznej

$$\chi_{\{\lambda\in\mathbb{T}:\, \bar{\lambda}h(\lambda)>0\}}\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} \tag{1.5.1}$$

i spełniające warunek $\operatorname{Im}\varphi_h(0) = 0$. Wyprowadzimy konkretną formułę na φ_h, którą wykorzystamy w Przykładzie 1.5.2. Dokładniej, pokażemy, iż

$$\varphi_h(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\{\zeta\in\mathbb{T}:\, \bar{\zeta}h(\zeta)>0\}} \frac{\zeta+\lambda}{\zeta-\lambda} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta) = \tau\left(iT_c\left(\tfrac{\bar{a}}{|a|}\lambda\right)\right),\ \lambda \in \mathbb{D}, \tag{1.5.2}$$

gdzie

$$\tau(\lambda) := -\frac{i}{\pi}\log\left(i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right), \tag{1.5.3}$$

log oznacza gałąź logarytmu zdefiniowaną dla λ o argumentach w $[0, 2\pi)$, a

$$c = \frac{-b}{2|a| + \sqrt{4|a|^2 - b^2}} \in (-1, 1).$$

Oznaczmy

$$L_1 := \{\lambda \in \mathbb{T} : \bar{\lambda}h(\lambda) > 0\},\ L_2 := \{\lambda \in \mathbb{T} : \bar{\lambda}h(\lambda) < 0\}.$$

Funkcja $\chi_{L_1} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $L_1 \cup L_2$, a więc $\operatorname{Re}\varphi_h$ przedłuża się w sposób ciągły na zbiór $\mathbb{D} \cup L_1 \cup L_2$ i zachodzą równości

$$\operatorname{Re}\varphi_h = 1 \text{ na } L_1,\ \operatorname{Re}\varphi_h = 0 \text{ na } L_2. \tag{1.5.4}$$

Można sprawdzić, że

$$\operatorname{Im}\left(iT_c\left(\tfrac{\bar{a}}{|a|}\lambda\right)\right) \in \bar{\lambda}h(\lambda)\cdot(0,\infty),\ \lambda \in \mathbb{T}.$$

To oznacza, że homeomorfizm

$$\overline{\mathbb{D}} \ni \lambda \mapsto iT_c\left(\tfrac{\bar{a}}{|a|}\lambda\right) \in \overline{\mathbb{D}}$$

przekształca łuk L_1 na $\{\lambda \in \mathbb{T} : \operatorname{Im}\lambda > 0\}$, a łuk L_2 na $\{\lambda \in \mathbb{T} : \operatorname{Im}\lambda < 0\}$. Odwzorowanie τ jest biholomorfizmem z $\mathbb{D}$ w $\mathbb{S}$, który przedłuża się w sposób ciągły na $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{-1, 1\}$ i przeprowadza łuk $\{\lambda \in \mathbb{T} : \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ na prostą $1 + i\mathbb{R}$, a łuk $\{\lambda \in \mathbb{T} : \operatorname{Im}\lambda < 0\}$ na prostą $i\mathbb{R}$. W konsekwencji, odwzorowanie

$$\psi : \mathbb{D} \cup L_1 \cup L_2 \ni \lambda \mapsto \tau\left(iT_c\left(\tfrac{\bar{a}}{|a|}\lambda\right)\right) \in \mathbb{C}$$

przekształca łuk L_1 na prostą $1+i\mathbb{R}$, a łuk L_2 na prostą $i\mathbb{R}$. W szczególności, ψ także spełnia równości (1.5.4). To oznacza, że $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. na $\mathbb{T}$ zachodzi równość $\operatorname{Re}\varphi_h^* = \operatorname{Re}\psi^*$. Z faktu, iż $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{S}$ wynika, że ψ jest klasy H^1, a z tego, że miara (1.5.1) jest miarą graniczną φ_h wynika, że φ_h jest klasy H^1. To oznacza, że $\varphi_h \equiv \psi$, bowiem $\operatorname{Im}\psi(0) = 0 = \operatorname{Im}\varphi_h(0)$.

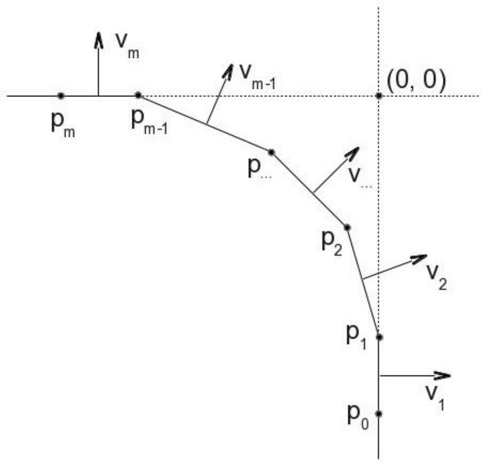
Przykład 1.5.2. Rozważmy obszar tubowy $D \in \mathcal{D}_2$ o bazie zawartej w zbiorze $(-\infty, 0)^2$, której brzeg jest sumą półprostej zawartej w $(-\infty, 0] \times \{0\}$, półprostej zawartej w $\{0\} \times (-\infty, 0]$ i pewnej skończonej liczby odcinków. Dokładniej, niech

$$D := \{z \in \mathbb{C}^2 : \langle \mathrm{Re}\, z - p_j, v_j \rangle < 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m\},$$

gdzie $m \geq 3$, $v_1, \ldots, v_m \in [0, \infty)^2$, $p_0, \ldots, p_m \in (-\infty, 0]^2$, $v_j = (v_{j,1}, v_{j,2})$, $p_j = (p_{j,1}, p_{j,2})$ spełniają następujące warunki:

- $0 = p_{0,1} = p_{1,1} > p_{2,1} > \ldots > p_{m-1,1} > p_{m,1}$,
- $0 = p_{m,2} = p_{m-1,2} > p_{m-2,2} > \ldots > p_{1,2} > p_{0,2}$,
- $\det [v_j, v_{j+1}] > 0$ dla $j = 1, \ldots, m-1$,
- $\langle p_{j+1} - p_j, v_{j+1} \rangle = 0$ dla $j = 0, \ldots, m-1$

(punkty p_0 i p_m pełnią jedynie rolę pomocniczą). Symbolem $[v, v_j]$ oznaczyliśmy tutaj macierz wymiaru 2×2, której kolumnami są wektory v, v_j. Chociaż tym samym symbolem oznaczamy także odcinek domknięty o danych końcach, to w każdej sytuacji jasno wynika z kontekstu, które znaczenie mamy na myśli. Bazę obszaru D przedstawia Rysunek 1.



Rysunek 1. Baza obszaru D

Z powyższych założeń wynikają następujące własności:

- $\langle \mathrm{Re}\, z - p_j, v_{j+1} \rangle < 0$ dla $z \in D$, $j = 0, \ldots, m-1$,
- $v_{1,1} > 0$, $v_{1,2} = 0$, $v_{m,1} = 0$, $v_{m,2} > 0$,
- $\partial \mathrm{Re}\, D = \{0\} \times (-\infty, p_{1,2}] \cup \bigcup_{j=1}^{m-2} [p_j, p_{j+1}] \cup (-\infty, p_{m-1,1}] \times \{0\}$.

Ponadto:

- $V_D = (0, \infty)^2 \setminus \bigcup_{j=2}^{m-1} v_j \cdot \mathbb{R}$,
- $p_D(v) = p_j$, dla $v \in (0, \infty)^2$, $\det[v, v_j] < 0 < \det[v, v_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, m-1$,
- $p_D(v_j) = [p_{j-1}, p_j]$ dla $j = 1, \ldots, m$,
- $\widehat{\pi}_1(D) = \widehat{\pi}_2(D) = \mathbb{H}_-$.

Warunek $\det[v, v_j] < 0 < \det[v, v_{j+1}]$ oznacza, że wektor v leży „pomiędzy” wektorami v_j a v_{j+1}.

Niech $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{D} \to D$ będzie geodezyjną zespoloną o mierze granicznej $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ i niech $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}_+^n$ będzie jak w Twierdzeniu 1.1.3. Rozważymy kilka przypadków.

Jeżeli $h_1 \equiv 0$, to na mocy Twierdzenia 1.1.4, φ_2 jest geodezyjną zespoloną dla $\mathbb{H}_-$, a skoro $\varphi(\mathbb{D}) \subset D$, to φ_1 jest dowolnym odwzorowaniem holomorficznym o obrazie leżącym w zbiorze $p_{m-1,1} + \overline{\mathbb{H}_-}$. Podobnie, jeżeli $h_2 \equiv 0$, to φ_1 jest geodezyjną zespoloną dla $\mathbb{H}_-$, a φ_2 jest dowolnym odwzorowaniem holomorficznym o obrazie leżącym w zbiorze $p_{1,2} + \overline{\mathbb{H}_-}$.

Jeżeli $h_1, h_2 \not\equiv 0$, ale $h(\mathbb{D}) \subset v_j \cdot [0, \infty)$ dla pewnego $j \in \{2, \dots, m-1\}$, to na mocy Uwagi 1.4.5 (iii),

$$\mu = g\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1, \alpha_2)\delta_{\lambda_0} \tag{1.5.5}$$

dla pewnego odwzorowania borelowskiego $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ o obrazie leżącym w odcinku domkniętym $[p_{j-1}, p_j]$ oraz stałych $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, 0]$, $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ takich, że $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. W takiej sytuacji φ jest dane wzorem

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + \lambda}{\zeta - \lambda} g(\zeta) d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta) + \frac{1}{2\pi}(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} + i(\beta_1, \beta_2),\ \lambda \in \mathbb{D}, \tag{1.5.6}$$

dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $h(\mathbb{D}) \not\subset v_j \cdot [0, \infty)^2$ dla żadnego $j \in \{1, \dots, m\}$. Wtedy $\bar\lambda h(\lambda) \in V_D$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, zatem, wobec Twierdzenia 1.1.4 i Uwagi 1.4.5 (i),

$$\mu = p_D(\bar\lambda h(\lambda))\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) + (\alpha_1 \delta_{\lambda_1}, \alpha_2 \delta_{\lambda_2}) \tag{1.5.7}$$

dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, 0]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ takich, że

$$\alpha_1 h_1(\lambda_1) = \alpha_2 h_2(\lambda_2) = 0.$$

Odnotujmy, że odwzorowanie $\lambda \mapsto p_D(\bar\lambda h(\lambda))$ jest całkowalne względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, bowiem $p_D(V_D) \subset \{p_1, \dots, p_{m-1}\}$.

Dla $j = 1, \dots, m-1$ zdefiniujmy

$$A_j := \{\lambda \in \mathbb{T} : \det\left[\bar\lambda h(\lambda), v_j\right] < 0 < \det\left[\bar\lambda h(\lambda), v_{j+1}\right]\}, \tag{1.5.8}$$

i niech

$$B := \bigcup_{j=1}^{m} \{\lambda \in \mathbb{T} : \det\left[\bar\lambda h(\lambda), v_j\right] = 0\}.$$

Zbiór A_j składa się dokładnie z tych $\lambda \in \mathbb{T}$, dla których wektor $\bar\lambda h(\lambda)$ leży pomiędzy wektorami v_j i v_{j+1}. Tak więc dla $\lambda \in A_j$ mamy $\bar\lambda h(\lambda) \in V_D$ oraz $p_D(\bar\lambda h(\lambda)) = p_j$. Ponadto zbiory $A_1, \dots, A_{m-1}, B$ są parami rozłączne, ich suma jest równa $\mathbb{T}$ oraz $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(B) = 0$, zatem

$$p_D(\bar\lambda h(\lambda))\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m-1} p_j \chi_{A_j}(\lambda)\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda).$$

Wzór (1.5.7) przyjmuje zatem postać

$$\mu = \sum_{j=1}^{m-1} p_j \chi_{A_j} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1 \delta_{\lambda_1}, \alpha_2 \delta_{\lambda_2}). \tag{1.5.9}$$

Mając równość (1.5.9), możemy wyrazić φ wzorem całkowym Schwarza. Jak się jednak przekonamy, w tym przypadku można uzyskać konkretną (niecałkową) formułę na φ, wykorzystując obserwacje poczynione w Uwadze 1.5.1. Połóżmy

$$C_j := \{\lambda \in \mathbb{T} : \det\left[\bar{\lambda}h(\lambda), v_j\right] < 0\},\ j = 1, \ldots, m.$$

Mamy

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_m,$$

$A_j \subset C_j \setminus C_{j+1}$ oraz $(C_j \setminus C_{j+1}) \setminus A_j \subset B$, a więc zbiory $(C_j \setminus C_{j+1}) \setminus A_j$ mają zerową miarę Lebesgue'a. W konsekwencji, $\chi_{A_j} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} = \chi_{C_j} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} - \chi_{C_{j+1}} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. Dodatkowo $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(C_1) = 2\pi$ oraz $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(C_m) = 0$. Wzór (1.5.9) możemy więc zapisać w postaci

$$\mu = p_1 d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \sum_{j=2}^{m-1} (p_j - p_{j-1}) \chi_{C_j} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1 \delta_{\lambda_1}, \alpha_2 \delta_{\lambda_2}). \tag{1.5.10}$$

Zauważmy, że

$$C_j = \{\lambda \in \mathbb{T} : \bar{\lambda}(v_{j,1} h_2(\lambda) - v_{j,2} h_1(\lambda)) > 0\}.$$

Dzięki tej obserwacji oraz równości (1.5.2) możemy uzyskać konkretne formuły na odwzorowania holomorficzne mające miary graniczne χ_{C_j}, musimy jedynie odrzucić te $j \in \{1, \ldots, m\}$, dla których nie zachodzi warunek $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(C_j) \in (0, 2\pi)$. Niech

$$k_1 := \max\{j \geq 1 : \mathcal{L}^{\mathbb{T}}(C_j) = 2\pi\},\ k_2 := \min\{j \leq m : \mathcal{L}^{\mathbb{T}}(C_j) = 0\}. \tag{1.5.11}$$

Mamy $1 \leq k_1 < k_2 \leq m$. Z równości (1.5.10) natychmiast wynika następująca:

$$\mu = p_{k_1} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \sum_{j=k_1+1}^{k_2-1} (p_j - p_{j-1}) \chi_{C_j} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1 \delta_{\lambda_1}, \alpha_2 \delta_{\lambda_2}). \tag{1.5.12}$$

Stąd otrzymujemy konkretny wzór na φ:

$$\varphi(\lambda) = p_{k_1} + \sum_{j=k_1+1}^{k_2-1} (p_j - p_{j-1}) \varphi_{v_{j,1}h_2 - v_{j,2}h_1}(\lambda) + \left(\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda_1 - \lambda} + i\beta_1, \frac{\alpha_2}{2\pi} \frac{\lambda_2 + \lambda}{\lambda_2 - \lambda} + i\beta_2\right) \tag{1.5.13}$$

dla $\lambda \in \mathbb{D}$, gdzie $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ są pewnymi stałymi, a funkcje $\varphi_{v_{j,1}h_2 - v_{j,2}h_1}$ są dane wzorem (1.5.2), tj.

$$\varphi_{v_{j,1}h_2 - v_{j,2}h_1}(\lambda) = \tau\left(iT_{c_j}\left(\tfrac{\overline{v_{j,1}a_2 - v_{j,2}a_1}}{|v_{j,1}a_2 - v_{j,2}a_1|}\lambda\right)\right),\ \lambda \in \mathbb{D},$$

gdzie $\tau(\lambda) = -\frac{i}{\pi}\log\left(i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$ oraz

$$c_j = \frac{-(v_{j,1}b_2 - v_{j,2}b_1)}{2|v_{j,1}a_2 - v_{j,2}a_1| + \sqrt{4|v_{j,1}a_2 - v_{j,2}a_1|^2 - (v_{j,1}b_2 - v_{j,2}b_1)^2}}.$$

Odnotujmy, że dla $j = k_1 + 1, \ldots, k_2 - 1$ zachodzi $|v_{j,1}b_2 - v_{j,2}b_1| < 2|v_{j,1}a_2 - v_{j,2}a_1|$, gdyż $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(C_j) \in (0, 2\pi)$, a więc c_j i $\varphi_{v_{j,1}h_2 - v_{j,2}h_1}$ są poprawnie zdefiniowane oraz $c_j \in (-1, 1)$.

Podsumowując, odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^2$ o mierze granicznej μ jest geodezyjną zespoloną dla obszaru D wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi *co najmniej jeden* z poniższych warunków:

(1) φ_1 jest geodezyjną zespoloną dla $\mathbb{H}_-$ oraz $\varphi_2(\mathbb{D}) \subset p_{1,2} + \overline{\mathbb{H}_-}$;

(2) φ_2 jest geodezyjną zespoloną dla $\mathbb{H}_-$ oraz $\varphi_1(\mathbb{D}) \subset p_{m-1,1} + \overline{\mathbb{H}_-}$;

(3) μ jest postaci
$$\mu = g\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1, \alpha_2)\delta_{\lambda_0}$$
dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, 0]$, $\lambda_0 \in \mathbb{T}$, $j \in \{2, \dots, m-1\}$ oraz odwzorowania borelowskiego $g : \mathbb{T} \to [p_{j-1}, p_j]$ takich, że $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$; w takiej sytuacji φ jest dane wzorem (1.5.6) dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$;

(4) μ jest postaci
$$\mu = \sum_{j=1}^{m-1} p_j \chi_{A_j} d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (\alpha_1\delta_{\lambda_1}, \alpha_2\delta_{\lambda_2})$$
dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, 0]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$, $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2_+$ takich, że
$$\alpha_1 h_1(\lambda_1) = \alpha_2 h_2(\lambda_2) = 0,$$
$\frac{1}{2\pi}\mu(\mathbb{T}) \in \operatorname{Re} D$, $v_{j,1}h_2 - v_{j,2}h_1 \not\equiv 0$ dla $j = 1, \dots, m$, a zbiory A_j są dane przez (1.5.8); w takiej sytuacji φ jest dane wzorem (1.5.13) dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Fakt, że każde odwzorowanie przyjmujące jedną z wyżej wymienionych postaci jest geodezyjną zespoloną dla obszaru D, jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 1.1.4.

Przykład 1.5.3. Rozważmy obszar
$$D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} z_1 < 0, \operatorname{Re} z_2 < 0, \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 > 1\}.$$
Obszar ten ma bazę ściśle wypukłą i należy do rodziny $\mathcal{D}_2$. Ponadto, $V_D = (0, \infty)^2$ oraz
$$p_D(v) = \left(-\sqrt{\frac{v_2}{v_1}}, -\sqrt{\frac{v_1}{v_2}}\right), \ v = (v_1, v_2) \in V_D.$$
Twierdzenie 1.1.4, wraz z Uwagą 1.4.5, dają nam opis geodezyjnych zespolonych dla tego obszaru. Powiemy o tych geodezyjnych coś więcej.

Niech $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ będzie geodezyjną zespoloną dla D i niech $h = (h_1, h_2)$ będzie jak w Twierdzeniu 1.1.3. Z Propozycji 1.4.2 wynika, że funkcje h_1, h_2 nie są tożsamościowo równe zero, a więc są postaci
$$h_j(\lambda) = c_j(\lambda - d_j)(1 - \bar{d}_j\lambda)$$
dla pewnych $c_1, c_2 > 0$, $d_1, d_2 \in \overline{\mathbb{D}}$. Zachodzi równość
$$p_D(\bar{\lambda}h(\lambda)) = \left(-\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\frac{|\lambda - d_2|}{|\lambda - d_1|}, -\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\frac{|\lambda - d_1|}{|\lambda - d_2|}\right), \ \lambda \in \mathbb{T} \setminus \{d_1, d_2\}.$$

Załóżmy, że funkcje h_1, h_2 są liniowo niezależne. Wtedy $d_1 \neq d_2$. Jeżeli $d_1 \in \mathbb{T}$ lub $d_2 \in \mathbb{T}$, to jedna z funkcji $\lambda \mapsto p_{D,1}(\bar{\lambda}h(\lambda))$, $\lambda \mapsto p_{D,2}(\bar{\lambda}h(\lambda))$ nie jest całkowalna względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, co jest sprzeczne z Uwagą 1.4.5 (i). Zatem $d_1, d_2 \in \mathbb{D}$, a więc funkcje h_1, h_2 nie mają zer na okręgu $\mathbb{T}$. Jeżeli α_1, α_2, λ_1, λ_2 są jak w Twierdzeniu 1.1.4, to z równości $\alpha_1 h_1(\lambda_1) = \alpha_2 h_2(\lambda_2) = 0$ natychmiast wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. W takim razie
$$\mu = \left(-\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\frac{|\lambda - d_2|}{|\lambda - d_1|}\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda), -\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\frac{|\lambda - d_1|}{|\lambda - d_2|}\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda)\right).$$

To oznacza, że φ rozszerza się holomorficznie na otoczenie dysku domkniętego $\overline{\mathbb{D}}$, bowiem jego część rzeczywista jest $\mathbb{R}$-analityczna na okręgu jednostkowym.

Przykład 1.5.4. Rozważmy obszar

$$D = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} z_1 < 0, \operatorname{Re} z_2 < 0, \operatorname{Re} z_2 < f(\operatorname{Re} z_1)\right\},$$

gdzie $f : (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$ jest funkcją daną wzorem

$$f(t) = \begin{cases} -|t|^{-2}, & \text{gdy } t \in (-\infty, -1], \\ -4|t|^{-\frac{1}{2}} + 3, & \text{gdy } t \in [-1, 0). \end{cases}$$

Funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$, bowiem

$$f'(t) = \begin{cases} -2|t|^{-3}, & \text{gdy } t \in (-\infty, -1], \\ -2|t|^{-\frac{3}{2}}, & \text{gdy } t \in [-1, 0). \end{cases}$$

Jej pochodna f' jest malejąca, a więc obszar D ma ściśle wypukłą bazę. Ponadto $D \in \mathcal{D}_2$, $V_D = (0, \infty)^2$ oraz

$$p_D((v_1, v_2)) = \begin{cases} \left(-\left(\frac{2v_2}{v_1}\right)^{\frac{1}{3}}, -\left(\frac{v_1}{2v_2}\right)^{\frac{2}{3}}\right), & \text{gdy } \frac{2v_2}{v_1} \geq 1, \\ \left(-\left(\frac{2v_2}{v_1}\right)^{\frac{2}{3}}, -4\left(\frac{v_1}{2v_2}\right)^{\frac{1}{3}} + 3\right), & \text{gdy } \frac{2v_2}{v_1} \leq 1. \end{cases}$$

W rozważanym obszarze sytuacja jest podobna do tej z Przykładu 1.5.3, z tą jednak różnicą, że tutaj może się zdarzyć, że składowe h_1, h_2 odwzorowania $h = (h_1, h_2)$ „pochodzącego" od pewnej geodezyjnej są liniowo niezależne i mają pierwiastki na $\mathbb{T}$. Przykładowo, dla $h(\lambda) = (h_1(\lambda), h_2(\lambda)) = (-(1-\lambda)^2, (\lambda+1)^2) \in \mathcal{H}^2_+$ zachodzi równość

$$\frac{h_2(\lambda)}{h_1(\lambda)} = \frac{|\lambda+1|^2}{|\lambda-1|^2}, \ \lambda \in \mathbb{T} \setminus \{-1, 1\},$$

i widać, że funkcje $\lambda \mapsto p_{D,1}(\bar\lambda h(\lambda))$, $\lambda \mapsto p_{D,2}(\bar\lambda h(\lambda))$ są całkowalne względem miary $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$. Z Twierdzenia 1.1.4 wynika, że dla dowolnych parametrów $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, 0]$ odwzorowanie holomorficzne o mierze granicznej danej wzorem

$$\mu = p_D(\bar\lambda h(\lambda))\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda) + (\alpha_1\delta_1, \alpha_2\delta_{-1})$$

jest geodezyjną zespoloną dla D.

Przykład 1.5.5. Rozważmy obszar

$$D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} z_2 > (\operatorname{Re} z_1)^2\}.$$

Oczywiście nie należy on do rodziny $\mathcal{D}_2$ i nie jest liniowo biholomorficzny z żadnym obszarem z tej rodziny. Można jednak znaleźć formuły na wszystkie geodezyjne zespolone dla tego obszaru w sposób podobny do tego, jaki zastosowaliśmy w poprzednich przykładach. Mamy $V_D = W_D = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ oraz

$$p_D((v_1, v_2)) = \left(-\frac{v_1}{2v_2}, \frac{v_1^2}{4v_2^2}\right), \ (v_1, v_2) \in V_D.$$

Niech $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ będzie geodezyjną zespoloną o mierze granicznej μ i niech $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2$ będzie jak w Twierdzeniu 1.1.3. Weźmy $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ takie, że

$h_1(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + b\lambda + a$. Mamy $-h_2 \in \mathcal{H}_+^2$, a więc $h_2(\lambda) = c(\lambda - d)(1 - \bar{d}\lambda)$ dla pewnych $c \leq 0$, $d \in \overline{\mathbb{D}}$. Rozważmy rozkład Lebesgue'a-Radona-Nikodyma

$$\mu = \operatorname{Re}\varphi^* \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \mu_s$$

miary μ względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$, i połóżmy $\mu_s = (\mu_{s,1}, \mu_{s,2})$.

Lemat 1.3.9 (i) daje $h_2 \not\equiv 0$, a więc dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$ zachodzi $\bar{\lambda}h(\lambda) \in V_D$ oraz

$$\operatorname{Re}\varphi^*(\lambda) = p_D(\bar{\lambda}h(\lambda)) = \left(-\frac{2\operatorname{Re}(\bar{a}\lambda) + b}{2c|\lambda - d|^2}, \frac{(2\operatorname{Re}(\bar{a}\lambda) + b)^2}{4c^2|\lambda - d|^4} \right). \tag{1.5.14}$$

Zauważmy, że $(1, 0), (-1, 0), (0, -1) \in \overline{W_D}$. Z Lematu 1.3.10 wynika zatem, iż $\mu_{s,2} \geq 0$ oraz

$$\mu_{s,1} = 0. \tag{1.5.15}$$

Lemat 1.3.9 (ii) daje nam w takim razie $\bar{\lambda}h_2(\lambda) \, d\mu_{s,2}(\lambda) \geq 0$. Z drugiej strony, $\bar{\lambda}h_2(\lambda) \leq 0$ dla $\lambda \in \mathbb{T}$, więc $\bar{\lambda}h_2(\lambda) \, d\mu_{s,2}(\lambda) = 0$ i na mocy Uwagi 1.4.1 (v) otrzymujemy

$$\mu_{s,2} = \alpha\delta_{\lambda_0} \tag{1.5.16}$$

dla pewnych $\alpha \geq 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ takich, że $\alpha h_2(\lambda_0) = 0$.

Rozważmy dwa przypadki. Jeżeli $d \in \mathbb{T}$, to można sprawdzić, że składowe odwzorowania po prawej stronie (1.5.14) są całkowalne względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$ tylko wtedy, gdy funkcje h_1, h_2 są liniowo zależne. Wtedy też odwzorowanie to jest stałe, bowiem obszar D ma bazę ściśle wypukłą. Aby obraz φ leżał w D, musi być $\alpha > 0$ oraz $\lambda_0 = d$. Uwzględniając (1.5.15) i (1.5.16), dostajemy

$$\mu = (t_0, t_0^2) \, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + (0, \alpha\delta_d)$$

dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$.

Jeśli zaś $d \in \mathbb{D}$, to h_2 nie ma zer na $\mathbb{T}$, a więc $\alpha = 0$, a to daje $\mu_{s,2} = 0$. W tej sytuacji

$$\mu = \left(-\frac{2\operatorname{Re}(\bar{a}\lambda) + b}{2c|\lambda - d|^2}, \frac{(2\operatorname{Re}(\bar{a}\lambda) + b)^2}{4c^2|\lambda - d|^4} \right) d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda).$$

Z drugiej strony, z Twierdzenia 1.1.3 wynika, że odwzorowania zadane przez miary obu powyższych postaci są geodezyjnymi zespolonymi dla obszaru D.

1.6. Zastosowanie w obszarach Reinhardta

Obszar $G \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *obszarem Reinhardta* (odp. *pełnym obszarem Reinhardta*), jeżeli $(\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n) \in G$ dla wszystkich $(z_1, \ldots, z_n) \in G$ oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$ (odp. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \overline{\mathbb{D}}$). Dla obszaru Reinhardta G odwzorowanie

$$\exp : D_G \ni (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}) \in G \cap (\mathbb{C}_*)^n$$

jest nakryciem, gdzie $D_G := \log G + i\mathbb{R}^n$, a $\log G \subset \mathbb{R}^n$ oznacza *obraz logarytmiczny* obszaru G, tj. obszar tubowy

$$\log G := \{(\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|) : (z_1, \ldots, z_n) \in G \cap (\mathbb{C}_*)^n\}.$$

Jeśli G jest pseudowypukły, to D_G jest wypukły, a jeśli dodatkowo G jest ograniczony i pełny, to $D_G \in \mathcal{D}_n$.

W tym podrozdziale, w Propozycji 1.6.2, podamy postać (dokładniej: warunek konieczny) wszystkich odwzorowań ekstremalnych dla funkcji Lemperta oraz metryki Kobayashi'ego-Roydena w pełnych, ograniczonych i pseudowypukłych obszarach Reinhardta $G \subset \mathbb{C}^2$ (czyli w tych, dla których $D_G \in \mathcal{D}_2$; Twierdzenie 1.1.4 daje nam dokładną postać geodezyjnych zespolonych dla D_G). Każde takie odwzorowanie daje się w pewien sposób sprowadzić do geodezyjnej zespolonej w obszarze D_G lub do odwzorowania holomorficznego o obrazie leżącym w brzegu tego obszaru. Sprowadzenie to można wykonać naśladując metody stosowane w [**Edi-Zwo**] lub [**Kli**, podrozdział 4.3].

Definicja 1.6.1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. *Funkcją Lemperta* dla D nazywamy funkcję $\ell_D : D \times D \to [0, \infty)$ daną wzorem

$$\begin{aligned}\ell_D(z,w) &:= \inf\{\rho(\sigma_1,\sigma_2) : \sigma_1,\sigma_2 \in \mathbb{D}, \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(\sigma_1) = z, f(\sigma_2) = w\} \\ &= \inf\{\rho(0,\sigma) : \sigma \in \mathbb{D}, \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(0) = z, f(\sigma) = w\}.\end{aligned}$$

a *pseudometryką Kobayashi'ego-Roydena* dla D funkcję $\kappa_D : D \times \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ daną wzorem

$$\begin{aligned}\kappa_D(z,X) &:= \inf\left\{\tfrac{|\alpha|}{1-|\sigma|^2} : \alpha \in \mathbb{C}, \sigma \in \mathbb{D}, \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(\sigma) = z, \alpha f'(\sigma) = X\right\} \\ &= \inf\{\alpha > 0 : \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D) : f(0) = z, \alpha f'(0) = X\}.\end{aligned}$$

Mówimy, że odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest:

(i) ℓ_D*-ekstremalne* dla $(z,w) \in D \times D$, $z \neq w$, jeśli istnieją $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{D}$ takie, że $f(\sigma_1) = z$, $f(\sigma_2) = w$ oraz $\rho(\sigma_1,\sigma_2) = \ell_D(z,w)$,

(ii) κ_D*-ekstremalne* dla $(z,X) \in D \times \mathbb{C}^n$, $X \neq 0$, jeśli istnieją $\sigma \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ takie, że $f(\sigma) = z$, $\alpha f'(\sigma) = X$ oraz $\kappa_D(z,X) = \frac{|\alpha|}{1-|\sigma|^2}$,

(iii) ℓ_D*-ekstremalne*, gdy jest ℓ_D-ekstremalne dla pewnych $(z,w) \in D \times D$, $z \neq w$,

(iv) κ_D*-ekstremalne*, gdy jest κ_D-ekstremalne dla pewnych $(z,X) \in D \times \mathbb{C}^n$, $X \neq 0$.

Odnotujmy, że odwzorowania ℓ_D- i κ_D-ekstremalne w ogólności nie muszą istnieć, choć z drugiej strony, istnieją w dość szerokiej klasie obszarów w $\mathbb{C}^n$, np. dla obszarów typu taut (zob. np. [**Jar-Pfl**]). Jeżeli D jest obszarem wypukłym typu taut, to każde odwzorowanie ℓ_D- lub κ_D-ekstremalne jest geodezyjną zespoloną, i na odwrót, każda geodezyjna zespolona f jest odwzorowaniem ℓ_D-ekstremalnym dla każdej pary $(f(\sigma_1), f(\sigma_2))$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, i odwzorowaniem κ_D-ekstremalnym dla każdej pary $(f(\sigma), \alpha f'(\sigma))$, $\alpha \in \mathbb{C}_*$.

Propozycja 1.6.2. *Niech $G \subset \mathbb{C}^2$ będzie pełnym, ograniczonym i pseudowypukłym obszarem Reinhardta, niech $R_1, R_2 > 0$ będą takie, że $\pi_1(G) = R_1\mathbb{D}$, $\pi_2(G) = R_2\mathbb{D}$, i niech $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, G)$ będzie odwzorowaniem ℓ_G-ekstremalnym lub κ_G-ekstremalnym. Wtedy zachodzi* co najmniej jeden *z poniższych warunków:*

(i) istnieje $j \in \{1, 2\}$ takie, że $\frac{1}{R_j} f_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, lub

(ii) odwzorowanie f jest postaci

$$f = (B_1 e^{\varphi_1}, B_2 e^{\varphi_2}) \tag{1.6.1}$$

dla pewnych $B_1, B_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \cup \{1\}$ oraz $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ takich, że zachodzi jeden *z poniższych warunków:*

- $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D_G$, lub
- $\varphi(\mathbb{D}) \subset D_G$, *a* φ *jest geodezyjną zespoloną dla obszaru* D_G, *której miarą graniczną jest*
$$p_{D_G}(\bar{\lambda}h(\lambda))\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\lambda)$$
dla pewnego $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2_+$ *o liniowo niezależnych składowych* h_1, h_2.

Jeżeli $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, $f \not\equiv 0$, to mamy następujący, dobrze znany rozkład (np. [**Koo**, str. 76]):
$$f = e^{i\beta}BSF,$$
gdzie $\beta \in \mathbb{R}$, funkcja B jest iloczynem Blaschke (być może tożsamościowo równym 1) zawierającym wszystkie zera f,
$$F(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+\lambda}{\zeta-\lambda} \log|f^*(\zeta)|\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}}(\zeta)\right),\ \lambda \in \mathbb{D}$$
(funkcja $\log|f^*|$ jest całkowalna względem $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$) oraz
$$S(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+\lambda}{\zeta-\lambda} d\nu(\zeta)\right),\ \lambda \in \mathbb{D}$$
dla pewnej borelowskiej skończonej miary niedodatniej ν na $\mathbb{T}$, singularnej względem miary Lebesgue'a. Dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$ zachodzą równości
$$|B^*(\lambda)| = |S^*(\lambda)| = 1,\ |F^*(\lambda)| = |f^*(\lambda)|, \tag{1.6.2}$$
a ponadto
$$F \in H^\infty(\mathbb{D}),\ \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} |f(\lambda)| = \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} |F(\lambda)|. \tag{1.6.3}$$
Istotną rolę w dowodzie Propozycji 1.6.2 pełni następująca własność:

Obserwacja 1.6.3. *Niech* $D \subset \mathbb{C}^n$ *będzie obszarem,* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{D}$, $f(\sigma_1) \neq f(\sigma_2)$, $\sigma \in \mathbb{D}$, $X \in f'(\sigma)\cdot\mathbb{C}_*$, $X \neq 0$. *Wtedy:*

(i) f *nie jest* ℓ_D*-ekstremalne dla* $(f(\sigma_1), f(\sigma_2))$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ *takie, że* $g(\sigma_1) = f(\sigma_1)$, $g(\sigma_2) = f(\sigma_2)$ *oraz* $g(\mathbb{D}) \subset\subset D$.

(ii) f *nie jest* κ_D*-ekstremalne dla* $(f(\sigma), X)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ *takie, że* $g(\sigma) = f(\sigma)$, $g'(\sigma) = f'(\sigma)$ *oraz* $g(\mathbb{D}) \subset\subset D$.

Dowód Propozycji 1.6.2. Oznaczmy $f = (f_1, f_2)$ i rozważmy przypadek, gdy f jest ℓ_G-ekstremalne dla punktów $f(\sigma_1)$, $f(\sigma_2)$, gdzie $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{D}$, $f(\sigma_1) \neq f(\sigma_2)$ (dowód w przypadku odwzorowania κ_G-ekstremalnego jest analogiczny). Jeżeli $f_1 \equiv 0$ lub $f_2 \equiv 0$, to zachodzi przypadek (i). Załóżmy więc, że f_1, f_2 nie są tożsamościowo równe zero i rozważmy wspomniany wcześniej rozkład dla f_1, f_2:
$$f_1 = e^{i\beta_1}B_1S_1F_1,\ f_2 = e^{i\beta_2}B_2S_2F_2.$$
Niech $\varphi_j \in \mathcal{M}$, $j = 1, 2$, będzie funkcją o mierze granicznej $\log|f_j^*|\, d\mathcal{L}^{\mathbb{T}} + \nu_j$ taką, że $\operatorname{Im}\varphi_j(0) = \beta_j$. Mamy $e^{i\beta_1}S_1F_1 = e^{\varphi_1}$, $e^{i\beta_2}S_2F_2 = e^{\varphi_2}$ oraz $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{D_G}$, gdzie $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2)$.

W dalszej części wykorzystamy następującą geometryczną własność obszaru G, wynikającą z wypukłości obszaru D_G:
$$\text{jeśli } (z_1, z_2) \in \partial G, \lambda \in \mathbb{D} \text{ oraz } (z_1, \lambda z_2) \in \partial G, \text{ to } |z_1| = R_1. \tag{1.6.4}$$

Dowód Propozycji 1.6.2 przeprowadzimy w następujących dwóch krokach, które wraz z Twierdzeniem 1.1.4 i Uwagą 1.4.5 dadzą żądaną tezę.

Krok 1. Pokażemy, że φ jest geodezyjną zespoloną dla D_G lub $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D_G$, oraz że $f^*(\lambda) \in \partial G$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$.

Krok 2. Pokażemy, że jeżeli $j \in \{1,2\}$ jest takie, że $B_j S_j \notin \operatorname{Aut}(\mathbb{D}) \cup \{1\}$, to $\frac{1}{R_{3-j}} f_{3-j} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.

Dowód Kroku 1 (zob. [**Edi-Zwo**]): Przypadek $\varphi(\mathbb{D}) \subset \partial D_G$ jest jasny, zajmijmy się więc sytuacją, gdy $\varphi(\mathbb{D}) \not\subset \partial D_G$, czyli $\varphi(\mathbb{D}) \subset D_G$. Jeżeli $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)$ lub φ nie jest ℓ_{D_G}-ekstremalne dla punktów $\varphi(\sigma_1)$, $\varphi(\sigma_2)$, to istnieje $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D_G)$ takie, że $\psi(\mathbb{D}) \subset\subset D_G$ oraz $\psi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_1)$, $\psi(\sigma_2) = \varphi(\sigma_2)$. Wtedy odwzorowanie $(B_1 e^{\psi_1}, B_2 e^{\psi_2})$ przeprowadza σ_1, σ_2 w $f(\sigma_1)$, $f(\sigma_2)$ i ma obraz względnie zwarty w G, co przeczy ekstremalności f. Zatem φ jest ℓ_{D_G}-ekstremalne, więc jest geodezyjną zespoloną dla D_G. To znaczy, że $\varphi^*(\lambda) \in \partial D_G$ oraz $f^*(\lambda) \in \partial G$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$.

Dowód Kroku 2 (por. [**Kli**, Lemat 4.3.3]): Możemy przyjąć, że $j = 2$. Skoro $B_2 S_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, to $B_2 S_2$ nie jest odwzorowaniem $\ell_{\mathbb{D}}$-ekstremalnym dla żadnej pary punktów z $\mathbb{D}$, a więc istnieje $\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ takie, że $\xi(\sigma_j) = B_2(\sigma_j) S_2(\sigma_j)$, $j = 1, 2$, oraz $\xi(\mathbb{D}) \subset\subset \mathbb{D}$.

Rozważmy odwzorowanie

$$\widetilde{f} := (f_1, \widetilde{f_2}) := (f_1, e^{i\beta_2} \xi F_2).$$

Zachodzi $\widetilde{f}(\mathbb{D}) \subset \overline{G}$ oraz $\widetilde{f}(\sigma_1) = f(\sigma_1)$, $\widetilde{f}(\sigma_2) = f(\sigma_2)$, więc $\widetilde{f}(\mathbb{D}) \subset G$, a $\widetilde{f}$ jest ℓ_G-ekstremalne dla $f(\sigma_1)$, $f(\sigma_2)$. W szczególności, $\widetilde{f}^*(\lambda) \in \partial G$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, wobec poprzedniego kroku. Mamy

$$|\widetilde{f}_2^*(\lambda)| = |\xi^*(\lambda) F_2^*(\lambda)| = |\xi^*(\lambda)||f_2^*(\lambda)| < |f_2^*(\lambda)|,$$

zatem $|f_1^*(\lambda)| = R_1$ dla $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$-p.w. $\lambda \in \mathbb{T}$, wobec (1.6.4). W takim razie, kładąc

$$R := \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |f_2(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |F_2(\lambda)|$$

otrzymujemy, że bidysk $(R_1 \mathbb{D}) \times (R\mathbb{D})$ leży w G, bowiem $f(\mathbb{D}) \subset G$. Skoro $\widetilde{f}(\mathbb{D}) \subset (R_1 \mathbb{D}) \times (R\mathbb{D})$, to $\widetilde{f}$ jest odwzorowaniem $\ell_{(R_1\mathbb{D}) \times (R\mathbb{D})}$-ekstremalnym, czyli geodezyjną zespoloną w $(R_1 \mathbb{D}) \times (R\mathbb{D})$. Zatem $\frac{1}{R_1} f_1 \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ lub $\frac{1}{R} \xi F_2 \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Ale obraz tej drugiej funkcji jest względnie zwarty w $\mathbb{D}$, więc musi być $\frac{1}{R_1} f_1 \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. $\square$

ROZDZIAŁ 2

Operatory kompozycji na rozmaitościach Steina

2.1. Wprowadzenie i przedstawienie wyników

Niech Ω będzie spójną, N-wymiarową rozmaitością Steina i niech $\varphi : \Omega \to \Omega$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniami związanymi z hipercyklicznością operatora kompozycji

$$C_\varphi : \mathcal{O}(\Omega) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Przez $\mathcal{O}(\Omega)$ oznaczamy przestrzeń funkcji holomorficznych prowadzących z Ω w $\mathbb{C}$, wyposażoną w topologię zbieżności niemal jednostajnej. Przypomnijmy, że ciągły operator liniowy $T : X \to X$ na przestrzeni liniowo-topologicznej X jest *hipercykliczny*, jeżeli posiada orbitę gęstą w X. Właściwie, zajmować się będziemy pojęciami nieco ogólniejszymi: mówimy, że T jest *hipercykliczny* względem rosnącego ciągu $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$, jeżeli istnieje element $x \in X$ taki, że zbiór $\{T^{[n_l]}(x) : l \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w X, a *dziedzicznie hipercykliczny* względem ciągu $(n_l)_l$, jeżeli jest hipercykliczny względem każdego jego podciągu. Przez $T^{[n]}$ będziemy w tym rozdziale oznaczać n-krotne złożenie odwzorowania T.

Dla Ω będącej obszarem na płaszczyźnie zespolonej pełna charakteryzacja odwzorowań φ indukujących hipercykliczny operator C_φ została podana w [**Gro-Mor**] (w której autorzy rozważali ogólniejszy problem, ale wciąż na obszarach płaskich). W wyższych wymiarach tematyka ta była badana w pewnych szczególnych przypadkach, np. dla Ω będącej polidyskiem, kulą euklidesową lub całym $\mathbb{C}^N$ (zob. np. [**Ber**] i referencje w [**Gro-Mor**]), a także w przestrzeniach innych niż $\mathcal{O}(\Omega)$, np. w przestrzeniach funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych (np. [**Bon-Dom**]) lub w przestrzeniach ograniczonych funkcji holomorficznych na obszarze w $\mathbb{C}^N$ (np. [**Gor**]).

Przytoczymy teraz, w nieco zmienionej formie, wspomniany wynik charakteryzujący hipercykliczne operatory kompozycji dla obszarów na płaszczyźnie zespolonej; twierdzenie to jest nieco innym sformułowaniem [**Gro-Mor**, Twierdzenie 3.21].

Twierdzenie 2.1.1 ([**Gro-Mor**]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie rosnącym ciągiem. Wtedy:*

- *(i) Jeżeli obszar Ω jest jednospójny lub nieskończenie spójny, to operator C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest iniekcją, $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω, a ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest uciekający.*
- *(ii) Jeżeli obszar Ω jest skończenie spójny, ale niejednospójny, to operator C_φ nie jest hipercykliczny.*

Ciąg odwzorowań holomorficznych $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega, \Omega')$ pomiędzy rozmaitościami zespolonymi Ω, Ω' będziemy nazywać *uciekającym*, jeżeli dla dowolnych zbiorów zwartych $K \subset \Omega$, $L \subset \Omega'$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f_n(K) \cap L = \varnothing$, a *niemal jednostajnie* *rozbieżnym*, jeżeli dla dowolnych zbiorów zwartych $K \subset \Omega$, $L \subset \Omega'$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $f_n(K) \cap L = \varnothing$ dla wszystkich $n \geq n_0$. Natomiast obszar płaski nazwiemy *skończenie spójnym* (odp. *nieskończenie spójnym*), jeżeli jego dopełnienie $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ma skończenie wiele (odp. nieskończenie wiele) składowych spójnych. Temat obszarów Runge'go przybliżamy w Dodatku, w podrozdziale 3.1.

Przytoczone Twierdzenie 2.1.1 sformułowane jest w terminach topologicznych, ale - jak można się przekonać z jego dowodu i z rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy dla rozmaitości wyższego wymiaru - bardziej naturalnym językiem dla omawianego problemu jest język holomorficznej wypukłości, a co za tym idzie, najbardziej naturalną dziedziną badań są rozmaitości Steina. Głównym tego powodem jest twierdzenie aproksymacyjne Oki-Weila (Twierdzenie 3.1.2), które w tym rozdziale będzie naszym podstawowym narzędziem. Odnotujmy, że w sytuacji jednowymiarowej holomorficzna wypukłość daje się opisać przez warunki topologiczne przy użyciu klasycznego twierdzenia Runge'go, będącego jednowymiarową wersją twierdzenia Oki-Weila, a samo twierdzenie Runge'go było jednym z głównych narzędzi wykorzystanych w pracy [**Gro-Mor**].

Głównym wynikiem, który uzyskamy w tym rozdziale, jest Twierdzenie 2.1.2, które teraz sformułujemy. W jego dowodzie wykorzystujemy pewne idee, które wystąpiły już w pracach innych autorów, np. [**Gro-Mor**], [**Ber**].

Twierdzenie 2.1.2. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Wtedy:*

(i) Operator C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest iniekcją oraz dla każdego zwartego, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru $K \subset \Omega$ istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że $K \cap \varphi^{[n_l]}(K) = \varnothing$ i zbiór $K \cup \varphi^{[n_l]}(K)$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły.

(ii) Operator C_φ jest dziedzicznie hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest iniekcją oraz dla każdego zwartego, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru $K \subset \Omega$ istnieje l_0 takie, że dla każdego $l \geq l_0$ jest $K \cap \varphi^{[n_l]}(K) = \varnothing$, a zbiór $K \cup \varphi^{[n_l]}(K)$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły.

Więcej informacji o zbiorach $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłych można znaleźć w podrozdziale 3.1. Twierdzenie 2.1.2 może być także przedstawione w nieco innej postaci, mianowicie:

Twierdzenie 2.1.3. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Wtedy:*

(i) Operator C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest iniekcją, $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω oraz dla każdego zwartego, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru $K \subset \Omega$ istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$ są separowalne w Ω.

(ii) Operator C_φ jest dziedzicznie hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest iniekcją, $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω oraz dla każdego zwartego, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru $K \subset \Omega$ istnieje l_0 takie, że dla każdego $l \geq l_0$ zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$ są separowalne w Ω.

Dwa zwarte podzbiory $K, L \subset \Omega$ będziemy na potrzeby tego rozdziału nazywać *separowalnymi*, jeżeli istnieje funkcja $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ *oddzielająca* te zbiory, tzn. taka, że otoczki wielomianowe zbiorów $F(K)$, $F(L)$ są rozłączne. Pewne własności zbiorów separowalnych przedstawimy w podrozdziale 2.2.2.

Korzystając z Twierdzenia 2.1.3, udowodnimy następujące kryterium na dziedziczną hipercykliczność operatora C_φ:

Wniosek 2.1.4. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Załóżmy, że φ jest iniekcją, a $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω. Jeżeli istnieje punkt $z_0 \in \Omega$ taki, że*

$$\lim_{l\to\infty} c_\Omega(z_0, \varphi^{[n_l]}(z_0)) = \infty,$$

to operator C_φ jest dziedzicznie hipercykliczny względem $(n_l)_l$.

Przez $c_\Omega : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ oznaczyliśmy tutaj pseudoodległość Carathéodory'ego na Ω, tzn.

$$\begin{aligned} c_\Omega(z, w) &:= \sup\{\rho(F(z), F(w)) : F \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{D})\} \\ &= \sup\{\rho(0, F(w)) : F \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{D}), F(z) = 0\},\ z, w \in \Omega. \end{aligned}$$

Jak widzimy, w twierdzeniach dla rozmaitości wyższego wymiaru nastąpiła pewna zmiana w stosunku do twierdzenia dla obszaru na płaszczyźnie: warunek „zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$ są rozłączne dla pewnego $l \in \mathbb{N}$" (który sprowadza się do tego, że ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest uciekający), został zastąpiony warunkiem „zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$ są separowalne w Ω dla pewnego $l \in \mathbb{N}$". Jest to zmiana dość poważna, gdyż na ogół niełatwe jest rozstrzygnięcie, czy suma dwóch zwartych, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłych zbiorów jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukła, i zarazem konieczna, gdyż pierwszy z wymienionych warunków przestaje być wystarczający dla hipercykliczności już w bardzo prostej sytuacji, gdy $\Omega = \mathbb{D}_*$, $\varphi(z) = \frac{1}{2}z$, lub ogólniej: $\Omega = \mathbb{D}_* \times \mathbb{D}^{N-1}$, $N \geq 1$, przy takim samym φ. Niemniej jednak okazuje się, że w pewnej klasie rozmaitości Steina hipercykliczność operatora C_φ mimo wszystko daje się opisać przy pomocy tego pierwszego warunku. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.1.5. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, w której istnieje punkt $z_0 \in \Omega$ taki, że*

$$\lim_{\Omega \ni z \to \infty_\Omega} c_\Omega(z, z_0) = \infty,$$

niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Wtedy:

(i) C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest iniekcją, $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω, a ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest uciekający.

(ii) C_φ jest dziedzicznie hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest iniekcją, $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω, a ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest niemal jednostajnie rozbieżny.

Przez ∞_Ω oznaczyliśmy tutaj punkt „dodany" przy klasycznym, jednopunktowym uzwarceniu $\Omega_\infty := \Omega \cup \{\infty_\Omega\}$ lokalnie zwartej przestrzeni topologicznej Ω. Warunek

$$\lim_{\Omega \ni z \to \infty_\Omega} c_\Omega(z, z_0) = \infty$$

(który, jeśli zachodzi dla pewnego z_0, to wobec nierówności trójkąta, zachodzi dla wszystkich) oznacza, iż wszystkie kule względem pseudoodległości Carathéodory'ego są względnie zwarte w Ω. Jest ono spełnione np. przez ograniczone obszary wypukłe, obszary ściśle pseudowypukłe, itd.

W podrozdziale 2.3 wykażemy jeszcze twierdzenie mówiące o tym, że w pewnych klasach rozmaitości Steina hipercykliczność operatora C_φ pociąga za sobą jego dziedziczną hipercykliczność. Jednakże nie wiemy, czy własność ta zachodzi we wszystkich spójnych rozmaitościach Steina.

Twierdzenie 2.1.6. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina taką, że zachodzi* co najmniej jeden *z poniższych warunków:*

(i) istnieje punkt $z_0 \in \Omega$ taki, że $\lim_{\Omega \ni z \to \infty_\Omega} c_\Omega(z, z_0) = \infty$, lub

(ii) Ω jest jednospójnym lub nieskończenie spójnym obszarem w $\mathbb{C}$.

Wtedy, jeżeli $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ jest takie, że operator C_φ jest hipercykliczny, to jest on dziedzicznie hipercykliczny.

2.2. Podstawowe pojęcia i definicje

W tym podrozdziale przypomnimy pewne pojęcia i klasyczne twierdzenia związane z operatorami hipercyklicznymi, obszarami Runge'go i zbiorami holomorficznie wypukłymi.

2.2.1. Operatory hipercykliczne. Fakty przytoczone w tym podrozdziale, oraz wiele innych, można znaleźć w pracy przeglądowej [**Gro99**]. Rozważane tutaj przestrzenie wektorowe leżą nad ciałem $\mathbb{C}$.

Definicja 2.2.1. Niech $T_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, będą ciągłymi odwzorowaniami na przestrzeni topologicznej X.

(i) Mówimy, że ciąg $(T_n)_n$ jest *topologicznie tranzytywny*, jeśli dla dowolnych niepustych, otwartych podzbiorów $U, V \subset X$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $T_n(U) \cap V \neq \varnothing$.

(ii) Element $x \in X$ nazywamy *elementem uniwersalnym* dla $(T_n)_n$, jeżeli zbiór $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w zbiorze X.

(iii) Mówimy, że ciąg $(T_n)_n$ jest *uniwersalny*, jeżeli ma chociaż jeden element uniwersalny.

Definicja 2.2.2. Niech $T : X \to X$ będzie ciągłym operatorem liniowym na przestrzeni liniowo-topologicznej X, a $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ niech będzie ciągiem rosnącym.

(i) Mówimy, że operator T jest *hipercykliczny* względem $(n_l)_l$, jeżeli ciąg $(T^{[n_l]})_l$ jest uniwersalny.

(ii) Mówimy, że operator T jest *dziedzicznie hipercykliczny* względem $(n_l)_l$, jeśli T jest hipercykliczny względem każdego podciągu ciągu $(n_l)_l$.

(iii) Operator T nazywamy krótko *hipercyklicznym* (odp. *dziedzicznie hipercyklicznym*), jeżeli jest on hipercykliczny (odp. dziedzicznie hipercykliczny) względem pełnego ciągu liczb naturalnych $(n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(iv) Jeżeli T jest hipercykliczny, to każdy uniwersalny element ciągu $(T^{[n]})_n$ nazywamy *wektorem hipercyklicznym.*

Wprost z powyższej definicji wynika, że zachodzą następujące implikacje: T jest dziedzicznie hipercykliczny $\Rightarrow$ T jest dziedzicznie hipercykliczny względem $(n_l)_l$ $\Rightarrow$ T jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ $\Rightarrow$ T jest hipercykliczny.

Odnotujmy, że u niektórych autorów operatory dziedzicznie hipercykliczne (w sensie punktu (iii)) występują pod nazwą operatorów *silnie dziedzicznie hipercyklicznych*, podczas gdy określenie „dziedzicznie hipercykliczne" oznacza tam operatory dziedzicznie hipercykliczne względem *pewnego* rosnącego ciągu liczb naturalnych.

Przypomnimy teraz dwa klasyczne wyniki dotyczące własności rodzin uniwersalnych. Autorem pierwszego z nich jest Grosse-Erdmann (zob. [**Gro87**, Twierdzenie 1.2.2] lub [**Gro99**, Twierdzenie 1]), natomiast drugiego A. Peris (zob. np. [**Gro99**, Propozycja 1]).

Twierdzenie 2.2.3. *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Frécheta. Ciąg $(T_n)_n$ ciągłych odwzorowań $T_n : X \to X$ jest topologicznie tranzytywny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego elementów uniwersalnych jest gęsty w X.*

Ponadto, w takiej sytuacji zbiór elementów uniwersalnych ciągu $(T_n)_n$ jest gęstym podzbiorem X typu $\mathcal{G}_\delta$.

Twierdzenie 2.2.4. *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Frécheta i niech $(T_n)_n$ będzie ciągiem ciągłych odwzorowań $T_n : X \to X$ takich, że obraz każdego z nich jest gęsty w X. Załóżmy, że spełniony jest warunek:*

$$T_n \circ T_m = T_m \circ T_n \quad \text{dla } m, n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy zbiór elementów uniwersalnych ciągu $(T_n)_n$ jest pusty lub gęsty w X.

Z powyższych twierdzeń możemy wyciągnąć następujący wniosek, który będziemy bezpośrednio stosować w tym rozdziale:

Wniosek 2.2.5. *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Frécheta, niech $T : X \to X$ będzie ciągłym operatorem liniowym, i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym.*

Operator T jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(T^{[n_l]})_l$ jest topologicznie tranzytywny. W takiej sytuacji zbiór elementów uniwersalnych ciągu $(T^{[n_l]})_l$ jest gęstym podzbiorem X typu $\mathcal{G}_\delta$.

2.2.2. Otoczki holomorficzne. Udowodnimy teraz pewne własności otoczek holomorficznych zbiorów zwartych, z których będziemy korzystać w dalszej części tego rozdziału. Definicję i pewne podstawowe fakty związane z tym pojęciem prezentujemy w Dodatku, w podrozdziale 3.1.

Dla obszarów płaskich zachodzi następujące twierdzenie (zob. np. [**Hor**, Twierdzenie 1.3.3]):

Twierdzenie 2.2.6. *Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest obszarem, a $K \subset \Omega$ jest zbiorem zwartym, to zbiór $\widehat{K}_\Omega$ jest sumą zbioru K oraz tych składowych spójnych zbioru $\Omega \setminus K$, które są względnie zwarte w Ω.*

Wniosek 2.2.7. *Jeżeli zbiory $K, L \subset \mathbb{C}$ są zwarte oraz $\widehat{K} \cap \widehat{L} = \varnothing$, to zachodzi równość $\widehat{K \cup L} = \widehat{K} \cup \widehat{L}$.*

Dowód Wniosku 2.2.7. Oprócz Twierdzenia 2.2.6 wykorzystamy tutaj pewien topologiczny fakt, znany jako twierdzenie Janiszewskiego (zob. np. [**New**, str. 110]): jeżeli zbiory $A, B \subset \mathbb{C}$ są zwarte, a ich przecięcie jest puste lub spójne, to dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$, jeśli z, w nie są rozdzielone ani przez zbiór A, ani przez zbiór B, to nie są rozdzielone przez zbiór $A \cup B$. W tym dowodzie dwa punkty $z, w \in \mathbb{C} \setminus C$ będziemy nazywać *rozdzielonymi* przez zbiór zwarty $C \subset \mathbb{C}$, jeżeli nie leżą w tej samej składowej spójnej zbioru $\mathbb{C} \setminus C$.

Niech K, L będą jak w założeniach. Bez straty ogólności możemy założyć, że $K = \widehat{K}$, $L = \widehat{L}$. To oznacza, że zbiory $\mathbb{C} \setminus K$, $\mathbb{C} \setminus L$ są spójne. Wobec twierdzenia Janiszewskiego, zbiór $\mathbb{C} \setminus (K \cup L)$ także jest spójny. Teraz pożądana równość wynika wprost z Twierdzenia 2.2.6, $\square$

Warto podkreślić, że równość ta zachodzi **dla otoczek wielomianowych na płaszczyźnie zespolonej**, natomiast w ogólności jest fałszywa, nawet dla otoczek holomorficznych dla innych obszarów płaskich czy otoczek wielomianowych w $\mathbb{C}^N$ przy $N \geq 2$. W tej drugiej sytuacji równość nie zachodzi np. dla zbiorów $K = f(\mathbb{T})$, $L = f(2\mathbb{T})$, gdzie $f(\lambda) = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}_*$, bowiem

$$\widehat{K} \cup \widehat{L} = K \cup L \subsetneq f((\mathbb{T} \cup 2\mathbb{T})\widehat{\ }_{\mathbb{C}_*}) \subset (f(\mathbb{T} \cup 2\mathbb{T}))\widehat{\ } = (K \cup L)\widehat{\ }$$

(można sprawdzić, że zbiory K, L są wielomianowo wypukłe w $\mathbb{C}^2$).

Definicja 2.2.8. Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina. Zbiory zwarte $K, L \subset \Omega$ nazywamy *separowalnymi* w Ω, jeżeli istnieje funkcja $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ *oddzielająca* K i L, tzn. spełniająca warunek

$$\widehat{F(K)} \cap \widehat{F(L)} = \varnothing.$$

Jeżeli K, L są separowalne w Ω, to zachodzi

$$\widehat{K}_\Omega \cap \widehat{L}_\Omega = \varnothing,$$

gdyż $\widehat{K}_\Omega \subset F^{-1}(\widehat{F(K)})$ oraz $\widehat{L}_\Omega \subset F^{-1}(\widehat{F(L)})$. Jednak w ogólności warunek ten nie wystarcza do tego, aby K i L były separowalne. Wyjątkiem jest przypadek płaszczyzny zespolonej: zbiory zwarte $K, L \subset \mathbb{C}$ są separowalne w $\mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{K} \cap \widehat{L} = \varnothing$; własność ta wynika z Wniosku 2.2.7 i Lematu 2.2.9 (który za chwilę udowodnimy).

Podamy teraz dwa lematy przedstawiające pewne naturalne własności otoczki holomorficznej sumy dwóch zbiorów zwartych. W przypadku otoczek wielomianowych w $\mathbb{C}^N$ można znaleźć te lematy (w nieco ogólniejszej formie) np. w książce [**Sto**] (Twierdzenie 1.6.19 i Wniosek 1.5.4), jednakże w przypadku ogólnym nie udało nam się znaleźć ich w formie odpowiedniej dla naszych zastosowań, dlatego poniżej prezentujemy szkice dowodów.

Lemat 2.2.9. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina i niech $K, L \subset \Omega$ będą zbiorami zwartymi. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) zbiory K, L są separowalne w Ω,

(ii) istnieją otwarte i rozłączne zbiory $U, V \subset \Omega$ takie, że $\widehat{K}_\Omega \subset U$, $\widehat{L}_\Omega \subset V$ oraz $(K \cup L)\widehat{\ }_\Omega \subset U \cup V$,

(iii) zachodzi $\widehat{K}_\Omega \cap \widehat{L}_\Omega = \varnothing$ oraz $(K \cup L)\widehat{\ }_\Omega = \widehat{K}_\Omega \cup \widehat{L}_\Omega$.

W szczególności, jeśli K, L są rozłączne i $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłe, to suma $K \cup L$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy K i L są separowalne w Ω.

Jak zobaczymy w poniższym dowodzie, jeżeli K, L są separowalne, to dla danego $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ można znaleźć funkcję oddzielającą $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ taką, że $F(K) \subset \epsilon\mathbb{D}$ oraz $F(L) \subset 1 + \epsilon\mathbb{D}$.

Szkic dowodu. (iii) $\Rightarrow$ (i): Rozważmy funkcję f równą 0 w pewnym otoczeniu zbioru $\widehat{K}_\Omega$ i równą 1 w pewnym otoczeniu zbioru $\widehat{L}_\Omega$. Wobec (iii), funkcja ta jest holomorficzna w otoczeniu $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru $(K \cup L)\widehat{\ }_\Omega$, więc na mocy Twierdzenia Oki-Weila możemy ją aproksymować jednostajnie na tym zbiorze funkcjami holomorficznymi na Ω. Zatem istnieje funkcja $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $|F - f| < \frac{1}{2}$ na $(K \cup L)\widehat{\ }_\Omega$ i funkcja ta oddziela zbiory K, L.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Połóżmy $U := F^{-1}(U_0), V := F^{-1}(V_0)$, gdzie U_0, V_0 są pewnymi rozłącznymi otoczeniami otwartymi zbiorów $(F(K))\widehat{\ }$, $(F(L))\widehat{\ }$ (odpowiednio). Z warunku $(F(K))\widehat{\ } \cap (F(L))\widehat{\ } = \varnothing$ wynika, że $(F(K) \cup F(L))\widehat{\ } = (F(K))\widehat{\ } \cup (F(L))\widehat{\ }$. To pociąga za sobą $(K \cup L)\widehat{\ }_\Omega \subset F^{-1}((F(K \cup L))\widehat{\ }) \subset U \cup V$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Inkluzja z prawej do lewej strony jest natychmiastowa. Zajmijmy się wykazaniem inkluzji przeciwnej. Ustalmy $z_0 \in I := (K \cup L)\widehat{\ }_\Omega$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $z_0 \in U$. Pokażemy, że $z_0 \in \widehat{K}_\Omega$. Z warunku (ii) wynika, że funkcja charakterystyczna χ_U zbioru U, zawężona do zbioru $U \cup V$, jest holomorficzna w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru I, więc istnieje ciąg $(g_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega)$ zbieżny jednostajnie do χ_U na I. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ciąg $(fg_n)_n$ zmierza jednostajnie do $f\chi_U$ na I, więc

$$|f(z_0)| = \lim_{n\to\infty} |f(z_0)g_n(z_0)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K\cup L} |f(z)g_n(z)| = \sup_{z\in K} |f(z)|.$$

To oznacza, że $z_0 \in \widehat{K}_\Omega$. Dowód jest zakończony. □

Lemat 2.2.10. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina i niech $K, L \subset \Omega$ będą zbiorami zwartymi. Jeżeli $K \cap L = \varnothing$, a zbiór $K \cup L$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły, to zbiory K, L są $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłe.*

Dowód. Jak w poprzednim dowodzie, istnieje funkcja $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $|F| < \frac{1}{2}$ na K i $|F - 1| < \frac{1}{2}$ na L. Mamy $\widehat{K}_\Omega \subset K \cup L$ oraz

$$\widehat{K}_\Omega \cap L \subset F^{-1}\left(\widehat{F(K)}\right) \cap F^{-1}(F(L)) \subset F^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathbb{D}\right) \cap F^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\mathbb{D}\right) = \varnothing,$$

więc $\widehat{K}_\Omega \subset K$. □

2.3. Warunki konieczne i wystarczające dla hipercykliczności C_φ

Zaczniemy od sformułowania warunków koniecznych. Warunki te lub do nich podobne pojawiały się już w innych pracach o zbliżonej tematyce, wspomnianych w podrozdziale 2.1.

Propozycja 2.3.1. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Załóżmy, że operator C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$. Wtedy:*

(i) odwzorowanie φ jest iniekcją,

(ii) obszar $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω,

(iii) ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ *jest uciekający.*

Uwaga 2.3.2. Odnotujmy, że z warunku (i) wynika, że φ jest biholomorfizmem na obraz. To oznacza, że $\varphi(\Omega)$ jest obszarem w Ω, a ze strukturą indukowaną z Ω jest rozmaitością Steina. Z warunków (i) i (ii) wynika, że dla każdego $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ zbiór $\varphi(K)$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły (zob. Twierdzenie 3.1.3). W szczególności, dla $n \in \mathbb{N}$ zbiór $\varphi^{[n]}(K)$ także jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły.

Dowód Propozycji 2.3.1. Niech f będzie elementem uniwersalnym dla ciągu $(C_{\varphi^{[n_l]}})_l$. Pierwszy punkt wynika z tego, że $\mathcal{O}(\Omega)$ rozdziela punkty Ω. By wykazać drugi, musimy udowodnić, że funkcje $g|_{\varphi(\Omega)}, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, są gęste w $\mathcal{O}(\varphi(\Omega))$. Jeżeli $h \in \mathcal{O}(\varphi(\Omega))$, to $h \circ \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$, więc istnieje ciąg $(l_k)_k$ taki, że $f \circ \varphi^{[n_{l_k}]} \to h \circ \varphi$ niemal jednostajnie na Ω. Zatem $f \circ \varphi^{[n_{l_k}-1]} \to h$ niemal jednostajnie na $\varphi(\Omega)$, ponieważ φ jest homeomorfizmem na obraz.

Wykażemy teraz trzeci punkt. Ustalmy zwarty zbiór $K \subset \Omega$. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ istnieje l_j takie, że $|f \circ \varphi^{[n_{l_j}]} - j| \leq \frac{1}{j}$ na K. Z tego wynika, że

$$\inf_{z \in \varphi^{[n_{l_j}]}(K)} |f(z)| = \inf_{z \in K} |f \circ \varphi^{[n_{l_j}]}(z)| \geq j - \frac{1}{j} > \sup_{z \in K} |f(z)|$$

dla odpowiednio dużych j. To oznacza, że $\varphi^{[n_{l_j}]}(K) \cap K = \varnothing$. □

Warunki konieczne dla dziedzicznej hipercykliczności są bardzo podobne:

Propozycja 2.3.3. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Załóżmy, że operator C_φ jest dziedzicznie hipercykliczny względem $(n_l)_l$. Wtedy:*

(i) odwzorowanie φ jest iniekcją,
(ii) obszar $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω,
(iii) ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest niemal jednostajnie rozbieżny.

Dowód. Pierwsze dwa punkty wynikają z poprzedniej propozycji. Ostatni wynika z faktu, iż ciąg odwzorowań holomorficznych jest niemal jednostajnie rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest uciekający. □

Za chwilę udowodnimy Twierdzenia 2.1.2 i 2.1.3. Wykorzystamy do tego równoważność hipercykliczności i topologicznej tranzytywności operatora C_φ (Wniosek 2.2.5), i badać będziemy właśnie tę ostatnią własność. Podobny argument wykorzystano w sytuacji jednowymiarowej w pracy [**Gro-Mor**]. Następująca obserwacja przedstawia, co dokładnie znaczy topologiczna tranzytywność operatora C_φ:

Obserwacja 2.3.4. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech odwzorowanie $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ będzie iniektywne i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym.*

Ciąg odwzorowań $(C_{\varphi^{[n_l]}})_l$ jest topologicznie tranzytywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\epsilon > 0$, zwartego, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru $K \subset \Omega$ i funkcji $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ istnieją $l \in \mathbb{N}$ oraz $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że

$$|f - g| < \epsilon \text{ na } K, \ |f - h \circ \varphi^{[-n_l]}| < \epsilon \text{ na } \varphi^{[n_l]}(K). \tag{2.3.1}$$

Dowód. Baza topologii przestrzeni $\mathcal{O}(\Omega)$ składa się ze zbiorów

$$W_{f_0,K,\epsilon} := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : |f - f_0| < \epsilon \text{ na } K\},$$

gdzie $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\epsilon > 0$, a zbiór $K \subset \Omega$ jest zwarty. W takim razie, ciąg $({C_\varphi}^{[n_l]})_l$ jest topologicznie tranzytywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\epsilon > 0$, zbioru zwartego $K \subset \Omega$ i funkcji $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ istnieją $l \in \mathbb{N}$ oraz $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że

$$|f - g| < \epsilon \text{ na } K, \ |f \circ \varphi^{[n_l]} - h| < \epsilon \text{ na } K.$$

Skoro Ω jest przeliczalna w nieskończoności, to jest wyczerpywalna $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłymi zbiorami zwartymi (zob. podrozdział 3.1), więc możemy w powyższym warunku rozważać jedynie takie zbiory K. Z iniektywności odwzorowania φ wynika, że powyższy warunek jest równoważny warunkowi (2.3.1). □

Dowód Twierdzenia 2.1.2. Zaczniemy od punktu (i). Załóżmy, że operator C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$. Wtedy zachodzi warunek (2.3.1). Ustalmy zwarty, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły zbiór $K \subset \Omega$. Z Propozycji 2.3.1 i Uwagi 2.3.2 wynika, że zbiór $\varphi^{[n_l]}(K)$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły. Stosując warunek (2.3.1) dla $g \equiv 0$, $h \equiv 1$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ otrzymujemy, że dla pewnych $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}$ zachodzi $f(K) \subset \frac{1}{2}\mathbb{D}$ oraz $f(\varphi^{[n_l]}(K)) \subset 1 + \frac{1}{2}\mathbb{D}$. To oznacza, że zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$ są separowalne w Ω, co na mocy Lematu 2.2.9 pociąga za sobą $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłość zbioru $K \cup \varphi^{[n_l]}(K)$.

Załóżmy teraz, że zachodzi warunek podany w punkcie (i) Twierdzenia 2.1.2. Pokażemy, że zachodzi (2.3.1), co pociągnie za sobą hipercykliczność operatora C_φ względem ciągu $(n_l)_l$. Ustalmy zwarty, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły zbiór $K \subset \Omega$, liczbę $\epsilon > 0$ i funkcje $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$. Weźmy l takie, że $K \cap \varphi^{[n_l]}(K) = \varnothing$, a zbiór $I := K \cup \varphi^{[n_l]}(K)$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły. Funkcja $\widetilde{f}$ zdefiniowana jako g w otoczeniu K i jako $h \circ \varphi^{[-n_l]}$ w otoczeniu $\varphi^{[n_l]}(K)$ jest dobrze określoną funkcją holomorficzną w otoczeniu $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru I. Na mocy twierdzenia Oki-Weila możemy ją aproksymować jednostajnie na I funkcjami z rodziny $\mathcal{O}(\Omega)$. To oznacza, że istnieje $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $|f - \widetilde{f}| < \epsilon$ na I, czyli $|f - g| < \epsilon$ na K oraz $|f - h \circ \varphi^{[-n_l]}| < \epsilon$ na $\varphi^{[n_l]}(K)$, a więc spełniony jest warunek (2.3.1).

Punkt (ii) Twierdzenia 2.1.2 jest natychmiastową konsekwencją punktu (i), ponieważ warunek po prawej stronie (ii) nie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(n_l)_l$ ma podciąg niespełniający warunku z punktu (i). □

Dowód Twierdzenia 2.1.3. To, że warunki w każdym z punktów są wystarczające dla hipercykliczności lub dziedzicznej hipercykliczności (odpowiednio), wynika z Twierdzenia 2.1.2: jeśli zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$ są separowalne w Ω, to wobec Lematu 2.2.9 ich suma jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukła (zbiór $\varphi^{[n_l]}(K)$ jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły, jeśli K taki jest, ponieważ $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω, a φ jest iniekcją, czyli biholomorfizmem na obraz). Z kolei to, że warunki w obu punktach są konieczne, wynika od razu z Twierdzenia 2.1.2, Lematu 2.2.9 oraz warunków koniecznych sformułowanych w Propozycjach 2.3.1, 2.3.3. □

Właściwie, z Twierdzenia 2.1.3 wynika, że (dla iniektywnego odwzorowania φ o obrazie będącym obszarem Runge'go względem Ω) dla hipercykliczności C_φ względem $(n_l)_l$ wystarczy udowodnić warunek (2.3.1) dla $g \equiv 0$, $h \equiv 1$ i $\epsilon = \frac{1}{2}$, tzn.

udowodnić, że dla każdego zwartego, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłego zbioru $K \subset \Omega$ istnieją $l \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że

$$|f| < \tfrac{1}{2} \text{ na } K, \ |f-1| < \tfrac{1}{2} \text{ na } \varphi^{[n_l]}(K).$$

Dowód Wniosku 2.1.4. Każdy podciąg ciągu $(n_l)_l$ spełnia te same założenia, więc wystarczy wykazać hipercykliczność C_φ względem $(n_l)_l$. Z założeń oraz definicji c_Ω wynika, że istnieje ciąg $(F_l)_l \subset \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{D})$ taki, że $F_l(z_0) = 0$ oraz $F_l(\varphi^{[n_l]}(z_0)) \to 1$, gdy $l \to \infty$. Korzystając z twierdzenia Montela i przechodząc do podciągu możemy założyć, że $F_l \circ \varphi^{[n_l]} \to G$ oraz $F_l \to H$ niemal jednostajnie na Ω dla pewnych funkcji $G, H \in \mathcal{O}(\Omega)$ takich, że $G(\Omega), H(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Skoro $G(z_0) = 1$ i $H(z_0) = 0$, na mocy zasady maksimum mamy $G \equiv 1$ i $H(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Ustalmy zwarty, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły zbiór $K \subset \Omega$. Istnieje liczba $\alpha \in (0,1)$ taka, że $H(K) \subset \alpha\mathbb{D}$, więc dla odpowiednio dużych l mamy $F_l(K) \subset \alpha\mathbb{D}$. Z drugiej strony, $F_l(\varphi^{[n_l]}(K)) \subset 1 + (1-\alpha)\mathbb{D}$ dla dużych l, ponieważ $F_l \circ \varphi^{[n_l]} \to 1$. Zatem dla dużych l funkcja F_l oddziela zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$. Teza wynika teraz z Twierdzenia 2.1.3. $\square$

Udowodnimy teraz Twierdzenie 2.1.5. Odnotujmy, że warunki z tego twierdzenia to po prostu koniunkcje (odpowiednio) warunków (i), (ii), (iii) z Propozycji 2.3.1 oraz warunków (i), (ii), (iii) z Propozycji 2.3.3.

Dowód Twierdzenia 2.1.5. Wykażemy jedynie pierwszą część twierdzenia, gdyż dowód drugiej jest niemal identyczny. Załóżmy, że φ jest iniekcją, $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω, a ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest uciekający. Przechodząc ewentualnie do podciągu możemy założyć, że ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest niemal jednostajnie rozbieżny w $\mathcal{O}(\Omega, \Omega)$. Wtedy $\varphi^{[n_l]}(z_0) \to \infty_\Omega$, czyli $c_\Omega(z_0, \varphi^{[n_l]}(z_0)) \to \infty$, a więc teza wynika z Wniosku 2.1.4. $\square$

Obserwacja 2.3.5. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Wtedy operator C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(n_l)_l$ ma podciąg, względem którego jest on dziedzicznie hipercykliczny.*

Nieco podobna obserwacja pojawiła się w [**Gro-Mor**, Sekcja 3.6]. Niemniej jednak, jak mówi Twierdzenie 2.1.6, w pewnych Ω zachodzi mocniejsza własność.

Dowód. Załóżmy, że C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ i ustalmy ciąg $(K_\mu)_\mu$ zbiorów zwartych i $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłych, wyczerpujący Ω (zob. Definicja 3.1.1 (i)). Z Twierdzenia 2.1.3 wynika, że dla każdego $\mu \in \mathbb{N}$ istnieje l_μ takie, że zbiory K_μ, $\varphi^{[n_{l_\mu}]}(K_\mu)$ są separowalne w Ω. Bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg $(l_\mu)_\mu$ jest rosnący. Zauważmy, że operator C_φ jest dziedzicznie hipercykliczny względem $(n_{l_\mu})_\mu$. Rzeczywiście, jeśli zbiór $K \subset \Omega$ jest zwarty, to istnieje μ_0 takie, że $K \subset K_\mu$ dla każdego $\mu \geq \mu_0$, co oznacza, że zbiory K, $\varphi^{[n_{l_\mu}]}(K)$ są separowalne w Ω. $\square$

Za chwilę udowodnimy Twierdzenie 2.1.6. Wcześniej jednak, przypomnijmy następujący fakt (zob. [**Aba91**, Twierdzenie 1.1] lub [**Aba89**, Twierdzenie 2.4.3]):

Twierdzenie 2.3.6. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością typu taut i niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$. Jeżeli ciąg $(\varphi^{[n]})_n$ nie jest niemal jednostajnie rozbieżny w $\mathcal{O}(\Omega, \Omega)$, to jest względnie zwarty w $\mathcal{O}(\Omega, \Omega)$.*

Dowód Twierdzenia 2.1.6. Załóżmy, że $\Omega \neq \mathbb{C}$. Jeśli Ω spełnia założenie (i), to Ω jest typu taut (zob. np. Propozycja 3.2.3), a jeśli Ω spełnia założenie (ii), to zbiór $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ma więcej niż jeden element, a więc Ω także jest typu taut (zob. [**Jar-Pfl**, Uwaga 3.2.3 (d)]). Tak więc Ω jest typu taut.

Weźmy odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \Omega \to \Omega$ takie, że operator C_φ jest hipercykliczny (względem pełnego ciągu liczb naturalnych). Skoro ciąg $(\varphi^{[n]})_n$ jest uciekający, to zbiór jego wyrazów nie może być relatywnie zwarty w $\mathcal{O}(\Omega, \Omega)$. Wobec Twierdzenia 2.3.6, ciąg ten jest niemal jednostajnie rozbieżny i w konsekwencji, każdy jego podciąg jest uciekający. Korzystając z Twierdzenia 2.1.1 lub 2.1.5 otrzymujemy, że operator C_φ jest hipercykliczny względem każdego rosnącego ciągu liczb naturalnych. Innymi słowy, operator C_φ jest dziedzicznie hipercykliczny.

Pozostał do rozważenia przypadek $\Omega = \mathbb{C}$. Weźmy $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, dla którego operator C_φ jest hipercykliczny. Z twierdzenia Picarda wynika, że zbiór $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{C})$ jest co najwyżej jednoelementowy. Ale skoro φ jest homeomorfizmem na obraz, musi zachodzić równość $\varphi(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, a więc φ jest automorfizmem płaszczyzny zespolonej. To oznacza, że φ jest odwzorowaniem afinicznym. Teraz wystarczy skorzystać z [**Ber**, Twierdzenie 3.1], które mówi (w szczególności), że dla φ będącego afinicznym endomorfizmem $\mathbb{C}^N$, operator $C_\varphi : \mathcal{O}(\mathbb{C}^N) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ jest hipercykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest dziedzicznie hipercykliczny. □

Uwaga 2.3.7. Podobne rozumowanie jak w dowodzie Twierdzenia 2.1.6 można przeprowadzić dla każdej spójnej rozmaitości Steina Ω będącej typu taut i posiadającej następującą własność: dla każdego odwzorowania $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i każdego rosnącego ciągu $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$, jeśli φ jest iniekcją, $\varphi(\Omega)$ jest obszarem Runge'go względem Ω, a ciąg $(\varphi^{[n_l]})_l$ jest uciekający, to operator C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$. Własność ta znaczy dokładnie tyle, że warunki (i), (ii), (iii) z Propozycji 2.3.3 są wystarczające dla hipercykliczności C_φ w Ω, i ma ją każda Ω spełniająca założenia Twierdzenia 2.1.6.

Dla liczby naturalnej M rozważmy operator

$$C_{\varphi,M} : \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$$

(Ω dalej jest spójną rozmaitością Steina). Przestrzeń $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ (z topologią zbieżności niemal jednostajnej) możemy utożsamić z przestrzenią $\mathcal{O}(\Omega)^M$, a operator $C_{\varphi,M}$ z operatorem

$$C_\varphi \times \ldots \times C_\varphi : \mathcal{O}(\Omega)^M \to \mathcal{O}(\Omega)^M.$$

Poniżej, przeprowadzając podobne rozumowanie jak w dowodzie Twierdzenia 2.1.2 pokażemy, że $C_{\varphi,M}$ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_φ jest taki (Propozycja 2.3.8). W takiej sytuacji zbiór elementów uniwersalnych ciągu $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l$ jest gęstym podzbiorem $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ typu $\mathcal{G}_\delta$. Wykorzystując pewne znane własności rozmaitości Steina można pokazać, iż dla odpowiedniego M „wiele" spośród elementów uniwersalnych ciągu $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l$ ma pewne dodatkowe własności (Propozycja 2.3.9). Słowo „wiele" oznacza tutaj, że elementy te tworzą zbiór zawierający gęsty podzbiór $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ typu $\mathcal{G}_\delta$.

Propozycja 2.3.8. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym.*

Wtedy dla każdego $M \geq 1$ operator $C_{\varphi,M}$ jest hipercykliczny (odp. dziedzicznie hipercykliczny) względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator C_φ jest hipercykliczny (odp. dziedzicznie hipercykliczny) względem $(n_l)_l$.

Dowód. Naturalnie, wystarczy rozważyć jedynie przypadek hipercykliczności. Jeżeli $C_{\varphi,M}$ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$, to C_φ także, bowiem każdy uniwersalny element $(f_1, \dots, f_M)$ dla ciągu $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l$ ma składowe $f_1, \dots, f_M$ będące elementami uniwersalnymi dla ciągu $({C_\varphi}^{[n_l]})_l$. By wykazać odwrotną implikację, załóżmy, że C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$. Oczywiście, odwzorowanie φ jest wtedy iniekcją. Wobec Wniosku 2.2.5 wystarczy pokazać, że ciąg $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l)$ jest topologicznie tranzytywny. Bazę topologii przestrzeni $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ tworzą zbiory postaci

$$W_{g_1,\dots,g_M,K,\epsilon} := \{(f_1, \dots, f_M) \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M) : |f_j - g_j| < \epsilon \text{ na } K, j = 1, \dots, M\},$$

gdzie $g_1, \dots, g_M \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\epsilon > 0$, a zbiór $K \subset \Omega$ jest zwarty.

Ustalmy liczbę $\epsilon > 0$, zwarty, $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukły zbiór $K \subset \Omega$ i funkcje $g_1, \dots, g_M$, $h_1, \dots, h_M \in \mathcal{O}(\Omega)$. Z Twierdzenia 2.1.2 wynika, że istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że zbiory K, $\varphi^{[n_l]}(K)$ są rozłączne, a ich suma jest $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukła. Zauważmy, że istnieją funkcje $f_1, \dots, f_M \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że dla $j = 1, \dots, M$ zachodzi

$$|f_j - g_j| < \epsilon \text{ na } K, \ |f_j - h_j \circ \varphi^{[-n_l]}| < \epsilon \text{ na } \varphi^{[n_l]}(K). \tag{2.3.2}$$

Istotnie, podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.1.2, jest to konsekwencją twierdzenia Oki-Weila: funkcje $\widetilde{f}_j$ zdefiniowane jako g_j w pewnym otoczeniu zbioru K i jako $h_j \circ \varphi^{[-n_l]}$ w pewnym otoczeniu zbioru $\varphi^{[n_l]}(K)$ mogą być aproksymowane na $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłym zbiorze $K \cup \varphi^{[n_l]}(K)$ przez funkcje holomorficzne na Ω. Z warunku (2.3.2) wynika z kolei, że

$$|f_j - g_j| < \epsilon \text{ na } K, \ |f_j \circ \varphi^{[n_l]} - h_j| < \epsilon \text{ na } K,$$

czyli

$${C_{\varphi,M}}^{[n_l]}(W_{g_1,\dots,g_M,K,\epsilon}) \cap W_{h_1,\dots,h_M,K,\epsilon} \neq \varnothing,$$

a to oznacza, że ciąg $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l)$ jest topologicznie tranzytywny. □

Poniższej propozycji używamy następujących pojęć: odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ nazywamy tutaj *regularnym*, jeśli jego pochodna w każdym punkcie jest monomorfizmem, a *prawie właściwym*, jeśli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}^M$ każda składowa spójna zbioru $f^{-1}(K)$ jest zwarta.

Propozycja 2.3.9. *Niech Ω będzie spójną N-wymiarową rozmaitością Steina, niech $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega)$ i niech $(n_l)_l \subset \mathbb{N}$ będzie ciągiem rosnącym. Załóżmy, że C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$. Wtedy:*

(i) Jeżeli $M \geq N$, to zbiór wszystkich prawie właściwych odwzorowań holomorficznych $f : \Omega \to \mathbb{C}^M$ będących elementami uniwersalnymi ciągu $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l$, zawiera gęsty podzbiór $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ typu $\mathcal{G}_\delta$.

(ii) Jeżeli $M \geq 2N$, to zbiór wszystkich regularnych, prawie właściwych odwzorowań holomorficznych $f : \Omega \to \mathbb{C}^M$, będących elementami uniwersalnymi ciągu $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l$, zawiera gęsty podzbiór $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ typu $\mathcal{G}_\delta$.

(iii) *Jeżeli $M \geq 2N+1$, to zbiór wszystkich regularnych, iniektywnych, prawie właściwych odwzorowań holomorficznych $f : \Omega \to \mathbb{C}^M$, będących elementami uniwersalnymi ciągu $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l$, zawiera gęsty podzbiór $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^M)$ typu $\mathcal{G}_\delta$.*

Dowód. Skoro C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$, każdy $C_{\varphi,M}$ także. Z [**For**, Twierdzenie 8.1.1] wynika, że jeśli $M \geq N$, to zbiór wszystkich prawie właściwych odwzorowań holomorficznych $f : \Omega \to \mathbb{C}^M$ zawiera gęsty podzbiór typu $\mathcal{G}_\delta$, a z [**Hor**, Twierdzenie 5.3.6], że jeśli $M \geq 2N$ (odp. $M \geq 2N+1$), to zbiór wszystkich regularnych odwzorowań holomorficznych (odp. zbiór wszystkich regularnych, iniektywnych, odwzorowań holomorficznych) $f : \Omega \to \mathbb{C}^M$ zawiera gęsty podzbiór typu $\mathcal{G}_\delta$. Z drugiej strony, zbiór wszystkich elementów uniwersalnych ciągu $({C_{\varphi,M}}^{[n_l]})_l$ jest gęstym podzbiorem typu $\mathcal{G}_\delta$ (Wniosek 2.2.5). Wobec twierdzenia Baire'a, przecięcie skończenie wielu gęstych podzbiorów typu $\mathcal{G}_\delta$ jest gęstym podzbiorem typu $\mathcal{G}_\delta$. □

2.4. Przypadek dowolnego obszaru w $\mathbb{C}^N$

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ będzie obszarem (ale niekoniecznie obszarem holomorficzności, czyli niekoniecznie rozmaitością Steina). Z [**Hor**, Twierdzenia 5.4.3, 5.4.5] wynika, że istnieje jedyna (z dokładnością do biholomorfizmu) spójna, N-wymiarowa rozmaitość Steina $\widetilde{\Omega}$, zwana *obwiednią holomorficzności* obszaru Ω, taka, że Ω jest obszarem w $\widetilde{\Omega}$, a każda funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ przedłuża się holomorficznie na $\widetilde{\Omega}$; odnotujmy, że na ogół $\widetilde{\Omega}$ nie jest obszarem w $\mathbb{C}^N$. Odwzorowanie

$$\mathcal{R} : \mathcal{O}(\widetilde{\Omega}) \ni f \mapsto f|_\Omega \in \mathcal{O}(\Omega)$$

jest ciągłą liniową bijekcją między przestrzeniami Frécheta, więc na mocy twierdzenia Banacha jest homeomorfizmem. Możemy przyjąć, że $\widetilde{\Omega}$ jest (domkniętą) podrozmaitością zespoloną $\mathbb{C}^{2N+1}$. Wtedy odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \Omega \to \Omega$ może być traktowane jako odwzorowanie prowadzące z Ω do $\mathbb{C}^{2N+1}$, a więc możemy rozszerzyć je holomorficznie do odwzorowania $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}^{2N+1}$. Z [**Hor**, Twierdzenie 7.2.11] wynika, że $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\Omega}) \subset \widetilde{\Omega}$.

Zauważmy, że zagadnienie hipercykliczności operatora $C_\varphi : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ sprowadza się do zagadnienia hipercykliczności operatora $C_{\widetilde{\varphi}} : \mathcal{O}(\widetilde{\Omega}) \to \mathcal{O}(\widetilde{\Omega})$. Jest to konsekwencją równości

$$C_{\widetilde{\varphi}} = \mathcal{R}^{-1} \circ C_\varphi \circ \mathcal{R},$$

z której wynika, że C_φ jest hipercykliczny względem $(n_l)_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\widetilde{\varphi}}$ jest taki, itd.

Podsumowując, przypadek dowolnego obszaru w $\mathbb{C}^N$ można sprowadzić do przypadku N-wymiarowej rozmaitości Steina.

ROZDZIAŁ 3

Dodatek

3.1. Holomorficzna wypukłość i rozmaitości Steina

Niech Ω będzie rozmaitością zespoloną. Dla zbioru zwartego $K \subset \Omega$ przez $\widehat{K}_\Omega$ lub $(K)\widehat{\ }_\Omega$ oznaczamy *otoczkę holomorficzną* zbioru K względem Ω, tj.

$$\widehat{K}_\Omega := \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)| \text{ for every } f \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

Zbiór K nazywamy *holomorficznie wypukłym* lub $\mathcal{O}(\Omega)$*-wypukłym*, jeśli $K = \widehat{K}_\Omega$. W przypadku $\Omega = \mathbb{C}^N$, zamiast $\widehat{K}_{\mathbb{C}^N}$, $(K)\widehat{\ }_{\mathbb{C}^N}$, piszemy krótko $\widehat{K}$, $(K)\widehat{\ }$, nazywamy ten zbiór *otoczką wielomianową* zbioru K i mówimy, że K jest *wielomianowo wypukły*, gdy $K = \widehat{K}$.

Obszar $U \subset \Omega$ nazywamy *obszarem Runge'go* względem Ω, jeśli każda funkcja z rodziny $\mathcal{O}(U)$ daje się aproksymować niemal jednostajnie na U funkcjami z rodziny $\mathcal{O}(\Omega)$.

Przypomnimy teraz pewne fakty dotyczące rozmaitości Steina; wiele z nich można znaleźć w [**Hor**, Rozdział 5]. Rozmaitości te stanowią uogólnienie pojęcia obszaru holomorficzności.

Definicja 3.1.1. Rozmaitość zespoloną Ω wymiaru N nazywamy *rozmaitością Steina*, jeżeli:

(i) Ω przeliczalna w nieskończoności, tzn. istnieje ciąg $(K_l)_{l \in \mathbb{N}}$ zbiorów zwartych *wyczerpujący* Ω, czyli taki, że $K_l \subset \operatorname{int} K_{l+1}$ oraz $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} K_l = \Omega$.
(ii) dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ otoczka $\widehat{K}_\Omega$ jest zwarta w Ω;
(iii) rodzina $\mathcal{O}(\Omega)$ rozdziela punkty Ω, tzn. dla dowolnych $z, w \in \Omega$, $z \neq w$, istnieje $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $f(z) \neq f(w)$;
(iv) dla każdego $z \in \Omega$ istnieje odwzorowanie $F \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^N)$, którego pochodna w punkcie z jest izomorfizmem.

Dzięki warunkowi (i) wiemy, że przestrzeń $\mathcal{O}(\Omega)$ jest przestrzenią Frécheta, bowiem jej topologia jest zadana przez przeliczalną rodzinę seminorm $p_l : f \mapsto \sup_{K_l} |f|$, $l \in \mathbb{N}$, gdzie $(K_l)_l$ jest ciągiem zbiorów wyczerpującym Ω. Ponadto, z (i) wynika też, że przestrzeń $\mathcal{O}(\Omega)$ jest ośrodkowa, bowiem ośrodkowa jest przestrzeń funkcji ciągłych na Ω, wyposażona w tę samą topologię zbieżności niemal jednostajnej.

Poniższe twierdzenie aproksymacyjne można znaleźć w [**Hor**] (Wniosek 5.2.9):

Twierdzenie 3.1.2 (Oka-Weil). *Niech Ω będzie rozmaitością Steina i niech $K \subset \Omega$ będzie zbiorem $\mathcal{O}(\Omega)$-wypukłym. Wtedy każda funkcja holomorficzna w otoczeniu K może być aproksymowana jednostajnie na K funkcjami z rodziny $\mathcal{O}(\Omega)$.*

Poniższe twierdzenie charakteryzuje obszary Runge'go na rozmaitości Steina w języku holomorficznej wypukłości:

Twierdzenie 3.1.3. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina i niech $U \subset \Omega$ będzie obszarem, który ze strukturą indukowaną z Ω także jest rozmaitością Steina. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) U jest obszarem Runge'go względem Ω,
(ii) dla każdego zwartego zbioru $K \subset U$ zachodzi $\widehat{K}_\Omega = \widehat{K}_U$,
(iii) dla każdego zwartego zbioru $K \subset U$ zachodzi $\widehat{K}_\Omega \cap U = \widehat{K}_U$,
(iv) dla każdego zwartego zbioru $K \subset U$ zachodzi $\widehat{K}_\Omega \cap U \subset\subset U$,

Dowód w przypadku, gdy Ω jest obszarem holomorficzności w $\mathbb{C}^N$, można znaleźć np. w [**Hor**] (dowód Twierdzenia 4.3.3). Dowód dla rozmaitości Steina jest właściwie takie sam; jedyna różnica polega na tym, że zamiast [**Hor**, Twierdzenie 4.3.2] używamy [**Hor**, Wniosek 5.2.9].

Warto jeszcze przypomnieć następujący fakt (zob. np. [**Hor**, Twierdzenie 5.3.9]):

Twierdzenie 3.1.4. *Każdą N-wymiarową rozmaitość Steina Ω można zanurzyć w $\mathbb{C}^{2N+1}$, tzn. istnieje właściwa, różnowartościowa immersja holomorficzna $F : \Omega \to \mathbb{C}^{2N+1}$. W szczególności, obraz $F(\Omega)$ jest podrozmaitością zespoloną w $\mathbb{C}^{2N+1}$, a odwzorowanie $F : \Omega \to F(\Omega)$ jest biholomorfizmem.*

Naturalnie, pisząc o podrozmaitościach mamy na myśli podrozmaitości domknięte.

Z powyższego twierdzenia wynika, że każda rozmaitość Steina może być w istocie traktowana jako podrozmaitość pewnego $\mathbb{C}^M$. Z drugiej strony, wobec [**Hor**, Twierdzenie 5.1.5], każda taka podrozmaitość $\mathbb{C}^M$ jest rozmaitością Steina. Tak więc klasa rozmaitości Steina jest równa klasie zespolonych podrozmaitości przestrzeni $\mathbb{C}^M$.

3.2. Rozmaitości typu taut

W tym podrozdziale przybliżymy pojęcie rozmaitości zespolonych *typu taut.* Wiele informacji na ich temat można znaleźć np. w książce [**Aba89**].

Niech Ω, Ω' będą spójnymi rozmaitościami zespolonymi przeliczalnymi w nieskończoności. Rozważmy klasyczne, jednopunktowe uzwarcenie $\Omega_\infty := \Omega \cup \{\infty_\Omega\}$ przestrzeni topologicznej Ω. Wobec twierdzenia Urysohna, przestrzeń topologiczna Ω_∞, jako zwarta i posiadająca przeliczalną bazę topologii, jest metryzowalna; niech d będzie dowolną odległością na Ω_∞ zadającą jej topologię. Rozważmy zbiór $\mathcal{C}(\Omega', \Omega_\infty)$ wszystkich funkcji ciągłych prowadzących z Ω' w Ω_∞, wyposażony w topologię zbieżności niemal jednostajnej względem d, tj. topologię, której bazą jest rodzina

$$\{g \in \mathcal{C}(\Omega', \Omega_\infty) : d(f(x), g(x)) < \epsilon,\ x \in K\},\ \epsilon > 0, K \subset\subset \Omega', f \in \mathcal{C}(\Omega', \Omega_\infty).$$

Topologia ta nie zależy od odległości zadającej topologię Ω_∞, gdyż jeśli d_1 jest odległością na Ω_∞ zadającą jej topologię, to odwzorowania identycznościowe z (Ω_∞, d_1) w (Ω_∞, d) oraz z (Ω_∞, d) w (Ω_∞, d_1) są jednostajnie ciągłe. Co więcej, jest to topologia metryzowalna, zadana np. przez odległość

$$\widetilde{d}(f, g) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \sup_{z \in K_j} \frac{d(f(z), g(z))}{1 + d(f(z), g(z))},\ f, g \in \mathcal{C}(\Omega', \Omega_\infty),$$

gdzie $(K_j)_j$ jest pewnym ustalonym ciągiem zbiorów zwartych wyczerpującym Ω'.

Definicja 3.2.1. Mówimy, że spójna, przeliczalna w nieskończoności rozmaitość zespolona Ω jest *typu taut*, jeżeli zbiór $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega) \cup \{\infty_\Omega\}$ jest zwarty w $\mathcal{C}(\mathbb{D}, \Omega_\infty)$.

Rodzinę $\mathcal{O}(\Omega', \Omega)$ traktujemy jako podzbiór przestrzeni topologicznej $\mathcal{C}(\Omega', \Omega_\infty)$, natomiast przez ∞_Ω rozumiemy funkcję stałą prowadzącą z Ω' w Ω_∞, równą ∞_Ω. Skoro przestrzeń topologiczna $\mathcal{C}(\Omega', \Omega_\infty)$ jest metryzowalna, to rozważana w powyższej definicji zwartość równoważna jest ciągowej zwartości.

Zauważmy, że bycie typu taut jest niezmiennikiem odwzorowań biholomorficznych. Rzeczywiście, załóżmy, że $\Phi : \Omega \to G$ jest biholomorfizmem pomiędzy spójnymi i przeliczalnymi w nieskończoności rozmaitościami zespolonymi Ω, G. Niech d, g będą odległościami zadającymi (odpowiednio) topologie Ω_∞, G_∞. Można sprawdzić, że Φ, jako homeomorfizm, rozszerza się do homeomorfizmu $\Phi : \Omega_\infty \to G_\infty$ (oznaczanego tą samą literą) takiego, że $\Phi(\infty_\Omega) = \infty_G$. Skoro przestrzenie metryczne (Ω_∞, d), (G_∞, g) są zwarte, to odwzorowania Φ oraz Φ^{-1} są jednostajnie ciągłe, a więc zachowują zbieżność niemal jednostajną ciągów funkcyjnych. Dzięki temu, odwzorowanie

$$\mathcal{C}(\mathbb{D}, \Omega_\infty) \ni f \mapsto \Phi \circ f \in \mathcal{C}(\mathbb{D}, G_\infty),$$

przeprowadzające zbiór $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega) \cup \{\infty_\Omega\}$ w $\mathcal{O}(\mathbb{D}, G) \cup \{\infty_G\}$, jest homeomorfizmem.

Z powyższych rozważań wynika, że w przypadku, gdy Ω jest rozmaitością Steina, definicję rozmaitości typu taut można nieco uprościć, korzystając z Twierdzenia 3.1.4, gdyż możemy założyć, że taka rozmaitość jest podrozmaitością pewnego $\mathbb{C}^M$. Mówi o tym następująca obserwacja:

Obserwacja 3.2.2. *Jeżeli Ω jest podrozmaitością zespoloną lub obszarem w $\mathbb{C}^M$, to Ω jest typu taut wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega)$ jest niemal jednostajnie rozbieżny w $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega)$ lub ma podciąg niemal jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega)$.*

Warto wspomnieć o tym, że w przypadku jednowymiarowym obszar $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest typu taut wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ma więcej niż jeden element (zob. [**Jar-Pfl**, Uwaga 3.2.3 (d)]).

Udowodnimy teraz pewien fakt, który wykorzystujemy w Rozdziale 2. Jest on najprawdopodobniej znany, chociaż nie udało się nam znaleźć go w literaturze w wymaganej postaci. Prezentowany dowód podobny jest do dowodu [**Aba89**, Lemat 2.3.18].

Propozycja 3.2.3. *Niech Ω będzie spójną rozmaitością Steina, w której istnieje punkt $z_0 \in \Omega$ taki, że*

$$\lim_{\Omega \ni z \to \infty_\Omega} c_\Omega(z, z_0) = \infty. \tag{3.2.1}$$

Wtedy Ω jest typu taut.

Założenie (3.2.1) równoważne jest temu, że wszystkie kule w pseudoodległości c_Ω są względnie zwarte w Ω. Fakt ten jest konsekwencją nierówności trójkąta dla c_Ω.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że Ω jest podrozmaitością zespoloną $\mathbb{C}^{2N+1}$. Ustalmy ciąg $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega)$ i załóżmy, że nie jest niemal jednostajnie rozbieżny. Wtedy, przechodząc ewentualnie do podciągu możemy założyć, że istnieją zbiory zwarte $K_0 \subset \mathbb{D}$, $K_1 \subset \Omega$ takie, że $f_n(K_0) \cap K_1 \neq \varnothing$ dla każdego n.

Pokażemy, że dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{D}$ suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(K)$ zawiera się w pewnej kuli względem pseudoodległości c_Ω. Ustalmy punkt $w_1 \in K_1$ oraz zbiór K; możemy przyjąć, że $K_0 \subset K$. Dla wszystkich $z, w \in \mathbb{D}$ zachodzi nierówność $c_\Omega(f_n(z), f_n(w)) \leq \rho(z, w)$, a więc $\operatorname{diam}_{c_\Omega} f_n(K) \leq \operatorname{diam}_\rho K$. Skoro $f_n(K) \cap K_1 \neq \varnothing$, to dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $z \in K$ mamy

$$c_\Omega(f_n(z), w_1) \leq \operatorname{diam}_{c_\Omega} f_n(K) + \operatorname{diam}_{c_\Omega} K_1 \leq \operatorname{diam}_\rho K + \operatorname{diam}_{c_\Omega} K_1 =: R_K.$$

Stąd wynika, że zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(K)$ zawiera się w domkniętej kuli względem c_Ω o środku w_1 i promieniu R_K.

Skoro każda kula względem c_Ω jest względnie zwartym podzbiorem Ω, to względnie zwarta w Ω jest także suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(K)$ dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{D}$. Na mocy twierdzenia Montela, ciąg $(f_n)_n$ ma podciąg zbieżny, którego granica należy do $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega)$. $\square$

Spis symboli

Symbole ogólne

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych: $1, 2, 3, \ldots$;
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych;
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych;
$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych;
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ - koło jednostkowe w $\mathbb{C}$;
$\mathbb{D}_* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ - koło jednostkowe z usuniętym środkiem;
$\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ - lewa półpłaszczyzna na płaszczyźnie zespolonej;
$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (0,1)\}$ - pionowy pas w $\mathbb{C}$;
$\langle z, w \rangle$ - klasyczny iloczyn skalarny w $\mathbb{C}^n$ lub $\mathbb{R}^n$;
$z \bullet w = \langle z, \bar{w} \rangle$;
π_j - rzutowanie $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ na j-tą współrzędną;
$\widehat{\pi}_j$ - rzutowanie $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ zaniedbujące j-tą współrzędną;
$\mathcal{L}^n$ - n-wymiarowa miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$;
$\mathcal{L}^M$ - miara Lebesgue'a na podrozmaitości $M \subset \mathbb{C}^n$;
$\mathcal{O}(M, N)$ - zbiór odwzorowań holomorficznych pomiędzy rozmaitościami zespolonymi M oraz N;
$\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}(M, \mathbb{C})$;
$\operatorname{Aut}(M)$ - zbiór automorfizmów holomorficznych rozmaitości zespolonej M;
$\varphi^*(\lambda)$ - granica radialna odwzorowania $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ w punkcie $\lambda \in \mathbb{T}$;
ρ - odległość Poincaré'go w $\mathbb{D}$;
c_D - pseudoodległość Carathéodory'ego na rozmaitości zespolonej D;
ℓ_D - funkcja Lemperta dla rozmaitości zespolonej D;
κ_D - pseudometryka Kobayashi'ego-Roydena na D;
$|\nu|$ - wahanie miary zespolonej ν;
δ_a - delta Diraca w punkcie a;
$[p, q]$ - odcinek domknięty o końcach p, q;
$e_1, \ldots, e_n$ - wektory bazy kanonicznej $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$;
$\operatorname{conv} X$ - otoczka wypukła zbioru X;
$\operatorname{diam}_d A$ - średnica zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d);
id_X - odwzorowanie identycznościowe na zbiorze X;
$H^p(\mathbb{D})$ - przestrzeń Hardy'ego funkcji holomorficznych $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$;
$H^p(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ - przestrzeń odwzorowań $\mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ o współrzędnych klasy $H^p(\mathbb{D})$;

$\mathcal{C}(\mathbb{T})$ - przestrzeń funkcji ciagłych $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ wyposażona w normę supremum;

Rozdział 1

Rozdział 2

Bibliografia

[Aba89] M. Abate, *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds*, Mediterranean Press, Rende, 1989.

[Aba91] M. Abate, *Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 18 (1991), no. 2, 167-191.

[Ber] L. Bernal-Gonzalez, *Universal entire functions for affine endomorphisms in* $\mathbb{C}^N$, J. Math. Anal. Appl. 305 (2005) 690-697.

[Bon-Dom] J. Bonet, P. Domański, *Hypercyclic composition operators on spaces of real analytic functions*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (to appear).

[Bra-Sor] F. Bracci, A. Saracco, *Hyperbolicity in unbounded convex domains*, Forum Math. 21 (2009), no. 5, 815-825.

[Edi-Zwo] A. Edigarian, W. Zwonek, *Schwarz lemma for the tetrablock*, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), no. 3, 506-514.

[For] F. Forstneric, *Stein manifolds and holomorphic mappings*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.

[Gen] G. Gentili, *Regular complex geodesic for the domain* $D_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| + \ldots + |z_n| < 1\}$, 35-45, Lecture Notes in Math., 1277, Springer, Berlin, 1987.

[Gor] P. Gorkin, F. León-Saavedra, R. Mortini, *Bounded universal functions in one and several complex variables*, Math. Z. 258 (2008), 745-762.

[Gro87] K.-G. Grosse-Erdmann, *Holomorphe monster und universelle funktionen*, Mitt. Math. Sem. Giessen, 176 (1987).

[Gro99] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 36 (1999), 345-381.

[Gro-Mor] K.-G. Grosse-Erdmann, R. Mortini, *Universal functions for composition operators with non-automorphic symbol*, J. Anal. Math. 107 (2009), 355-376.

[Hor] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables* (3rd edition), North-Holland, Amsterdam, 1990.

[Jak-Jar] P. Jakóbczak, M. Jarnicki, *Lectures on holomorphic functions of several complex variables*, 2001.

[Jar] M. Jarnicki, *Wykłady z Analizy Matematycznej*, 2009.

[Jar-Pfl] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[Kal-Nie] T. Kalmes, M. Niess, *Universal zero solutions of linear partial differential operators*, Studia Math. 198 (1) (2010), 33-51.

[Kli] P. Kliś, *Odwzorowania ekstremalne* (praca doktorska), 2012.

[Koo] P. Koosis, *Introduction to* H^p *spaces* (2-nd edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Lem] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 427-474.

[New] M. H. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.

[Roy-Won] H.L. Royden and P.-M. Wong, *Carathéodory and Kobayashi metric on convex domains*, preprint (1983).

[Sto] E. Stout, *Polynomial convexity*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[Zaj12] S. Zając, *Hypercyclicity of composition operators in Stein manifolds*, preprint (2012), arXiv:1202.6638v3.

[Zaj14a] S. Zając, *Complex geodesics in convex tube domains*, przyjęte do druku w Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.

[Zaj14b] S. Zając, *Complex geodesics in convex tube domains II*, preprint (2014), arXiv:1406.0549.