Wybrane zagadnienia geometrii ciał wypukłych

Tomasz Kobos

Praca doktorska napisana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego pod kierunkiem prof. dr. hab. Grzegorza Lewickiego

Kraków 2015

Spis treści

Wstęp

Rozważania przedstawione w rozprawie dotyczą skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych nad $\mathbb{R}$, lub równoważnie symetrycznych ciał wypukłych w $\mathbb{R}^n$. Dziedzinę, którą się zajmujemy można określić jako znajdującą się na przecięciu analizy funkcjonalnej, geometrii wypukłej oraz geometrii dyskretnej. Skoncentrujemy się na dwóch wybranych zagadnieniach: na *zbiorach ekwilateralnych* (z angielskiego *equilateral sets*) oraz na *projekcjach minimalnych*. Głównym celem pracy jest zaprezentowanie nowych i oryginalnych rezultatów. W celu wprowadzenia do tematu omówimy również uzyskane wcześniej wyniki, przedstawiając dowody niektórych z nich. Zasugerujemy ponadto kilka możliwych kierunków dalszych badań, proponując szereg otwartych problemów, które w naturalny sposób łączą się z naszymi rozważaniami.

Rozdział pierwszy rozprawy zawiera wstępne informacje z dziedziny geometrii przestrzeni Banacha oraz geometrii ciał wypukłych. W rozdziale drugim przedstawione jest zagadnienie zbiorów ekwilateralnych w skończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych. W rozdziałach trzecim i czwartym zawarte zostały autorskie wyniki uzyskane w tym zakresie. Rozdział trzeci dotyczy wyników związanych z alternatywnym dowodem twierdzenia Petty'ego, zaś w rozdziale czwartym zaprezentowane zostały oszacowania dolne wymiaru ekwilateralnego pewnych klas przestrzeni unormowanych. Rozdział piąty kończy pierwszą część rozprawy poświęconą zbiorom ekwilateralnym. Proponujemy w nim kilka otwartych pytań związanych z tym pojęciem.

Kolejne rozdziały rozprawy poświęcone są własnościom projekcji minimalnych. Rozdział szósty zawiera wprowadzenie do tego zagadnienia, zaś w rozdziałach siódmym i ósmym przedstawiliśmy wyniki autorskie. Rezultaty rozdziału siódmego koncentrują się wokół sytuacji, w której skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana posiada hiperpłaszczyznę o maksymalnej relatywnej stałej projekcji. W rozdziale ósmym przedstawiamy konstrukcję n-wymiarowej przestrzeni unormowanej, której dowolna hiperpłaszczyzna posiada relatywną stałą projekcji większą niż $1 + \varepsilon_0$ dla konkretnej liczby $\varepsilon_0 > 0$. W rozdziale dziewiątym proponujemy kilka dalszych problemów dotyczących projekcji minimalnych.

Wyniki autorskie przedstawione w rozdziałach $3, 4, 7$ zostały opublikowane odpowiednio w pracach:

1. *An alternative proof of Petty's theorem on equilateral sets* (zobacz [43])
2. *Equilateral Dimension of Certain Classes of Normed Spaces* (zobacz [44])
3. *Hyperplanes of finite-dimensional normed spaces with the maximal relative projection constant* (zobacz [45])

Wyniki rozdziału 8 w momencie pisania rozprawy są wysłane do publikacji i oczekują na recenzję. Wstępna wersja pracy pt. *A uniform estimate of the relative projection constant* jest dostępną w postaci preprintu (zobacz [46]).

Za opiekę merytoryczną i redakcyjną w przygotowaniu rozprawy oraz za całą pomoc udzieloną mi w trakcie studiów doktoranckich składam ogromne podziękowania swojemu promotorowi Panu Profesorowi Grzegorzowi Lewickiemu.

1. Preliminaria

W bieżącym rozdziale przypomnimy w zwięzły sposób podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni unormowanych oraz geometrii ciał wypukłych. W pierwszym podrozdziale zostaną przywołane najbardziej podstawowe definicje. W drugim wprowadzimy pojęcie odległości Banacha-Mazura, która w dalszej części pracy okaże się istotnym narzędziem. Przydatne okażą się również moduły wypukłości i gładkości zdefiniowane w podrozdziale 1.3. Większość z używanych przez nas pojęć bez trudu można odnaleźć w wielu podręcznikach do analizy funkcjonalnej bądź geometrii wypukłej. Czytelnik zainteresowany bardziej zaawansowanym wstępem do geometrii przestrzeni Banacha powinien zajrzeć do książki *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry* autorstwa: M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V.M. Santalucía, J. Pelant, V. Zizler (zobacz [23]).

1.1. Przestrzenie unormowane i ciała wypukłe

Będziemy rozważać wyłącznie przestrzenie wektorowe nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. *Norma* przestrzeni wektorowej X to funkcja $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki:

$$||x|| \geqslant 0,$$

$$||x|| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0,$$

$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \text{ dla } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||,$$

dla dowolnych $x, y \in X$. Funkcja $d(x, y) = ||x - y||$ jest wówczas metryką na X. Jeżeli przestrzeń X z ową metryką jest zupełna, to przestrzeń X nazywamy *przestrzenią Banacha.*

Kulą jednostkową w normie $||\cdot||$ nazwiemy zbiór $\{x \in X : ||x|| \leqslant 1\}$, zaś *sferą jednostkową* zbiór $\{x \in X : ||x|| = 1\}$. W przypadku normy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ kulę jednostkową i sferę jednostkową będziemy nazywać odpowiednio *kołem jednostkowym* i *okręgiem jednostkowym.* W pracy będziemy rozważać normy w wyłącznie w przestrzeniach skończonego wymiaru. Wymiar liniowy przestrzeni X oznaczymy przez $\dim X$.

Ciałem wypukłym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazwiemy dowolny wypukły i zwarty podzbiór tej przestrzeni o niepustym wnętrzu. Ciało wypukłe C jest *symetryczne*, jeśli 0 jest jego środkiem symetrii, czyli $x \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-x \in C$.

Kula jednostkowa przestrzeni unormowanej $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ jest symetrycznym ciałem wypukłym przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Również odwrotnie, każde symetryczne ciało wypukłe $C \subset \mathbb{R}^n$ jest kulą jednostkową dokładnie jednej normy $||\cdot||$ w $\mathbb{R}^n$. Istnieje więc jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy normami w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ a symetrycznymi ciałami wypukłymi tej przestrzeni. Kulę jednostkową przestrzeni $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ będziemy w zależności od kontekstu oznaczać przez B_X lub przez $B_{||\cdot||}$. Analogicznie, sferę jednostkową przestrzeni $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ oznaczymy przez S_X lub przez $S_{||\cdot||}$.

Wielościanem wypukłym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazwiemy zbiór P będący otoczką wypukłą skończonej liczby punktów, tzn. $P = \operatorname{conv}\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$. Komórkę wypukłą, która posiada dokładnie $n+1$ wierzchołków nazwiemy *sympleksem*. Sympleks jest *niezdegenerowany* jeżeli nie jest zawarty w żadnej podprzestrzeni afinicznej mniejszego wymiaru. Jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^n$ oraz $c \in \mathbb{R}$, to definiujemy zbiory $A + B$ oraz cA jako $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ i $cA = \{ca : a \in A\}$.

Symbolem ℓ_p^n, gdzie $1 \leqslant p < \infty$, będziemy oznaczali przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą zdefiniowaną jako

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p}$$

lub też

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

dla $p = \infty$. W szczególności ℓ_2^n jest zwykłą przestrzenią euklidesową wymiaru n. Przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznaczymy standardowy iloczyn skalarny w tej przestrzeni.

Normę $|| \cdot ||$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazwiemy *ściśle wypukłą*, jeśli spełnia jeden z dwóch równoważnych warunków (zobacz fakt 7.7 w [23]):

- Dowolna prosta przecina sferę jednostkową $S_{||\cdot||}$ w co najwyżej dwóch punktach,
- Równość $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ lub $y = 0$ lub $x = cy$ dla pewnego $c > 0$.

Dla przykładu, ściśle wypukłe są wszystkie przestrzenie ℓ_p^n poza przestrzeniami ℓ_1^n i ℓ_∞^n, które posiadają odcinki zawarte w swoich sferach jednostkowych.

Normę $|| \cdot ||$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazwiemy *gładką*, jeśli dla dowolnego $x \neq 0$ istnieje dokładnie jeden *funkcjonał podpierający* sfery w punkcie x, czyli takie odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, że $f(x) = ||x||$ oraz $|f(y)| \leqslant 1$ dla $||y|| \leqslant 1$. Z twierdzenia Hanha-Banacha wynika, że w dowolnym punkcie sfery istnieje co najmniej jeden funkcjonał podpierający. Gdy norma jest gładka, to jedyny funkcjonał podpierający f_x w danym punkcie $x \neq 0$ nazywamy *funkcjonałem normującym* dla x. Wyraża się on wzorem

$$f_x(y) = \lim_{t \to 0} \frac{||x + ty|| - ||x||}{t},$$

dla $y \in \mathbb{R}^n$. Podobnie jak wcześniej, przestrzenie ℓ_p^n są gładkie za wyjątkiem przestrzeni ℓ_1^n i ℓ_∞^n. Dalsze informacje na temat gładkości i ścisłej wypukłości przestrzeni unormowanych (również w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych) można znaleźć w rozdziale 7 w [23].

Dana norma $|| \cdot ||$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ może być aproksymowana normami, które są jednocześnie gładkie i ściśle wypukłe. Precyzyjnie rzecz ujmując, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje norma $|| \cdot ||_0$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$, która jest gładka i ściśle wypukła oraz spełnia

$$(1 - \varepsilon)||x||_0 \leqslant ||x|| \leqslant (1 + \varepsilon)||x||_0,$$

przy dowolnym $x \in \mathbb{R}^n$ (zobacz dowód twierdzenia 8.20 w [23] na stronie 250).

Pojęcia ścisłej wypukłości i gładkości mają swoje odpowiedniki w języku ciał wypukłych. Powiemy, że ciało wypukłe $C \subset \mathbb{R}^n$ jest ściśle wypukłe, jeżeli w brzegu C nie jest zawarty żaden nietrywialny odcinek. Będziemy wówczas mówić skrótowo o ściśle wypukłym ciele C.

Jeżeli x_0 należy do brzegu C, to *hiperpłaszczyzną podpierającą* ciała C w punkcie x_0 nazwiemy hiperpłaszczyznę, która zawiera punkt x_0 oraz posiada tę własność, iż zbiór C jest zawarty w jednej z dwóch domkniętych półprzestrzeni przez nią wyznaczonych. Jeżeli dowolny punkt z brzegu C posiada dokładnie jedną hiperpłaszczyznę podpierającą, to mówimy, że ciało C jest gładkie. Podobnie jak wcześniej dowolny punkt z brzegu C zawsze posiada co najmniej jedną hiperpłaszczyznę podpierającą.

Jeżeli X jest przestrzenią unormowaną z normą $||\cdot||$, to symbolem X^* oznaczamy przestrzeń *sprzężoną* (lub *dualną*) do X. Elementami przestrzeni X^* są odwzorowania liniowe i ciągłe prowadzące z X w $\mathbb{R}$. Na przestrzeni X^* definiujemy normę dualną do $||\cdot||$: jeśli $f \in X^*$ jest funkcjonałem, to $||f||_{X^*} = \sup\{|f(x)| : x \in B_x\}$. Jeżeli nie będzie wątpliwości, że kontekst dotyczy funkcjonałów, to normę funkcjonału f będziemy oznaczać po prostu przez $||f||$.

Jeżeli C jest symetrycznym ciałem wypukłym przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to przez C^* oznaczamy ciało *sprzężone* (lub *dualne*) do C, zdefiniowane jako

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leqslant 1 \text{ dla wszystkich } x \in C\}.$$

Nietrudno sprawdzić, że C^* również jest symetrycznym ciałem wypukłym przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Powyższe definicje dualności dla przestrzeni unormowanych i ciał wypukłych są zgodne. Oznacza to, że jeżeli $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, to $B_{X^*} = (B_X)^*$.

Jeżeli $C \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolnym zbiorem wypukłym, to punkt $x_0 \in C$ nazywamy *punktem ekstremalnym* zbioru C, gdy spełniony jest następujący warunek: jeżeli $x_0 = ta + (1-t)b$ dla $a,\ b \in C$ oraz $t \in [0,1]$, to $t = 0$ lub $t = 1$. Innymi słowy, punkt x_0 jest punktem ekstremalnym zbioru C jeżeli nie jest zawarty we wnętrzu żadnego nietrywialnego odcinka tego zbioru. Otoczka wypukła zbioru punktów ekstremalnych wypukłego zbioru C jest zbiorem C (jest to szczególny przypadek twierdzenia Kreina-Milmana).

W całej pracy przez $e(1), e(2), \ldots, e(n)$ będziemy oznaczać wektory z bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Symbolem $\mathbb{S}^{n-1}$ oznaczymy natomiast jednostkową sferę euklidesową w $\mathbb{R}^n$.

1.2. Odległość Banacha-Mazura

Powiemy, że dwie n-wymiarowe przestrzenie unormowane X i Y są *izometrycznie izomorficzne* jeżeli istnieje liniowa i surjektywna izometria $T : X \to Y$. W rzeczywistości, jeżeli surjektywna izometria $T : X \to Y$ spełnia $T(0) = 0$, to T jest odwzorowaniem liniowym (mówi o tym twierdzenie Mazura-Ulama). Relacja izometrycznego izomorfizmu jest relacją równoważności. Własności geometryczne (takie jak punkty gładkości czy ścisła wypukłość) dwóch przestrzeni izometrycznie izomorficznych są identyczne. Podobnie jest dla własności dotyczących rozważań zawartych w tej rozprawie. Dla naszych celów dwie przestrzenie izometrycznie izomorficzne można więc utożsamiać. Warto dodać, że tego typu relacja równoważności w klasie symetrycznych ciał wypukłych oznacza, że dwa symetryczne ciała wypukłe $A, B \subset \mathbb{R}^n$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $T(A) = B$.

Okazuje się, że na klasach równoważności można w łatwy sposób wprowadzić metrykę. Jeżeli X i Y są przestrzeniami unormowanymi tego samego wymiaru, *odległość Banacha-Mazura* pomiędzy X i Y definiujemy jako $d(X, Y) = \inf ||T|| \cdot ||T^{-1}||$, gdzie infimum przebiega wszystkie liniowe operatory odwracalne $T : X \to Y$. Nietrudno sprawdzić, że przy ustalonej liczbie całkowitej $n \geqslant 1$ przestrzeń, której elementamu są klasy równoważności n-wymiarowych przestrzeni unormowanych, zaś metryką jest $\log d$ jest w istocie przestrzenią metryczną. Nazywamy ją *kompaktem Banacha-Mazura*.

Odległość Banacha-Mazura jest ważnym narzędziem służącym do porównywania geometrii dwóch ciał wypukłych. Okazuje się, że z punktu widzenia tego pojęcia przestrzeń euklidesowa wymiaru n odgrywa szczególną rolę. Mamy bowiem następujące

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie Johna o elipsoidzie [40])**.** *Jeżeli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest symetrycznym ciałem wypukłym, zaś $\mathcal{E} \subset K$ elipsoidą o maksymalnej objętości zawartej w K to $K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$.*

W szczególności dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej X prawdziwa jest nierówność $d(X, \ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$.

1.3. Moduły wypukłości i gładkości przestrzeni unormowanych

W podrozdziale 1.1 zdefiniowaliśmy pojęcie ścisłej wypukłości i gładkości przestrzeni. Okazuje się, że owe pojęcia można rozpatrywać również z bardziej mierzalnego punktu widzenia. Służą do tego tzw. moduły wypukłości i gładkości. Dla danej przestrzeni Banacha X jej *modułem wypukłości* nazywamy odwzorowanie $\delta_X : [0, 2] \to \mathbb{R}$ zdefiniowane jako

$$\delta_X(t) = \inf \left\{ 1 - \left|\left| \frac{x+y}{2} \right|\right| \ : \ ||x||, \ ||y|| \leqslant 1 \text{ oraz } ||x-y|| \geqslant t \right\}.$$

Wprost z definicji łatwo sprawdzić, że moduł wypukłości jest funkcją niemalejącą. W przypadku skończenie wymiarowym ścisłą wypukłość przestrzeni X jest równoważna temu, że równość $\delta_X(t) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 0$. Lub również inaczej, przestrzeń X jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_X(2) = 1$.

Moduł gładkości przestrzeni Banacha X to funkcja $\rho_X : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jako

$$\rho_X(t) = \sup \left\{ \frac{||x+ty|| + ||x-ty||}{2} - 1 : ||x||, ||y|| \leqslant 1 \right\}.$$

Skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana X jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{t\to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0$ (zobacz fakt 9.7 w [23])

2. Zbiory ekwilateralne w skończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych

Celem poniższego rozdziału jest wprowadzenie Czytelnika w problematykę zbiorów ekwilateralnych. Zebrane zostały w nim podstawowe informacje i klasyczne wyniki dotyczące tego zagadnienia. Wyniki autorskie zostaną przedstawione w rozdziałach 3 i 4. W pierwszym podrozdziale obecnego rozdziału podamy podstawowe definicje i przykłady. W drugim wykażemy optymalne oszacowanie górne na moc zbiorów ekwilateralnych w przypadku ogólnym, zaś trzeci podrozdział poświęcony jest uzyskanym do tej pory wynikom w dziedzinie oszacowań dolnych. W ostatniej części rozdziału zaprezentujemy inne klasyczne wyniki dotyczące zbiorów ekwilateralnych. Czytelnik zainteresowany dalszym zgłębianiem tego zagadnienia powinien sięgnąć do pracy przeglądowej [75] poświęconej zbiorom ekwilateralnym.

2.1. Definicje i przykłady

Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{R}$. Niepusty zbiór $S \subset X$ nazwiemy *ekwilateralnym* (z ang. *equilateral set*), jeżeli istnieje liczba dodatnia c taka, że $||x - y|| = c$ dla dowolnych $x, y \in S$, $x \neq y$. W sytuacji, w której owa wspólna odległość c będzie w naszych rozważaniach istotna, będziemy mówili precyzyjnie o zbiorze *c-ekwilateralnym*. *Wymiarem ekwilateralnym* (z ang. *equilateral dimension*) przestrzeni X nazwiemy maksymalną możliwą liczbę wektorów przestrzeni X tworzących zbiór ekwilateralny (jak niedługo się przekonamy jest to liczba skończona). Wymiar ekwilateralny przestrzeni X będziemy oznaczać skrótowo przez $e(X)$. Podobne definicje można wprowadzić w dowolnej przestrzeni unormowanej, a nawet w dowolnej przestrzeni metrycznej. W naszych rozważaniach ograniczymy się jednak do przypadku, w którym X jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{R}$.

Przykład 2.1. Rozważmy n-wymiarową przestrzeń euklidesową ℓ_2^n. Wierzchołki dowolnego sympleksu foremnego tworzą w niej zbiór ekwilateralny o mocy $n + 1$. Nie jest trudno wykazać, iż w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej nie istnieje zbiór ekwilateralny o mocy $n + 2$. A zatem $e(\ell_2^n) = n + 1$.

Przykład 2.2. Wymiar ekwilateralny przestrzeni ℓ_∞^n jest nie mniejszy niż 2^n. Wystarczy bowiem rozważyć zbiór S punktów ekstremalnych kuli jednostkowej, czyli $S = \{-1, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas dowolne dwa punkty zbioru S są odległe w normie maksimum o 2. W istocie zachodzi równość $e(\ell_\infty^n) = 2^n$ i jest to maksymalny możliwy wymiar ekwilateralny n-wymiarowej przestrzeni unormowanej. Dowód tego faktu zostanie zaprezentowany w następnym podrozdziale.

Przykład 2.3. W przestrzeni ℓ_1^n punkty $\pm e_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ tworzą zbiór ekwilateralny. Czyli $e(\ell_1^n) \geqslant 2n$. W pozostałych przestrzeniach ℓ_p^n, gdzie $1 < p < \infty$, można bez trudu wskazać zbiory ekwilateralne o $n+1$ elementach. Ogólniejszy rezultat zostanie udowodniony w podrozdziale 4.1.

Przykład 2.4. Rozważmy przestrzeń $X = (\mathbb{R}^3, ||\cdot||)$, gdzie

$$||(x_1, x_2, x_3)|| = \max\left\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, |x_3|\right\}.$$

Kula jednostkowa przestrzeni X jest wówczas walcem. Jeśli punkty $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku 2, to bez trudu można sprawdzić, że punkty postaci $(a_i, b_i, \pm 1)_{i=1,2,3}$ tworzą zbiór 2-ekwilateralny w przestrzeni X. W łatwy sposób można wykazać, że jest to maksymalny zbiór ekwilateralny tej przestrzeni, a zatem $e(X) = 6$.

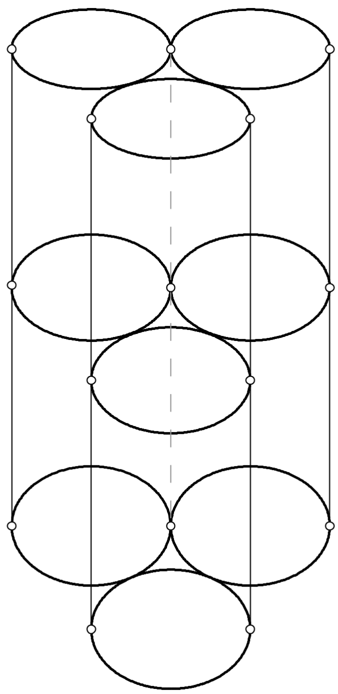
Na problemy dotyczące zbiorów ekwilateralnych często warto patrzeć w bardziej geometryczny sposób, wynikający z jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy przestrzeniami unormowanymi a symetrycznymi ciałami wypukłymi, o której mówiliśmy w podrozdziale 1.1. Pojęcie zbioru ekwilateralnego bez trudu tłumaczy się na ten język. Łatwo zauważyć, że jeżeli w danej normie punkty $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tworzą zbiór c-ekwilateralny, to m kul o środkach w punktach p_i i promieniach równych $\frac{c}{2}$ parami się *dotyka*, tzn. ich brzegi się przecinają, ale wnętrza nie. I odwrotnie, jeśli m kul o tym samym promieniu c dotyka się parami, to ich środki tworzą zbiór $2c$-ekwilateralny. Możemy więc zdefiniować wymiar ekwilateralny symetrycznego ciała wypukłego w $\mathbb{R}^n$ jako maksymalną możliwą liczbę translacji tego ciała, z których każde dwie dotykają się. Definicja ta pokrywa się wówczas ze wcześniejszą w sensie jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy symetrycznymi ciałami wypukłymi i normami. Dla przykładu, w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jesteśmy w stanie wskazać maksymalnie cztery zwykłe kule euklidesowe o tym samym promieniu, które są parami styczne, ale znajdziemy osiem dotykających się sześcianów tego samego wymiaru. Fakt, że wymiar ekwilateralny przestrzeni X z przykładu 2.4 jest równy 6, oznacza, że jesteśmy w stanie znaleźć maksymalnie sześć parami dotykających się walców w $\mathbb{R}^3$ tej samej wielkości (patrz rys. 2.1).

Kiedy rozważamy problematykę zbiorów ekwilateralnych z punktu widzenia normy, naturalnie jest zakwalifikować tę tematykę do dziedziny analizy funkcjonalnej. Patrząc jednak od strony ciał wypukłych możemy dostrzec bardziej kombinatoryczną naturę tego zagadnienia, które w tym ujęciu równie dobrze można zaliczyć do dziedziny geometrii dyskretnej. Być może właśnie to ujęcie oddaje prawdziwą naturę tej problematyki. W naszych rozważaniach będziemy posługiwać się głównie wygodniejszym z technicznego punktu widzenia językiem normy. Warto jednak pamiętać o tej geometrycznej stronie problemu, która często pozwala odnaleźć lepszą intuicję.

2.2. Oszacowanie górne na moc zbiorów ekwilateralnych

Jak widzieliśmy wcześniej, w przestrzeni ℓ_∞^n możemy wskazać 2^n punktów tworzących zbiór ekwilateralny. Okazuje się, że jest to sytuacja ekstremalna. Prawdziwe jest bowiem klasyczne

Twierdzenie 2.5 (Petty [66], Soltan [74]). *Jeśli X jest przestrzenią unormowaną wymiaru n, to $e(X) \leqslant 2^n$.*



Rysunek 1: Sześć dotykających się walców

Dowód. Załóżmy, że punkty $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tworzą zbiór ekwilateralny. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $||p_i - p_j|| = 1$ dla $i \neq j$. Niech P będzie otoczką wypukłą punktów p_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$, zaś przez $\mu(\cdot)$ oznaczmy miarę Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$. Łatwo zauważyć, że jeśli $\mu(P) = 0$, to punkty $p_1, p_2, \ldots, p_k$ należą do pewnej $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni afinicznej przestrzeni X, a więc w tym wypadku teza wynika natychmiast z rozumowania indukcyjnego, gdyż przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Załóżmy więc, że $\mu(P) > 0$. Dla każdego i zdefiniujmy zbiór $P_i = \frac{1}{2}(P + p_i)$, co geometrycznie odpowiada dwukrotnemu pomniejszeniu zbioru P i „zaczepieniu" go w każdym z wierzchołków. Bez trudu możemy sprawdzić następujące fakty:

- dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, k$ zbiór P_i zawiera się w P (co wynika z wypukłości zbioru P),
- dla dowolnych $i \neq j$ wnętrza zbiorów P_i oraz P_j nie przecinają się (co wynika z nierówności trójkąta),
- dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, k$ zachodzi równość $\mu(P_i) = \dfrac{1}{2^n}\mu(P)$.

Mamy zatem

$$\mu(P) \geqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(P_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^n}\mu(P) = \frac{k}{2^n}\mu(P),$$

a stąd oczywiście $k \leqslant 2^n$. □

Dokładniejsza analiza rozważanej sytuacji pozwala dodatkowo wykazać, że równość w nierówności $e(X) \leqslant 2^n$ (dla $\dim X = n$) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X jest izometrycznie izomorficzna z ℓ_∞^n, co geometrycznie oznacza, że kula jednostkowa w X jest n-wymiarowym równoległościanem. Punkty ekstremalne kuli tworzą wówczas wszystkie maksymalne zbiory ekwilateralne.

2.3. Hipoteza $e(X) \geqslant \dim X + 1$

W poprzednim podrozdziale zaprezentowaliśmy zupełnie elementarne oszacowanie górne na moc zbiorów ekwilateralnych w przypadku ogólnym. Uzyskanie dobrego oszacowania dolnego jest zadaniem nieporównywalnie trudniejszym. W bieżącym podrozdziale omówimy uzyskane dotychczas wyniki w tej dziedzinie.

Powszechnie znana (zob. np. [35], [66], [72]) jest następująca

Hipoteza 2.6. *Jeśli X jest przestrzenią unormowaną wymiaru n, to $e(X) \geqslant n + 1$.*

Powyższa hipoteza wydaje się być bardzo intuicyjna i może dziwić, że jest to do tej pory problem otwarty. Widzieliśmy już, że wszystkie przestrzenie ℓ_p^n dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ posiadają tę własność.

Intuicyjnie wydawać się może, że jeśli mamy n punktów tworzących zbiór ekwilateralny w przestrzeni $(n-1)$-wymiarowej, to dołożenie jednego wymiaru pozwoli nam dobrać $(n+1)$-szy punkt tak, aby nowy zbiór również był ekwilateralny. Takie podejście okazuje się być niestety zbyt naiwne – może się zdarzyć, że dołożenie dowolnie wielu wymiarów nie wystarczy do powiększenia danego zbioru ekwilateralnego. Świadczy o tym poniższy przykład.

Przykład 2.7 (Petty [66]). Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną oraz $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$, gdzie $||(x_1, x_2, \ldots x_n)|| = |x_1| + \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2}$. Patrząc geometrycznie, w przestrzeni X kule są podwójnymi stożkami nad zwykłymi $(n-1)$-wymiarowymi kulami euklidesowymi. Zauważmy, że w przestrzeni X istnieją zbiory ekwilateralne o 4 elementach, których nie da się rozszerzyć do 5-elementowych zbiorów ekwilateralnych. Rzeczywiście, rozważmy dowolny zbiór ekwilateralny S, do którego należą wektory $e_1, -e_1$. Warunek $||x - e_1|| = ||x + e_1||$ równoważny jest równości $x_1 = 0$. Jeśli $x \in S$, to mamy oczywiście $||x \pm e_1|| = 2$, gdyż $||e_1 - (-e_1)|| = 2$. Jako że $x_1 = 0$, to $1 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2} = 1$, a zatem $(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-2}$. Na jednostkowej sferze euklidesowej nie da się jednak wybrać 3 punktów w taki sposób, aby ich wzajemne odległości były parami równe 2. Dowodzi to nierówności $\#S \leqslant 4$.

Z drugiej strony, w przestrzeni X bez trudu można wskazać $(n+1)$-elementowe zbiory ekwilateralne: wystarczy znaleźć dowolny n-elementowy zbiór ekwilateralny w podprzestrzeni euklidesowej $x_1 = 0$ i tak dobrać $\lambda \in \mathbb{R}$, aby punkt λe_1 był $(n+1)$-szym punktem szukanego zbioru ekwilateralnego.

Omówimy teraz rezultaty dotyczące hipotezy 2.6, które zostałe uzyskane przez innych autorów. W rozdziałach 3 i 4 zostaną zaprezentowane wyniki autorskie.

W pewnych sytuacjach jesteśmy w stanie wykazać prawdziwość rozważanej hipotezy. Na przykład prostym ćwiczeniem jest

Stwierdzenie 2.8. *Hipoteza 2.6 zachodzi, gdy* $\dim X = 2$.

Można stwierdzić, że powyższe stwierdzenie zostało udowodnione już przez Euklidesa. Co prawda nie posługiwał się on pojęciem przestrzeni unormowanej, ale jego dowód istnienia trójkąta równobocznego na zwykłej płaszczyźnie można łatwo zastosować w przypadku ogólnym. Prawdziwe jest również

Twierdzenie 2.9 (Petty [66])**.** *Niech* $X = (\mathbb{R}^3, ||\cdot||)$ *będzie przestrzenią unormowaną. Jeżeli punkty* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^3$ *tworzą zbiór* p*-ekwilateralny, to istnieje wówczas punkt* $d \in \mathbb{R}^3$ *taki, że*

$$||d-a|| = ||d-b|| = ||d-c|| = p.$$

Łącząc to z poprzednim stwierdzeniem, natychmiast dostajemy

Wniosek 2.10. *Hipoteza 2.6 zachodzi, gdy* $\dim X = 3$.

W podrozdziale 3.2 zaprezentujemy autorski dowód twierdzenia 2.9 wykorzystujący rezultat Kramera i Németha o możliwości wpisania sympleksu w gładkie i ściśle wypukłe ciało.

Prawdziwość hipotezy 2.6 została dowiedziona również w przypadku $\dim X = 4$ przez Makeeva w [62]. Dla każdego wyższego wymiaru pozostaje to jednak problem otwarty.

Skoro nie potrafimy udowodnić hipotezy 2.6 w przypadku ogólnym, warto zadać zapytać o oszacowanie dolne na wymiar ekwilateralny, które będzie dążyło do nieskończoności przy wymiarze dążącym do nieskończoności. Mamy następujące

Twierdzenie 2.11 (Brass [13], Dekster [21])**.** *Jeśli* X *jest* n*-wymiarową przestrzenią unormowaną, to* $e(X) \geqslant c(\ln n)^{\frac{1}{3}}$ *dla pewnej stałej* $c > 0$.

Powyższego twierdzenia nie będziemy dokładnie dowodzić, opiszemy tylko główną myśl dowodową. Pierwszy krok polega na znalezieniu w dowolnej przestrzeni X podprzestrzeni, która jest bliska przestrzeni euklidesowej w sensie odległości Banacha-Mazura. Gwarantuje to słynne twierdzenie Dvoretzky'ego.

Twierdzenie 2.12 (Dvoretzky)**.** *Istnieje stała $c > 0$ taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dowolnej liczby naturalnej m każda przestrzeń unormowana X wymiaru nie mniejszego niż $e^{cm\varepsilon^{-2}}$ zawiera m-wymiarową podprzestrzeń, której odległość Banacha-Mazura do przestrzeni ℓ_2^m nie przekracza $1 + \varepsilon$.*

A zatem im bardziej przypominającej przestrzeń euklidesową podprzestrzeni szukamy, tym mniejszy jej wymiar możemy wybrać. Patrząc geometrycznie, jeśli rozważymy kulę jednostkową w przestrzeni X, to szukamy takiego jej cięcia środkowego (przestrzenią m-wymiarową), które będzie z dużą dokładnością przypominać elipsoidę.

Dla przestrzeni, które są wystarczająco bliskie przestrzeni euklidesowej, mamy twierdzenie Brassa i Dekstera, kluczowe w dowodzie twierdzenia 2.11.

Twierdzenie 2.13 (Brass [13], Dekster [21])**.** *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, której odległość Banacha-Mazura od przestrzeni ℓ_2^n nie przekracza $1 + \frac{1}{n+1}$. Wówczas $e(X) \geqslant n + 1$.*

Dowód opiera się na pomysłowym zastosowaniu twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym. Łącząc ze sobą twierdzenie 2.12 z $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ i twierdzenie 2.13, łatwo otrzymujemy prawdziwość twierdzenia 2.11.

W roku 2005 rezultat uzyskany w twierdzeniu 2.11 został wzmocniony przez Swanepoela i Villę, którzy zamiast twierdzenia Dvoretzky'ego skorzystali z twierdzenia Alona i Milmana (zobacz [1]). Mówiąc poglądowo głosi ono, że jeśli przestrzeń X nie ma stosunkowo dużej podprzestrzeni bliskiej przestrzeni euklidesowej, to posiada stosunkowo dużą podprzestrzeń bliską przestrzeni ℓ_∞^m. Intuicja geometryczna jest jasna, gdyż twierdzenie to oznacza, że kula jednostkowa w X posiada cięcie środkowe przypominające elipsoidę lub równoległościan. W przypadku kiedy przestrzeń X posiada podprzestrzeń bliską euklidesowej Swanepoel i Villa również opierają się na twierdzeniu 2.13, zaś w przeciwnym razie korzystają z udowodnionego przez nich odpowiednika tego twierdzenia dla przestrzeni bliskich przestrzeni ℓ_∞^n. Mamy bowiem

Twierdzenie 2.14 (Swanepoel i Villa [77])**.** *Dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej X, której odległość Banacha-Mazura od przestrzeni ℓ_∞^n nie przekracza $\frac{3}{2}$, zachodzi nierówność $e(X) \geqslant n + 1$.*

W rzeczywistości wystarczy aby odległość Banacha-Mazura X i ℓ_∞^n nie przekraczała 2, co zauważył Averkov w [5] – dowód Swanepoela i Villi przebiega prawie identycznie. Rezultat uzyskany przez Averkova uogólnia również powyższy wynik na zanurzenia bardziej ogólnych skończonych przestrzeni metrycznych. My jednak podamy dowód twierdzenia w przypadku przestrzeni unormowanej, której odległość do ℓ_∞^n nie przekracza 2. Rozumowanie opiera się na tej samej technice co dowód twierdzenia 2.13, korzystającej z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Okazuje się, że owa metoda daje się zastosować w również dużo szerszych klasach przestrzeni. Tego typu wyniki stanowią sporą część rozdziału 4. Zaprezentujemy dowód twierdzenia 2.14 w celu wprowadzenia do dalszych uogólnień uzyskanych w rozdziale 4.

Dowód twierdzenia 2.14.

Niech $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$. Jeżeli przestrzeń unormowana X' jest izometrycznie izomorficzna z X, to oczywiście $e(X) = e(X')$. Skoro odległość Banacha-Mazura przestrzeni X i ℓ_∞^n nie przekracza 2, to możemy w tej sytuacji przyjąć, iż dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ prawdziwa jest nierówność

$$||x|| \leqslant ||x||_\infty \leqslant 2||x||.$$

Niech I będzie zbiorem $N = \frac{n(n+1)}{2}$ par postaci $\{(i,j) \ : \ 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\}$. Dla $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in I} \in [0,1]^N$ definiujemy

$$p_1(\varepsilon) = (-1, 0, \dots, 0),$$

$$p_j(\varepsilon) = (\varepsilon_{1,j}, \dots, \varepsilon_{j-1,j}, -1, 0, \dots, 0), \quad 2 \leqslant j \leqslant n-1,$$

$$p_n(\varepsilon) = (\varepsilon_{1,n}, \dots, \varepsilon_{n-1,n}, -1),$$

$$p_{n+1}(\varepsilon) = (\varepsilon_{1,n+1}, \dots, \varepsilon_{n,n+1}).$$

Zauważmy, że jeżeli $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$, to moduł pierwszych $i-1$ współrzędnych wektora $p_j(\varepsilon) - p_i(\varepsilon)$ nie przekracza 1, gdyż współrzędne wektora ε należą do przedziału $[0,1]$. Współrzędna o numerze i jest równa $1 + \varepsilon_{i,j}$, j-ta jest równa 1 (jeżeli $j \neq n+1$, gdyż w innym wypadku nie ma j-tej współrzędnej), zaś pozostałe współrzędne są równe 0. Widzimy tym samym, że $||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_\infty = 1 + \varepsilon_{i,j}$.

Rozważmy teraz odwzorowanie $\varphi : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ zdefiniowane jako $\varphi(\varepsilon) = (\varphi_{i,j}(\varepsilon))_{(i,j)\in I}$, gdzie

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||$$

dla $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$. Zauważmy, że z nierówności pomiędzy normami $||\cdot||$ i $||\cdot||_\infty$ wynikają zależności

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) \geqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_\infty = 0$$

oraz

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) \leqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - \frac{1}{2}||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_\infty = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_{i,j}) \leqslant 1.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że obraz odwzorowania φ jest zawarty w zbiorze $[0,1]^N$. Odwzorowanie φ jest więc ciągłym odwzorowaniem z prowadzącym z N-wymiarowej kostki w N-wymiarową kostkę. Z twierdzenia Brouwera posiada ono punkt stały $\varepsilon' \in [0,1]^N$. Pozostaje zauważyć, że z równości $\varphi_{i,j}(\varepsilon') = \varepsilon'_{i,j}$ wynika, że $||p_i(\varepsilon') - p_j(\varepsilon')|| = 1$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$. Zbiór $p_1(\varepsilon'), p_2(\varepsilon'), \dots, p_{n+1}(\varepsilon')$ tworzy więc szukany zbiór ekwilateralny o mocy $n+1$. Kończy to dowód. $\square$

Łącząc powyższy rezultat z twierdzeniem Alona i Milmana otrzymujemy

Twierdzenie 2.15 (Swanepoel i Villa [77]). *Jeśli X jest n-wymiarową przestrzenią unormowaną, to $e(X) \geqslant e^{c\sqrt{\ln n}}$ dla pewnej stałej $c > 0$.*

Jest to obecnie najlepsze oszacowanie dolne na wymiar ekwilateralny w przypadku ogólnym.

2.4. Inne znane rezultaty

Jak pokazaliśmy wcześniej, w przestrzeni ℓ_1^n możemy bez trudu wskazać $2n$ punktów tworzących zbiór ekwilateralny, zaś w przestrzeniach ℓ_p^n dla $1 < p < \infty$ możemy łatwo znaleźć $n+1$ takich punktów. Prowadzi to do hipotez postawionych przez Kusnera (zob. [36]).

Hipoteza 2.16 (Kusner). *Jeśli n jest liczbą naturalną, to $e(\ell_1^n) = 2n$.*

Hipoteza 2.17 (Kusner). *Jeśli n jest liczbą naturalną oraz $2 \leqslant p < \infty$, to $e(\ell_p^n) = n + 1$.*

Dodajmy, że z rozdziałów pierwszego i drugiego wiemy już, że $e(\ell_\infty^n) = 2^n$, zaś przy ustalonym $1 < p < 2$ można udowodnić, że $e(\ell_p^n) > n + 1$ dla n odpowiednio dużych (zob. [76]).

Hipoteza 2.16 jest udowodniona dla $1 \leqslant n \leqslant 4$ (zob. [6] i [47]), zaś w pozostałych przypadkach jest to problem otwarty. Hipoteza 2.17 jest dowiedziona dla dowolnego n w sytuacji euklidesowej $p = 2$ oraz dla $p = 4$ (zob. [76]). Pozostałe przypadki również nie zostały do tej pory rozwiązane.

Alon i Pudlák, używając metod algebry liniowej i teorii aproksymacji, uzyskali najlepsze do tej pory oszacowanie na wymiar ekwilateralny przestrzeni ℓ_p^n w przypadku ogólnym.

Twierdzenie 2.18 (Alon i Pudlák [2]). *Istnieje taka stała $c > 0$, że jeśli $1 \leqslant p < \infty$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to $e(\ell_p^n) \leqslant cpn^{\frac{2p+2}{2p-1}}$.*

Natomiast w przypadku przestrzeni ℓ_p^n, gdzie p jest liczbą naturalną nieparzystą, wykazali oni

Twierdzenie 2.19 (Alon i Pudlák [2]). *Jeśli $1 \leqslant p < \infty$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, to istnieje taka stała $c_p > 0$, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $e(\ell_p^n) \leqslant c_p n \ln n$.*

Choć powyższe oszacowania są już rzędu niewiele wyższego niż liniowy, to wydaje się, że dalej dużo im brakuje do pożądanego oszacowania przez $n+1$ (lub przez $2n$ w przypadku przestrzeni ℓ_1^n).

Czytelnik zainteresowany dalszymi informacjami na temat zbiorów równobocznych w skończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych powinien zajrzeć do pracy przeglądowej K.J. Swanepoela *Equilateral sets in finite-dimensional normed spaces* (zobacz [75]).

3. Wokół twierdzenia Petty'ego

Głównym celem bieżącego rozdziału jest podanie alternatywnego dowodu twierdzenia 2.9 Petty'ego: w przestrzeni unormowanej wymiaru nie mniejszego niż 3 dowolny 3-elementowy zbiór ekwilateralny można rozszerzyć do 4-elementowego zbioru ekwilateralnego. Twierdzenie to rozwiązuje zatem przypadek $n = 3$ hipotezy 2.6. Przypomnijmy, że hipoteza ta pozostaje otwarta dla wszystkich $n \geqslant 5$ oraz, że twierdzenia Petty'ego nie da się uogólnić już na żaden wyższy wymiar. Wynika to z przykładu 2.7 (również pochodzącego od Petty'ego), w którym dla każdego $n \geqslant 4$ skonstruowana została n-wymiarowa przestrzeń unormowana, posiadająca 4-elementowe zbiory ekwilateralne maksymalne w sensie inkluzji.

Oryginalny dowód twierdzenia Petty'ego korzysta z faktu topologicznego: płaszczyzna bez punktu nie jest ściągalna, czyli nie jest homotopijnie równoważna przestrzeni jednopunktowej. Ważną rolę odgrywa również w nim geometria dwuwymiarowych przestrzeni unormowanych. Częściowo z tego powodu nie jest oczywiste w jaki sposób można próbować przeprowadzić analogiczne rozumowanie w wyższych wymiarach. Stanowi to motywację do próby odnalezienia alternatywnych podejść, które potencjalnie mogłyby stać się inspiracją do uzyskania nowych rezultatów.

Idea naszego alternatywnego dowodu opiera się na twierdzeniu Kramera i Németha dotyczącego możliwości wpisania sympleksu w gładkie i ściśle wypukłe ciało. W następnym podrozdziale przybliżymy to twierdzenie wraz z jego dowodem, który stanowi przykład bardzo pomysłowego zastosowania twierdzenia Brouwera do geometrii ciał wypukłych. Kolejny podrozdział zawiera dowód twierdzenia Petty'ego wraz z innymi pomocniczymi rezultatami. Warto tu wspomnieć o stwierdzeniu 3.5, w którym dowodzimy, iż zbiór p-ekwilateralny na płaszczyźnie posiada okrąg opisany o promieniu nie przekraczającym p (w danej normie). Na końcu tego podrozdziału prowadzimy krótkie rozważania na temat możliwości uogólnienia przedstawionego rozumowania na wyższe wymiary.

Ostatni podrozdział dotyczy rozszerzenia przykładu 2.7. Dowodzimy w nim, iż fenomen owego przykładu może wystąpić również w przestrzeniach gładkich i ściśle wypukłych.

Autorskie rezultaty z tego rozdziału zostały opublikowane w pracy *An alternative proof of Petty's theorem on equilateral sets* (zob. [43]).

Warto na koniec wspomnieć, że niedługo przed publikacją pracy [43] twierdzenie Petty'ego doczekało się jeszcze innego alternatywnego podejścia. Väisälä w [80] podał krótki dowód następującego faktu: przecięcie dwóch sfer, pochodzących od dowolnej normy $||\cdot||$ w $\mathbb{R}^n$, jest zbiorem spójnym. Twierdzenie Petty'ego okazuje się być nietrudnym wnioskiem płynącym z tego rezultatu dla $n = 3$.

3.1. Wpisywanie sympleksu w ciało wypukłe

Powszechnie znany fakt mówi o tym, iż na każdym niezdegenerowanym sympleksie można opisać sferę euklidesową. Nasuwa się naturalne pytanie: dla jakich innych ciał wypukłych prawdziwa jest podobna własność? Częściową odpowiedź daje Twierdzenie Kramera i Németha z 1975 roku (zob. [50]), które orzeka, iż że warunkiem wystarczającym jest ścisła wypukłość i gładkość danego ciała wypukłego. Przybliżymy dowód tego twierdzenia. Zaczniemy od wykazania rezultatu pomocniczego.

Lemat 3.1. *Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie ściśle wypukłym ciałem i niech $v \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym wektorem. Rozważmy odwzorowanie $f : C \to \mathbb{R}$ zdefiniowane jako:*

$$f(x) = \sup\{t \geqslant 0 : x + tv \in C\}.$$

Wówczas odwzorowanie f jest ciągłe.

Dowód. Sprawdzimy, że jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem punktów z C zbieżnym do pewnego $x \in C$, to $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Przyjmijmy, iż tak nie jest. Nietrudno zauważyć, że funkcja f jest ograniczona, jeśli więc ciąg wartości $f(x_n)$ nie zmierza do $f(x)$, to istnieje podciąg tego ciągu, który zmierza do pewnej liczby rzeczywistej $y \neq f(x)$. Bez straty dla ogólności możemy przyjąć, że $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest już tym podciągiem. Oczywiście $x_n + f(x_n)v \in \operatorname{bd} C$, a więc z domkniętości brzegu wynika również, iż $x+yv \in \operatorname{bd} C$. Jednocześnie $x+f(x)v \in \operatorname{bd} C$ i $f(x)$ jest największą liczbą o tej własności. W szczególności $y < f(x)$.

Ustalmy teraz dowolną liczbę rzeczywistą $t \in [0, f(x) - y]$. Z wypukłości C wynika, iż $x + (y + t)v \in C$. Z drugiej strony, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n + (f(x_n) + t)v \notin \operatorname{int} C$. Przechodząc do granicy dostajemy więc również, że $x + (y + t)v \notin \operatorname{int} C$. Wykazaliśmy w ten sposób, iż $x + (y + t)v \in \operatorname{bd} C$ dla dowolnego $t \in [0, f(x) - y]$. Oznacza to, że odcinek o końcach $x + yv$ i $x + f(x)v$ jest zawarty w brzegu C, co przeczy ścisłej wypukłości ciała. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu.

Mając do dyspozycji powyższy lemat, możemy przejść do dowodu głównego twierdzenia bieżącego podrozdziału.

Twierdzenie 3.2 (Kramer i Németh [50])**.** *Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie gładkim i ściśle wypukłym ciałem oraz niech $p_0, p_1, \ldots, p_n$ będą wierzchołkami dowolnego niezdegenerowanego sympleksu w tej przestrzeni. Wówczas istnieje wektor $z \in \mathbb{R}^n$ oraz $r > 0$ takie, że*

$$z + rp_0, z + rp_1, \ldots z + rp_n \in \operatorname{bd} C.$$

Innymi słowy na dowolnym niezdegenerowanym sympleksie można opisać jednokładną kopię danego gładkiego i ściśle wypukłego ciała (w skali dodatniej).

Dowód. Niech $g = \frac{p_0+p_1+\ldots+p_n}{n+1}$ będzie środkiem ciężkości danego sympleksu i oznaczmy $r_i = p_i - g$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$. Dla danego $0 \leqslant i \leqslant n$ definiujemy następnie odwzorowanie $f_i : C \to \mathbb{R}$ tak jak w lemacie 3.1 dla wektora $v = r_i$. Niech h_i będzie odwzorowaniem prowadzącym z C w C zdefiniowanym jako $h_i(x) = x + f_i(x)r_i$. Punkt $h_i(x)$ jest więc najdalszym przecięciem półprostej o początku w punkcie x i kierunku r_i z brzegiem C (patrz rys. 3.1). Wprowadźmy jeszcze jedno odwzorowanie $h : C \to C$ zdefiniowane jako $h(x) = \frac{h_0(x)+h_1(x)+\ldots h_n(x)}{n+1}$.

Z lematu 3.1 wynika w szczególności, że odwzorowanie h jest ciągłe. Ponieważ prowadzi ono z C w C, na mocy twierdzenia Brouwera istnieje punkt stały tego odwzorowania. Oznaczmy go przez s. Równość $h(s) = s$ pociąga za sobą

$$f_0(s)r_0 + f_1(s)r_1 + \ldots + f_n(s)r_n = 0.$$

Zauważmy, że $r_0 + r_1 + \ldots + r_n = 0$ i ponieważ sympleks o wierzchołkach $p_0, p_1, \ldots p_n$ jest niezdegenerowany z elementarnej algebry liniowej łatwo wynika, że $a_0r_0+a_1r_1+\ldots a_nr_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. A zatem

$$f_0(s) = f_1(s) = \ldots = f_n(s) = \lambda.$$

Załóżmy na razie, że $\lambda > 0$. Z definicji funkcji f_i mamy $s + \lambda r_i \in \operatorname{bd} C$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$. W szczególności

$$(s - \lambda g) + \lambda p_0, \ldots, (s - \lambda g) + \lambda p_n \in \operatorname{bd} C,$$

a zatem przyjmując $z = s - \lambda g$ oraz $r = \lambda$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

Pozostało wykazać, że $\lambda > 0$, czyli, że punkt s nie może znajdować się na brzegu.

Załóżmy przeciwnie i niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem podpierającym ciała C w punkcie s, tzn. $F(s) = 1$ i $F(x) \leqslant 1$ dla $x \in C$. Warunek

$$0 = f_0(z) = f_1(z) = \ldots = f_n(z)$$

oznacza, że prowadząc z punktu s wektor w każdym z kierunków r_i, natychmiast opuszczamy ciało C. Jak łatwo zauważyć jest to równoważne nierówności $F(r_i) \geqslant 0$ dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant n$. Mamy zatem

$$0 \leqslant F(r_0) + F(r_1) + \ldots F(r_n) = F(0) = 0,$$

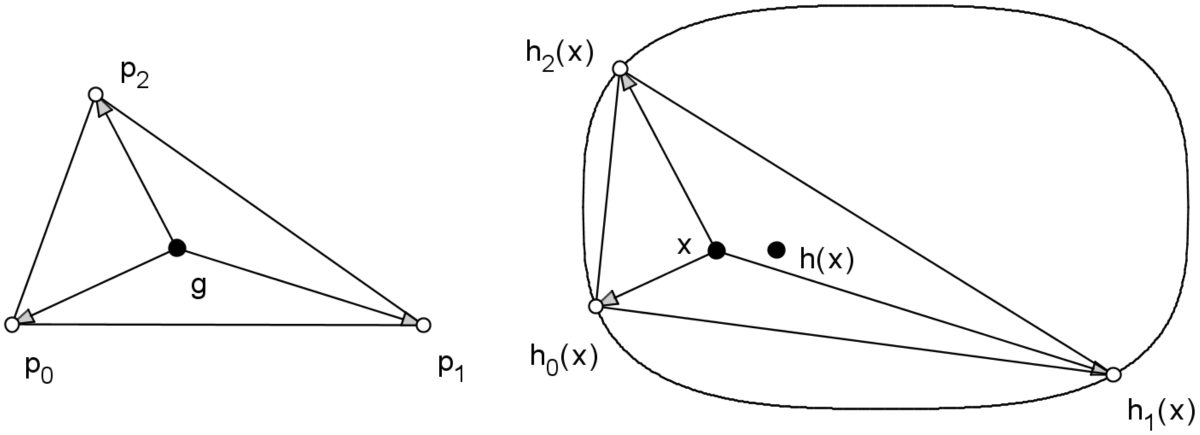
a stąd otrzymujemy, że $F(r_0) = F(r_1) = \ldots = F(r_n) = 0$. Jest to jednak sprzeczność, gdyż jądro funkcjonału F jest wymiaru $n - 1$, a z wektorów $r_0, r_1, \ldots, r_n$ możemy wybrać n liniowo niezależnych. Kończy to dowód twierdzenia. □

Nasuwa się pytanie, czy podobnie jak w przypadku kuli euklidesowej możemy zagwarantować jedyność jednokładnej kopii danego ciała opisanej na sympleksie. Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna. W przypadku płaszczyzny mamy jednak poniższy rezultat, którego dowód zaczęrpneliśmy z [63].

Stwierdzenie 3.3. *Niech C będzie ściśle wypukłym ciałem w $\mathbb{R}^2$ oraz niech a, b, $c \in \mathbb{R}^2$ będą wierzchołkami niezdegenerowanego trójkąta. Wówczas istnieje co najwyżej jedna para $(z, r) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$ taka, że*

$$z + ra, \;\; z + rb, \;\; z + rc \in \operatorname{bd} C.$$

Innymi słowy, na dowolnym trójkącie istnieje co najwyżej jedna jednokładna kopia ciała C (w skali dodatniej), która jest na nim opisana.



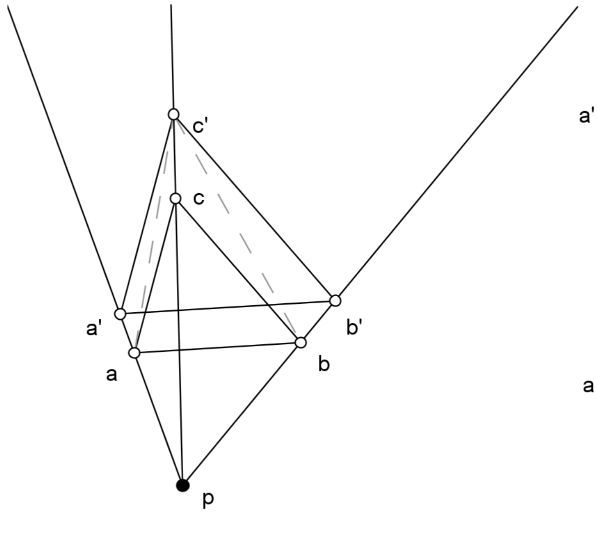
Rysunek 2: Odwzorowania h_i oraz h

Dowód. Jeżeli dla trójkąta o wierzchołkach a, b, c istnieją dwie różne jednokładne kopie ciała C w skali dodatniej, które są na nim opisane, to równoważnie w ciało C można wpisać dwie różne przeskalowane dodatnio translacje tego trójkąta. Możemy założyć, że jedna z tych przeskalowanych translacji to po prostu trójkąt o wierzchołkach a, b, c, zaś wierzchołki drugiej to odpowiednio a', b', c'. Aby udowodnić tezę, wystarczy wykazać, że punkty a, b, c, a', b', c' nie stanowią w żadnej kolejności wierzchołków sześciokąta wypukłego. Otrzymamy wówczas sprzeczność ze ścisłą wypukłością ciała C.

Rozważane trójkąty są albo jednokładne (ze skalą dodatnią), albo pierwszy trójkąt powstaje w wyniku translacji drugiego. Przypuśćmy najpierw, że zachodzi pierwszy z tych przypadków.

Niech p będzie środkiem jednokładności przeprowadzającej trójkąt o wierzchołkach a, b, c na trójkąt o wierzchołkach a', b', c'. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że skala jednokładności jest większa niż 1. Jeśli punkt p leży wewnątrz trójkąta o wierzchołkach a, b, c (lub równoważnie wewnątrz trójkąta o wierzchołkach a', b', c'), to jeden trójkąt zawiera się w drugim, a zatem ich wierzchołki nie są wierzchołkami sześciokąta wypukłego. Załóżmy więc, że punkt p leży na zewnątrz rozważanych trójkątów oraz niech l_1, l_2, l_3 będą półprostymi o początku w p i przechodzącymi odpowiednio przez pary punktów a, a', b, b' i c, c' (zobacz rys. 3.1). Jasne jest, że jeśli pewne dwie z tych półprostych pokrywają się, to pewne cztery z rozważanych punktów są współliniowe, czyli w szczególności nie mogą stanowić wierzchołków sześciokąta wypukłego. Załóżmy bez straty ogólności, że półprosta l_3 jest zawarta pomiędzy prostymi l_1 i l_2. Punkt c leży na półprostej l_3 pomiędzy punktami p i c'. Jeśli jest on po przeciwnej stronie prostej przechodzącej przez punkty a, b niż punkt p, to jasne jest, że znajduje się on na fragmencie półprostej l_3 zawartej w trójkącie o wierzchołkach a, b, c', czyli w szczególności $c \in \operatorname{conv}\{a, b, c'\}$. W przeciwnym razie punkt c' leży w po tej samej stronie prostej przechodzącej przez a', b' co punkt p i widzimy, że $c' \in \operatorname{conv}\{a', b', c\}$. W obu przypadkach teza jest dowiedziona.

Dowód w sytuacji, w której pierwszy trójkąt jest translacją drugiego, jest zupełnie analogiczny. Rozważamy proste l_1, l_2, l_3 przechodzące odpowiednio przez pary punktów a, a', b, b' i c, c'. Są one parami równoległe i jeśli pewne dwie z nich pokrywają się, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym wypadku możemy założyć, że prosta l_3 znajduje się pomiędzy l_1 i l_2. Dalej rozumujemy analogicznie jak wcześniej, rozważając położenia punktów c i c' względem prostych przechodzących odpowiednio przez a, b oraz a', b'. $\square$



Rysunek 3: Przykładowe konfiguracje punktów a, b, c, a', b', c' odpowiednio w przypadku jednokładności i translacji

Łącząc ze sobą twierdzenie 3.2 i stwierdzenie 3.3 dostajemy

Wniosek 3.4. *Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie gładkim i ściśle wypukłym ciałem, zaś a, b, $c \in \mathbb{R}^2$ niech będą wierzchołkami niezdegenerowanego trójkąta. Wówczas istnieje dokładnie jeden wektor $z \in \mathbb{R}^2$ oraz dokładnie jedna liczba rzeczywista $r > 0$, dla których $z+ra, z+rb, z+rc \in \operatorname{bd} C$.*

W przypadku gładkiego i ściśle wypukłego ciała na płaszczyźnie mamy więc pełną analogię z twierdzeniem o jedyności okręgu opisanego na danym trójkącie. Tego typu analogia nie jest jednak prawdziwa dla wyższych wymiarów, ze względu na brak odpowiednika stwierdzenia 3.3. Co więcej, jak pokazał Goodey w [32], jeżeli $n \geqslant 3$ oraz dla każdego sympleksu w $\mathbb{R}^n$ istnieje co najwyżej jedna jednokładna kopia (w skali dodatniej) danego ciała wypukłego C, która jest opisana na tym sympleksie, to ciało wypukłe C jest elipsoidą. A więc jeżeli C jest symetrycznym ciałem wypukłym, które spełnia taki warunek, to przestrzeń unormowana indukowana przez C jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią euklidesową.

Warto również wspomnieć, iż warunek ścisłej wypukłości w twierdzeniu 3.2 można w rzeczywistości opuścić. Okazuje się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby każdy niezdegenerowany sympleks posiadał jednokładną kopię wpisaną w dane ciało, jest gładkość ciała wypukłego. Nie jest trudno udowodnić, że jest to warunek konieczny. To, że jest to warunek wystarczający wykazali niezależnie od siebie Gromov w [34] oraz Makeev w [61]. Do naszych celów wystarczy jednak słabszy rezultat dany w twierdzeniu 3.2.

Czytelnik zainteresowany innymi zagadnieniami geometrii ciał wypukłych powinien zajrzeć do pracy *The geometry of Minkowski spaces – a survey. Part I* autorstwa: H. Martini, K.J. Swanepoel, G. Weiss (zobacz [63]). Mając do dyspozycji narzędzia tego rozdziału, możemy powrócić do zagadnienia zbiorów ekwilateralnych.

3.2. Alternatywny dowód twierdzenia Petty'ego

Celem tego podrozdziału jest podanie alternatywnego dowodu twierdzenia 2.9 z wykorzystaniem rezultatów dotyczących możliwości wpisania sympleksu w ciało wypukłe. Skorzystamy w istotny sposób z wniosku 3.4. Aby to jednak zrobić potrzebujemy przyjrzeć się szczególnej sytuacji, w której C jest kołem jednostkowym pewnej normy zaś punkty $a,\ b,\ c$ tworzą zbiór ekwilateralny w owej normie. Mamy następujące

Stwierdzenie 3.5. *Dana jest norma $||\cdot||$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz punkty $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^2$, tworzące zbiór ekwilateralny o boku p w normie $||\cdot||$. Istnieje wówczas wektor $s \in \mathbb{R}^2$ taki, że*

$$||a-s|| = ||b-s|| = ||c-s|| \leqslant p.$$

Innymi słowy, dowolny trójelementowy zbiór p-ekwilateralny posiada okrąg opisany o promieniu nie większym niż p (w normie $||\cdot||$).

Przed przystąpieniem do dowodu potrzebujemy modyfikacji lematu 3.1. Okazuje się bowiem, że w przypadku $n = 2$ ścisła wypukłość normy nie jest konieczna. Aby uzyskać prawdziwość powyższego stwierdzenia w przypadku dowolnej normy wykażemy

Lemat 3.6. *Dana jest norma $||\cdot||$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz niezerowy wektor v tej przestrzeni. Rozważmy odwzorowanie $f : C \to \mathbb{R}$ zdefiniowane jako:*

$$f(x) = \sup\{t \geqslant 0 : ||x + tv|| = 1\}.$$

Wówczas odwzorowanie f jest ciągłe i ograniczone przez $\frac{2}{||v||}$.

Dowód. Jeżeli $x \in C$ oraz $t > \frac{2}{||v||}$, to

$$||x + tv|| \geqslant ||tv|| - ||x|| > 2 - 1 = 1,$$

co daje drugą część tezy.

Aby udowodnić ciągłość f, rozważmy średnicę D koła jednostkowego C, która jest prostopadła do wektora v. Niech $P : C \to D$ będzie projekcją ortogonalną. Z oczywistej równości $f = f \circ P$ wynika, iż wystarczy sprawdzić ciągłość zawężenia $\tilde{f} = f|_D$.

Rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ zbieżny do pewnego $x \in D$. Jako, że funkcja $\tilde{f}$ jest ograniczona, wystarczy sprawdzić, iż dowolny podciąg zbieżny ciągu $(\tilde{f}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $\tilde{f}(x)$. Załóżmy więc, że $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}(x_{n_k}) = y$ dla pewnego podciągu $(\tilde{f}(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Skoro

$$||x + yv|| = \lim_{k\to\infty} ||x_{n_k} + \tilde{f}(x_{n_k})v|| = 1,$$

to wprost z definicji funkcji f wynika nierówność $y \leqslant \tilde{f}(x)$.

Z drugiej jednak strony, nierówność trójkąta daje natychmiast wklęsłość funkcji $\tilde{f}$. Ponieważ funkcja wklęsła określona na przedziale domkniętym jest półciągła z dołu, prawdziwa jest nierówność $y \geqslant \tilde{f}(x)$. A zatem $y = \tilde{f}(x)$ i dowód jest zakończony. □

Dowód stwierdzenia 3.5.

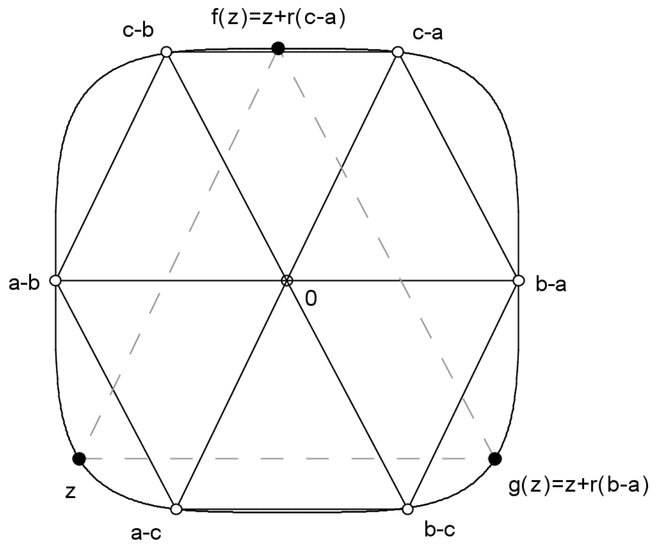
Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż $p = 1$. Niech C będzie kołem jednostkowym normy $||\cdot||$. Zdefiniujmy odwzorowania $f, g : C \to [0, +\infty)$ tak jak w lemacie 3.6 dla wektorów $c - a$ i $b - a$. A zatem $f(x)$ jest największą liczbą nieujemną, dla której zachodzi równość $||x + f(x)(c - a)|| = 1$ i w analogiczny sposób definiujemy funkcję g. Z lematu 3.1 wynika ciągłość odwzorowań f i g oraz ich ograniczoność przez 2. Zauważmy teraz, że $f(a - c) = 2$ i $g(a - b) = 2$. Tym samym $f(x) \geqslant g(x)$ dla $x = a - c$ oraz $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x = a - b$. Z własności Darboux wynika zatem, że na łuku okręgu jednostkowego normy $||\cdot||$ pomiędzy punktami $a - b$ i $a - c$ istnieje taki punkt z, że $f(z) = g(z) = r$ (patrz rys. 3.2). Wtedy

$$||z + r(c - a)|| = ||z + r(b - a)|| = 1,$$

a zatem o ile tylko $r > 0$, to punkty $z, z + r(c - a), z + r(b - a)$ tworzą wierzchołki niezdegenerowanego trójkąta wpisanego w okrąg, który jest jednokładną kopią w skali dodatniej wyjściowego trójkąta. Wynika stąd, że na trójkącie o wierzchołkach a, b, c można opisać okrąg w normie $||\cdot||$, którego promień jest równy $\frac{1}{r}$. Wystarczy więc wykazać, że $r \geqslant 1$.

Rozważmy równoległobok o wierzchołkach $0, c - b, a - b, a - c$. Ponieważ punkty z oraz $z + r(c - a)$ są na zewnątrz tego równoległoboku, a odcinek je łączący jest równoległy do jednego z boków (bo $(c - b) - (a - b) = c - a$), musi zachodzić nierówność $r \geqslant 1$. Kończy to dowód stwierdzenia. □

Aby wykorzystać w pełni uzyskane do tej pory rezultaty musimy założyć gładkość i ścisłą wypukłość normy. W celu zredukowania przypadku ogólnego do sytuacji, w której norma jest gładka i ściśle wypukła posłużymy się technika aproksymacyjną. Dowód twierdzenia 3.9 również zostanie przeprowadzony w oparciu o podobną metodę. Skorzystamy z następującego intuicyjnego wyniku.



Rysunek 4: Dowód stwierdzenia 3.5

Stwierdzenie 3.7. *Niech $||\cdot||$ będzie normą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Załózmy, że wektory jednostkowe $\pm p_1, \pm p_2, \ldots, \pm p_m$ są wierzchołkami symetrycznego wielościanu wypukłego. Wówczas istnieje gładka i ściśle wypukła norma $||\cdot||_0$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ spełniająca*

$$(1-\varepsilon)||x||_0 \leqslant ||x|| \leqslant (1+\varepsilon)||x||_0$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $||p_i||_0 = 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$.

Dowód. Dowód znacznie ogólniejszego rezultatu znajduje się [30]. □

Przed podaniem alternatywnego dowodu twierdzenia Petty'ego potrzebujemy jeszcze jednego pomocniczego wyniku. Wykorzystamy go tylko w przypadku dwuwymiarowym i trójwymiarowym, ale zaprezentujemy dowód w pełnej ogólności.

Lemat 3.8. *W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dane są punkty $p_0, p_1, \ldots, p_n$ będące wierzchołkami niezdegenerowanego sympleksu. Wówczas punkty $p_i - p_j$, gdzie $0 \leqslant i \neq j \leqslant n$, są wierzchołkami wielościanu wypukłego* $\operatorname{conv}\{p_i - p_j : 0 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$.

Dowód. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że pewien z podanych punktów zapisuje się jako kombinacja wypukła pozostałych. Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż jest to punkt $p_n - p_0$.

Wprowadźmy oznaczenie $q_i = p_i - p_0$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$. Skoro sympleks o wierzchołkach $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest niezdegenerowany, to wektory q_i są liniowo niezależne dla $0 \leqslant i \leqslant n$. Wykażemy, że jeśli

$$q_n = \sum_{0 \leqslant k \neq l \leqslant n} t_{k,l}(p_k - p_l),$$

gdzie $t_{k,l} \in [0,1]$ oraz $\sum_{0 \leqslant k \neq l \leqslant n} t_{k,l} = 1$, to $t_{n,0} = 1$ i $t_{k,l} = 0$ dla $(k,l) \neq (n,0)$. Mamy bowiem

$$q_n = \sum_{0 \leqslant k \neq l \leqslant n} t_{k,l}(p_k - p_l) = \sum_{0 \leqslant k \neq l \leqslant n} t_{k,l}(p_k - p_0 + p_0 - p_l) = \sum_{0 \leqslant k \neq l \leqslant n} t_{k,l}(q_k - q_l)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{0 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq k}} t_{k,l} - \sum_{\substack{0 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq k}}^{n} t_{l,k} \right) q_k.$$

Wektory $q_1, q_2, \ldots, q_n$ są liniowo niezależne, a więc porównując współczynnik przy q_n, dostajemy równość

$$\sum_{l=0}^{n-1} t_{n,l} - \sum_{l=0}^{n-1} t_{l,n} = 1.$$

Ponieważ liczby $t_{k,l}$ są nieujemne i sumują się do 1, otrzymujemy natychmiast, że

$$\sum_{l=0}^{n-1} t_{n,l} = 1 \text{ oraz } t_{k,l} = 0 \text{ dla } k \neq n.$$

Jeśli $t_{n,0} = 1$ i $t_{n,l} = 0$ dla $1 \leqslant l \leqslant n-1$, to dostajemy tezę. Załóżmy więc, że $t_{n,l} \neq 0$ dla pewnego $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Łatwo zauważyć, że wówczas współczynnik przy wektorze q_l w rozważanej kombinacji jest równy $-t_{n,l}$, a więc jest niezerowy. Jest to sprzeczność z liniową niezależnością wektorów $q_1, q_2, \ldots, q_n$, która kończy dowód lematu. $\square$

Jesteśmy teraz gotowi, aby podać alternatywny dowód twierdzenia Petty'ego.

Alternatywny dowód twierdzenia 2.9. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p = 1$. Rozważymy najpierw przypadek, w którym norma $||\cdot||$ jest gładka i ściśle wypukła.

Oznaczmy przez π płaszczyznę zawierającą punkty a, b, c. Będziemy rozważać cięcia kuli jednostkowej C płaszczyznami równoległymi do π. Wszystkie takie cięcia, które nie są puste i jednopunktowe, są pewnymi gładkimi ściśle wypukłymi ciałami na płaszczyźnie. Z wniosku 3.4 wynika zatem, iż w każde takie cięcie posiada dokładnie jedną jednokładną kopię w skali dodatniej trójkąta o wierzchołkach a, b, c. Formalnie niech v będzie wektorem prostopadłym do π i wprowadźmy oznaczenie $C_t = C \cap (\pi + tv)$. Niech $t_1 < t_2$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$\#C_t > 1 \iff t \in (t_1, t_2).$$

Na mocy wniosku 3.4 dla każdego $t \in (t_1, t_2)$ istnieje dokładnie jeden wektor $z \in \pi$ oraz jedna liczba rzeczywista $r > 0$, dla których spełnione są równości

$$||z + ra + tv|| = ||z + rb + tv|| = ||z + rc + tv|| = 1.$$

Oznaczmy przez $z : (t_1, t_2) \to \pi$ oraz $r : (t_1, t_2) \to (0, +\infty)$ funkcje, które danemu $t \in (t_1, t_2)$ przyporządkowywują odpowiednio jedyny wspomniany wyżej wektor i liczbę dodatnią.

Dowiedziemy, że funkcja $(z, r) : (t_1, t_2) \to \pi \times (0, \infty)$ jest ciągła. Wystarczy wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, gdzie $t_1 < t < t_2$, to $\lim_{n\to\infty}(z(t_n), r(t_n)) = (z(t), r(t))$. Łatwo zauważyć, że obrazy funkcji z i r zawarte są w zbiorach zwartych, a więc możemy wybrać podciąg $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że ciągi $(z(t_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ oraz $(r(t_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ zbiegają odpowiednio do pewnych $z' \in \mathbb{R}^2$ oraz $r' \geqslant 0$. Załóżmy na razie, że $r' > 0$. Wówczas

$$||z' + r'a + tv|| = \lim_{k\to\infty} ||z(t_{n_k}) + r(t_{n_k})a + t_{n_k}v|| = 1$$

i analogicznie $||z' + r'b + tv|| = ||z' + r'c + tv|| = 1$, a więc z jedyności pary $(z(t), r(t))$ musimy mieć $z' = z(t)$, $r' = r(t)$. Wystarczy więc uzasadnić, iż zawsze mamy $r' > 0$ i wówczas ciągłość funkcji $z(t)$ oraz $r(t)$ zostanie dowiedziona.

Załóżmy bowiem, że $\lim_{k\to\infty} r(t_{n_k})) = 0$. Dla danej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ niech $F_k : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem normującym dla punktu $z(t_{n_k}) + r(t_{n_k})a + t_{n_k}v$, czyli

$$||F_k|| = 1 \text{ oraz } F_k(z(t_{n_k}) + r(t_{n_k})a + t_{n_k}v) = 1.$$

Podobnie niech F będzie funkcjonałem normującym dla punktu $z' + tv$. Ze zbieżności $z(t_{n_k}) + r(t_{n_k})a + t_{n_k}v \to z' + tv$ oraz z gładkości normy wynika również zbieżność $F_k \to F$ funkcjonałów normujących. Co więcej

$$F_k(z(t_{n_k}) + r(t_{n_k})b + t_{n_k}v) \leqslant ||z(t_{n_k}) + r(t_{n_k})b + t_{n_k}v|| = F(z(t_{n_k}) + r(t_{n_k})a + t_{n_k}v),$$

skąd $F_k(b) \leqslant F_k(a)$. Przechodząc do granicy dostajemy $F(b) \leqslant F(a)$. Identyczny argument pokazuje również, że $F(c) \leqslant F(a)$. Prowadząc analogiczne rozumowanie dla punktów b i c dostajemy w efekcie

$$F(a) = F(b) = F(c).$$

Płaszczyzna π zawierająca punkty $a,\ b,\ c$ jest zatem równoległa do jądra funkcjonału F. To jest jednak oczywista sprzeczność – parametr t znajduje się wewnątrz przedziału (t_1, t_2), a więc przecięcie płaszczyzny $\pi + tv$ z kulą jednostkową nie jest jednopunktowe. A z drugiej strony do owego przecięcia należy punkt $z' + tv$, dla którego F jest funkcjonałem normującym i przecięcie płaszczyzny podpierającej $\pi + tv$ z kulą jest jednopunktowe na mocy założenia o ścisłej wypukłości normy. Otrzymana sprzeczność kończy dowód nierówności $r' > 0$.

Wiemy już w szczególności, że odwzorowanie $r(t)$ jest ciągłe. Niech $s \in (t_1, t_2)$ będzie taką liczbą, że $0 \in C_s$. Wówczas C_s jest płaskim, gładkim, symetrycznym i ściśle wypukłym ciałem pochodzącym od zawężenia normy $||\cdot||$ do dwuwymiarowej podprzestrzeni liniowej równoległej do π. Ze stwierdzenia 3.5 wynika więc, że $r(s) \geqslant 1$. Co więcej jasne jest, że jeśli $t \to t_1$, to $\operatorname{diam} C_t \to 0$. Z własności Darboux dla pewnego $t \in (t_1, t_2)$ zachodzi więc równość $r(t) = 1$. Tym samym

$$||z(t) + tv + a|| = ||z(t) + tv + b|| = ||z(t) + tv + c|| = 1.$$

Punkt $d = -(z(t) + tv)$ jest więc szukanym czwartym punktem zbioru ekwilateralnego. Kończy to dowód dla przypadku normy gładkiej i ściśle wypukłej.

W przypadku ogólnym posłużymy się stwierdzeniem 3.7. Niech $||\cdot||$ będzie dowolną normą w $\mathbb{R}^3$, w której wektory a, b, c tworzą zbiór 1-ekwilateralny Z lematu 3.8 wiemy, że punkty $a-b$, $b-c$, $c-a$, $b-a$, $c-b$, $a-c$ tworzą wierzchołki symetrycznego sześciokąta wypukłego. Na mocy stwierdzenia 3.7 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje norma gładka i ściśle wypukła $||\cdot||_n$ w $\mathbb{R}^3$ taka, że

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) ||x||_n \leqslant ||x|| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) ||x||_n$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^3$ oraz

$$||a-b||_n = ||b-c||_n = ||c-a||_n = 1.$$

Z tego co udowodniliśmy do tej pory, wynika, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje wektor $d_n \in \mathbb{R}^3$ taki, że

$$||d_n - a||_n = ||d_n - b||_n = ||d_n - c||_n = 1.$$

Jasne jest ponadto, że ciąg $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawarty jest w pewnej kuli, a więc w szczególności zawiera podciąg zbieżny $(d_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ do pewnego punktu $d \in \mathbb{R}^3$. Z nierówności

$$1 - \frac{1}{n_k} \leqslant ||d_{n_k} - a|| \leqslant 1 + \frac{1}{n_k}$$

wynika natychmiast, że $||d-a|| = 1$ i analogicznie $||d-b|| = ||d-c|| = 1$. Dowód jest zakończony. $\square$

Istotnym elementem powyższego rozumowania był fakt, iż każde cięcie kuli jednostkowej posiadało wpisaną dokładnie jedną przeskalowaną translację trójkąta a, b, c. Zagwarantowało to bowiem ciągłość odwzorowań z i r. Gdy takich przeskalowanych translacji wpisanych w cięcia jest wiele, nie jest jasne czy przy zmieniającym się cięciu zmieniają się one w sposób ciągły. Brak odpowiednika stwierdzenia 3.3 w większej liczbie wymiarów jest jedną z przeszkód, z powodu których podany dowód nie uogólnia się automatycznie na wyższy wymiar. Najprawdopodobniej główną trudnością jest jednak znalezienie wielowymiarowego odpowiednika stwierdzenia 3.5, które stanowi główny składnik rozumowania. Redukcja do przypadku normy gładkiej i ściśle wypukłej daje się uzyskać w identyczny sposób w dowolnym wymiarze.

Dodajmy jeszcze, iż gdyby naszym celem było wyłącznie udowodnienie hipotezy 2.6 dla $\dim X = 3$, to korzystanie ze stwierdzenia 3.7 nie byłoby konieczne. Daną normę wystarczyłoby bowiem aproksymować normami gładkimi i ściśle wypukłymi w dowolny sposób, a następnie skorzystać ze zwartości. Nie wykazalibyśmy jednak, że dowolny 3-elementowy zbiór ekwilateralny można rozszerzyć do 4-elementowego.

3.3. Istnienie gładkiej i ściśle wypukłej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej, która posiada 4-elementowy zbiór ekwilateralny maksymalny w sensie inkluzji

Z przykładu 2.7 podanego przez Petty'ego wiemy, że twierdzenia 2.9 nie da się uogólnić na wyższą liczbę wymiarów. Konstrukcja przestrzeni unormowanej zaprezentowana w owym przykładzie jest istotna dla rozważanej przez nas dziedziny, gdyż pokazuje ona iż „duże" przestrzenie mogą posiadać „małe" zbiory ekwilateralne maksymalne w sensie inkluzji. Swanepoel i Villa w pracy poświęconej wyłącznie zbiorom ekwilateralnym, które są maksymalne w sensie inkluzji (zobacz [78]) uogólnili przykład podany przez Petty'ego na dowolną przestrzeń unormowaną postaci $X \oplus_1 \mathbb{R}$, gdzie X jest przestrzenią unormowaną, której sfera jednostkowa posiada co najmniej jeden punkt gładkości. Przestrzeń unormowana tej postaci nigdy nie jest jednak gładka ani ściśle wypukła. Można więc przypuszczać, że to brak gładkości lub ściślej wypukłości normy może być odpowiedzialny za ten fenomen. Swanepoel i Villa udowodnili jednak również, że nawet w przestrzeniach ℓ_p^n przy $1 < p < 1.32$ – które oczywiście są gładkie i ściśle wypukłe – da się znaleźć 5-elementowe zbiory ekwilateralne maksymalne w sensie inkluzji. Pozostaje więc odpowiedzieć na pytanie, czy każdy 4-elementowy zbiór ekwilateralny w normie gładkiej i ściśle wypukłej daje się rozszerzyć do 5-elementowego (w wymiarze co najmniej 4). Negatywną odpowiedź daje poniższe

Twierdzenie 3.9. *Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ istnieje norma gładka i ściśle wypukła $||\cdot||$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz wektory $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^n$, które tworzą zbiór p-ekwilateralny w normie $||\cdot||$ dla pewnego $p > 0$, ale nie istnieje wektor a_5 taki, że*

$$||a_5 - a_1|| = ||a_5 - a_2|| = ||a_5 - a_3|| = ||a_5 - a_4|| = p.$$

Dowód. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozważmy standardową normę ℓ_1 (która oczywiście nie jest ani gładka, ani ściśle wypukła), tj. $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$. Niech

$$a_1 = \Big(1, 0, \ldots, 0\Big), a_2 = \Big(-1, 0, \ldots, 0\Big), a_3 = \Big(0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}\Big),$$

$$a_4 = \Big(0, -\frac{1}{4(n-1)}, -\frac{3}{4(n-1)}, -\frac{1}{n-1}, -\frac{1}{n-1}, \ldots, -\frac{1}{n-1}\Big).$$

Bez trudu możemy sprawdzić, iż wektory a_1, a_2, a_3, a_4 tworzą zbiór 2-ekwilateralny w normie $||\cdot||$. Wykażemy, że nie istnieje punkt odległy od wszystkich wektorów a_i o 2.

Załóżmy, że $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ jest takim punktem. Z równości

$$||x - a_1|| = ||x + a_1|| = 2$$

wnioskujemy natychmiast, że $x_1 = 0$ oraz $|x_2| + |x_3| + \ldots |x_n| = 1$. Łącząc te zależności z równościami

$$||x - a_2|| = ||x - a_3|| = 2,$$

otrzymujemy, że

$$2 = |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| + 1 =$$

$$\left|x_2 - \frac{1}{n-1}\right| + \left|x_3 - \frac{1}{n-1}\right| + \ldots \left|x_n - \frac{1}{n-1}\right|$$

$$= \left|x_2 + \frac{1}{2(n-1)}\right| + \left|x_3 + \frac{3}{2(n-1)}\right| + \left|x_4 + \frac{1}{n-1}\right| + \ldots + \left|x_n + \frac{1}{n-1}\right|.$$

Dowiedziemy, że taki układ równań nie ma rozwiązań. Istotnie

$$\left|x_2 - \frac{1}{n-1}\right| + \left|x_3 - \frac{1}{n-1}\right| + \ldots \left|x_n - \frac{1}{n-1}\right| \leqslant |x_2| + \frac{1}{n-1} + |x_3| + \frac{1}{n-1} + \ldots |x_n| + \frac{1}{n-1}$$

$$= |x_2| + |x_3| + \ldots |x_n| + 1$$

i podobnie

$$\left|x_2 + \frac{1}{2(n-1)}\right| + \left|x_3 + \frac{3}{2(n-1)}\right| + \left|x_4 + \frac{1}{n-1}\right| + \ldots + \left|x_n + \frac{1}{n-1}\right|$$

$$\leqslant |x_2| + \frac{1}{2(n-1)} + |x_3| + \frac{3}{2(n-1)} + |x_4| + \frac{1}{n-1} + \ldots |x_n| + \frac{1}{n-1}$$

$$= |x_2| + |x_3| + \ldots |x_n| + 1.$$

W nierówności $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy a i b są tego samego znaku, czyli musimy mieć $x_2 = x_3 = \ldots x_n = 0$, co przeczy wcześniej uzyskanej zależności. Wykazaliśmy w ten sposób, że zbiór ekwilateralny a_1, a_2, a_3, a_4 jest maksymalny w sensie inkluzji.

Za pomocą bezpośredniego obliczenia możemy zweryfikować liniową niezależność wektorów $a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1$, która świadczy o tym, że punkty a_1, a_2, a_3, a_4 stanowią wierzchołki niezdegenerowanego czworościanu. Z lematu 3.8 wynika, że zbiór $\{a_i - a_j : 1 \leqslant i \neq j \leqslant 4\}$ jest zbiorem wierzchołków swojej otoczki wypukłej. Ze stwierdzenia 3.7 możemy więc wybrać ciąg norm gładkich i ściśle wypukłych $||\cdot||_k$ takich, że

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) ||x||_k \leqslant ||x|| \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right) ||x||_k$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $||a_i - a_j||_k = 2$ dla $1 \leqslant i \neq j \leqslant 4$ i $k \in \mathbb{N}$.

Załóżmy teraz, że teza dowodzonego twierdzenia nie zachodzi. Oznacza to, że w dowolnej normie gładkiej i ściśle wypukłej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (gdzie $n \geqslant 4$), każdy 4-elementowy zbiór ekwilateralny można rozszerzyć do 5-elementowego. Wynika stąd, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje wektor $x_k \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$||x_k - a_1||_k = ||x_k - a_2||_k = ||x_k - a_3||_k = ||x_k - a_4||_k = 2.$$

Ponieważ ciąg $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, zawiera on podciąg zbieżny do pewnego punktu $x \in \mathbb{R}^n$. Łatwo teraz zauważyć, że wektor x rozszerza zbiór a_1, a_2, a_3, a_4 do 5-elementowego zbioru równobocznego w normie ℓ_1. Otrzymaliśmy więc sprzeczność z poprzednim fragmentem rozumowania, a to kończy dowód. □

4. Oszacowania dolne wymiaru ekwilateralnego pewnych klas przestrzeni unormowanych

Celem poniższego rozdziału jest uzyskanie oszacowań dolnych na wymiar ekwilateralny w pewnych klasach przestrzeni unormowanych. Motywacją jest fakt, iż w literaturze brakuje rezultatów potwierdzających hipotezę 2.6 w szerokich klasach przestrzeni. Z twierdzenia Brassa i Dekstera 2.13 wiemy, że jest ona prawdziwa dla przestrzeni odpowiednio bliskich przestrzeni euklidesowej, zaś z twierdzenia Swanepoela i Villi 2.14 również dla przestrzeni bliskich przestrzeni ℓ_∞^n. Swanepoel i Villa oszacowali również wymiar ekwilateralny dla przestrzeni bliskich przestrzeni ℓ_p^n. Mamy następujące

Twierdzenie 4.1. *(Swanepoel, Villa [77]) Dla dowolnej liczby całkowitej $n > 2$ oraz $p \in (1, +\infty)$ istnieje liczba $R(p, n) > 1$ taka, że dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej X, której odległość Banach-Mazura do przestrzeni ℓ_p^n nie przekracza $R(p, n)$ zachodzi nierówność $e(X) \geqslant n$. Co więcej,*

$$R(p,n) = \max_{\theta>0} \left(\frac{1 + (1+\theta)^p}{2 + (n-2)\theta^p} \right)^{1/p} \sim 1 + \frac{p-1}{2p} n^{-\frac{1}{p-1}} \text{ gdy } n \to \infty \text{ i } p \text{ jest ustalone.}$$

Naszym celem jest podanie jak najbardziej ogólnych klas przestrzeni unormowanych, w których można potwierdzić prawdziwość hipotezy $e(X) \geqslant \dim X + 1$ lub przynajmniej podać dobre oszacowanie dolne na wymiar ekwilateralny. Rozważymy trzy klasy przestrzeni, w których omawiana hipoteza okazuje się być prawdziwa: przestrzenie z normą permutacyjnie niezmienniczą, przestrzenie Musielaka-Orlicza oraz hiperpłaszczyzny przestrzeni ℓ_∞^n. Dla tych przestrzeni z wymienionych klas, które spełniają pewne dodatkowe warunki, oszacujemy wymiar ekwilateralny również przestrzeni im bliskich, znajdując różnorodne uogólnienia twierdzeń 2.13, 2.14 oraz 4.1.

W całym rozdziale będziemy domyślnie zakładać, iż $n \geqslant 3$.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy *Equilateral Dimension of Certain Classes of Normed Spaces* (zob. [44]).

4.1. Przestrzenie permutacyjnie niezmiennicze i symetryczne

W bieżącym podrozdziale zajmiemy się oszacowaniem dolnym wymiaru ekwilateralnego przestrzeni unormowanych określonych za pomocą pewnej geometrycznej własności. Powiemy, że n-wymiarowa przestrzeń $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ jest *permutacyjnie niezmiennicza*, jeżeli dla każdej permutacji $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniona jest równość

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = ||(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})||.$$

Innymi słowy, odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ jest izometrią przestrzeni X. Lub bardziej geometrycznie, kula jednostkowa X jest symetryczna względem dowolnej hiperpłaszczyzny postaci

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_{i+1}\}.$$

W klasie przestrzeni permutacyjnie niezmienniczych mamy następujące

Twierdzenie 4.2. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, która jest permutacyjnie niezmiennicza. Wówczas $e(X) \geqslant n + 1$.*

Dowód. Niech $||\cdot||$ będzie normą przestrzeni X. Skoro X jest permutacyjnie niezmiennicza, to wektory $e(1), e(2), \ldots, e(n)$ z bazy kanonicznej tworzą zbiór c-ekwilateralny, gdzie $c = ||(1, -1, 0, \ldots, 0)||$. Co więcej, dla dowolnych $t \in \mathbb{R}$ oraz $1 \leqslant i \leqslant n$ odległość wektora $t(e(1) + e(2) + \ldots + e(n)) = (t, t, \ldots, t)$ od e_i jest równa

$$f(t) = ||(t - 1, t, t, \ldots, t)||.$$

Aby uzyskać brakujący $(n + 1)$-szy punkt zbioru ekwilateralnego znajdziemy $t_0 \in \mathbb{R}$, dla którego $f(t_0) = c$. Zauważmy w tym celu, że odwzorowanie f jest ciągłe oraz $f(t) \to +\infty$, gdy $t \to +\infty$. Wystarczy zatem sprawdzić, że $f(\frac{1}{n}) \leqslant c$. To jednak wynika z nierówności trójkąta, gdyż

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \left|\left|\left(-\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{1}{n}(-1, 1, 0 \ldots, 0) + \frac{1}{n}(-1, 0, 1, 0 \ldots, 0) + \ldots + \frac{1}{n}(-1, 0, \ldots, 0, 1)\right|\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(||(-1, 1, 0 \ldots, 0)|| + ||(-1, 0, 1, 0 \ldots, 0)|| + \ldots + ||(-1, 0, \ldots, 1, 0)||\right) \\ &= \frac{n-1}{n}c < c. \end{aligned}$$

Kończy to dowód twierdzenia. □

Okazuje się, że jeżeli przestrzeń X spełnia pewne dodatkowe geometryczne własności, to możliwe jest oszacowanie wymiaru ekwilateralnego przestrzeni bliskich przestrzeni X, podobnie jak w twierdzeniach 2.13, 2.14 oraz 4.1. Powiemy, że n-wymiarowa przestrzeń unormowana X jest *1-bezwarunkowa* jeżeli dla dowolnego wyboru znaków $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ zachodzi równość

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = ||(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \ldots, \varepsilon_n x_n)||.$$

Równoważnie dowolne odwzorowanie liniowe postaci $\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \ldots, \varepsilon_n x_n)$ jest izometrią przestrzeni X. Lub w języku geometrycznym, kula jednostkowa przestrzeni X jest symetryczna względem każdej hiperpłaszczyzny postaci

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}.$$

Powiemy również, że n-wymiarowa przestrzeń unormowana X jest *monotoniczna* jeżeli norma $||\cdot||$ przestrzeni X spełnia następujący warunek:

$$|x_i| \leqslant |y_i| \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n \text{ implikuje } ||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| \leqslant ||(y_1, y_2, \ldots, y_n)||.$$

Oczywiście przestrzeń monotoniczna jest również 1-bezwarunkowa. Okazuje się, że prawdziwa jest też przeciwna implikacja.

Lemat 4.3. *Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną. Wówczas X jest* 1*-bezwarunkowa wtedy i tylko wtedy, gdy X jest monotoniczna.*

Dowód. Zobacz twierdzenie 5.5.10 w [37]. □

Powiemy, że przestrzeń X jest *symetryczna*, jeżeli jest zarówno permutacyjnie niezmiennicza jak i 1-bezwarunkowa. Otoczeniowa wersja twierdzenia 4.2 dotyczy gładkich przestrzeni symetrycznych. Posłużymy się pojęciem modułu gładkości ρ_X wprowadzonym w podrozdziale 1.3.

Twierdzenie 4.4. *Niech X będzie gładką i symetryczną n-wymiarową przestrzenią unormowaną. Istnieje wówczas liczba $R(X) > 1$ taka, że dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej Y, której odległość Banacha-Mazura od X nie przekracza $R(X)$ zachodzi nierówność $e(Y) \geqslant n$. Co więcej, $R(X) \geqslant 1 + \frac{\varepsilon_0}{6n}$, gdzie $\varepsilon_0 > 0$ spełnia $\frac{\rho_X(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \leqslant \frac{1}{6n}$.*

Skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana X jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{t\to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0$ (zobacz fakt 9.7 w [23]). A zatem, jeżeli X jest gładka, to istnieje $\varepsilon_0 > 0$, dla którego $\frac{\rho_X(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \leqslant \frac{1}{6n}$.

Przed przystąpieniem do dowodu potrzebujemy prostego lematu dotyczącego funkcjonałów podpierających w gładkich przestrzeniach symetrycznych.

Lemat 4.5. *Niech X będzie gładką i symetryczną n-wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $c > 0$ niech będzie taką liczbą, że wektor $v = (c, c, 0, \ldots, 0)$ jest jednostkowy. Wówczas funkcjonał normujący dla v dany jest przez wektor $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}, 0, \ldots, 0)$.*

Dowód. Niech $||\cdot||$ będzie normą przestrzeni X oraz niech f będzie funkcjonałem normującym dla v. Oznaczmy przez odwzorowanie liniowe zadane jako

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots, x_n) = (x_1, x_2, -x_3, x_4 \ldots, x_n).$$

Odwzorowanie T jest izometrią w normie $||\cdot||$ oraz $T(v) = v$. W konsekwencji $f(T(v)) = f(v) = 1$ oraz

$$|f(T(x))| \leqslant ||T(x)|| = ||x||$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$. Funkcjonał $f \circ T$ jest więc normujący dla v i z gładkości normy mamy $f = f \circ T$. Jeżeli więc przedstawimy f w postaci $f(x) = \langle x, (a_1, a_2, \ldots, a_n)\rangle$ dla pewnych liczb rzeczywistych a_i, to $a_3 = 0$. Analogiczny argument pokazuje, że $a_1 = a_2$ oraz $a_4 = a_5 = \ldots = a_n = 0$. Ostatecznie skoro $1 = f(v) = 2ca_1$, to $a_1 = \frac{1}{2c}$ i dowód lematu jest zakończony. □

Dowód twierdzenia 4.4. Będziemy rozumować podobnie jak Swanepoel i Villa w dowodzie twierdzenia 2.14. Załóżmy, że $R = R(X)$ jest zdefiniowane tak jak w wypowiedzi twierdzenia. Niech $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ oraz $Y = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_Y)$. Skoro $e(Y) = e(Y')$ dla dowolnej przestrzeni Y' izometrycznie izomorficznej z Y, to bez straty ogólności możemy przyjąć, iż

$$||x||_Y \leqslant ||x|| \leqslant R||x||_Y,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$. Odpowiednio przeskalowując możemy dodatkowo założyć, że $||e(i)|| = 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Ustalmy $\beta, \gamma > 0$ i oznaczmy przez I zbiór $N = \frac{n(n-1)}{2}$ par postaci $\{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Dla $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in I} \in [0,\beta]^N$ niech

$$p_1(\varepsilon) = (-\gamma, 0, \dots, 0),$$

$$p_j(\varepsilon) = (\varepsilon_{1,j}, \dots, \varepsilon_{j-1,j}, -\gamma, 0, \dots, 0), \quad 2 \leqslant j \leqslant n-1,$$

$$p_n(\varepsilon) = (\varepsilon_{1,n}, \dots, \varepsilon_{n-1,n}, -\gamma).$$

Definiujemy $\varphi : [0,\beta]^N \to \mathbb{R}^N$ jako $\varphi(\varepsilon) = (\varphi_{i,j}(\varepsilon))_{(i,j)\in I}$, gdzie

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_Y \text{ dla } 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Zauważmy, że k-ta współrzędna wektora $p_j(\varepsilon) - p_i(\varepsilon)$ (gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$) jest równa

$$\begin{cases} \varepsilon_{k,j} - \varepsilon_{k,i} & \text{dla } 1 \leqslant k < i \\ \varepsilon_{i,j} + \gamma & \text{dla } k = i \\ \varepsilon_{k,j} & \text{dla } i < k < j \\ \gamma & \text{dla } k = j \\ 0 & \text{dla } k > j. \end{cases}$$

Skoro przestrzeń X jest 1-bezwarunkowa, to z lematu 4.3 wynika, że jest również monotoniczna. W konsekwencji

$$||(\gamma + \varepsilon_{i,j}, \gamma, 0, 0 \dots 0)|| \leqslant ||p_j - p_i|| \leqslant ||(\gamma + \varepsilon_{i,j}, \gamma, \beta, \beta, \dots, \beta)||.$$

Aby zastosować twierdzenie Brouwera o punkcie stałym, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.14, musimy tak dobrać parametry β, γ aby obraz odwzorowania φ był zawarty w $[0,\beta]^N$. Zauważmy w tym celu, że

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_Y$$

$$\leqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - R^{-1}||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)|| \leqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - R^{-1}||(\gamma + \varepsilon_{i,j}, \gamma, 0, \dots, 0)||$$

oraz

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_Y \geqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||$$

$$\geqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - ||(\gamma + \varepsilon_{i,j}, \gamma, \beta, \dots, \beta)||.$$

Nietrudno sprawdzić, iż gładkość przestrzeni X implikuje różniczkowalność funkcji

$$h(\varepsilon) = 1 + \varepsilon - R^{-1}||(\gamma + \varepsilon, \gamma, 0, \ldots, 0)||$$

określonej dla $\varepsilon \geqslant 0$. Co więcej funkcja $h(\varepsilon)$ jest ściśle rosnąca. Rzeczywiście, z nierówności trójkąta wynika, że

$$\frac{||(\gamma + \varepsilon + t, \gamma, 0, \ldots, 0)|| - ||(\gamma + \varepsilon, \gamma, 0, \ldots, 0)||}{t} \leqslant \frac{||(t, 0, \ldots, 0))||}{t}$$
$$= ||(1, 0, \ldots, 0)|| = 1,$$

dla dowolnego $t > 0$. Skoro $R > 1$, to analogiczne oszacowanie dla $t < 0$ dowodzi, że $h'(\varepsilon) > 0$.

W podobny sposób można wykazać, iż funkcja $1 + \varepsilon - ||(\gamma + \varepsilon, \gamma, \beta, \ldots, \beta)||$ jest ściśle rosnąca. Musimy zatem wybrać parametry β i γ tak aby zachodziły nierówności

$$||(\gamma + \beta, \gamma, 0 \ldots, 0)|| \geqslant 1 + \frac{\varepsilon_0}{6n} \text{ oraz } ||(\gamma, \gamma, \beta, \ldots, \beta)|| \leqslant 1.$$

Wówczas liczba $R = ||(\gamma + \beta, \gamma, 0 \ldots, 0)|| \geqslant 1 + \frac{\varepsilon_0}{6n}$ będzie spełniać żądane warunki.

Niech $c > 0$ będzie takie, że $||(c, c, 0, \ldots, 0)|| = 1$. Skoro przestrzeń X jest monotoniczna oraz $||(1, 0, 0, \ldots, 0)|| = 1$, to oczywiście $c \leqslant 1$. Przyjmijmy $\gamma = c - \varepsilon$ i $\beta = 3\varepsilon$, dla $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{3n}$. Zgodnie z lematem 4.5 funkcjonał $f(x) = \langle x, (\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}, 0, \ldots, 0)\rangle$ jest normujący dla $x_0 = (c, c, 0, \ldots, 0)$. Rozważmy wektor $v = (-1, -1, 3, \ldots, 3) \in \mathbb{R}^n$. Skoro

$$(\gamma, \gamma, \beta, \ldots, \beta) = (c - \varepsilon, c - \varepsilon, 3\varepsilon, \ldots, 3\varepsilon) = x_0 + \varepsilon v$$

to musimy wykazać nierówność $||x_0 + \varepsilon v|| \leqslant 1$.

Z nierówności trójkąta i równości $||e(i)|| = 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ wynika, że

$$||v|| \leqslant 3n - 4 < 3n.$$

Wprost z definicji modułu gładkości ρ_X mamy natomiast

$$||x_0 + \varepsilon v| + ||x_0 - \varepsilon v|| = \left|\left|x_0 + \varepsilon_0 \frac{v}{3n}\right|\right| + \left|\left|x_0 - \varepsilon_0 \frac{v}{3n}\right|\right| \leqslant 2\rho_X(\varepsilon_0) + 2,$$

lub równoważnie

$$\frac{||x_0 + \varepsilon v||}{\varepsilon} + \frac{||x_0 - \varepsilon v|| - 1}{\varepsilon} \leqslant \frac{2p_X(\varepsilon_0)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Skoro $||x_0 - \varepsilon v|| \geqslant f(x_0 - \varepsilon v) = 1 + \frac{\varepsilon}{c}$, to

$$\frac{||x_0 - \varepsilon v|| - 1}{\varepsilon} \geqslant \frac{1}{c} \geqslant 1.$$

Z wyboru ε_0 otrzymujemy dalej

$$\frac{2\rho_X(\varepsilon_0)}{\varepsilon} = \frac{6n\rho_X(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \leqslant 1.$$

Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy, że

$$\frac{||x_0 + \varepsilon v||}{\varepsilon} + 1 \leqslant \frac{||x_0 + \varepsilon v||}{\varepsilon} + \frac{||x_0 - \varepsilon v|| - 1}{\varepsilon} \leqslant \frac{2\rho_X(\varepsilon_0)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \leqslant 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

i w efekcie $||x_0 + \varepsilon v|| \leqslant 1$.

Zauważmy ostatecznie, że dla $w = (2, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ mamy $f(w) = \frac{1}{2c}$, a więc

$$R = ||c + 2\varepsilon, c - \varepsilon, 0, \dots, 0)|| = ||x_0 + \varepsilon w|| \geqslant f(x_0 + \varepsilon w) = 1 + \frac{\varepsilon}{2c} = 1 + \frac{\varepsilon_0}{6nc} \geqslant 1 + \frac{\varepsilon_0}{6n}.$$

Aby zakończyć dowód twierdzenia, pozostaje zauważyć, że odwzorowanie ciągłe φ prowadzące z $[0, \beta]^N$ w $[0, \beta]^N$ posiada na mocy twierdzenia Brouwera punkt stały $\varepsilon' \in [0, \beta]^N$. Z definicji odwzorowania φ wynika wprost, że wektory $p_1(\varepsilon'), p_2(\varepsilon'), \dots, p_n(\varepsilon')$ tworzą zbiór 1-ekwilateralny w normie Y. Kończy to dowód. □

Zwróćmy uwagę, że powyższe twierdzenie jest pierwszym przykładem oszacowania wymiaru ekwilateralnego z użyciem metody twierdzenia Brouwera o punkcie stałym, w którym została ona zastosowana do dosyć ogólnej normy, niezdefiniowanej za pomocą konkretnej formuły, lecz poprzez geometryczną własność. Rodzi to nadzieję, że owa technika może zostać zastosowana w jeszcze szerszych klasach przestrzeni.

4.2. Przestrzenie Musielaka-Orlicza

Kolejną klasę przestrzeni, którą rozważymy w bieżącym podrozdziale, stanowią skończenie wymiarowe przestrzenie Musielaka-Orlicza. Wypukłą i lewostronnie ciągłą funkcję $f : [0, \infty) \to [0, \infty]$, która spełnia warunki $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ oraz $f(x_0) \neq \infty$ dla pewnego $x_0 > 0$, nazwiemy *funkcją Younga*. Warto zwrócić uwagę, iż zgodnie z naszą definicją funkcja Younga może przyjmować wartość $+\infty$. Należy również dodać, że w literaturze pojawiają się różne wariacje tej definicji. Łatwo sprawdzić, że jeżeli funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ są funkcjami Younga, to zbiór

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} f_i(|x_i|) \leqslant 1\},$$

jest symetrycznym ciałem wypukłym przestrzeni $\mathbb{R}^n$. W konsekwencji

$$||x|| = \inf\{\lambda : x \in \lambda C\}$$

jest normą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zwaną *normą Luxemburga*. Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||)$ nazywana jest zaś *przestrzenią Musielaka-Orlicza*. Przestrzeń Musielaka-Orlicza nazywamy po prostu *przestrzenią Orlicza*, gdy $f_1 = f_2 = \ldots = f_n$. Przestrzenie Orlicza, Musielaka-Orlicza oraz ich warianty były wielokrotnie rozważane w literaturze w kontekście analizy funkcjonalnej, geometrii przestrzeni Banacha czy też teorii przestrzeni funkcyjnych. Klasycznym przypadkiem szczególnym przestrzeni Orlicza są przestrzenie ℓ_p^n dla $1 \leqslant p < \infty$, dla których $f(t) = t^p$ jest funkcją Younga. Przestrzeń ℓ_∞^n jest natomiast przestrzenią Orlicza dla funkcji Younga $f(t) \equiv 0$, gdy $t \in [0,1]$ oraz $f(t) \equiv \infty$ gdy $t > 1$. Okazuje się, że w klasie przestrzeni Musielaka-Orlicza również możemy potwierdzić hipotezę 2.6.

Twierdzenie 4.6. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią Musielaka-Orlicza. Wówczas $e(X) \geqslant n+1$.*

Przed przystąpieniem do dowodu potrzebujemy prostego lematu aproksymacyjnego. Będziemy używać symboli $f^-(a)$ oraz $f^+(a)$ do oznaczenia odpowiednio lewostronnej i prawostronnej pochodnej w punkcie a.

Lemat 4.7. *Jeżeli nierówność $e(X) \geqslant n+1$ zachodzi dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni Musielaka-Orlicza, której funkcje Younga $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są ściśle rosnące i o wartościach rzeczywistych, to nierówność $e(X) \geqslant n+1$ zachodzi dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni Musielaka-Orlicza.*

Dowód. Załóżmy, że hipoteza 2.6 jest prawdziwa dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni Musielaka-Orlicza, której funkcje Younga spełniają warunek dany w treści lematu. Niech X będzie zaś dowolną n-wymiarową przestrzenią Musielaka-Orlicza zadaną przez funkcje Younga $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Przyjmijmy

$$a_i = \sup\{x \in \mathbb{R} : f_i(x) = 0\} \text{ oraz } b_i = \sup\{x \in \mathbb{R} : f_i(x) < \infty\}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Dla danej liczby całkowitej dodatniej k oraz $1 \leqslant i \leqslant n$ definiujemy funkcję rzeczywistą

$$f_{i,k}(x) = \frac{k-1}{k} f_i(x) + \frac{x}{k}$$

określoną dla $x \in [0, b_i]$. Jeżeli $b_i = \infty$, czyli funkcja f_i przyjmuje wartości wyłącznie skończone, to funkcja $f_{i,k}$ zadana jest już na całej półprostej $[0, +\infty)$. W przeciwnym wypadku definiujemy dodatkowo

$$f_{i,k}(x) = \left(\frac{f_{i,k}(b_i)}{b_i} + k f_{i,k}^-(b_i) \right) x - k f_{i,k}^-(b_i) b_i$$

dla $x \in (b_i, \infty)$. Łatwo zauważyć, że wówczas każda z funkcji $f_{i,k}$ jest ściśle rosnącą funkcją Younga o wartościach rzeczywistych. Co więcej, jeżeli dla $k \geqslant 1$ oznaczymy przez $||\cdot||_k$ normę Luxemburga w $\mathbb{R}^n$ zadaną za pomocą $f_{1,k}, f_{2,k}, \ldots, f_{n,k}$, to nietrudno sprawdzić, iż

$$\lim_{k \to \infty} ||x||_k = ||x||,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$.

Z danego założenia wynika, że w każdej z norm $||\cdot||_k$ możemy znaleźć $(n+1)$-elementowy zbiór ekwilateralny. Niech $0, p_{1,k}, p_{2,k}, \ldots, p_{n,k} \in \mathbb{R}^n$ będzie więc zbiorem 1-ekwilateralnym w normie $||\cdot||_k$. Ciąg $(p_{1,k})_{k>0}$ jest ograniczony, a więc zawiera podciąg zbieżny do pewnego wektora $p_1 \in \mathbb{R}^n$. Powtarzając ten argument wielokrotnie otrzymujemy zbiór n punktów $p_1, p_2, \ldots, p_n$, które wraz z wektorem zerowym tworzą zbiór 1-ekwilateralny w normie $||\cdot||$. Dowód lematu jest więc zakończony. $\square$

Dowód twierdzenia 4.6 Niech $f_1, f_2, \ldots, f_n$ będą funkcjami Younga, które definiują przestrzeń X. Norma $||\cdot||$ przestrzeni X dana jest więc wzorem

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \inf\left\{r > 0 : \sum_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{|x_i|}{r}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Poprzedni lemat pozwala nam przyjąć, że każda z funkcji f_i jest ściśle rosnąca i o wartościach rzeczywistych. Nietrudno zauważyć, iż wówczas sfera jednostkowa przestrzeni X zawiera dokładnie te wektory $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dla których $\sum_{i=1}^{n} f_i\left(|x_i|\right) = 1$.

Skoro każda z funkcji f_i, dla $1 \leqslant i \leqslant n$, jest funkcją ciągłą o obrazie $[0, +\infty)$, to istnieje $c_i > 0$ takie, że $f_i(c_i) = \frac{1}{2}$. Z postaci normy wynika wprost, że n-elementowy zbiór $\{c_i e(i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ jest 1-ekwilateralny. Aby uzyskać konkluzję twierdzenia wystarczy znaleźć wektor $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, który jest w odległości 1 od dowolnego wektora $c_i e(i)$.

Dla $1 \leqslant i \leqslant n$ rozważmy funkcję rzeczywistą $g_i : [0, c_i] \to \mathbb{R}$ zadaną jako

$$g_i(x) = f_i(c_i - x) - f_i(x).$$

Skoro każda z funkcji f_i jest ściśle rosnąca, to każda z funkcji g_i jest ściśle malejącą funkcją ciągłą o obrazie $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Istnieje więc ciągłą odwrotność $g_i^{-1} : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to [0, c_i]$. Ustalmy $t_1 \in [0, c_1]$ i przyjmijmy $t_i = g_i^{-1}(g_1(t_1))$ dla $2 \leqslant i \leqslant n$. Wówczas $g_i(t_i) = g_1(t_1)$. Co więcej

$$f_i(c_i - t_i) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} f_j(t_j) = g_i(t_i) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(t_j)$$

$$= g_1(t_1) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(t_j) = f_1(c_1 - t_1) + \sum_{2 \leqslant j \leqslant n} f_j(t_j),$$

dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Widzimy zatem, że wektor $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ jest równo oddalony od wszystkich wektorów $c_i e(i)$. Wystarczy więc wybrać $t_1 \in [0, c_1]$ w taki sposób, aby wspólna odległość była równa 1. W tym celu definiujemy funkcję $h : [0, c_1] \to \mathbb{R}$ jako

$$h(t_1) = g_1(t_1) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(g_j^{-1}(g_1(t_1))) = g_1(t_1) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(t_j).$$

Funkcja h jest ciągła, $h(0) = \frac{1}{2} < 1$ oraz $h(c_1) = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2} \geqslant 1$. A zatem $h(t_1) = 1$ dla pewnego $t_1 \in [0, c_1]$ i dowód jest zakończony. $\square$

Podobnie jak w przypadku przestrzeni symetrycznych możemy oszacować wymiar ekwilateralny przestrzeni bliskich przestrzeni Musielaka-Orlicza, jeżeli definiujące ją funkcje

Younga spełniają pewien dodatkowy warunek. Odległość $R(X)$ może być wyrażona za pomocą funkcji Younga przestrzeni Musielaka-Orlicza X, ale w przeciwieństwie do twierdzenia 4.4, zależność ta jest dosyć skomplikowana. Zostanie ona podana pod koniec dowodu poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 4.8. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią Musielaka-Orlicza, której funkcje Younga $f_1, f_2, \ldots, f_n$ spełniają warunek $f_i'(0) = 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Istnieje wówczas liczba $R(X) > 1$ taka, że dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej Y, której odległość Banacha-Mazura od X nie przekracza $R(X)$, zachodzi nierówność $e(Y) \geqslant n$.*

Dowód. Będziemy postępować podobnie jak w dowodzie twierdzenia 4.4. Liczba $R = R(X)$ zostanie zdefiniowana w dalszej części dowodu. Niech $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ oraz $Y = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_Y)$. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.4 możemy przyjąć, że

$$||x||_Y \leqslant ||x|| \leqslant R||x||_Y$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$. Dzięki możliwości przeskalowania możemy dodatkowo załozyć, iż $||e(i)|| < 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech $f_1, f_2, \ldots, f_m$ (gdzie $0 \leqslant m \leqslant n$) będą dokładnie tymi funkcjami Younga przestrzeni X, dla których nie istnieje $c_i > 0$ takie, że $f_i(c_i) = \frac{1}{2}$. Owe funkcje muszą wówczas przyjmować wartość ∞, niech zatem $c_i = \sup\{x \geqslant 0 : f_i(x) < \infty\}$ dla $i \leqslant m$. W szczególności $f_i(c_i) < \frac{1}{2}$, gdy $0 \leqslant i \leqslant m$.

Ustalmy $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n > 0$ i oznaczmy przez I zbiór $N = \frac{n(n-1)}{2}$ par postaci $\{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Dla $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in I} \in [0,\beta]^N$ niech

$$p_1(\varepsilon) = (-\gamma_1, 0, \ldots, 0),$$

$$p_j(\varepsilon) = (\varepsilon_{1,j}, \ldots, \varepsilon_{j-1,j}, -\gamma_j, 0, \ldots, 0), \quad 2 \leqslant j \leqslant n-1,$$

$$p_n(\varepsilon) = (\varepsilon_{1,n}, \ldots, \varepsilon_{n-1,n}, -\gamma_n).$$

Definiujemy $\varphi : [0,\beta]^N \to \mathbb{R}^N$ jako $\varphi(\varepsilon) = (\varphi_{i,j}(\varepsilon))_{(i,j)\in I}$, gdzie

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_Y \text{ dla } 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Zauważmy, że k-ta współrzędna wektora $p_j - p_i$ (gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$) jest równa

$$\begin{cases} \varepsilon_{k,j} - \varepsilon_{k,i} & \text{dla } 1 \leqslant k < i \\ \varepsilon_{i,j} + \gamma_i & \text{dla } k = i \\ \varepsilon_{k,j} & \text{dla } i < k < j \\ \gamma_j & \text{dla } k = j \\ 0 & \text{dla } k > j. \end{cases}$$

Z lematu 4.3 wynika monotoniczność normy $||\cdot||$. W efekcie

$$||(0, \ldots, 0, \gamma_i + \varepsilon_{i,j}, 0, \ldots, 0, \gamma_j, 0 \ldots 0)|| \leqslant ||p_j - p_i|| \leqslant$$

$$||(\beta, \ldots, \beta, \gamma_i + \varepsilon_{i,j}, \beta, \ldots, \beta, \gamma_j, \beta, \ldots, \beta)||.$$

Jeżeli wybierzemy parametry $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n > 0$ w taki sposób, iż obraz odwzorowania φ zawarty jest w zbiorze $[0, \beta]^N$, to możemy zastosować twierdzenie Brouwera tak jak w dowodzie twierdzenia 4.4. Zauważmy w tym celu, że

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_Y \leqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - R^{-1}||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||$$

$$\leqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - R^{-1}||(0, \ldots, 0, \gamma_i + \varepsilon_{i,j}, 0, \ldots, 0, \gamma_j, 0 \ldots 0)||,$$

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_Y \geqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||$$

$$\geqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - ||(\beta, \ldots, \beta, \gamma_i + \varepsilon_{i,j}, \beta, \ldots, \beta, \gamma_j, \beta, \ldots, \beta)||.$$

Funkcja $h(\varepsilon) = 1+\varepsilon-R^{-1}||(0, \ldots, 0, \gamma_i+\varepsilon, 0, \ldots, 0, \gamma_j, 0 \ldots 0)||$ określona dla $\varepsilon \geqslant 0$ nie musi być różniczkowalna, w odróznieniu od sytuacji w dowodzie twierdzenia 4.4. Można jednak bez trudu sprawdzić, iż jest to funkcja wklęsła, a więc posiada lewostronną i prawostronną pochodną w każdym punkcie dodatnim. Biorąc pod uwagę nierówność $||e(i)|| < 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ możemy więc powtórzyć argument zastosowany w dowodzie twierdzenia 4.4, aby stwierdzić, iż funkcja h jest rosnąca dla $\varepsilon \geqslant 0$. Analogicznie funkcja

$$1 + \varepsilon - ||(\beta, \ldots, \beta, \gamma_i + \varepsilon, \beta, \ldots, \beta, \gamma_j, \beta, \ldots, \beta)||$$

również jest rosnąca dla $\varepsilon \geqslant 0$. A zatem w celu uzyskania oszacowań $0 \leqslant \varphi_{i,j}(\varepsilon) \leqslant \beta$ wystarczy wybrać parametry $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ w taki sposób aby spełniony był układ nierówności.

$$||(0, \ldots, 0, \gamma_i + \beta, 0, \ldots, 0, \gamma_j, 0 \ldots 0)|| > 1,$$

$$||(\beta, \ldots, \beta, \gamma_i, \beta, \ldots, \beta, \gamma_j, \beta, \ldots, \beta)|| \leqslant 1,$$

dla $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Wówczas możemy przyjąć

$$R = \min_{(i,j) \in I} ||(0, \ldots, 0, \gamma_i + \beta, 0, \ldots, 0, \gamma_j, 0 \ldots 0)||.$$

Powyższy układ nierówności sprowadza się do układu

$$f_i(\gamma_i + \beta) + f_j(\gamma_j) > 1,$$

$$f_i(\gamma_i) + f_j(\gamma_j) + \sum_{k \neq i,j} f_k(\beta) \leqslant 1,$$

dla $(i, j) \in I$. Przyjmijmy $\gamma_i = c_i - \varepsilon$ oraz $\beta = (K + 1)\varepsilon$, gdzie

$$K > \max \left\{ \frac{f_j^-(c_j)}{f_i^+(c_i)} : m < i < j \leqslant n \right\}.$$

Udowodnimy, że dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$ dany układ jest spełniony.

Rozważymy w tym celu oddzielnie te nierówności z powyższego układu, dla których $i > m$ oraz oddzielnie te, dla których $i \leqslant m$.

1. $i > m$ (i w konsekwencji $j > m$). Niech

$$g(\varepsilon) = f_i(c_i + K\varepsilon) + f_j(c_j - \varepsilon)$$

dla $\varepsilon \in [0, c_j]$. Z wypukłości funkcji f_i oraz f_j wynika, że również funkcja g jest wypukła. Mamy zatem

$$\frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} \geqslant g^+(0) = K f_i^+(c_i) - f_j^-(c_j) > 0.$$

dla $\varepsilon > 0$. Skoro $g(0) = 1$, to $g(\varepsilon) > 1$ dla $\varepsilon > 0$.

Rozważmy teraz funkcję

$$h(\varepsilon) = f_i(c_i - \varepsilon) + f_j(c_j - \varepsilon) + \sum_{k \neq i,j} f_k((K+1)\varepsilon).$$

Jasne jest, że $f_i^-(c_i), f_j^-(c_j) > 0$. Skoro $f_k'(0) = 0$ dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant n$, to możem wybrać $\varepsilon > 0$ tak, aby prawdziwa była nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k((K+1)\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant f_i^-(c_i) + f_j^-(c_j).$$

Wówczas

$$\frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{f_i(c_i - \varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{f_j(c_j - \varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\sum_{k \neq i,j} f_k((K+1)\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{f_i(c_i - \varepsilon) - f_i(c_i)}{\varepsilon} + \frac{f_j(c_j - \varepsilon) - f_j(c_j)}{\varepsilon} + \frac{\sum_{k \neq i,j} f_k((K+1)\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{f_i(c_i) + f_j(c_j)}{\varepsilon}.$$

$$\leqslant -(f_i^-(c_i) + f_j^-(c_j)) + (f_i^-(c_i) + f_j^-(c_j)) + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dla tak wybranego $\varepsilon > 0$ mamy zatem $h(\varepsilon) \leqslant 1$. Udowodniliśmy w ten sposób, iż możemy wybrać $\varepsilon > 0$, które spełnia te nierówności z danego układu, dla których $i > m$.

2. $i \leqslant m$. Wówczas $f_i(\gamma_i + \beta) = f_i(c_i + K\varepsilon) = \infty$ dla $\varepsilon > 0$. Pierwsza z nierówności jest więc spełniona. W przypadku drugiej, zauważmy, że $f_i(c_i - \varepsilon) + f_j(c_j - \varepsilon) < f_i(c_i) + f_j(c_j) < 1$. Skoro $f_k(0) = 0$ i f_k są ciągłe w punkcie 0 dla wszystkich k, to jasne jest, iż przy odpowiednio małym $\varepsilon > 0$ druga nierówność również zachodzi. Ściśle rzecz biorąc, wystarczy wziąć $\varepsilon > 0$, dla którego $\sum_{k=1}^{n} f_k((K+1)\varepsilon) \leqslant 1 - f_i(c_i) - f_j(c_j)$.

Biorąc więc $\varepsilon > 0$ nie większe niż minimum z powyższych możliwości, otrzymujemy żądany rezultat. Aby podsumować podamy bardziej zwięzły opis liczby $R(X)$ w zależności od funkcji Younga przestrzeni X.

$$R(X) \geqslant \min_{(i,j) \in I} ||(0, \ldots, 0, c_i + K\varepsilon_0, 0, \ldots, 0, c_j - \varepsilon_0, 0 \ldots 0)||$$

$$= \min_{(i,j)\in I} \inf \left\{ \lambda : f_i\left(\frac{c_i + K\varepsilon_0}{\lambda}\right) + f_j\left(\frac{c_j - \varepsilon_0}{\lambda}\right) \leqslant 1 \right\},$$

gdzie

$$K > \max\left\{ \frac{f_j^-(c_j)}{f_i^+(c_i)} : m < i < j \leqslant n \right\}$$

i $\varepsilon_0 > 0$ spełnia warunki

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k((K+1)\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \leqslant \min\{f_i^-(c_i) + f_j^-(c_j) : m < i < j \leqslant n\},$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_k((K+1)\varepsilon_0) \leqslant \min\{1 - f_i(c_i) - f_j(c_j) : 1 \leqslant i \leqslant m,\ i < j \leqslant n\}.$$

□

4.3. Hiperpłaszczyzny przestrzeni ℓ_∞^n

Ostatnią klasą przestrzeni unormowanych, którą się zajmiemy są podprzestrzenie kowymiaru 1 przestrzeni ℓ_∞^n. Łatwo zauważyć, iż aby wykazać prawdziwość hipotezy 2.6 wystarczy ją udowodnić w klasie przestrzeni unormowanych, których kula jednostkowa jest wielościenna. Wynika to z faktu, iż dowolne symetryczne ciało wypukłe można aproksymować symetrycznymi wielościanami wypukłymi, co daje również aproksymację odpowiadających norm. Z łatwego argumentu opartego na zwartości (podobnego jak w dowodzie twierdzenia 2.9) możemy następnie wywnioskować, że jeżeli w każdej z norm aproksymujących istnieje $(n+1)$-elementowy zbiór ekwilateralny, to istnieje on również w normie aproksymowanej.

Powszechnie znany fakt głosi, że skończenie wymiarowa przestrzeń unormowowana, której kula jednostkowa jest wielościenna jest izomorficznie izometryczna z podprzestrzenią przestrzeni ℓ_∞^m dla pewnego m. Istotnie, symetryczny wielościan wypukły o $2m$ ścianach w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ można przedstawić jako zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y_i\rangle| \leqslant 1 \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant m\}$ dla pewnych $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$. Wówczas norma, w której dany wielościan jest kulą jest postaci

$$||x|| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |\langle x, y_i\rangle|.$$

Odwzorowanie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dane wzorem

$$T(x) = (\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle, \ldots, \langle x, y_m\rangle)$$

jest zatem izometrią liniową pomiędzy wyjściową przestrzenią a podprzestrzenią przestrzeni ℓ_∞^m.

Uzasadniliśmy w ten sposób, iż prawdziwość hipotezy 2.6 wystarczy wykazać dla podprzestrzeni przestrzeni ℓ_∞^m. Zrobimy to w przypadku podprzestrzeni kowymiaru 1. Okazuje się, iż w takiej sytuacji jesteśmy w stanie podać oszacowanie znacznie lepszego rzędu, które zależne jest od równania hiperpłaszczyzny definiującej podprzestrzeń.

Twierdzenie 4.9. *Niech* $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ *będzie* $(n-1)$*-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni* ℓ_∞^n *oraz niech* $1 \leqslant k \leqslant n$ *będzie taką liczbą całkowitą, że istnieje podział* $\{1, 2, \ldots, n\} = A \cup B$ *na rozłączne podzbiory* A *i* B*, gdzie* $|A| = k$ *oraz* $\sum_{i \in A} |a_i| \geqslant \sum_{i \in B} |a_i|$*. Wówczas* $e(X) \geqslant 2^{n-k}$*.*

Dowód. Wykorzystamy następującą notację: jeżeli $v_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$, to przez $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ będziemy rozumieć standardowe sklejenie w $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\ldots+n_k}$. Symbolem $\mathbf{0}_n$ wyróżnimy zaś wektor zerowy przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że dowolne odwzorowanie postaci

$$T : \ell_\infty^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (c_1x_1, c_2x_2, \ldots, c_nx_n) \in \ell_\infty^n,$$

gdzie $c_i \in \{-1, 1\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, jest liniową izometrią. Ponieważ $e(X') = e(X)$ dla dowolnej przestrzeni X' izometrycznie izomorficznej z X, możemy założyć, że współczynniki a_i są nieujemne. Przyjmijmy ponadto, iż $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. W szczególności $\sum_{i=1}^{n-k} a_i \leqslant \sum_{i=n-k+1}^{n} a_i$.

Rozważmy odwzorowania $h : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ zdefiniowane jako

$$h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} a_ix_i}{\sum_{i=n-k+1}^{n} a_i}, \quad H(x) = (-h(x), -h(x), \ldots, -h(x)).$$

Z założenia o współczynnikach a_i wynika, że $|h(x)| \leqslant ||x||_\infty$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^{n-k}$. Co więcej

$$\sum_{i=1}^{n-k} a_ix_i - h(x) \sum_{i=n-k+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-k} a_ix_i - \sum_{i=1}^{n-k} a_ix_i = 0,$$

skąd $(x, H(x)) \in X$ dla $x \in \mathbb{R}^{n-k}$. Niech

$$S = \left\{(c, H(c)) : c \in \{1, -1\}^{n-k}\right\} \subset X.$$

Dowolne dwa elementy S różnią się na przynajmniej jednej z pierwszych $n-k$ współrzędnych. Ponadto skoro $||H(c)||_\infty \leqslant ||c||_\infty = 1$ dla $c \in \{-1, 1\}^{n-k}$, to wartość bezwzględna dowolnej innej współrzędnej jest ograniczona przez 1. Wynika stąd, że dowolne dwa elementy zbioru S są odległe o 2 w normie ℓ_∞. Uzyskaliśmy w ten sposób zbiór ekwilateralny w przestrzeni X o mocy 2^{n-k} i dowód jest zakończony. $\square$

Ponieważ w powyższym twierdzeniu zawsze możemy wziąć $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ oraz A jako zbiór odpowiadający współrzędnym o największym module otrzymujemy

Wniosek 4.10. *Niech* X *będzie* $(n-1)$*-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni* ℓ_∞^n*. Wówczas* $e(X) \geqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$*.*

Potwierdza to hipotezę 2.6 w rozważanej klasie przestrzeni, gdyż $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geqslant n$ dla $n \geqslant 6$, zaś dla $n \leqslant 5$ wymiar X nie przekracza 4 i w tym wypadku wiadomo, iż hipoteza 2.6 jest prawdziwa.

Podobnie jak wcześniej i w tej sytuacji jesteśmy w stanie podać rezultat analogiczny do twierdzeń 2.13, 2.14, 4.1, 4.4, 4.8.

Twierdzenie 4.11. *Niech* $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ *będzie* $(n-1)$*-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni* ℓ_∞^n *oraz niech* $1 \leqslant k \leqslant n$ *będzie taką liczbą całkowitą, że istnieją dwa rozłączne podzbiory* $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$*, dla których* $|A| = k$*,* $|A \cup B| = n-1$ *oraz* $\sum_{i \in A} |a_i| \geqslant \sum_{i \in B} |a_i|$*. Wówczas* $e(Y) \geqslant n-k$ *dla dowolnej przestrzeni unormowanej* Y*, której odległość Banacha-Mazura od* X *nie przekracza* 2.

Dowód. Użyjemy tej samej notacji co w dowodzie twierdzenia 4.9. Podobny argument jak w dowodzie owego twierdzenia pozwala nam przyjąć, iż $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. W szczególności $\sum_{i=1}^{n-k-1} a_i \leqslant \sum_{i=n-k+1}^{n} a_i$. Załóżmy również, że struktura liniowa przestrzeni Y jest utożsamiona ze strukturą liniową przestrzeni X oraz, że norma $||\cdot||$ przestrzeni Y spełnia warunek

$$||x|| \leqslant ||x||_\infty \leqslant 2||x||,$$

dla dowolnego $x \in X$ (co jest możliwe ponownie dzięki równości $e(Y) = e(Y')$ dla dowolnej przestrzeni Y' izometrycznie izomorficznej z Y). Oznaczmy przez I zbiór $N = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ par postaci $\{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n-k\}$.

Zdefiniujemy odwzorowania $p_j : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant j \leqslant n-k$. Dla $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})_{(i,j) \in I} \in [0,1]^N$ niech

$$p_j(\varepsilon) = \begin{cases} (-1, \mathbf{0}_{n-k-2}, b_1, \mathbf{0}_k) & \text{dla } j = 1, \\ (\varepsilon_j, -1, \mathbf{0}_{n-k-j-1}, b_j, H(\varepsilon_j, \mathbf{0}_{n-k-j})) & \text{dla } 2 \leqslant j \leqslant n-k-1, \\ (\varepsilon_{n-k}, 0, H(\varepsilon_{n-k})) & \text{dla } j = n-k, \end{cases}$$

gdzie

$$\varepsilon_j = (\varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \ldots, \varepsilon_{j-1,j}) \in \mathbb{R}^{j-1} \qquad (2 \leqslant j \leqslant n-k),$$

$$b_j = \begin{cases} \frac{a_j}{a_{n-k}} & \text{gdy } a_{n-k} \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } a_{n-k} = 0 \end{cases} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-k),$$

$$h : \mathbb{R}^{n-k-1} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-k-1} a_i x_i}{\sum_{i=n-k+1}^{n} a_i},$$

$$H : \mathbb{R}^{n-k-1} \to \mathbb{R}^k, \quad H(x) = (-h(x), -h(x), \ldots, -h(x)) \in \mathbb{R}^k.$$

Z założenia o współczynnikach a_i wynika, że $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ dla $x \in [0,1]^{n-k-1}$. Co więcej $p_j(\varepsilon) \in X$ dla $1 \leqslant j \leqslant n-k$. Istotnie, załóżmy, że $p_j(\varepsilon) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Jeżeli $a_{n-k} = 0$, to $a_j = 0$ oraz $b_j = 0$. Jeżeli zaś $a_{n-k} \neq 0$, to $b_j = \frac{a_j}{a_{n-k}}$. W obu tych przypadkach mamy

$$a_j q_j + a_{n-k} q_{n-k} = -a_j + a_{n-k} b_j = -a_j + a_j = 0.$$

Ponadto

$$\sum_{i\neq j, i\neq n-k} a_i q_i = a_1\varepsilon_{1,j} + \ldots + a_{j-1}\varepsilon_{j-1,j} - (a_{n-k+1} + a_{n-k+2} + \ldots + a_n)h(\varepsilon_j, \mathbf{0}_{n-k-j})$$

$$= a_1\varepsilon_{1,j} + \ldots + a_{j-1}\varepsilon_{j-1,j} - (a_1\varepsilon_{1,j} + \ldots + a_{j-1}\varepsilon_{j-1,j}) = 0,$$

a zatem $p_j(\varepsilon) \in X$.

Udowodnimy teraz, że $||p_j(\varepsilon) - p_l(\varepsilon)||_\infty = 1 + \varepsilon_{j,l}$ dla $1 \leqslant j < l \leqslant m$. Niech bowiem

$$p_j(\varepsilon) = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \text{ oraz } p_l(\varepsilon) = (r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Wówczas $|q_j - r_j| = 1 + \varepsilon_{j,l}$ i w konsekwencji

$$||p_j(\varepsilon) - p_l(\varepsilon)||_\infty \geqslant 1 + \varepsilon_{j,l}.$$

Z drugiej jednak strony $q_i, r_i \in [0, 1]$ dla $1 \leqslant i \leqslant n - k, i \neq j$ oraz $q_i, r_i \in [-1, 0]$ dla $n - k < i \leqslant n$. Otrzymujemy stąd, że $|q_i - r_i| \leqslant 1$ dla $i \neq j$ i żądana równość jest udowodniona.

W tym momencie możemy rozumować analogicznie jak Swanepoel i Villa w dowodzie twierdzenia 2.14. Zdefiniujmy $\varphi : [0, 1]^N \to \mathbb{R}^N$ jako $\varphi(\varepsilon) = (\varphi_{i,j}(\varepsilon))_{(i,j)\in I}$, gdzie

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||,$$

dla $1 \leqslant i < j \leqslant n - k$. Wykażemy, że obraz odwzorowania φ jest zawarty w zbiorze $[0, 1]^N$. Istotnie, korzystając z oszacowań na normę otrzymujemy

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)|| \geqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_\infty = 0,$$

$$\varphi_{i,j}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_{i,j} - ||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)|| \leqslant 1 + \varepsilon_{i,j} - \frac{1}{2}||p_i(\varepsilon) - p_j(\varepsilon)||_\infty = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_{i,j}) \leqslant 1.$$

Jasne jest, że odwzorowania $p_j(\varepsilon)$ są ciągłe, skąd wynika również ciągłość odwzorowania φ. Stosując twierdzenie Brouwera o punkcie stałym otrzymujemy więc istnienie punktu $\varepsilon' \in [0, 1]^N$, dla którego $\varphi(\varepsilon') = \varepsilon'$ i w konsekwencji $||p_i(\varepsilon') - p_j(\varepsilon')|| = 1$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant n - k$. Zbiór $p_1(\varepsilon'), p_2(\varepsilon'), \ldots, p_{n-k}(\varepsilon')$ tworzy zatem zbiór ekwilateralny w przestrzeni Y o mocy $n - k$ i dowód jest zakończony. □

Tym razem biorąc $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oraz A ponownie jako zbiór indeksów odpowiadających współrzędnym o największym module otrzymujemy

Wniosek 4.12. *Niech X będzie $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni ℓ_∞^n, zaś Y niech będzie $(n-1)$-wymiarową przestrzenią unormowaną, której odległość Banacha-Mazura do X nie przekracza 2. Wówczas $e(Y) \geqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

5. Dalsze problemy dotyczące zbiorów ekwilateralnych

W ciągu ostatnich 40 lat pojawiło się wiele ciekawych i trudnych rezultatów dotyczących zagadnienia zbiorów ekwilateralnych. Bez wahania można jednak stwierdzić, że jeszcze więcej zostało w tej dziedzinie do zrobienia. Wydaje się, że najważniejszym nierozwiązanym do tej pory problemem jest hipoteza 2.6, której poświęciliśmy wiele uwagi w poprzednich rozdziałach. Atrakcyjność i elegancja tego problemu idą w parze z dużą trudnością, o której świadczą uzyskane do tej pory, dużo gorsze od pożądanych, rezultaty. Jest też jednak wiele innych otwartych i intrygujących problemów dotyczących zbiorów ekwilateralnych. W bieżącym rozdziale przedyskutujemy niektóre z nich. Wspomniane zostaną zarówno problemy znane już od lat jak i te, które wiąża się bezpośrednio z wynikami uzyskanymi przez nas we wcześniejszych rozdziałach. Wierzymy, że przynajmniej część z nich może otwierać interesujące pole do dalszych badań.

Jak widzieliśmy w podrozdziale 2.2, wymiar ekwilateralny przestrzeni X szacuje się od góry przez $2^{\dim X}$. Wydaje się być wysoce prawdopodobne, że jeśli założymy ścisłą wypukłość przestrzeni X, to wymiar ekwilateralny można oszacować wykładniczo z lepszą stałą. Mówiąc ściśle postawiona została

Hipoteza 5.1 (Füredi, Lagarias, Morgan, [28]). *Istnieje taka stała $0 < c < 2$, że jeśli X jest ściśle wypukłą przestrzenią unormowaną wymiaru n, to $e(X) \leqslant c^n$.*

Najlepsze znane do tej pory oszacowanie to $2^n - 1$, które wynika z analizy przypadku równości w twierdzeniu 2.5. Warto dodać, że istnieją ściśle wypukłe przestrzenie, które posiadają zbiory ekwilateralne o wielkości wykładniczej względem wymiaru (zob. [28]).

Bardzo interesujące są również problemy dotyczące wymiarów ekwilateralnych przestrzeni ℓ_p^n, czyli hipotezy 2.16 i 2.17. Zaskakuje wielka trudność tych problemów, które sprowadzają się przecież do pewnego układu równań w liczbach rzeczywistych. Oszacowania, nadal wyraźnie gorsze od pożądanych, zostały uzyskane za pomocą zaawansowanych technik (teoria aproksymacji, metoda probabilistyczna) i błyskotliwych pomysłów.

Obiecującym polem do dalszych badań są zbiory ekwilateralne, które są maksymalne w sensie inkluzji. Poświęcona im w całości praca [78] zawiera intrygującą hipotezę, która jest otwarta nawet w przypadku trójwymiarowym.

Hipoteza 5.2 (Swanepoel, Villa [78]). *Dowolna n-wymiarowa przestrzeń unormowana X posiada zbiór ekwilateralny, który jest maksymalny w sensie inkluzji i jego moc nie przekracza $n+1$.*

Nawiązując do uzyskanych przez nas wyników można zapytać o konstruktywny dowód twierdzenia 3.9.

Problem 5.3. *Wskazać n-wymiarową przestrzeń unormowaną X, która jest ściśle wypukła, gładka oraz zawiera 4-elementowy zbiór ekwilateralny, który jest maksymalny w sensie inkluzji.*

Rezultaty zawarte w rozdziale 4 również prowadzą w naturalny sposób do dalszych pytań. W podrozdziale 4.1 udowodniliśmy nierówność $e(X) \geqslant n+1$ dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni X, której grupa izometrii zawiera permutację współrzędnych. Nasuwa się pytanie o inne założenia dotyczące grupy izometrii, które pozwolą potwierdzić hipotezę 2.6 lub przynajmniej podać dobre oszacowanie dolne na wymiar ekwilateralny. Naturalnym kandydatem jest klasa przestrzeni 1-bezwarunkowych.

Problem 5.4. *Udowodnić, że jeżeli X jest n-wymiarową przestrzenią 1-bezwarunkową, to $e(X) \geqslant n+1$ lub podać dobre oszacowanie na $e(X)$.*

Warto wspomnieć, iż znane są przykłady otwartych problemów z dziedziny geometrii wypukłej, które są rozwiązane w klasie ciał 1-bezwarunkowych – świetnym przykładem jest słynna hipoteza Mahlera dotycząca objętości ciał wypukłych (zobacz [59]).

W dziedzinie przestrzeni Musielaka-Orlicza, oprócz normy Luxemburga, bardzo często rozważana jest również inna norma, zwana *normą Amemyi-Orlicza.* W sytuacji skończenie wymiarowej jest ona zdefiniowana jako

$$||x|| = \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda|x_i|) + 1\right),$$

gdzie $f_1, f_2, \dots, f_n$ są funkcjami Younga. Interesujące wydaje się być pytanie o możliwość potwierdzenia hipotezy 2.6 w tej klasie przestrzeni.

Problem 5.5. *Udowodnić, że jeżeli X jest n-wymiarową przestrzenią wyposażoną w normę Amemyi-Orlicza, to $e(X) \geqslant n+1$ lub podać inne dobre oszacowanie na $e(X)$.*

Kolejne zagadnienie, wydające się realnym celem dla dalszych badań, jest oszacowanie wymiaru ekwilateralnego dla przestrzeni bliskich przestrzeni ℓ_1^n. Zauważmy bowiem, że twierdzenie 4.1, dotyczące przestrzeni bliskich przestrzeni ℓ_n^p, nie zawiera przypadku $p = 1$. Przestrzeń ℓ_1^n wymyka się również założeniom naszych uogólnień danych w twierdzeniach 4.4, 4.8. Możemy więc zapytać o odpowiednik tych twierdzeń w przypadku tej klasycznej przestrzeni.

Problem 5.6. *Udowodnić, że istnieje liczba $R > 1$ o następujacej własności: dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej X, której odległość Banacha-Mazura od przestrzeni ℓ_1^n nie przekracza R zachodzi nierówność $e(X) \geqslant n$.*

Jak wspomnieliśmy w podrozdziale 4.3 hipotezę 2.6 wystarczy dowieść, dla podprzestrzeni przestrzeni ℓ_∞^n. W tym samym podrozdziale udowodniliśmy ją dla podprzestrzeni kowymiaru 1. Przypadek podprzestrzeni kowymiaru 2 wydaje się być już jednak o wiele trudniejszy.

Problem 5.7. *Udowodnić, że dla dowolnej $(n-2)$-wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni ℓ_∞^n zachodzi nierówność $e(X) \geqslant n-1$.*

Żywimy głęboką nadzieję, iż zaprezentowane przez nas rezultaty oraz problemy zwrócą uwagę na zagadnienie szacowania wymiaru ekwilateralnego różnych klas przestrzeni unormowanych.

6. Projekcje minimalne skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych

Celem tego rozdziału jest wprowadzenie w zagadnienie projekcji minimalnych, które stanowi centralny punkt drugiej części rozprawy. Przywołamy podstawowe definicje oraz własności. Wyniki autorskie przedstawione zostaną dwóch kolejnych rozdziałach. Po dalsze informacje dotyczące projekcji minimalnych w przestrzeniach Banacha proponujemy zajrzeć do książki *Minimal projections in Banach Spaces* autorstwa G. Lewickiego oraz W. Odyńca (zobacz [53]).

6.1. Podstawowe fakty i definicje

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha, zaś Y jej domkniętą podprzestrzenią. Ograniczone odwzorowanie liniowe $P : X \to Y$ nazywamy *projekcją*, gdy $P|_Y = \mathrm{Id}_Y$. Przez $\mathcal{P}(X,Y)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich projekcji z X na Y. *Relatywną stałą projekcji* podprzestrzeni Y definiujemy jako

$$\lambda(Y,X) = \inf\{||P|| : P \in \mathcal{P}(X,Y)\}$$

lub przyjmujemy $\lambda(Y,X) = \infty$, gdy zbiór $\mathcal{P}(X,Y)$ jest pusty. Jeżeli projekcja $P : X \to Y$ spełnia równość $||P|| = \lambda(Y,X)$, to nazywamy ją *projekcją minimalną*.

Projekcje minimalne już od kilkudziesięciu lat przykuwają uwagę specjalistów pracujących w dziedzinie analizy funkcjonalnej i teorii aproksymacji. Ich znaczenie częściowo można tłumaczyć w ten sposób, że projekcja o „małej” normie stanowi pewien sposób „dobrej” aproksymacji przestrzeni w swojej podprzestrzeni. Projekcja minimalizująca normę jest więc w tym sensie najlepszą aproksymacją tego typu.

Problemy z dziedziny projekcji minimalnych dotyczą ich istnienia, jedyności, postaci oraz wyznaczenia ich normy, czyli równoważnie wyznaczenia relatywnej stałej projekcji. Tego typu rozważania są prowadzone w kontekście konkretnych przestrzeni i ich podprzestrzeni, jak i również w sytuacji bardziej ogólnej, w której celem jest uzyskanie pewnych teoretycznych własności projekcji minimalnych. Przykładem wyniku pierwszego rodzaju jest słynne twierdzenie Łozinskiego z 1948 roku (zobacz [58]) o minimalności klasycznej projekcji Fouriera, działającej z przestrzeni funkcji ciągłych o okresie 2π na podprzestrzeń wielomianów trygonometrycznych stopnia co najwyżej n. Dopiero jednak w 1981 roku inni autorzy wykazali, że projekcja Fouriera jest jedyną projekcją minimalną (zobacz [24]). Świadczy to o wysokiej skali trudności tego rodzaju problemów. Potwierdza to również fakt, że do dziś nie jest znana projekcja minimalna z przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ na podprzestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż 3. Rezultat dotyczący projekcji minimalnej na wielomiany o stopniu co najwyżej 2 też jest wysoce nietrywialny (zobacz [14]). Inne badania dotyczą projekcji minimalnych klasycznych przestrzeni ciągowych, funkcyjnych czy przestrzeni macierzy. Wiele problemów tej dziedziny pozostaje nadal otwartych lub jest rozwiązana jedynie częściowo. Jako przykładowe pozycje dotyczące tego zagadnienia możemy podać: [58], [9], [20], [24], [14], [15], [54], [73], [55], [56].

Drugi kierunek badań koncentruje się wokół teoretycznych własności pojęcia projekcji minimalnej. Wyniki autorskie, które zaprezentujemy w dwóch kolejnych rozdziałach zaliczają się do tej właśnie kategorii. Rezultaty z tej dziedziny dotyczą często oszacowań górnych na relatywną stałą projekcji (które omówimy bardziej szczegółowo w następnym podrozdziale), związku projekcji minimalnych z innymi geometrycznymi własnościami przestrzeni, czy też tzw. *absolutnej stałej projekcji*. Również w tym wypadku literatura jest bogata i jako warte wspomnienia przykłady możemy zasugerować prace: [10], [41], [19], [25], [26], [12], [48], [49], [16], [60], [17], [18].

Omówimy teraz krótko podstawowe informacje dotyczące istnienia projekcji minimalnych. Ogólnie rzecz ujmując, w przypadku dowolnej przestrzeni Banacha X oraz jej domkniętej podprzestrzeni Y, nie musi istnieć żadna projekcja z X na Y. Przykładu dostarcza twierdzenie Philipsa (zobacz [67]), które głosi, że nie istnieje projekcja przestrzeni ℓ_∞ na jej domkniętą podprzestrzeń c_0 ciągów zbieżnych do 0. Nawet jeżeli zbiór $\mathcal{P}(X,Y)$ jest niepusty, to infimum definiujące relatywną stałą projekcji $\lambda(Y,X)$ nie musi być osiągane przez żadną projekcję. Przykłady stanowią odpowiednio wybrane hiperpłaszczyzny przestrzeni c_0, na które nie istnieje projekcja minimalna z tej przestrzeni (zobacz [9]).

Nasze rozważania skupiać się będą jednak wyłącznie na przypadku skończenie wymiarowym, w którym sytuacja jest odmienna. Dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej X oraz jej podprzestrzeni Y zbiór $\mathcal{P}(X,Y)$ jest bowiem w oczywisty sposób niepusty, zaś infimum definiujące relatywną stałą projekcji jest zawsze osiągane. Załóżmy bowiem, że X jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $Y \subset X$ jej podprzestrzenią. Ustalmy dowolną projekcję $P_0 \in \mathcal{P}(X,Y)$. Oczywiście $\lambda(Y,X) \leqslant ||P_0||$. Zauważmy, że zbiór $S = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : ||P|| \leqslant ||P_0||\}$ jest niepustym, domkniętym i ograniczonym podzbiorem skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej złożonej z wszystkich odwzorowań liniowych działających z X w Y. Zbiór S jest więc zwarty. Funkcja ciągła, która projekcji $P \in S$ przypisuje jej normę, osiąga zatem minimum na zbiorze S. Wynika stąd istnienie projekcji minimalnej.

Rozważymy teraz kilka przykładów.

Przykład 6.1. Niech X będzie dowolną przestrzenią Banacha, zaś $Y = \operatorname{lin} v$, gdzie $||v|| = 1$, podprzestrzenią wymiaru 1. Odwzorowanie $Y \ni rv \to r \in \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem liniowym o normie 1. Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika więc istnienie jego przedłużenia $f : X \to \mathbb{R}$ o normie 1. Odwzorowanie $P : X \to Y$ zadane jako $P(x) = f(x)v$ jest wówczas projekcją z X na Y o normie 1. A zatem relatywna stała projekcji dowolnej 1-wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni Banacha jest równa 1.

Przykład 6.2. Dla dowolnej podprzestrzeni Y przestrzeni Hilberta H zachodzi równość $\lambda(Y,H) = 1$, gdyż norma projekcji ortogonalnej jest równa 1.

Przykład 6.3. Niech $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ będzie hiperpłaszczyzną przestrzeni ℓ_p^n, gdzie

$1 \leqslant p \leqslant \infty$. Wówczas odwzorowanie $\ell_p^n \ni x \to (0, x_2, \ldots, x_n) \in Y$ jest projekcją o normie 1, a zatem $\lambda(Y, \ell_p^n) = 1$.

Przykład 6.4. Niech X będzie przestrzenią Banacha zaś $Y = \ker f$, gdzie $f \in S_{X^*}$, jej hiperpłaszczyzną. Wówczas dowolna projekcja $P : X \to Y$ może być zapisana w postaci $P(x) = x - f(x)w$ dla pewnego $w \in X$ spełniającego warunek $f(w) = 1$. Istotnie, jądro odwzorowania $x - P(x)$ jest równe $\ker f$, a zatem $x - P(x) = f(x)w$ dla pewnego wektora w. Niech x_0 będzie takim wektorem, że $f(x_0) = 2$. Oczywiście $P(x_0) \in Y$, czyli

$$0 = f(P(x_0)) = f(x_0)(1 - f(w)) = 2(1 - f(w).$$

Stąd $f(w) = 1$.

Podczas naszych rozważań dotyczących projekcji na hiperpłaszczyzny będziemy wielokrotnie korzystać z obserwacji danej w powyższym przykładzie. W sytuacji, w której projekcja zapisuje się jako $P(x) = x - f(x)w$ dla wektora w spełniającego $f(w) = 1$ mówimy, że rzutujemy w kierunku wyznaczonym przez wektor w.

Zaprezentujemy jeszcze przykład sytuacji, w której relatywna stała projekcji jest „duża".

Przykład 6.5. Rozważmy hiperpłaszczyznę $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$ w przestrzeni ℓ_∞^n. Twierdzimy, że w tej sytuacji mamy $\lambda(Y, \ell_\infty^n) = 2 - \frac{2}{n}$. Istotnie, niech $P : \ell_\infty^n \to Y$ będzie dowolną projekcją. Zapiszmy ją w postaci $P(x) = x - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)w$ dla pewnego wektora $w \in \mathbb{R}^n$ spełniającego $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$ (patrz poprzedni przykład). Co najmniej jedna ze współrzędnych w_i jest nie mniejsza niż $\frac{1}{n}$. Załóżmy bez straty ogólności, że jest to w_1. Rozważmy wektor $e = (-1, 1, \ldots, 1)$ o normie 1. Wówczas

$$||P|| \geqslant ||P(e)|| \geqslant |1 + (n-2)w_1| \geqslant 2 - \frac{2}{n}.$$

Z drugiej strony, nietrudno zweryfikować, że norma projekcji w kierunku wektora $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ jest równa $2 - \frac{2}{n}$. Stąd $\lambda(Y, \ell_\infty^n) = 2 - \frac{2}{n}$.

6.2. Oszacowanie górne na relatywną stałą projekcji

W bieżącym podrozdziale omówimy krótko znane rezultaty w zakresie oszacowań górnych na relatywną stałą projekcji. Zaczniemy od interesującego nas przypadku hiperpłaszczyzn. Nietrudne i powszechnie znane jest poniższe

Stwierdzenie 6.6. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $Y \subset X$ jej hiperpłaszczyzną. Wówczas $\lambda(Y, X) \leqslant 2$.*

Dowód. Niech $Y = \ker f$, gdzie $f \in S_{X^*}$. Dla danej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wybierzmy wektor w_n w taki sposób, że $f(w_n) = 1$ oraz $||w_n|| \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Wówczas odwzorowanie P_n zdefiniowane jako $P_n(x) = x - f(x)w_n$ jest projekcją z X na Y. Co więcej

$$||P_n(x)|| = ||x - f(x)w_n|| \leqslant ||x|| + |f(x)|||f(w_n)|| \leqslant ||x||(1 + ||w_n||) \leqslant \left(2 + \frac{1}{n}\right) ||x||.$$

Widzimy zatem, że $||P_n|| \leqslant 2+\frac{1}{n}$. Przechodząc do infimum otrzymujemy żądaną nierówność $\lambda(Y,X) \leqslant 2$ i dowód jest zakończony. $\square$

Okazuje się, że w przypadku skończenie wymiarowym powyższe oszacowanie można istotnie poprawić. Mówi o tym słynny wynik Bohnenblusta z 1938 roku.

Twierdzenie 6.7 (Bohnenblust [10])**.** *Jeżeli X jest n-wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $Y \subset X$ podprzestrzenią wymiaru $n-1$, to zachodzi nierówność $\lambda(Y,X) \leqslant 2-\frac{2}{n}$.*

Powyższy rezultat jest optymalny (zobacz przykład 6.5). Po dowód twierdzenia odsyłamy do oryginalnej pracy Bohnenblusta. W kolejnym rozdziale zaprezentujemy jego istotne fragmenty, z których można bez trudu uzyskać kompletne rozumowanie.

W przypadku dowolnej podprzestrzeni mamy następujące oszacowanie pochodzące od Kadeca i Snobara.

Twierdzenie 6.8 (Kadec, Snobar [41])**.** *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $Y \subset X$ jej k-wymiarową podprzestrzenią. Wówczas $\lambda(Y,X) \leqslant \min\{\sqrt{k}, \sqrt{n-k}+1\}$.*

Wiele uwagi poświęcono próbom wzmocnienia powyższego wyniku, co udało się różnym autorom (zobacz na przykład [60]).

6.3. Projekcje minimalne na hiperpłaszczyzny w przestrzeni ℓ_1^n

W naszych rozważaniach dotyczących ogólnych własności projekcji minimalnych przyda nam się rezultat dotyczący projekcji przestrzeni ℓ_1^n na hiperpłaszczyzny. Poniższy rezultat daje jawną postać na relatywną stałą projekcji hiperpłaszczyzny w przestrzeni ℓ_1^n za pomocą funkcjonału definiującego ową hiperpłaszczyznę. Wypowiedź twierdzenia jest skomplikowana, ale my wykorzystamy znacznie prostsze jego wnioski, które dane są w lematach 7.4 i 7.12.

Twierdzenie 6.9. *Niech $Y = \ker f$ będzie $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni ℓ_1^n, gdzie $n \geqslant 3$. Załóżmy, że funkcjonał f zadany jest przez wektor $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, gdzie $1 = f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$. Niech $2 \leqslant k \leqslant n$ będzie największą liczbą całkowitą, dla której $f_k > 0$. Niech $a_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$, $b_i = \sum_{j=1}^{i} f_j^{-1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$ oraz $\beta_i = \frac{b_i}{i-2}$ dla $3 \leqslant i \leqslant k$. Jeżeli $k \geqslant 3$, to niech $3 \leqslant l \leqslant k$ będzie największym indeksem, dla którego obie liczby $f_l b_{l-1}$ oraz a_{l-1} są większe niż $l-3$. Wówczas zachodzi równość $\lambda(Y,\ell_1^n) = 1+x$, gdzie*

$$x = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k \leqslant 2, \\ 2\left(\left(\beta_l - f_l^{-1}\right)(l-2) + a_l f_l^{-1} - l\right)^{-1} & \text{gdy } k > 2 \text{ oraz } a_l < l-2, \\ 2\left(a_l\beta_l - l\right)^{-1} & \text{gdy } k > 2 \text{ oraz } a_l \geqslant l-2. \end{cases}$$

Dowód. Zobacz twierdzenie 2.2.13 w [54] na stronie 57. $\square$

6.4. Projekcje o normie 1

Wiele uwagi w dziedzinie projekcji przestrzeni unormowanych zostało poświęconych sytuacji, w której na daną podprzestrzeń istnieje projekcja o normie 1. Mówimy wówczas, iż owa podprzestrzeń jest *1-uzupełnialna* w nadprzestrzeni.

Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika, iż każda podprzestrzeń wymiaru 1 dowolnej przestrzeni unormowanej jest 1-uzupełnialna. W przestrzeni Hilberta 1-uzupełnialna jest każda podprzestrzeń. Jest to własność charakteryzująca przestrzeń Hilberta, gdyż mamy następujące

Twierdzenie 6.10. *Dla przestrzeni unormowanej X o wymiarze nie mniejszym niż 3 następujące warunki są równoważne*

1. *X jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią Hilberta,*
2. *dowolna podprzestrzeń X jest w niej 1-uzupełnialna,*
3. *dowolna dwuwymiarowa podprzestrzeń X jest w niej 1-uzupełnialna,*
4. *dowolna podprzestrzeń X kowymiaru 1 jest w niej 1-uzupełnialna.*

Dowód. Zobacz [3]. □

Równoważność pierwszych trzech warunków pochodzi od Kakutaniego (zobacz [42]), zaś dołączenie do nich czwartego jest rezultatem Jamesa (zobacz [38]).

Wiele pracy w dziedzinie podprzestrzeni 1-uzupełnialnych poświęconej zostało scharakteryzowaniu owych podprzestrzeni w przypadku klasycznych przestrzeni unormowanych – jako wybrane przykłady z bogatej literatury możemy zaproponować pozycje: [4], [22], [11], [39], [57], [7], [8], [68], [69], [71], [52]. W szerokim zakresie rozważane zostały w szczególności kraty Banacha i przestrzenie funkcyjne. Klasyczne przestrzenie, rozważane w literaturze, posiadają z reguły nietrywialną podprzestrzeń 1-uzupełnialną. Okazuje się, iż w rzeczywistości większość przestrzeni nie posiada tej własności. Bosznay i Garay udowodnili bowiem

Twierdzenie 6.11 (Bosznay i Garay [12])**.** *Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Wówczas zbiór n-wymiarowych przestrzeni unormowanych, które nie posiadają żadnej nietrywialnej podprzestrzeni 1-uzupełnialnej jest otwarty i gęsty w zbiorze wszystkich unormowanych przestrzeni n-wymiarowych.*

Formalnie rzecz biorąc, dla dwóch norm $||\cdot||_0, ||\cdot||_1$ w $\mathbb{R}^n$ możemy zdefiniować ich odległość jako $\sup\{|||x||_0 - ||x||_1| : ||x||_2 = 1\}$, gdzie przez $||\cdot||_2$ oznaczyliśmy normę euklidesową. To zadaje topologię na zbiorze n-wymiarowych przestrzeni unormowanych i nadaje ścisły charakter powyższemu twierdzeniu. Alternatywnie, zamiast posługiwać się zbiorem n-wymiarowych przestrzeni unormowanych możemy rozważach ich izometryczne klasy i posłużyć sie zdefiniowaną w podrozdziale 1.2 odległością Banacha-Mazura. Twierdzenie wypowiedziane w ten sposób ma oczywiście identyczny sens, gdyż własność posiadania nietrywialnej podprzestrzeni 1-uzupełnialnej zachowuje się w izometrycznym izomorfiźmie.

Wynik Bosznaya i Garaya prowadzi w naturalny sposób do następującego pytania. Skoro nie każda przestrzeń n-wymiarowa posiada podprzestrzeń 1 uzupełnialną (czy nawet większość z nich), to jak bardzo minimalna z relatywnych stałych projekcji może odchylić się od 1? Precyzyjnie rzecz ujmując postawili oni następujący

Problem 6.12 (Bosznay i Garay [12]). *Dla danej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć (lub oszacować) wartość*

$$\sup_{X} \inf_{Y \subset X} \lambda(Y, X),$$

gdzie X przebiega zbiór n-wymiarowych przestrzeni unormowanych, zaś $Y \subset X$ jest podprzestrzenią spełniającą $2 \leqslant \dim Y \leqslant n-1$.

Oszacowanie górne przez pewną liczbę c powyższej wartości sprowadza się zatem do udowodnienia, iż dowolna przestrzeń n-wymiarowa unormowana posiada nietrywialną podprzestrzeń o relatywnej stałej projekcji nie większej niż c. Uzyskanie oszacowania dolnego przez c oznacza natomiast wykazanie istnienia n-wymiarowej przestrzeni, której dowolna podprzestrzeń posiada relatywną stałą projekcji nie mniejszą niż c.

Wyniki przedstawione w rozdziałach 7 oraz 8 są, wedle naszych informacji, pierwszymi nietrywialnymi rezultatami w kierunku uzyskania postępu w problemie 6.12. Jak już bowiem wspomnieliśmy w podrozdziale 6.2, uzyskano istotne oszacowania górne relatywnej stałej projekcji **dowolnej** podprzestrzeni ustalonego wymiaru. Do tej pory nie były znane jednak żadne wyniki, które dotyczyłyby wzmocnienia tych oszacowań dla **pewnej** podprzestrzeni. Analogicznie, znane są przestrzenie, o których wiadomo, że ich dowolna nietrywialna podprzestrzeń posiada relatywną stałą projekcji większą niż 1. Dla żadnej z tych przestrzeni nie uzyskano jednak oszacowania postaci $1 + \varepsilon_0$ dla pewnej konkretnej liczby $\varepsilon_0 > 0$.

Będziemy zajmować się wariantem problemu 6.12 dotyczącym hiperpłaszczyzn. W rozdziale 7 podamy wyniki związane z oszacowaniem górnym, zaś w rozdziale 8 podamy klasę przestrzeni unormowanych, których wszystkie hiperpłaszczyzny posiadają relatywną stałą projekcji większą niż $1 + \varepsilon_0$ dla konkretnej liczby $\varepsilon_0 > 0$.

Czytelnika zainteresowanego dalszymi problemami dotyczącymi podprzestrzeni 1-uzupełnialnych zachęcamy do zaglądnięcia do pracy przeglądowej [70] poświęconej temu zagadnieniu.

7. Hiperpłaszczyzny skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych o maksymalnej relatywnej stałej projekcji

Jak wspomnieliśmy w poprzednim rozdziale, osiągnięto już znaczące wyniki w dziedzinie oszacowań górnych na relatywną stałą projekcji w przypadku dowolnej podprzestrzeni ustalonego wymiaru. Brakuje jednak rezultatów tyczących się problemu 6.12 zaproponowanego przez Bosznaya i Garaya, nawet w przypadku trójwymiarowym. Celem tego rozdziału jest zaprezentowanie pewnych wyników w tym kierunku. Nasze rozważania skoncentrują się na sytuacji, w której n-wymiarowa przestrzeń X posiada hiperpłaszczyznę Y o maksymalnej możliwej relatywnej stałej projekcji, równej $2 - \frac{2}{n}$ (zobacz twierdzenie 6.7). W następnym podrozdziale znajdziemy warunek charakteryzujący istnienie takiej podprzestrzeni (zobacz twierdzenie 7.5). Jednym z jego zastosowań jest oszacowanie górne na liczbę hiperpłaszczyzn o maksymalnej relatywnej stałej projekcji (zobacz twierdzenie 7.8), z którego łatwo wynika istnienie hiperpłaszczyzny o relatywnej stałej projekcji mniejszej niż $2 - \frac{2}{n}$ (zobacz wniosek 7.9). Można to uznać za pierwszy krok w szukaniu hiperpłaszczyzny o „małej" relatywnej stałej projekcji w przypadku dowolnej n-wymiarowej przestrzeni unormowanej.

W podrozdziale 7.2 przyjrzymy się bliżej sytuacji trójwymiarowej, w której można wzmocnić uzyskane przez nas rezultaty w przypadku ogólnym. Udowodnimy w szczególności, że maksymalna liczba dwuwymiarowych podprzestrzeni Y trójwymiarowej przestrzeni X, dla których zachodzi równość $\lambda(Y, X) = \frac{4}{3}$ jest równa 4 (zobacz twierdzenie 7.11). Dowiedziemy również, że jeżeli X posiada dwuwymiarową podprzestrzeń Y, której relatywna stała projekcji jest bliska $\frac{4}{3}$, to posiada ona również dwuwymiarową podprzestrzeń Z, której relatywna stała projekcji jest bliska 1 (zobacz twierdzenie 7.14). Zastosowaniem tego rezultatu jest wniosek 7.15, który mówi o tym, że dowolna trójwymiarowa przestrzeń unormowana posiada dwuwymiarową podprzestrzeń o relatywnej stałej projekcji mniejszej niż $\frac{4}{3} - 0.0007$. Wedle naszej wiedzy jest to pierwsze nietrywialne oszacowanie w trójwymiarowej wersji problemu 6.12.

Będziemy domyślnie zakładać, że $n \geqslant 3$.

Rezultaty zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy *Hyperplanes of finite-dimensional normed spaces with the maximal relative projection constant* (zobacz [45]).

7.1. Przypadek ogólny

Zaczniemy od przypomnienia słynnego twierdzenia Helly'ego z dziedziny geometrii wypukłej.

Twierdzenie 7.1 (Helly)**.** *Niech $C_1, C_2, \ldots C_m \subset \mathbb{R}^n$ będzie rodziną zbiorów wypukłych, gdzie $m \geqslant n + 1$. Jeżeli każda podrodzina zbiorów C_i o mocy $n + 1$ ma niepuste przecięcie, to przecięcie wszystkich zbiorów C_i jest niepuste.*

Dwa następne lematy podążają za oryginalnym rozumowaniem Bohnenblusta, które pozwoliło udowodnić oszacowanie $\lambda(Y, X) \leqslant 2 - \frac{2}{n}$ dla dowolnej hiperpłaszczyzny Y.

Lemat 7.2. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $Y \subset X$ podprzestrzenią wymiaru $n-1$. Załóżmy, że dla dowolnych n punktów ekstremalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kuli jednostkowej X istnieje projekcja $P : X \to Y$ taka, że $||P(x_i)|| \leqslant m$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz pewnej liczby $m > 0$. Wówczas $\lambda(Y, X) \leqslant m$.*

Dowód. Dla danego punktu ekstremalnego $x_0 \notin Y$ kuli jednostkowej X oznaczmy przez $\mathcal{P}_{x_0}$ zbiór tych projekcji $P : X \to Y$, dla których $||P(x_0)|| \leqslant m$. Zbiór wszystkich projekcji $\mathcal{P}(X, Y)$ tworzy $(n-1)$-wymiarową przestrzeń liniową, której zbiór $\mathcal{P}_{x_0}$ jest wypukłym podzbiorem. Zgodnie z naszym założeniem przecięcie dowolnych n zbiorów postaci $\mathcal{P}_{x_0}$ jest niepuste. Z twierdzenia 7.1 Helly'ego wynika więc, iż przecięcie wszystkich zbiorów tej postaci jest niepuste. Istnieje zatem projekcja $P : X \to Y$ taka, że $||P(x_0)|| \leqslant m$ dla dowolnego punktu ekstremalnego x_0 kuli jednostkowej. Skoro jednak kula jednostkowa jest otoczką wypukłą swoich punktów ekstremalnych (co wynika z twierdzenia Kreina-Milmana), to $||P(x_0)|| \leqslant m$ dla dowolnego $x_0 \in B_X$. Kończy to dowód lematu. $\square$

Lemat 7.3. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $Y = \ker f$, gdzie $f \in S_{X^*}$, jej $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią. Załóżmy, że wektory jednostkowe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $R \geqslant 1$ spełniają następujący warunek: jeżeli przez g oznaczymy funkcjonał zadany przez wektor $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ oraz $Z = \ker g$, to $\lambda(Z, \ell_1^n) \leqslant R$. Istnieje wówczas projekcja $P : X \to Y$ taka, że $||P(x_i)|| \leqslant R$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Dowód. Niech $Q : \ell_1^n \to Z$ będzie projekcją o normie nie przekraczającej R i załóżmy, że $Q(x) = x - g(x)r$ dla pewnego wektora $r \in \mathbb{R}^n$, który spełnia $g(r) = 1$. W szczególności

$$||Q(e(i))|| = |1 - f(x_i)r_i| + \sum_{j \neq i} |f(x_i)r_j| \leqslant R,$$

dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Rozważmy odwzorowanie liniowe P postaci $P(x) = x - f(x)\tilde{r}$, gdzie

$$\tilde{r} = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_n x_n.$$

Jest to projekcja z X na Y, gdyż $f(\tilde{r}) = g(r) = 1$. Co więcej

$$||P(x_i)|| = ||(1 - f(x_i)r_i)x_i - \sum_{j \neq i} r_j f(x_i)x_j|| \leqslant |1 - f(x_i)r_i| + \sum_{j \neq i} |f(x_i)r_j| \leqslant R.$$

Wynika stąd, że P jest szukaną projekcją i dowód jest zakończony. $\square$

Widzimy więc, że za pomocą dwóch powyższych lematów Bohnenblust sprowadził przypadek dowolnej przestrzeni unormowanej do przestrzeni ℓ_1^n. Można w tej sytuacji przypuszczać, że pewne bardziej zaawansowane rezultaty dotyczące przestrzeni ℓ_1^n mogą się okazać pomocne w badaniu relatywnej stałej projekcji hiperpłaszczyzn. Mamy tu na myśli wynik dający konkretny wzór na relatywną stałą projekcji hiperpłaszczyzny przestrzeni ℓ_1^n, podany w twierdzeniu 6.9. Istotny wniosek, który z niego wypływa został zawarty w poniższym lemacie.

Lemat 7.4. *Niech $Y = \ker f$ będzie $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni ℓ_1^n, gdzie $n \geqslant 3$ oraz $f \neq 0$. Załóżmy, że funkcjonał f zadany jest przez wektor $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Wówczas równość $\lambda(Y, \ell_1^n) = 2 - \frac{2}{n}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|f_1| = |f_2| = \ldots = |f_n|$.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $1 = f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$. Niech $Y = \ker f$ będzie $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią ℓ_1^n, która spełnia $\lambda(Y, \ell_1^n) = 2 - \frac{2}{n}$. Wykorzystamy twierdzenie 6.9 oraz notację używaną w jego wypowiedzi. Oczywiście $k > 2$. Jeżeli $a_l \geqslant l-2$, to ze wzoru na normę projekcji minimalnej przestrzeni ℓ_1^n wynika, że

$$2 - \frac{2}{n} = \lambda(Y, \ell_1^n) = 1 + 2\left(a_l \beta_l - l\right)^{-1}$$

i w szczególności

$$a_l \beta_l = \frac{2n}{n-2} + l.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza oraz warunku $l \leqslant n$ otrzymujemy jednak

$$a_l \beta_l = \frac{\left(\sum_{i=1}^{l} f_i\right)\left(\sum_{i=1}^{l} f_i^{-1}\right)}{l-2} \geqslant \frac{l^2}{l-2} = \frac{2l}{l-2} + l \geqslant \frac{2n}{n-2} + l.$$

W konsekwencji mamy $l = n$ oraz $1 = f_1 = f_2 = \ldots = f_n$, gdyż otrzymaliśmy równość w nierówności Cauchy'ego-Schwarza.

Rozważymy teraz przypadek $a_l < l - 2$. Wówczas

$$\left(\beta_l - f_l^{-1}\right)(l-2) + a_l f_l^{-1} = \frac{2n}{n-2} + l.$$

Skoro

$$\left(\beta_l - f_l^{-1}\right)(l-2) + a_l f_l^{-1} \geqslant \left(\beta_l - f_l^{-1}\right) a_l + a_l f_l^{-1} = \beta_l a_l,$$

to możemy zastosować nierówność Cauchy'ego-Schwarza podobnie jak wcześniej, aby otrzymać $1 = f_1 = f_2 = \ldots = f_n$, co przeczy założeniu $a_l < l - 2$.

Aby zakończyć dowód lematu pozostaje zauważyć, iż na mocy twierdzenia 6.9 dla $1 = f_1 = f_2 = \ldots = f_n$ norma projekcji minimalnej jest równa $2 - \frac{2}{n}$. □

Jesteśmy teraz gotowi, aby podać zapowiedziany warunek charakteryzujący istnienie hiperpłaszczyzny o maksymalnej relatywnej stałej projekcji.

Twierdzenie 7.5. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $Y = \ker f$, gdzie $f \in S_{X^*}$, jej $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią. Wówczas równość $\lambda(Y, X) = 2 - \frac{2}{n}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją punkty ekstremalne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kuli jednostkowej przestrzeni X, które spełniają następujące warunki:*

- $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n)$,

- *wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne,*
- *jeżeli dowolny wektor $\mathbb{R}^n \ni x = \sum_{i=1}^n w_i x_i$ zapiszemy w bazie wektorów x_i, to prawdziwa jest nierówność*

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \{|w_1 + w_2 + \ldots + w_{i-1} - w_i + w_{i+1} + \ldots + w_n|\} \leqslant ||x||.$$

Trzeci warunek równoważny jest temu, że dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ zbiór

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$$

zawiera się $(n-1)$-wymiarowej ścianie kuli jednostkowej.

Dowód. Załóżmy najpierw, iż spełniona jest równość $\lambda(Y, X) = 2 - \frac{2}{n}$. Z lematu 7.2 istnieją punkty ekstremalne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kuli jednostkowej X, dla których

$$\max\{||P(x_1)||, ||P(x_2)||, \ldots, ||P(x_n)||\} = 2 - \frac{2}{n},$$

dla dowolnej projekcji $P : X \to Y$. Udowodnimy, że punkty ekstremalne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunki dane w twierdzeniu.

Skoro $||P(v)|| = ||P(-v)||$ dla dowolnej projekcji $P : X \to Y$ oraz dowolnego $v \in X$, możemy założyć, że $f(x_i) \geqslant 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Łącząc lematy 7.4 oraz 7.3 uzyskujemy równości $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n)$. Wektory x_i spełniają zatem pierwszy warunek twierdzenia.

Aby udowodnić drugi, załóżmy dla dowodu nie wprost, iż wymiar przestrzeni $V = \mathrm{lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ nie przekracza $n-1$. Wymiar przestrzeni $Y \cap V$ jest nie mniejszy niż $\dim V - 1$ i z twierdzenia 6.7 wynika istnienie projekcji z V na $Y \cap V$, której norma nie przekracza $2 - \frac{2}{\dim V} < 2 - \frac{2}{n}$. Przeczy to wyborowi punktów x_i. A zatem i drugi warunek jest spełniony.

W celu uzyskania ostatniego warunku twierdzenia, rozważymy środek ciężkości

$$g = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Z nierówności trójkąta wynika, że

$$||g - x_i|| = \frac{1}{n} ||x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} - (n-1)x_i + x_i + \ldots + x_n|| \leqslant \frac{2n-2}{n} = 2 - \frac{2}{n}.$$

dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Udowodnimy, że w rzeczywistości dla dowolnego i zachodzi równość $||g - x_i|| = 2 - \frac{2}{n}$.

Istotnie, dla dowodu nie wprost przyjmijmy, że $||g - x_n|| < 2 - \frac{2}{n}$. Oznaczmy $A = 2 - \frac{2}{n}$ oraz $B = \frac{||g - x_n||}{A} < 1$. Wówczas $0 < 2 - A < 2 - AB$. Możemy zatem rozważyć wektor

$$s = \lambda g + (1 - \lambda)\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$$

dla λ spełniającego $\frac{2-A}{2-AB} < \lambda < 1$. Wykażemy, że $||s - x_i|| < A$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Rzeczywiście,

$$||s - x_1|| = \left|\left|\left(\frac{1}{n-1} - \frac{\lambda}{n(n-1)} - 1\right) x_1 + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{\lambda}{n(n-1)}\right) \sum_{i=2}^{n-1} x_i + \frac{\lambda}{n} x_n\right|\right| \leqslant$$

$$\left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{\lambda}{n(n-1)}\right) + (n-2)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{\lambda}{n(n-1)}\right) + \frac{\lambda}{n} = \frac{2(n^2 - 2n + \lambda)}{n(n-1)} < 2\frac{(n-1)^2}{n(n-1)} = A.$$

W podobny sposób dowodzimy nierówności $||s - x_i|| < A$ dla $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Co więcej

$$||s - x_n|| = \left|\left|\lambda(g - x_n) + (1-\lambda)\left(x_n - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1}\right)\right|\right|$$

$$\leqslant \lambda AB + (1-\lambda)2 = \lambda(AB - 2) + 2 < (A - 2) + 2 = A.$$

Rozważmy teraz projekcję $P : X \to Y$ w kierunku wektora s, czyli $P(v) = v - \frac{f(v)}{f(s)} s$. Ponieważ $s \in \mathrm{conv}\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ mamy $f(s) = f(x_i)$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. W konsekwencji

$$||P(x_i)|| = ||x_i - s|| < 2 - \frac{2}{n},$$

dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Otrzymaliśmy sprzeczność z wyborem punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, która dowodzi, iż odległość punktu g do dowolnego z punktów x_i jest równa $2 - \frac{2}{n}$.

Natychmiastowym wnioskiem z powyższego fragmentu rozumowania jest fakt, iż wektor

$$\frac{1}{2n-2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} - (n-1)x_i + x_{i+1} + \ldots + x_n),$$

należący do otoczki wypukłej punktów

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\},$$

leży na sferze jednostkowej przestrzeni X. Wynika stąd, że powyższy zbiór leży na ścianie F kuli jednostkowej X. Ściana F musi być jednak $(n-1)-$wymiarowa, gdyż wektory x_i są liniowo niezależne. Trzeci warunek twierdzenia wynika teraz z faktu, iż w bazie wektorów x_i ściana F jest wyznaczona przez wektor $(1, 1, \ldots, 1-1, 1, \ldots, 1)$. Kończy to dowód pierwszej implikacji twierdzenia.

Załóżmy teraz, że podprzestrzeń Y oraz punkty ekstremalne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kuli jednostkowej spełniają wszystkie warunki twierdzenia. Stosując odpowiednie przekształcenie liniowe, możemy bez straty ogólności przyjąć, iż $x_i = e(i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Wówczas $Y = \ker f$, gdzie $f(v) = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje projekcja $P : X \to Y$, która spełnia $||P(e(i))|| < 2 - \frac{2}{n}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Hiperpłaszczyzna zawierająca wektory $e(i)$ jest równoległa do Y, a więc projekcja P zawężona do owych wektorów jest translacją. Innymi słowy istnieje wektor $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ taki, że $P(e(i)) = e(i) - w$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ mamy również

$$2 - \frac{2}{n} > ||P(e(i))|| \geqslant |w_1 + w_2 + \ldots + w_{i-1} - w_i + w_{i+1} + \ldots + w_n + 1|,$$

gdzie druga nierówność wynika z trzeciego warunku twierdzenia. Sumując wszystkie nierówności tego typu otrzymujemy

$$2n - 2 > \sum_{i=1}^{n} |w_1 + w_2 + \ldots + w_{i-1} - w_i + w_{i+1} + \ldots + w_n + 1| \geqslant \left|(n-2)\sum_{i=1}^{n} w_i + n\right| = 2n - 2.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

□

Wnioskiem z powyższej charakteryzacji jest czysto geometryczny opis sytuacji, w której istnieje hiperpłaszczyzna o maksymalnej relatywnej stałej projekcji.

Wniosek 7.6. *Niech $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ będzie przestrzenią unormowaną. Wówczas następujące warunki są równoważne*

- *Istnieje $(n-1)$-wymiarowa podprzestrzeń Y przestrzeni X, dla której $\lambda(Y, X) = 2 - \frac{2}{n}$.*
- *Istnieje operator liniowy $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dla którego $B_{\ell_1^n} \subset T(B_X) \subset P$,*

gdzie B_X jest kulą jednostkową przestrzeni X, $B_{\ell_1^n} = \{x : |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leqslant 1\}$ jest kulą jednostkową przestrzeni ℓ_1^n, zaś P jest równoległościanem ograniczonym przez $2n$ hiperpłaszczyzn postaci: $\{x : x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} - x_i + x_{i+1} + \ldots + x_n = \pm 1\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z poprzedniego twierdzenia i wybrać operator T w taki sposób, że $T(x_i) = e(i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. □

Kolejne zastosowanie twierdzenia 7.5 mówi o tym, że przestrzeń X posiadająca hiperpłaszczyznę o maksymalnej relatywnej stałej projekcji, posiada podprzestrzeń dwuwymiarową o minimalnej relatywnej stałej projekcji (równą 1). Tego typu własność będzie miała dla nas istotne znaczenie w podrozdziale 7.2, gdzie wykorzystamy jej wzmocnioną wersję dla $n = 3$.

Wniosek 7.7. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, która posiada $(n-1)$-wymiarową podprzestrzeń Y taką, że $\lambda(Y, X) = 2 - \frac{2}{n}$. Wówczas X posiada również dwuwymiarową podprzestrzeń Z, dla której $\lambda(Z, X) = 1$.*

Dowód. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą zdefiniowane tak jak w twierdzeniu 7.5. Z trzeciego warunku owego twierdzenia wynika, że jeżeli $i \neq j$ to odcinki łączące pary

$$(x_i, x_j), (x_i, -x_j), (-x_i, x_j), (-x_i, -x_i)$$

leżą na sferze jednostkowej przestrzeni X. Wynika stąd, że przecięcie $\mathrm{lin}\{x_i, x_j\} \cap B_X$ jest równoległobokiem, co oznacza, że zawężenie normy $||\cdot||$ do dwuwymiarowej podprzestrzeni $\mathrm{lin}\{x_i, x_j\}$ skutkuje otrzymaniem przestrzeni izometrycznie izomorficznej z przestrzenią ℓ^2_∞. Wiadomo jednak, że podprzestrzenie będące izometrycznie izomorficzne z ℓ^m_∞ są zawsze 1-uzupełnialne (zobacz lemat 7.13 dla ogólniejszego rezultatu). Kończy to dowód. $\square$

Kolejnym wnioskiem płynącym z twierdzenia 7.5 jest oszacowanie górne na liczbę hiperpłaszczyzn o maksymalnej relatywnej stałej projekcji, wypowiedziane za pomocą liczby $(n-1)-$wymiarowych ścian kuli jednostkowej.

Twierdzenie 7.8. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną, której kula jednostkowa posiada $2N \geqslant 0$ ścian $(n-1)-$wymiarowych. Wówczas liczba $(n-1)$-wymiarowych podprzestrzeni $Y \subset X$, dla których spełniona jest równość $\lambda(Y, X) = 2 - \frac{2}{n}$ nie przekracza $2^{n-1}\binom{N}{n}$.*

Dowód. Rozważmy rodzinę $\mathcal{F}$ złożoną z n-elementowych podzbiorów zbioru wszystkich ścian $(n-1)-$wymiarowych kuli jednostkowej, które nie zawierają jednocześnie żadnej symetrycznej pary ścian. Łatwo zauważyć, że rodzina $\mathcal{F}$ złożona jest z $2^n\binom{N}{n}$ podzbiorów.

Jeżeli dla $(n-1)-$wymiarowej podprzestrzeni Y zachodzi równość $\lambda(Y, X) = 2 - \frac{2}{n}$, to na mocy twierdzenia 7.5 istnieją parami różne wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które leżą w hiperpłaszczyźnie równoległej do Y, oraz dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ zbiór

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$$

jest zawarty w pewnej $(n-1)-$wymiarowej ścianie kuli jednostkowej. Zauważmy, że stawiając znak minus przy różnych wektorach otrzymujemy różne ściany. Co więcej, skoro $n \geqslant 3$, to żadne dwie takie ściany nie są do siebie symetryczne. Wykazaliśmy w ten sposób, że dowolnej hiperpłaszczyźnie Y o maksymalnej relatywnej stałej projekcji odpowiada zbiór $F(Y) \in \mathcal{F}$. Wykażemy, że odwzorowanie F jest injektywne oraz, że nie istnieje hiperpłaszczyzna Z, dla której zbiór $F(Z)$ składa się ze ścian symetrycznych do tych, które należą do $F(Y)$.

W tym celu, załóżmy, że n ścian w zbiorze $F(Y)$ jest wyznaczone przez unormowane funkcjonały $f_1, f_2, \ldots, f_n$ oraz niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą zdefiniowane tak jak wcześniej. Rozważmy funkcjonał $f = \frac{f_1+f_2+\ldots+f_n}{n-2}$. Dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ mamy wówczas

$$f(x_i) = \frac{(n-1)-1}{n-2} = 1.$$

Wynika stąd, że hiperpłaszczyzna $Y = \ker f$ jest jednoznacznie wyznaczona przez zbiór $F(Y)$, co dowodzi injektywności odwzorowania F. Zauważmy dalej, że jeżeli funkcjonały $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zostałyby zastąpione przez $-f_1, -f_2, \ldots, -f_n$, to rozumując jak powyżej otrzymalibyśmy tą samą hiperpłaszczyzne, gdyż oczywiście $Y = \ker f = \ker(-f)$. W szczególności, liczba hiperpłaszczyzn o maksymalnej relatywnej stałej projekcji nie przekracza połowy mocy rodziny $\mathcal{F}$ i dowód jest zakończony. $\square$

Natychmiastowym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest

Wniosek 7.9. *Dowolna n-wymiarowa przestrzeń unormowana X, posiada $(n-1)$-wymiarową podprzestrzeń Y, dla której $\lambda(Y,X) < 2 - \frac{2}{n}$.*

Warto zwrócić uwagę, iż powyższy wniosek jest fenomenem skończenie wymiarowym. W przypadku nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha może się bowiem zdarzyć, iż każda hiperpłaszczyzna posiada maksymalną relatywną stałą projekcji. Na mocy stwierdzenia 6.6 prawdziwa jest bowiem nierówność $\lambda(Y,X) \leqslant 2$ dla dowolnej hiperpłaszczyzny $Y \subset X$. Jednocześnie, dla dowolnej hiperpłaszczyzny $Y \subset L_1[0,1]$ zachodzi równość $\lambda(Y, L_1[0,1]) = 2$ (zobacz na przykład [27]).

7.2. Przypadek trójwymiarowy

Okazuje się, iż w przypadku trójwymiarowym możliwe jest uzyskanie mocniejszych rezultatów za pomocą podobnych metod. Jeżeli trójwymiarowa przestrzeń unormowana X posiada dwuwymiarową podprzestrzeń Y, dla której $\lambda(Y,X) = \frac{4}{3}$, to na mocy wniosku 7.6 możemy założyć, że $B_{\ell_1^3} \subset B_X \subset P$, gdzie

$$B_{\ell_1^3} = \{x : |x_1| + |x_2| + |x_3| \leqslant 1\}$$

jest ośmiościanem foremnym, zaś P jest równoległościanem o wierzchołkach:

$$\{(\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1), (1,1,1), (-1,-1,-1)\}.$$

Równoważnie w języku normy, dla dowolnego wektora $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ prawdziwe są nierówności

$$\max\{|x_1 + x_2 - x_3|, |x_1 - x_2 + x_3|, |-x_1 + x_2 + x_3|\} \leqslant ||x|| \leqslant |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

Zauważmy jednak, że jeżeli liczby $x_1\, x_2, x_3$ nie są tego samego znaku, to zachodzi równość

$$\max\{|x_1 + x_2 - x_3|, |x_1 - x_2 + x_3|, |-x_1 + x_2 + x_3|\} = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

W takim wypadku mamy więc $||x|| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$. W efekcie istnienie płaszczyzny o maksymalnej relatywnej stałej projekcji jest dużo bardziej restrykcyjnym warunkiem niż w przypadku ogólnym – w sześciu z ośmiu części układu współrzędnych norma przestrzeni X pokrywa się z normą ℓ_1^3. Z pomocą tej obserwacji możemy wyznaczyć maksymalną możliwą liczbę podprzestrzeni dwuwymiarowych, dla których relatywna stała projekcji jest równa $\frac{4}{3}$. Pomijamy elementarny dowód poniższego lematu.

Lemat 7.10. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$ prawdziwa jest nierówność*

$$\min\{|x| + |y| + |x + y - 1|, |x| + |y| + |x + y + 1|\} \leqslant 3.$$

Jeżeli zachodzi równość to $x, y \in \{-1, 1\}$.

Twierdzenie 7.11. *Niech X będzie trójwymiarową przestrzenią unormowaną. Wówczas maksymalna liczba dwuwymiarowych podprzestrzeni $Y \subset X$, dla których zachodzi równość $\lambda(Y, X) = \frac{4}{3}$ jest równa 4.*

Dowód. Jeżeli przyjmiemy $X = \ell_\infty^3$ oraz

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^3 : c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 = 0\},$$

gdzie $c_1,\ c_2 \in \{-1, 1\}$, to $\lambda(Y, X) = \frac{4}{3}$ (zobacz przykład 6.5). Wystarczy więc wykazać oszacowanie górne.

Przyjrzyjmy się bliżej przypadkowi $X = \ell_\infty^3$. Z twierdzenia 7.5 wynika, że dowolna dwuwymiarowa podprzestrzeń $Y \subset \ell_\infty^3$ o maksymalnej relatywnej stałej projekcji jest równoległa do pewnej płaszczyzny wyznaczonej przez trzy wierzchołki sześcianu jednostkowego (z których oczywiście żadne dwa nie mogą być do siebie symetryczne). Zauważmy jednak, że dowolna trójka wierzchołków, która leży na jednej ścianie wyznacza podprzestrzeń o relatywnej stałej projekcji równej 1. Co więcej, każda inna płaszczyzna jest wyznaczona przez dokładnie 4 trójelementowe podzbiory wierzchołków. Daje to dokładnie 4 różne płaszczyzny o maksymalnej relatywnej stałej projekcji. W przypadku przestrzeni $X = \ell_\infty^3$ teza twierdzenia jest zatem prawdziwa.

Załóżmy więc, że X jest dowolną trójwymiarową przestrzenią unormowaną, która nie jest izomorficznie izometryczna z ℓ_∞^3, zaś $Y \subset X$ jest jej dwuwymiarową podprzestrzenią, dla której $\lambda(Y, X) = \frac{4}{3}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

zaś wektory x_i opisane w twierdzeniu 7.5 są wektorami $e(1),\ e(2),\ e(3)$ bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $Z \neq Y$ będzie inną dwuwymiarową podprzestrzenią X, dla której $\lambda(Z, X) = \frac{4}{3}$ i oznaczmy przez z_1, z_2, z_3 punkty ekstremalne kuli jednostkowej X, które są dane jak w twierdzeniu 7.5. Aby uzyskać żądane oszacowanie górne wystarczy wykazać, iż $\{z_1, z_2, z_3\} = \{\varepsilon_1 e(1), \varepsilon_2 e(2), \varepsilon_3 e(3)\}$ dla pewnych $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$.

Niech $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geqslant 0\}$ oraz $-P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \leqslant 0\}$. Zauważmy, że $z_1,\ z_2,\ z_3 \in (P \cup -P)$. Rzeczywiście, punkty z_i są punktami ekstremalnymi kuli jednostkowej, a na mocy uwagi z początku podrozdziału wynika, że w każdej części układu współrzędnych różnej od P i od $-P$ sfera jednostkowa przestrzeni X jest trójkątem o wierzchołkach postaci $\pm e(1),\ \pm e(2),\ \pm e(3)$. W tych częściach układu współrzędnych są to zatem jedyne możliwe punkty ekstremalne. Jasne jest jednak, że one również należą do zbioru $P \cup (-P)$.

Przyjmijmy bez straty ogólności, że $z_1,\ z_2 \in P$. Niech $z_1 = (a_1, a_2, a_3)$ oraz $z_2 = (b_1, b_2, b_3)$, gdzie $a_i,\ b_i \geqslant 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Ze względu na symetrię wystarczy rozważyć dwa przypadki: $a_i \geqslant b_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$ lub $a_1 \geqslant b_1, a_2 \geqslant b_2$ oraz $a_3 \leqslant b_3$. Zaczniemy od pierwszego z nich.

Mamy wówczas

$$2 = ||z_1 - z_2|| \leqslant |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3).$$

Jednakże

$$1 = ||z_2|| \leqslant b_1 + b_2 + b_3.$$

Dodając więc stronami nierówności

$$|a_1 + a_2 - a_3| \leqslant 1,\ |a_1 - a_2 + a_3| \leqslant 1,\ | - a_1 + a_2 + a_3| \leqslant 1,$$

a następnie stosując nierówność trójkąta dostajemy, że $a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 3$. Mamy zatem $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ oraz równość zachodzi we wszystkich oszacowaniach. Z otrzymanych równości

$$|a_1 + a_2 - a_3| = |a_1 - a_2 + a_3| = | - a_1 + a_2 + a_3| = 1,$$

łatwo wynika, iż $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Punkt $(1, 1, 1)$ należy zatem do sfery jednostkowej przestrzeni X. Kula jednostkowa X zawiera więc równoległościan o wierzchołkach

$$\{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), (1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}.$$

Z wniosku 7.6 wynika jednak zawieranie przeciwne. Widzimy więc, że kula jednostkowa przestrzeni X jest równoległościanem. W szczególności przestrzeń X jest izometrycznie izomorficzna z ℓ^3_∞, co przeczy założeniu przyjętemu na początku dowodu.

Załóżmy teraz, że $a_1 \geqslant b_1,\ a_2 \geqslant b_2,\ a_3 \leqslant b_3$. Wówczas

$$2 = ||z_1 - z_2|| \leqslant |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| = (a_1 + a_2 - a_3) - (b_1 + b_2 - b_3).$$

Obie liczby $|a_1 + a_2 - a_3|$, $|b_1 + b_2 - b_3|$ są jednak ograniczone przez 1. Oznacza to, że $a_1 + a_2 - a_3 = 1$ oraz $b_1 + b_2 - b_3 = -1$. Dodając więc stronami nierówności $|-b_1 + b_2 + b_3| \leqslant 1$ oraz $|b_1 - b_2 + b_3| \leqslant 1$ dostajemy, że $b_3 \leqslant 1$. W konsekwencji $b_1 = b_2 = 0$ oraz $b_3 = 1$. Zwróćmy uwagę, że ten argument pokazuje, iż każda ze współrzędnych wektorów z_i jest ograniczona przez 1. Wykorzystamy tą obserwację w dalszej części dowodu.

Do naszego rozumowania włączymy teraz trzeci wektor z_3. Niech $z_3 = (c_1, c_2, c_3)$ i załóżmy na razie, iż $z_3 \in P$. Oznacza to, że $c_i \geqslant 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Mamy wówczas

$$2 = ||z_2 - z_3|| \leqslant |c_1| + |c_2| + |1 - c_3| = c_1 + c_2 - c_3 + 1,$$

a zatem $c_1 + c_2 - c_3 = 1$. Z twierdzenia 7.5 zastosowanego do płaszczyzny wyznaczonej przez z_1, z_2, z_3 wynikają równości

$$3 = ||z_1 - z_2 - z_3|| = ||z_1 + z_2 - z_3||.$$

Z drugiej jednak strony normę tych wektorów możemy również oszacować wykorzystując kanoniczną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, otrzymując w efekcie

$$3 = ||z_1 - z_2 - z_3||$$

$$\leqslant |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |a_3 - c_3 - 1| = |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) - 1|$$

oraz podobnie

$$3 = ||z_1 + z_2 - z_3||$$

$$\leqslant |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |a_3 - c_3 + 1| = |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + |(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) + 1|.$$

Skoro $0 \leqslant a_1, a_2, c_1, c_2 \leqslant 1$, to możemy zastosować lemat 7.10 do $x = a_1 - c_1$ i $y = a_2 - c_2$ aby otrzymać $x, y \in \{-1, 1\}$. Rozważymy teraz cztery możliwe przypadki:

- jeżeli $a_1 - c_1 = a_2 - c_2 = 1$, to $a_1 = a_2 = 1$ i w konsekwencji również $a_3 = 1$. Ponownie zatem dochodzimy do sytuacji przestrzeni ℓ_∞^3, którą omówiliśmy na początku dowodu.
- Jeżeli $a_1 - c_1 = 1$ oraz $a_2 - c_2 = -1$, to $a_1 = c_2 = 1$ oraz $c_1 = a_2 = 0$. W efekcie dostajemy również $a_3 = c_3 = 0$. W tym przypadku mamy zatem $z_1 = e(1)$ oraz $z_3 = e(2)$.
- Jeżeli $a_1 - c_1 = -1$ oraz $a_2 - c_2 = 1$ to rozumujemy analogicznie jak powyżej.
- W pozostałej możliwości $a_1 - c_1 = a_2 - c_2 = -1$ dostajemy $a_1 = a_2 = 0$, co jest niemożliwe, gdyż wówczas $a_3 = -1$, a to przeczy założeniu $z_1 \in P$.

W sytuacji $z_3 \in P$, którą do tej pory rozważaliśmy, dowód jest więc zakończony.

Załóżmy zatem, że $c_i \leqslant 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Tym razem mamy

$$2 = ||z_2 + z_3|| \leqslant |c_1| + |c_2| + |1 + c_3| = 1 - (c_1 + c_2 - c_3),$$

a stąd $c_1 + c_2 - c_3 = -1$. Co więcej

$$3 = ||z_1 - z_2 + z_3||$$

$$\leqslant |a_1 + c_1| + |a_2 + c_2| + |a_3 + c_3 - 1| = |a_1 + c_1| + |a_2 + c_2| + |(a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) - 1|$$

oraz

$$3 = ||z_1 + z_2 - z_3||$$

$$\leqslant |a_1 + c_1| + |a_2 + c_2| + |a_3 + c_3 + 1| = |a_1 + c_1| + |a_2 + c_2| + |(a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + 1|.$$

Zgodnie z naszymi założeniami prawdziwe są nierówności $0 \leqslant |a_1 + c_1|, |a_2 + c_2| \leqslant 1$ i możemy zastosować lemat 7.10 do $x = a_1 + c_1$ i $y = a_2 + c_2$ otrzymując, że $x, y \in \{-1, 1\}$. Aby zakończyć rozumowanie wystarczy teraz rozważyć podobnie jak wcześniej cztery możliwe przypadki. Kończy to dowód. □

Pozostała część tego podrozdziału poświęcona jest uzyskaniu stabilnej wersji wniosku 7.7. Potrzebujemy dwóch wyników pomocniczych. Pierwszy z nich jest bardziej precyzyjną wersją lematu 7.3.

Lemat 7.12. *Niech $Y = \ker f$ będzie dwuwymiarową podprzestrzenią przestrzeni ℓ_1^3, zaś $0 \leqslant A < \frac{1}{3}$ liczbą rzeczywistą. Załóżmy, że funkcjonał f wyznaczony jest przez wektor (f_1, f_2, f_3), który spełnia*

$$1 = f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant 0, \quad f_3 \leqslant r$$

gdzie

$$r = \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)^2 \quad \text{oraz } b = 3\sqrt{\frac{1-A}{1-3A}} - 1.$$

Wówczas prawdziwa jest nierówność $\lambda(Y, \ell_1^3) \leqslant \frac{4}{3} - A$.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że $b \geqslant 2$ i w efekcie $r \leqslant 1$. Jeżeli $f_3 = 0$, to nie ma czego dowodzić gdyż na mocy twierdzenia 6.9 mamy $\lambda(Y, \ell_1^3) = 1 \leqslant \frac{4}{3} - A$. Załóżmy więc, że $f_3 > 0$. Zgodnie z twierdzeniem 6.9

$$\lambda(Y, \ell_1^n) = 1 + 2\left((1 + f_2 + f_3)(1 + f_2^{-1} + f_3^{-1}) - 3\right)^{-1}$$

$$1 + 2\left(\frac{f_2}{f_3} + \frac{f_3}{f_2} + f_2 + f_3 + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}\right)^{-1}.$$

Teza jest więc równoważna nierówności

$$\frac{f_2}{f_3} + \frac{f_3}{f_2} + f_2 + f_3 + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \geqslant \frac{6}{1-3A},$$

przy warunkach danych w treści lematu.

Rozważmy funkcję $g(u, v)$ zdefiniowaną jako

$$g(u, v) = \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + u + v + \frac{1}{u} + \frac{1}{v},$$

dla $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ spełniających $0 < v \leqslant u \leqslant 1$ oraz $v \leqslant r$.

Za pomocą rachunku różniczkowego nietrudno sprawdzić, iż funkcja g minimalizuje się w punkcie $(1, r)$ lub $(\sqrt{r}, r)$. Jednakże

$$g(1, r) = 2\left(r + \frac{1}{r}\right) + 2 = \left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 + \left(r + \frac{1}{r}\right) \geqslant 2\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) + \left(r + \frac{1}{r}\right) = g(\sqrt{r}, r).$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$g(\sqrt{r}, r) = 2\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) + \left(r + \frac{1}{r}\right) \geqslant \frac{6}{1-3A}.$$

Podstawiając $t = \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}$ powyższą nierówność możemy przekształcić do postaci

$$t^2 + 2t - 2 \geqslant \frac{6}{1-3A},$$

lub też $(t+1)^2 \geqslant \frac{6}{1-3A} + 3$. Skoro $t > 0$, to jest to równoważne nierówności

$$t \geqslant \sqrt{\frac{6}{1-3A} + 3} - 1 = b.$$

Podstawiając jednak $r = \left(\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}\right)^2$ dostajemy w istocie równość. Kończy to dowód lematu.

□

Kolejny lemat mówi o tym, że na dwuwymiarowe podprzestrzenie bliskie przestrzeni ℓ_∞^2 zawsze istnieje projekcja o normie bliskiej 1.

Lemat 7.13. *Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią unormowaną. Załóżmy, że wektory $x,\ y \in X$ są liniowo niezależne i spełniają nierówności $||x+y||,\ ||x-y|| \geqslant 2-A$ dla pewnej liczby rzeczywistej $A \in [0,1)$. Wówczas prawdziwa jest nierówność $\lambda(Y,X) \leqslant \frac{1}{1-A}$, gdzie $Y = \text{lin}\{x,y\}$.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że

$$Y = \{(v_1, v_2, 0, \ldots, 0) : v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$$

oraz $x = e(1) + e(2),\ y = e(1) - e(2)$. Wówczas $||e(1) + e(2)|| = ||e(1) - e(2)|| = 1$ i $||e(1)||,\ ||e(2)|| \geqslant 1 - \frac{A}{2}$. Dowiedziemy, że

$$||v|| \leqslant ||v||_\infty \leqslant \frac{1}{1-A}||v||,$$

dla dowolnego $v \in Y$ (gdzie $||\cdot||_\infty$ oznacza zwykłą normę maksimum). Istotnie, niech $v = (v_1, v_2, 0, \ldots, 0)$. Przyjmijmy, że $v_1 \geqslant v_2 \geqslant 0$. Wówczas

$$||v|| = ||v_1e_1 + v_2e_2|| = ||(v_1+v_2)e_1 + v_2(e_1 - e_2)|| \geqslant (v_1+v_2)\left(1 - \frac{A}{2}\right) - v_2.$$

Dla ustalonego v_1 powyższe wyrażenie jest funkcją liniową zmiennej v_2. Dla $v_2 = 0$ i $v_2 = v_1$ jej wartości to odpowiednio $v_1(1-\frac{A}{2})$ i $v_1(1-A)$. A zatem

$$||v|| \geqslant v_1(1-A) = (1-A)||v||_\infty.$$

Ponadto

$$||v|| = \frac{1}{2}||(v_1-v_2)(e_1-e_2) + (v_1+v_2)(e_1+e_2)|| \leqslant \frac{1}{2}\left((v_1-v_2) + (v_1+v_2)\right) = v_1 = ||v||_\infty.$$

W pozostałych przypadkach możemy rozumować analogicznie. Daje to żądane oszacowania.

Rozważmy teraz funkcjonały liniowe $p_1, p_2 : Y \to \mathbb{R}$ zdefiniowane jako $p_i(v) = v_i$ dla $i = 1, 2$. Z poprzedniego fragmentu rozumowania wynika, iż normy tych funkcjonałów są ograniczone przez $\frac{1}{1-A}$. Z twierdzenia Hanha-Banacha wynika więc istnienie przedłużeń $\tilde{p_1}, \tilde{p_2} : X \to \mathbb{R}$ o normie nie przekraczającej $\frac{1}{1-A}$. Twierdzimy, że wówczas

$$P(v) = (\tilde{p_1}(v), \tilde{p_2}(v), 0, \ldots, 0)$$

jest szukaną projekcją z X na Y o normie nie przekraczającej $\frac{1}{1-A}$. Rzeczywiście

$$||P(v)|| \leqslant ||P(v)||_\infty = \max\{|\tilde{p_1}(v)|, |\tilde{p_2}(v)|\} \leqslant \frac{1}{1-A}||v||.$$

Kończy to dowód lematu. □

Możemy teraz podać stabilną wersję wniosku 7.7. Posłużymy się zbliżonym rozumowaniem do tego, które przeprowadziliśmy w dowodzie twierdzenia 7.5. Przed podaniem wypowiedzi twierdzenia zdefiniujmy jeszcze funkcję $\varphi(R) : [0, \frac{1}{3}) \to \mathbb{R}$ jako

$$\varphi(R) = \left(\frac{\left(3\sqrt{\frac{1-R}{1-3R}} - 1\right) - \sqrt{\left(3\sqrt{\frac{1-R}{1-3R}} - 1\right)^2 - 4}}{2} \right)^{-2} - 1.$$

Funkcja $\varphi(R)$ posłuży nam do precyzyjnego opisu stabilności. Warto zwrócić uwagę, że jest to funkcja ciągła i nieujemna na przedziale $[0, \frac{1}{3})$, która spełnia $\varphi(0) = 0$.

Twierdzenie 7.14. *Niech X będzie trójwymiarową przestrzenią unormowaną. Załóżmy, że Y jest dwuwymiarową podprzestrzenią X, dla której $\lambda(Y, X) = \frac{4}{3} - R$ oraz $R \geqslant 0$ spełnia warunek $R + \varphi(R) \leqslant \frac{1}{3}$. Istnieje wówczas dwuwymiarowa podprzestrzeń Z przestrzeni X, dla której*

$$\lambda(Z, X) \leqslant 1 + \frac{9(R + \varphi(R))}{4 - 12(R + \varphi(R))}.$$

Dowód. Niech $Y = \ker f$ dla pewnego $f \in S_{X^*}$. Norma dowolnej projekcji z X na Y jest nie mniejsza niż $\frac{4}{3} - R$. Z lematu 7.2 wynika więc istnienie wektorów jednostkowych $x,\ y,\ z \in X$ takich, że

$$\max\{||P(x)||, ||P(y)||, ||P(z)||\} \geqslant \frac{4}{3} - R,$$

dla dowolnej projekcji $P : X \to Y$. Rozważmy środek ciężkości $g = \frac{x+y+z}{3}$ oraz niech $C = \frac{6(R+\varphi(R))}{4-3(R+\varphi(R))}$. Twierdzimy, że wśród liczb $||g - x||,\ ||g - y||,\ ||g - z||$ istnieją dwie, które są nie mniejsze niż $\frac{4}{3} - C$.

Załóżmy bowiem przeciwnie. Możemy przyjąć, że $||g - x||, ||g - y|| < \frac{4}{3} - C$. Rozważmy wektor $s = \lambda g + (1 - \lambda)z$, gdzie $\lambda = \frac{2}{2+C}$. Wówczas $0 < \lambda < 1$ i co więcej

$$||s - x|| = ||\lambda(g - x) + (1 - \lambda)(z - x)|| < \lambda \left(\frac{4}{3} - C\right) + (1 - \lambda)2 = 2 - \frac{2}{3}\lambda - \lambda C = \frac{8}{3C + 6}.$$

Podobnie $||s-y|| < \frac{8}{3C+6}$. Zauważmy również, że

$$||g-z|| = \left|\left|\frac{x+y-2z}{3}\right|\right| \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

i w efekcie

$$||s-z|| = \lambda||g-z|| \leqslant \frac{4}{3}\lambda = \frac{8}{3C+6}.$$

Dokonując niewielkiej perturbacji λ możemy zagwarantować ostrą nierówność w powyższym oszacowaniu. Jeżeli bowiem zastąpimy λ przez $\lambda' = \lambda - \varepsilon$ dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$, to dla $s' = \lambda' g + (1-\lambda')z$ dalej zachodzą nierówności

$$||s'-x||,\ ||s'-y|| < \frac{8}{3C+6}$$

ale mamy jednocześnie

$$||s'-z|| = \frac{4}{3}\lambda' < \frac{8}{3C+6}.$$

Udowodniliśmy w ten sposób istnienie wektora $s \in \mathrm{conv}\{x,y,z\}$, dla którego prawdziwe są nierówności

$$||s-x||,\ ||s-y||,\ ||s-z|| < \frac{8}{3C+6}.$$

Ponieważ $||P(v)|| = ||P(-v)||$ dla dowolnej projekcji $P: X \to Y$ i $v \in X$, możemy przyjąć, że $f(x),\ f(y),\ f(z) \geqslant 0$. Nie tracąc ogólności możemy również założyć, że $f(x) \geqslant f(y) \geqslant f(z)$. Korzystając z lematu 7.12 dostajemy

$$\frac{f(x)}{f(z)} \leqslant \varphi(R) + 1,$$

gdyż w przeciwnym wypadku, zastosowanie lematów 7.4 i 7.12 pozwoliłoby zrzutować wektory $x,\ y,\ z$ na Y, w taki sposób aby normy otrzymanych wektorów nie przekraczały $\frac{4}{3} - R$. To jednak stoi w sprzeczności z wyborem wektorów $x,\ y,\ z$. Niech zatem $t \in \{x,y,z\}$. Skoro $s \in \mathrm{conv}\{x,y,z\}$, to oczywiście

$$\frac{f(t)}{f(s)} - 1 \leqslant \frac{f(x)}{f(z)} - 1 \leqslant \varphi(R),$$

i podobnie

$$\frac{f(t)}{f(s)} - 1 \geqslant \frac{f(z)}{f(x)} - 1 \geqslant \frac{1}{1+\varphi(R)} - 1 = \frac{-\varphi(R)}{1+\varphi(R)} \geqslant -\varphi(R).$$

W szczególności $\left|1 - \frac{f(t)}{f(s)}\right| \leqslant \varphi(R)$.

Rozważmy projekcję $P: X \to Y$ w kierunku wektora s, czyli $P(v) = v - \frac{f(v)}{f(s)}s$. Niech również $t \in \{x,y,z\}$. Mamy wówczas

$$\left|\left|t - \frac{f(t)}{f(s)}s\right|\right| = \left|\left|t - s + (1 - \frac{f(t)}{f(s)})s)\right|\right| \leqslant ||t-s|| + \left|1 - \frac{f(t)}{f(s)}\right| ||s|| < \frac{8}{3C+6} + \varphi(R)$$

$$= \frac{8}{3\frac{6(R+\varphi(R))}{4-3(R+\varphi(R))}+6} + \varphi(R) = \frac{8}{\frac{18(R+\varphi(R))}{4-3(R+\varphi(R))} + \frac{24-18(R+\varphi(R))}{4-3(R+\varphi(R))}} + \varphi(R) = \frac{32-24(R+\varphi(R))}{24}$$

$$= \frac{4}{3} - (R+\varphi(R)) + \varphi(R) = \frac{4}{3} - R.$$

Wykazaliśmy, że $||P(t)|| < \frac{4}{3} - R$ dla $t \in \{x, y, z\}$, co przeczy wyborowi wektorów $x,\ y,\ z$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wśród liczb $||g-x||,\ ||g-y||,\ ||g-z||$ istnieją dwie, które są nie mniejsze niż $\frac{4}{3} - C$.

Możemy więc założyć, że $||g-y||,\ ||g-z|| \geqslant \frac{4}{3} - C$. Wówczas

$$4 - 3C \leqslant ||3g - 3z|| = ||x + y - 2z|| \leqslant ||x+y|| + 2,$$

i w konsekwencji $||x+y|| \geqslant 2 - 3C$. Ponadto

$$4 - 3C \leqslant ||3g - 3y|| = ||x - y + 2z|| \geqslant ||x-y|| + 2,$$

a zatem $||x-y|| \geqslant 2 - 3C$. Z lematu 7.13 wynika istnienie projekcji z X na $\mathrm{lin}\{x, y\}$, której norma nie przekracza

$$\frac{1}{1-3C} = \frac{4-3(R+\varphi(R))}{4-21\varphi(R)} = 1 + \frac{18(R+\varphi(R))}{4-21(R+\varphi(R))}.$$

Dwuwymiarowa podprzestrzeń $Z = \mathrm{lin}\{x, y\}$ spełnia więc żądany warunek i dowód jest zakończony. □

Wnioskiem z powyższego rezultatu jest oszacowanie dolne w trójwymiarowej wersji problemu 6.12.

Wniosek 7.15. *Dowolna trójwymiarowa przestrzeń unormowana X posiada dwuwymiarową podprzestrzeń Y, dla której prawdziwa jest nierówność $\lambda(Y, X) < \frac{4}{3} - 0.0007$.*

Dowód. Bezpośrednim obliczeniem numerycznym sprawdzamy, że dla $R = 0.0007$ mamy $R + \varphi(R) < \frac{1}{3}$ oraz

$$1 + \frac{9(R+\varphi(R))}{4-12(R+\varphi(R))} < \frac{4}{3} - R.$$

A zatem jeżeli X posiada podprzestrzeń Y taką, że $\lambda(Y, X) > \frac{4}{3} - 0.0007$, to z twierdzenia 7.14 posiada również podprzestrzeń Z, dla której $\lambda(Z, X) < \frac{4}{3} - 0.0007$. □

8. Relatywna stała projekcji hiperpłaszczyzn podprzestrzeni przestrzeni ℓ_{2p}^m

W poprzednim rozdziale udowodniliśmy, że dowolna n-wymiarowa przestrzeń unormowana posiada podprzestrzeń kowymiaru 1, której relatywna stała projekcji jest mniejsza niż $2-\frac{2}{n}$. W przypadku trójwymiarowym wykazaliśmy, że dowolna przestrzeń unormowana wymiaru 3 posiada dwuwymiarową podprzestrzeń o relatywnej stałej projekcji mniejszej niż $\frac{4}{3}-0.0007$. W bieżącym podrozdziale zajmiemy się w pewnym sensie odwrotnym problemem, czyli konstrukcją n-wymiarowej przestrzeni unormowanej, której każda hiperpłaszczyzna posiada relatywną stałą projekcji większą niż $1+\varepsilon_0$, dla pewnej konkretnej liczby $\varepsilon_0 > 0$ zależnej od n. Innymi słowy, zajmiemy się problemem oszacowania dolnego w wariancie problemu 6.12 dotyczącym hiperpłaszczyzn.

Szeroka klasa przestrzeni n-wymiarowych, z których żadna nie posiada nietrywialnych podprzestrzeni 1-uzupełnialnych znana jest już od długiego czasu. Bohnenblust w 1941 roku udowodnił, że typowa podprzestrzeń przestrzeni ℓ_p^m o odpowiednio dużym kowymiarze zazwyczaj spełnia tego rodzaju warunek (zobacz [11]). Nie podał on jednak żadnego konkretnego oszacowania dolnego na relatywną stałą projekcji, kóre byłoby ostro większe od 1. Tego typu oszacowanie uzyskamy w podobnej klasie przestrzeni. Będziemy rozważać podprzestrzenie przestrzeni ℓ_{2p}^m dla liczby całkowitej dodatniej $p \geqslant \frac{m}{2}$. Głównym wynikiem bieżącego rozdziału jest poniższe

Twierdzenie 8.1. *Niech $n \geqslant 4$, $p \geqslant \frac{m}{2}$ oraz $m \geqslant n+2$ będą liczbami całkowitymi. Załóżmy, że $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są niezerowymi funkcjonałami. Rozważmy przestrzeń unormowaną $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$, której norma zdefiniowana jest jako*

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Niech $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ będzie liczbą rzeczywistą taką, że dla $0 \leqslant j < k < l \leqslant m$ oraz $0 \leqslant i \leqslant m$, $i \notin \{j, k, l\}$ spełniony jest warunek

$$\operatorname{dist}(f_i, \operatorname{lin}\{f_j, f_k, f_l\}) \geqslant \alpha,$$

przy czym odległość jest mierzona za pomocą normy $||\cdot||$. Niech $\beta > 0$ będzie liczbą rzeczywistą taką, że dla $0 \leqslant j < k \leqslant m$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ spełniony jest warunek

$$\max\{|f_j(x)|, |f_k(x)|\} \leqslant \beta \max_{1\leqslant i\leqslant m, i\notin\{j,k\}} |f_i(x)|.$$

Wówczas dla dowolnej $(n-1)$-wymiarowej podprzestrzeni Y przestrzeni X prawdziwa jest nierówność $\lambda(Y, X) > 1+\varepsilon_0$, gdzie

$$\varepsilon_0 = \left(m + 2\beta^{2p}\right)^{-7} \left(\alpha^{-6} 2^{14} n^{12} m^{11} p^4\right)^{-12pm}.$$

Wybierając konkretne liczby całkowite p, m oraz funkcjonały f_i możemy uwolnić się od dodatkowych parametrów występujących w wypowiedzi powyższego twierdzenia, otrzymując oszacowanie zależne tylko od n. Prawdziwy jest następujący

Wniosek 8.2. *Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 4$ istnieje n-wymiarowa przestrzeń unormowana X taka, że dla jej dowolnej $(n-1)$-wymiarowej podprzestrzeni Y prawdziwa jest nierówność*

$$\lambda(Y, X) > 1 + \left(2\,(n+3)^2\right)^{-100(n+3)^2}.$$

Twierdzenie 8.1 oraz wniosek 8.2 dowodzimy odpowiednio w podrozdziałach 8.3 oraz 8.4.

Chociaż powyższe oszacowania są najprawdopodobniej bardzo dalekie od optymalnych, to stanowią one jednak pierwsze nietrywialne kroki w kierunku oszacowania dolnego w problemie 6.12 Bosznaya i Garaya. Żywimy głęboką nadzieję, ze zaprezentowane przez nas rezultaty zwrócą uwagę na problemy tej kategorii i w konsekwencji pozwolą na uzyskanie dużo bardziej efektywnych metod. Co więcej, niektóre części rozumowania przedstawionego w tym rozdziale wydają się być interesujące same w sobie i mogą być potencjalnie użyteczne również w innych zastosowaniach. W podrozdziale 8.1 dowodzimy lemat 8.4, który ma szanse okazać się pożytecznym narzędziem w szacowaniu relatywnej stałej projekcji od dołu w dużo szerszym kontekście. W podrozdziale 8.2 omawiamy natomiast dosyć ogólny problem dotyczący funkcjonałów liniowych, który może otwierać ciekawe pole do dalszych badań.

Warto wspomnieć, że w ujęciu asymptotycznym osiągnięto znaczące rezultaty dotyczące istnienia przestrzeni o dużych relatywnych stałych projekcji podprzestrzeni. Gluskin w [31] oraz Szarek w [79] za pomocą konstrukcji probabilistycznej udowodnili istnienie n-wymiarowych przestrzeni unormowanych, których każda podprzestrzeń Y wymiaru m leżącego w przedziale postaci $[\alpha n, \beta n]$ posiada relatywną stała projekcji rzędu $c\sqrt{m}$ lub zbliżonego. Obie pracy zawierają kilka różnych rezultatów tego rodzaju. Podobna konstrukcja jest przedstawiona również w pracy [51]. Chociaż wyniki te są bardzo głębokie, to nie wynikają jednak z nich żadne konkretne (nieasymptotyczne) oszacowania w rozważanych przez nas problemach i nie dotykają one również przypadku hiperpłaszczyzn. Dają one jednak nadzieję, że uzyskane przez nas rezultaty mogą zostać znacznie wzmocnione.

Praca zawierająca wyniki zaprezentowane w tym rozdziale jest w tym momencie wysłana do publikacji i oczekuje na recenzję. Dostępny jest jednak preprint pracy pt. *A uniform estimate of the relative projection constant* (zobacz [46]).

8.1. Lemat o projekcji o małej normie

W rozważaniach dotyczących projekcji o normie 1 poniższy prosty lemat okazał się już wielokrotnie fundamentalnym narzędziem (zobacz na przykład [11], [39]).

Lemat 8.3. *Niech X będzie gładką przestrzenią Banacha, zaś $Y = \ker f$ jej hiperpłaszczyzną. Załóżmy, że $P : X \to Y$, gdzie $P(x) = x - f(x)w$ oraz $f(w) = 1$ jest projekcją o normie*

1. *Wówczas* $f_y(w) = 0$ *dla dowolnego niezerowego wektora* $y \in Y$*, gdzie* f_y *jest funkcjonałem normującym dla wektora* y*.*

Do naszych celów potrzebujemy analogicznego wyniku, który dla projekcji o małej normie da oszacowanie górne na wartość $|f_y(w)|$. Można się spodziewać, że jakość tego typu oszacowania powinna zależeć od jakości gładkości przestrzeni X, którą można wyrazić w języku wypukłości przestrzeni dualnej. Aby wypowiedzieć nasz rezultat posłużymy się więc modułem wypukłości przestrzeni X^*. Przypomnijmy, że definicja modułu wypukłości znajduje się w podrozdziale 1.3

Lemat 8.4. *Niech* X *będzie gładką przestrzenią Banacha, zaś* $Y = \ker f$ *jej hiperpłaszczyzną (gdzie* $f \in S_{X^*}$*). Niech* $P : X \to Y$ *będzie projekcją o normie nie przekraczającej* $1 + r$*, gdzie* $P(x) = x - f(x)w$ *dla pewnego wektora* w *spełniającego* $f(w) = 1$ *oraz* $r \geqslant 0$*. Niech* $t_0 \in [0, 2]$ *będzie taką liczbą rzeczywistą, że* $\delta_{X^*}(t_0) \geqslant \frac{r}{2+2r}$*. Wówczas* $|f_y(w)| \leqslant t_0(2+r)$ *dla dowolnego niezerowego wektora* $y \in Y$*.*

Dowód. Tezę wystarczy wykazać dla wektorów y o normie 1. Ustalmy więc jednostkowy wektor $y \in Y$ i rozważmy funkcjonał $g = f_y \circ P$. Oczywiście $g(y) = 1$ oraz $||g|| \leqslant 1 + r$. Ponadto

$$\left|\left|f_y + \frac{g}{1+r}\right|\right| \geqslant \left|f_y(y) + \frac{g(y)}{1+r}\right| = \frac{2+r}{1+r}.$$

Z drugiej jednak strony wprost z definicji modułu wypukłości wynika nierówność

$$\left|\left|f_y + \frac{g}{1+r}\right|\right| \leqslant 2 - 2\delta_{X^*}\left(\left|\left|f_y - \frac{g}{1+r}\right|\right|\right).$$

Otrzymujemy więc, że

$$\delta_{X^*}\left(\left|\left|f_y - \frac{g}{1+r}\right|\right|\right) \leqslant \frac{r}{2+2r} \leqslant \delta_{X^*}(t_0)$$

i w konsekwencji $\left|\left|f_y - \frac{g}{1+r}\right|\right| \leqslant t_0$, gdyż moduł wypukłości jest niemalejący.

W szczególności

$$|f_y(w)| = \left|f_y(w) - \frac{g(w)}{1+r}\right| \leqslant t_0 \cdot ||w||.$$

Aby uzyskać żądany rezultat wystarczy więc oszacować normę wektora w. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech x_0 będzie wektorem jednostkowym, dla którego $f(x_0) \geqslant 1 - \varepsilon_0$. Wówczas

$$(1-\varepsilon)||w|| - 1 \leqslant ||x_0 - f(x_0)w|| = ||P(x_0)|| \leqslant 1 + r.$$

Ponieważ ε możemy wybrać dowolnie małe, prawdziwa jest nierówność $||w|| \leqslant 2+r$ i dowód jest zakończony. $\square$

Powyższy wynik jest prawdziwy dla dowolnej gładkiej przestrzeni Banacha X, chociaż my skorzystamy z niego tylko w skończenie wymiarowym przypadku. Można podejrzewać, że udowodniony przez nas rezultat może okazać się użyteczny do oszacowań dolnych relatywnej stałej projekcji w sytuacjach, w której znany jest moduł wypukłości i postać elementów przestrzeni dualnej.

8.2. Oszacowanie maksimum z minimum funkcjonałów

Załóżmy, że dana jest norma $||\cdot||$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz m funkcjonałów $f_1, f_2, \ldots, f_m$ o normie 1. Naturalne wydaje się być pytanie o oszacowania wartości $\max_{||x||=1} \min_{1\leqslant i\leqslant m} |f_i(x)|$. Podejrzewamy, że tego typu problemy mogły być już rozważane, przynajmniej dla normy euklidesowej. Jako, że nie znaleźlismy jednak żadnych informacji dotyczących tego zagadnienia zaproponujemy własne oszacowanie dolne. Nasze rozumowanie opiera się na porównaniu objętości. Wykażemy najpierw

Lemat 8.5. *Załóżmy, że jednostkowa $(n-1)$-sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest wyposażona w znormalizowaną miarę Lebesgue'a μ. Wówczas dla dowolnego funkcjonału $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o normie 1 oraz $t \in [0,1]$ miara zbioru*

$$S = \{x : x \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ oraz } |f(x)| \geqslant t\}$$

jest mniejsza niż $t(n-1)$.

Dowód. Oznaczmy przez $A_k(r)$ pole powierzchni k-sfery w $\mathbb{R}^{k+1}$ o promieniu r, wyznaczone w sposób klasyczny. Łatwo zauważyć, że wówczas

$$\begin{aligned}\mu(S) = \frac{2}{A_{n-1}(1)} \int_0^t A_{n-2}\left(\sqrt{1-u^2}\right) du &= \frac{2A_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)} \int_0^t \left(1-u^2\right)^{\frac{n-2}{2}} du \\ &\leqslant \frac{2A_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)} \int_0^t 1\, du \leqslant \frac{2tA_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)}.\end{aligned}$$

Oszacujemy od góry wartość ilorazu $\frac{A_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)}$ za pomocą znanych powszechnie wzorów jawnych na $A_k(r)$. Załóżmy najpierw, że $n = 2k+1$ jest liczbą nieparzystą. Łatwo sprawdzić, że wówczas

$$\frac{A_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)} = \frac{A_{2k-1}(1)}{A_{2k}(1)} = \frac{(2k-1)!}{2^{2k-1}((k-1)!)^2}.$$

Mamy jednak

$$\begin{aligned}\left(2^{2k-1}((k-1)!)^2\right) \cdot \frac{2k-1}{2} &= (2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2))^2 \cdot (2k-1) \\ &\geqslant (2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2)) \cdot (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)) \cdot (2k-1) = (2k-1)!.\end{aligned}$$

W efekcie

$$\frac{A_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)} \leqslant \frac{2k-1}{2} < \frac{n-1}{2}.$$

Rozważmy teraz przypadek $n = 2k$. Wówczas

$$\frac{A_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)} = \frac{A_{2k-2}(1)}{A_{2k-1}(1)} = \frac{2^{2k-3} \cdot (k-2)! \cdot (k-1)!}{\pi(2k-3)!}.$$

Jednakże

$$2^{2k-3} \cdot (k-2)! \cdot (k-1)! = (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-4)) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2))$$

$$\leqslant (3 \cdot 5 \ldots \cdot (2k-3)) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2)) = (2k-2)! = (\pi(2k-3)!) \cdot \frac{2k-1}{\pi}.$$

W konsekwencji

$$\frac{A_{n-2}(1)}{A_{n-1}(1)} \leqslant \frac{2k-1}{\pi} < \frac{n-1}{2}.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że $\mu(S) < t(n-1)$ i dowód lematu jest zakończony. □

Nasze oszacowanie podane jest w poniższym lemacie.

Lemat 8.6. *Niech $||\cdot||$ będzie normą w $\mathbb{R}^n$ zaś $f_1, f_2, \ldots, f_m$ niezerowymi funkcjonałami tej przestrzeni. Wówczas istnieje jednostkowy wektor $y \in \mathbb{R}^n$, dla którego*

$$|f_i(y)| \geqslant \frac{||f_i||}{\sqrt{n}(n-1)m},$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$.

Dowód. Ze względu na możliwość przeskalowania możemy przyjąć, że $||f_i|| = 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Rozważmy najpierw przypadek, w którym $||\cdot|| = ||\cdot||_2$ jest klasyczną normą euklidesową. Z lematu 8.5 wynika, że dla

$$S_i = \left\{ x : ||x||_2 = 1 \text{ oraz } |f_i(x)| \leqslant \frac{1}{(n-1)m} \right\}$$

mamy $\mu(S_i) < \frac{1}{m}$. W efekcie

$$\mu(S_1 \cup S_2 \cup \ldots S_m) \leqslant \mu(S_1) + \mu(S_2) \ldots \mu(S_m) < \frac{m}{m} = 1.$$

Istnieje więc wektor $y \in \mathbb{R}^n$ taki, że $||y||_2 = 1$ oraz $|f_i(y)| \geqslant \frac{1}{(n-1)m}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$.

Niech teraz $||\cdot||$ będzie dowolną normą przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Z twierdzenia o elipsoidzie Johna 1.1 wynika istnienie odwzorowania liniowego $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dla którego spełnione są nierówności

$$||x||_2 \leqslant ||Tx|| \leqslant \sqrt{n}||x||_2,$$

przy dowolnym $x \in \mathbb{R}^n$. Niech $\tilde{f}_i = f_i \circ T$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Zauważmy, że $||\tilde{f}_i||_2 \geqslant 1$. Istotnie, jeżeli wektor x_0 spełnia $||x_0|| = 1$ i $|f_i(x_0)| = 1$, to wówczas

$$||T^{-1}(x_0)||_2 \leqslant ||T(T^{-1}(x_0))|| = ||x_0|| = 1$$

oraz

$$|\tilde{f}_i(T^{-1}(x_0))| = |f_i(x_0)| = 1.$$

Możemy więc zastosować poprzedni fragment rozumowania do funkcjonałów $\tilde{f}_i$ rozważanych w normie euklidesowej. Otrzymujemy z niego istnienie wektora y takiego, że $||y||_2 = 1$ oraz

$$|f_i(Ty)| = |\tilde{f}_i(y)| \geqslant \frac{1}{(n-1)m}.$$

Prawdziwa jest jednak nierówność $||T(y)|| \leqslant \sqrt{n}$, a więc po odpowiednim przeskalowaniu wektor $T(y)$ spełnia żądane warunki. □

8.3. Dowód twierdzenia 8.1

W tym podrozdziale uzyskamy zapowiedziane wcześniej twierdzenie 8.1, które daje oszacowanie dolnej relatywnej stałej projekcji dowolnej hiperpłaszczyzny w podprzestrzeni przestrzeni ℓ_{2p}^m. Aby skorzystać z lematu 8.4 potrzebujemy informacji o module wypukłości przestrzeni dualnej do podprzestrzeni ℓ_{2p}^m. Potrzebujemy więc oszacowania dla modułu wypukłości przestrzeni ilorazowej przestrzeni ℓ_q^m, gdzie $q = \frac{2p}{2p-1}$. Uzyskamy je w kolejnych dwóch lematach.

Lemat 8.7. *Niech $1 \leqslant q \leqslant 2$. Moduł wypukłości przestrzeni ℓ_q^n spełnia nierówność $\delta_{\ell_q^n}(t) \geqslant \frac{q-1}{8}t^2$ dla dowolnego $t \in [0,2]$.*

Dowód. Zobacz [65]. □

Kolejny wynik mówi o tym, że operacja brania przestrzeni ilorazowej nie pogarsza wypukłości przestrzeni.

Lemat 8.8. *Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś Y jej podprzestrzenią. Wówczas $\delta_{X/Y}(t) \geqslant \delta_X(t)$ dla dowolnego $t \in [0,2]$.*

Dowód. Przypomnijmy, że norma $||[x]||_{X/Y}$ w przestrzeni ilorazowej w naszym przypadku jest zdefiniowana jako $||[x]||_{X/Y} = \operatorname{dist}(x,Y)$. Dla dowolnego $x \in X$ mamy oczywiście $||[x]||_{X/Y} \leqslant ||x||$. Ustalmy $t \in [0,2]$ oraz $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $x,\ y \in X$ w taki sposób, że $||[x]||_{X/Y}, ||[y]||_{X/Y} \leqslant 1$, $||[x-y]||_{X/Y} \geqslant t$ oraz

$$\delta_{X/Y}(t) \geqslant 1 - \left|\left|\left[\frac{x+y}{2}\right]\right|\right| - \varepsilon.$$

Zamiana x i y odpowiednio na $x - x_1$ i $y - y_1$, gdzie $x_1,\ y_1 \in Y$ spełniają $\operatorname{dist}(x,Y) = ||x - x_1||$, $\operatorname{dist}(y,Y) = ||y - y_1||$ nie ma wpływu na żadną z powyższych nierówności (zauważmy, że takie $x_1,\ y_1$ istnieją ze względu na skończony wymiar). Możemy więc przyjąć, że $||x|| \leqslant 1$ oraz $||y|| \leqslant 1$. Wtedy również $||x-y|| \geqslant ||[x-y]||_{X/Y} \geqslant t$. Co więcej

$$\delta_X(t) \leqslant 1 - \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leqslant 1 - \left|\left|\left[\frac{x+y}{2}\right]\right|\right| \leqslant \delta_{X/Y}(t) + \varepsilon.$$

Ponieważ ε możemy wybrać dowolnie małe, otrzymujemy, że $\delta_{X/Y}(t) \geqslant \delta_X(t)$ dla dowolnego $t \in [0,2]$ i dowód jest zakończony. □

Wykorzystamy również postać funkcjonału normującego w przypadku podprzestrzeni przestrzeni ℓ_{2p}^m. Jest ona podana w poniższym lemacie.

Lemat 8.9. *Niech przestrzeń $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ będzie zdefiniowana jak w twierdzeniu 8.1. Niech $y \in X$ będzie niezerowym wektorem. Wówczas funkcjonał normujący f_y wektora y dany jest jako*

$$f_y(x) = \frac{1}{||y||^{2p-1}} \sum_{i=1}^{m} f_i(y)^{2p-1} f_i(x).$$

Dowód. Oczywiście $f_y(y) = ||y||$, a więc wystarczy sprawdzić, że $||f_y|| \leqslant 1$. To wynika jednak wprost z nierówności Höldera. □

Powszechnie znana charakteryzacja hiperpłaszczyzn 1-uzupełnialnych klasycznych przestrzeni ℓ_p^m (zobacz np. [39] dla bardziej ogólnego rezultatu) głosi, że jeżeli $p \notin \{2, \infty\}$, to równość $\lambda(\ker f, \ell_p^m) = 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektor wyznaczający funkcjonał f posiada co najwyżej dwie niezerowe współrzędne. Innymi słowy hiperpłaszczyzna zadana przez f jest 1-uzupełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $f = ae(i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $a \neq 0$ lub $f = ae(i) + be(j)$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant m$ oraz $a, b \neq 0$. W rozważanej przez nas sytuacji mogą wystąpić dwa analogiczne przypadki: funkcjonał f jest bliski funkcjonałowi postaci af_i lub $af_i + bf_j$ (gdzie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ są funkcjonałami definiującymi podprzestrzeń). Chociaż okazuje się, że i w tych przypadkach relatywna stała projekcji jest większa niż 1, to wymagają one jednak specjalnej uwagi. W każdej z możliwości rozumowanie przebiega podobnie, ale potrzebne są pewne modyfikacje techniczne. Warto również zaznaczyć, że duża część trudności dowodu twierdzenia 8.1 jest ukryta w precyzyjnym zdefiniowaniu zakresu, w którym powiemy, że funkcjonał f jest „bliski" funkcjonałowi postaci af_i lub $af_i + bf_j$. Kluczowym dla nas faktem jest to, że f nie może być jednocześnie bliskie dwóm funkcjonałom tej postaci. Uzyskamy rezultat tego typu w dwóch kolejnych lematach.

Lemat 8.10. *Niech $||\cdot||$ będzie normą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś $f, f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}^n$ dowolnymi wektorami. Załóżmy, że $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ jest taką liczbą rzeczywistą, że dla $0 \leqslant j < k < l \leqslant m$ oraz $0 \leqslant i \leqslant m$, $i \notin \{j, k, l\}$ mamy*

$$\operatorname{dist}(f_i, \operatorname{lin}\{f_j, f_k, f_l\}) \geqslant \alpha,$$

przy czym odległość jest mierzona za pomocą normy $||\cdot||$. Załóżmy, że istnieją indeksy $1 \leqslant k, l \leqslant m$, $k \neq l$ takie, że $||f_k + a_0 f_l + r_0 f|| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ dla pewnych $a_0, r_0 \in \mathbb{R}$. Wówczas $||f_i + af_j + rf|| \geqslant \frac{\alpha}{2}$ dla dowolnego $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $i \notin \{k,\ l\}$, $j \neq k$ oraz $a, r \in \mathbb{R}$.

Dowód. Załóżmy, że dla pewnych $i,\ j,\ a,\ r$ prawdziwa jest przeciwna nierówność. Jasne jest, że obie liczby $r,\ r_0$ są niezerowe i bez straty ogólności możemy przyjąć, że $|r_0| \geqslant |r|$. Wówczas

$$||f_i + af_j + rf|| = \left|\left|f_i + af_j + \frac{r}{r_0}(f_k + a_0 f_l + r_0 f) - \frac{r}{r_0}(f_k + a_0 f_l)\right|\right|$$

$$= \left|\left|\left(f_i + af_j - \frac{r}{r_0}f_k - \frac{a_0 r}{r_0}f_l\right) + \frac{r}{r_0}(f_k + a_0 f_l + r_0 f)\right|\right| \geqslant \alpha - \left|\frac{r}{2r_0}\right|\alpha \geqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód lematu. □

Powyższy lemat nie dotyczy przypadku $i = l$, który rozważony zostanie w kolejnym lemacie.

Lemat 8.11. *Niech $||\cdot||$ będzie normą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś $f, f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}^n$ dowolnymi wektorami. Załóżmy, że $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ jest taką liczbą rzeczywistą, że dla $0 \leqslant j < k < l \leqslant m$ oraz $0 \leqslant i \leqslant m$, $i \notin \{j, k, l\}$ mamy*

$$\mathrm{dist}\,(f_i, \mathrm{lin}\{f_j, f_k, f_l\}) \geqslant \alpha,$$

przy czym odległość jest mierzona za pomocą normy $||\cdot||$. Załóżmy ponadto, że $0 < L < K < \frac{1}{2}$ są liczbami rzeczywistymi takimi, że $K > 8L$. Przyjmijmy, że istnieją indeksy $1 \leqslant k, l \leqslant m$, $k \neq l$ takie, że $||f_k + a_0 f_l + r_0 f|| \leqslant L$ dla pewnych $a_0, r_0 \in \mathbb{R}$ oraz $||f_l + rf|| \geqslant K$ dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$. Wówczas $||f_i + af_j + rf|| \geqslant \frac{K\alpha}{2}$ dla dowolnych $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, m\} \backslash \{k\}$, $i \neq j$ oraz $a, r \in \mathbb{R}$.

Dowód. Z poprzedniego lematu wynika, że wystarczy rozważyć przypadek $i = l$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $||f_l + af_j + rf|| < \frac{K\alpha}{2}$. Wówczas

$$\frac{K\alpha}{2} > ||(f_l + rf) + af_j|| \geqslant K - |a|$$

i w konsekwencji $|a| \geqslant K\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Załóżmy najpierw, że $|r| \geqslant |r_0|$. Wtedy mamy

$$||f_l + af_j + rf|| = \left|\left|f_l + af_j + \frac{r}{r_0}(f_k + a_0 f_l + r_0 f) - \frac{r}{r_0}f_k - \frac{a_0 r}{r_0}f_l\right|\right|$$

$$\geqslant \left|\frac{r}{r_0}\right|\alpha - \left|\frac{r}{r_0}\right|L \geqslant \alpha - L > \alpha - \frac{K\alpha}{2} - \frac{K\alpha^2}{2} \geqslant \frac{K\alpha}{2},$$

co przeczy naszemu założeniu. A zatem $|r| < |r_0|$. Szacując podobnie jak wcześniej dostajemy

$$||f_l + af_j + rf|| = \left|\left|f_l + af_j + \frac{r}{r_0}(f_k + a_0 f_l + r_0 f) - \frac{r}{r_0}f_k - \frac{a_0 r}{r_0}f_l\right|\right|$$

$$\geqslant |a|\alpha - \left|\frac{r}{r_0}\right| L \geqslant K\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2}\right) - L > \frac{K\alpha}{2}.$$

Ponownie otrzymujemy sprzeczność i dowód lematu jest zakończony.

□

Jednym z kluczowych składników oryginalnego rozumowania Bohnenblusta z [11] jest odwracalność macierzy Vandermonda. Do naszych celów potrzebujemy ilościowej wersji tego rezultatu, która sprowadza się do oszacowania normy macierzy odwrotnej. Wykorzystamy następujący rezultat pochodzący od Gautschiego.

Lemat 8.12. *Niech $x_1, x_2, \ldots, x_m$ będą parami różnymi liczbami rzeczywistymi, zaś V macierzą Vandermonda o kolumnach postaci $(1, x_i, x_i^2, \ldots, x_i^{m-1})$. Wówczas prawdziwa jest nierówność*

$$||V^{-1}|| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \prod_{j\neq i} \frac{1+|x_j|}{|x_j - x_i|}.$$

Dowód. Zobacz [29]. □

Przed przystąpieniem do dowodu głównego wyniku tego rozdziału potrzebujemy ostatniej drobnej obserwacji.

Lemat 8.13. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ dwoma funkcjonałami o następującej własności: istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że dowolnego $r \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $||f - rg|| \geqslant a$. Wówczas $||f|_{\ker g}|| \geqslant a$.*

Dowód. Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika istnienie funkcjonału liniowego $\tilde{f}$, którego zawężenie do podprzestrzeni $\ker g$ pokrywa się z zawężeniem f oraz $||\tilde{f}|| = ||f|_{\ker g}||$. Możemy zapisać $f - \tilde{f} = rg$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$||f|_{\ker g}|| = ||\tilde{f}|| = ||f - rg|| \geqslant a.$$

□

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia 8.1.

Dowód twierdzenia 8.1. Zaczniemy od wprowadzenia notacji pomocniczej. Niech

$$\varepsilon_1 = (m + \beta^{2p} - 1)^{\frac{-1}{p}} \alpha^{4p+4m} 2^{-(8p+4m+6)} n^{-(6p+6m)} m^{-(4p+6m)} p^{-(2m+1)},$$

$$R_1 = 8\sqrt{\varepsilon_1 p}, \qquad K = \left(\frac{R_1}{4}\right)^{\frac{1}{2p-1}},$$

$$\varepsilon_2 = K^{2m}(m + 2\beta^{2p} - 2)^{\frac{-1}{p}} \alpha^{4p+4m} 2^{-(8p+4m+6)} n^{-(6p+6m)} m^{-(4p+6m)} p^{-(2m+1)},$$

$$R_2 = 8\sqrt{\varepsilon_2 p}, \qquad L = \frac{R_2}{2^{2p}(2p-1)},$$

$$\varepsilon_3 = m^{\frac{-1}{p}} L^{2m} K^{4p+2m} 2^{-(4p+6)} n^{-(6p+6m)} m^{-(4p+6m)} p^{-(2m+1)},$$

$$R_3 = 8\sqrt{\varepsilon_3 p}.$$

Niech również $Y = \ker f$ dla pewnego unormowanego funkcjonału f i załóżmy, że $\lambda(Y, X) = 1 + \varepsilon$. Udowodnimy stwierdzenie mocniejsze niż w tezie twierdzenia. Wykażemy bowiem, że

- jeżeli istnieją $1 \leqslant k \leqslant m$ oraz $r_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $||f_k + r_0 f|| \leqslant K$, to $\varepsilon \geqslant \varepsilon_1$.
- Jeżeli istnieją $1 \leqslant k < l \leqslant m$ takie, że $||f_k + a_0 f_l + r_0 f|| \leqslant L$ dla pewnych $a_0, r_0 \in \mathbb{R}$, ale $||f_i + rf|| > K$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant m$ i dowolnego $r \in \mathbb{R}$, to $\varepsilon \geqslant \varepsilon_2$.
- Jeżeli $||f_i + rf|| > K$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant m,\ r \in \mathbb{R}$ oraz $||f_i + af_j + rf|| > L$ dla dowolnych $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $i \neq j$, $a,\ r \in \mathbb{R}$, to $\varepsilon \geqslant \varepsilon_3$.

Konkluzja twierdzenia wyniknie wówczas z nierówności $\varepsilon_3 \geqslant \varepsilon_0$, którą można sprawdzić za pomocą bardzo długiego, lecz bezpośredniego, obliczenia.

Niech $P : X \to Y$ będzie taką projekcją, że $||P|| = \lambda(Y, X) = 1 + \varepsilon$ i załóżmy, że $P(x) = x - f(x)w$ dla pewnego wektora w spełniającego $f(w) = 1$. Ustalmy niezerowy wektor $y \in Y$. W następnym kroku dowodu oszacujemy wartość $|f_y(w)|$ w zależności od ε.

Z lematu 8.4 wynika, że $|f_y(w)| \leqslant t_0(2 + \varepsilon)$ dla dowolnego $t_0 \in [0, 2]$ spełniającego warunek $\delta_{X^*}(t_0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}$. Przestrzeń X jest podprzestrzenią ℓ_{2p}^m, a więc przestrzeń dualna X^* jest przestrzenią ilorazową $\ell_q^m = (\ell_{2p}^m)^*$, gdzie $q = \frac{2p}{2p-1}$. Niech $t_0 = 4\sqrt{\frac{\varepsilon p}{2+2\varepsilon}}$. Jeżeli $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, to oczywiście $t_0 \in [0, 2]$. Łącząc ze sobą lematy 8.7 oraz 8.8 dostajemy

$$\delta_{X^*}(t_0) = \delta_{X^*}\left(4\sqrt{\frac{\varepsilon p}{2+2\varepsilon}}\right) \geqslant \delta_{\ell_q^m}\left(4\sqrt{\frac{\varepsilon p}{2+2\varepsilon}}\right) \geqslant \frac{q-1}{8} \cdot \frac{16\varepsilon p}{2+2\varepsilon}$$
$$= \frac{2p}{2p-1} \cdot \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}.$$

Możemy więc teraz zastosować lemat 8.4, aby otrzymać

$$|f_y(w)| \leqslant t_0(2+\varepsilon) = 4(2+\varepsilon)\sqrt{\frac{\varepsilon p}{2+2\varepsilon}} < 4(2+2\varepsilon)\sqrt{\frac{\varepsilon p}{2+2\varepsilon}}$$
$$= 4\sqrt{\varepsilon p(2+2\varepsilon)} < 4\sqrt{4\varepsilon p} = 8\sqrt{\varepsilon p},$$

co daje zapowiedziane oszacowanie.

Rozważymy teraz osobno każdy z trzech przypadków wymienionych na początku dowodu. Załóżmy najpierw, że istnieją $1 \leqslant k \leqslant m$ oraz $r_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $||f_k + r_0 f|| \leqslant K$.

Możemy przyjąć, że $k = m$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że zachodzi nierówność $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Z poprzedniego fragmentu rozumowania wynika, że

$$|f_y(w)| \leqslant 8\sqrt{\varepsilon_1 p} = (m + \beta^{2p} - 1)^{\frac{-1}{2p}} \alpha^{2p+2m} 2^{-(4p+2m)} n^{-(3p+3m)} m^{-(2p+3m)} p^{-m} = R_1.$$

Z lematu 8.10 otrzymujemy ponadto, że $||f_i + af_j + rf|| \geqslant \frac{\alpha}{2}$ dla dowolnych $1 \leqslant i, j \leqslant m-1$, $i \neq j$ oraz $a, r \in \mathbb{R}$.

Na mocy lematów 8.6 oraz 8.13 istnieje wektor $y \in Y$, $||y|| = 1$ taki, że

$$|f_i(y)| \geqslant \frac{\alpha}{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)},$$

dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Jasne jest również, że $||f_i|| \leqslant 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant m-1$ i w efekcie $|f_i(y)| \leqslant 1$. Ponieważ dla $1 \leqslant i < j \leqslant m-1$ oraz $r \in \mathbb{R}$ mamy

$$\left|\left| f_i - \frac{f_i(y)}{f_j(y)} f_j + rf \right|\right| \geqslant \frac{\alpha}{2},$$

to w tej sytuacji również

$$\left|\left| \frac{f_i}{f_i(y)} - \frac{f_j}{f_j(y)} + \frac{r}{f_i(y)} f \right|\right| \geqslant \frac{\alpha}{2|f_i(y)|} \geqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Korzystając ponownie z lematów 8.6 oraz 8.13, zastosowanych tym razem do funkcjonałów postaci $\frac{f_i}{f_i(y)} - \frac{f_j}{f_j(y)}$, możemy znaleźć wektor $z \in Y$ o normie 1, dla którego

$$\left| \frac{f_i(z)}{f_i(y)} - \frac{f_j(z)}{f_j(y)} \right| \geqslant \frac{\alpha}{\sqrt{n}(n-1)(m-2)(m-1)}$$

dla dowolnych indeksów $1 \leqslant i < j \leqslant m-1$.

Przy tak dobranych wektorach y i z rozważmy teraz wielomian $P(t)$ zdefiniowany jako

$$P(t) = \sum_{i=1}^{m-1} (f_i(y+tz))^{2p-1} \cdot f_i(w) = \sum_{i=1}^{m-1} (f_i(y) + tf_i(z))^{2p-1} \cdot f_i(w).$$

Z postaci funkcjonału normującego podanej w lemacie 8.9 łatwo otrzymujemy, że

$$P(t) = \Big(f_{y+tz}(w) - f_m(y+tz)^{2p-1} \cdot f_m(w) \Big) \cdot ||y+tz||^{2p-1}.$$

Z poprzedniego fragmentu dowodu wynika, że $|f_{y+tz}(w)| \leqslant R_1$. Skoro $||f_m + r_0 f|| \leqslant K$ oraz $||y+tz|| \leqslant 2$ dla $-1 \leqslant t \leqslant 1$, to mamy

$$|f_m(y+tz)| = |f_m(y+tz) + r_0 f(y+tz)| \leqslant 2K.$$

Łącząc to z obserwacją $|f_m(w)| \leqslant ||w|| < 4$ (zobacz dowód lematu 8.4) otrzymujemy, że

$$|P(t)| \leqslant 2^{2p-1} R_1 + 2^{2p+1} K^{2p-1} = 2^{2p-1} R_1 + 2^{2p-1} R_1 = 2^{2p} R_1.$$

dla dowolnego $t \in [-1, 1]$. Z nierówności Markowa wynika dalej, że

$$|P^{(k)}(0)| \leqslant 2^{2p}(2p-1)^2(2p-2)^2 \dots (2p-k)^2 R_1$$

dla dowolnego $0 \leqslant k \leqslant m-2$.

Z drugiej jednak strony, bezpośredni rachunek pokazuje, że

$$|P^{(k)}(0)| = (2p-1)(2p-2)\dots(2p-k) \sum_{i=1}^{m-1} f_i(y)^{2p-k-1} f_i(z)^k f_i(w).$$

W szczególności

$$\left| \sum_{i=1}^{m-1} f_i(y)^{2p-k-1} f_i(z)^k f_i(w) \right| \leqslant 2^{2p}(2p)^{m-2} R_1.$$

dla dowolnego $0 \leqslant k \leqslant m-2$.

Jeżeli przez A oznaczymy macierz Vandermonda liczb $\left\{ \frac{f_i(z)}{f_i(y)} \right\}_{i=1,2,\dots,m-1}$, zaś przez v wektor $v = [f_i(y)^{2p-1} f_i(w)]_{i=1,2,\dots,m-1}$, to wówczas

$$||Av||_\infty \leqslant 2^{2p}(2p)^{m-2} R_1.$$

Z drugiej jednak strony mamy oczywiście $||Av||_\infty \geqslant \frac{||v||_\infty}{||A^{-1}||}$. Stosując więc oszacowanie górne na $||A^{-1}||$ podane w lemacie 8.12, połączone z ograniczeniami na $|f_i(y)|$ dla $1 \leqslant i \leqslant m-1$ oraz $\left| \frac{f_i(y)}{f_i(z)} - \frac{f_j(y)}{f_j(z)} \right|$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant m-1$ dostajemy, że

$$\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)} \right)^{2p-1} \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant m-1} |f_i(w)| \leqslant ||A^{-1}|| \cdot 2^{2p}(2p)^{m-2} R_1$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)}{\alpha} \right)^{m-2} \left(\frac{\sqrt{n}(n-1)(m-1)(m-2)}{\alpha} \right)^{m-2} 2^{2p}(2p)^{m-2} R_1.$$

Ostatecznie z nierówności $1 + \frac{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)}{\alpha} < \frac{2n^{\frac{3}{2}}m}{\alpha}$ i podobnych oczywistych oszacowań dostajemy, że

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m-1} |f_i(w)| < \alpha^{-(2p+2m)} 2^{4p+2m} n^{3p+3m} m^{2p+3m} p^m R_1 = (m + \beta^{2p} - 1)^{\frac{-1}{2p}}.$$

Ponieważ $||f|| = 1$ oraz $f(w) = 1$ zachodzi nierówność $||w|| \geqslant 1$. Z drugiej jednak strony, biorąc pod uwagę zależność $|f_m(w)| \leqslant \beta \max_{1 \leqslant i \leqslant m-1} |f_i(w)|$, mamy również

$$||w|| = \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}} < \left(\frac{m-1}{m + \beta^{2p} - 1} + \frac{\beta^{2p}}{m + \beta^{2p} - 1} \right)^{2p} = 1.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód w rozważanym przez nas przypadku.

Zajmiemy się teraz sytuacją, w której istnieją indeksy $1 \leqslant k < l \leqslant m$ takie, że

$$||f_k + a_0 f_l + r_0 f|| \leqslant L$$

dla pewnych $a_0, r_0 \in \mathbb{R}$, ale $||f_i + rf|| > K$ dla dowolnych $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $r \in \mathbb{R}$. Możemy przyjąć, że $k = m$ oraz $l = m-1$. W tym wypadku uzyskamy sprzeczność z nierównością $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$. Z początkowego fragmentu rozumowania wynika wówczas, że

$$|f_y(w)| \leqslant 8\sqrt{\varepsilon_2 p} = K^m (m + 2\beta^{2p} - 2)^{\frac{-1}{2p}} \alpha^{2p+2m} 2^{-(4p+2m)} n^{-(3p+3m)} m^{-(2p+3m)} p^{-m} = R_2.$$

Z lematu 8.11 mamy również

$$||f_i + af_j + rf|| \geqslant \frac{K\alpha}{2}$$

dla dowolnych $1 \leqslant i, j \leqslant m-1$, $i \neq j$ oraz $a,\ r \in \mathbb{R}$. Zgodnie z lematem 8.6 istnieją więc jednostkowe wektory $y,\ z \in Y$ takie, że

$$|f_i(y)| \geqslant \frac{\alpha}{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)},$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m-2$, $|f_{m-1}(y)| \geqslant \frac{K}{\sqrt{n}(n-1)(m-1)}$ oraz

$$\left| \frac{f_i(z)}{f_i(y)} - \frac{f_j(z)}{f_j(y)} \right| \geqslant \frac{K\alpha}{\sqrt{n}(n-1)m(m-1)},$$

dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant m-1$.

Podobnie jak wcześniej rozważmy wielomian $P(t)$ zdefiniowany jako

$$P(t) = \sum_{i=1}^{m-1} (f_i(y+tz))^{2p-1} \cdot f_i(w) - a_0^{2p-1} (f_{m-1}(y+tz))^{2p-1} \cdot f_m(w)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (f_i(y) + tf_i(z))^{2p-1} \cdot f_i(w) - a_0^{2p-1} (f_{m-1}(y) + tf_{m-1}(z)))^{2p-1} \cdot f_m(w)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-2} (f_i(y) + tf_i(z))^{2p-1} \cdot f_i(w) + (f_{m-1}(y) + tf_{m-1}(z))^{2p-1} (f_{m-1}(w) - a_0^{2p-1} f_m(w))$$

Zauważmy, że

$$|f_m(y+tz) + a_0 f_{m-1}(y+tz)| = |f_m(y+tz) + a_0 f_{m-1}(y+tz) + r_0 f(y+tz)| \leqslant L||y+tz||.$$

Skoro $|f_m(y+tz)| \leqslant ||y+tz||$, to również $||a_0 f_{m-1}(y+tz)|| \leqslant ||y+tz||(1+L)$. W konsekwencji

$$\left| P(t) - f_{y+tz}(w) \cdot ||y+tz||^{2p-1} \right| = \left| a_0^{2p-1} (f_{m-1}(y+tz))^{2p-1} + (f_m(y+tz))^{2p-1} \right| \cdot |f_m(w)|$$

$$= \Big|(f_m(y+tz)+a_0 f_{m-1}(y+tz))\left(f_m(y+tz)^{2p-2}-\ldots+a_0^{2p-2}f_{m-1}(y+tz)^{2p-2}\right)\Big|\cdot|f_m(w)|$$
$$\leqslant (2p-1)L(1+L)^{2p-2}|f_m(w)|||y+tz||^{2p-1}.$$

Ponieważ $||w|| \leqslant 4$, to również $|f_m(w)| \leqslant 4$. Otrzymujemy więc oszacowanie górne na $|P(t)|$ dla $t \in [-1,1]$:

$$|P(t)| \leqslant |f_{y+tz}(w)|\cdot||y+tz||^{2p-1} + 4(2p-1)L(1+L)^{2p-2}||y+tz||^{2p-1}$$
$$\leqslant 2^{2p-1}R_2 + 2^{4p-1}(2p-1)L = 2^{2p-1}R_2 + 2^{2p-1}R_2 = 2^{2p}R_2.$$

Postępując wedle tego samego schematu rozumowania co wcześniej, polegającego na obustronnym oszacowaniu normy macierzy odwrotnej do macierzy Vandermonda A, tym razem dla liczb $\left\{\frac{f_i(z)}{f_i(y)}\right\}_{i=1,2,\ldots,m-2}$, otrzymujemy zależność

$$\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)}\right)^{2p-1}\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant m-2}|f_i(w)| \leqslant ||A^{-1}||\cdot 2^{2p}(2p)^{m-2}R_2$$
$$\leqslant \left(1+\frac{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)}{\alpha}\right)^{m-3}\left(1+\frac{2\sqrt{n}(n-1)(m-1)}{K}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\sqrt{n}(n-1)(m-2)(m-1)}{K\alpha}\right)^{m-2} 2^{2p}(2p)^{m-2}R_2.$$

A zatem

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m-2}|f_i(w)| < K^{-m}\alpha^{-(2p+2m)}2^{4p+2m}n^{3p+3m}m^{2p+3m}p^m R_2 = (m+2\beta^{2p}-2)^{\frac{-1}{2p}}.$$

Możemy więc otrzymać sprzeczność podobnie jak w poprzednim przypadku, gdyż

$$||w|| = \left(\sum_{i=1}^{m}|f_i(w)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} < \left(\frac{m-2}{m+2\beta^{2p}-2}+\frac{2\beta^{2p}}{m+2\beta^{2p}-2}\right)^{2p} = 1.$$

Przechodzimy do ostatniej części dowodu. Pozostał do rozważenia przypadek, w którym $||f_i + rf|| > K$ dla dowolnych $1 \leqslant i \leqslant m,\ r \in \mathbb{R}$ oraz

$$||f_i + af_j + rf|| > L$$

dla dowolnych $1 \leqslant i,j \leqslant m,\ i \neq j,\ a,\ r \in \mathbb{R}$. Dla dowodu nie wprost przyjmijmy również, że $\varepsilon \leqslant \varepsilon_3$. Wówczas

$$|f_y(w)| \leqslant 8\sqrt{\varepsilon_3 p} = L^m K^{2p+m}2^{-2p}n^{-(3p+3m)}m^{-(2p+3m)}p^{-m}m^{\frac{-1}{2p}} = R_3.$$

Używając tego samego rozumowania co wcześniej, tym razem do wielomianu

$$P(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(y+tz)^{2p-1}\cdot f_i(w)$$

dla jednostkowych wektorów $y,\ z \in Y$ spełniających

$$|f_i(y)| \geqslant \frac{K}{\sqrt{n}(n-1)m},$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz

$$\left|\frac{f_i(z)}{f_i(y)} - \frac{f_j(z)}{f_j(y)}\right| \geqslant \frac{2L}{\sqrt{n}(n-1)m(m-1)},$$

dla $1 \leqslant i < j \leqslant m$, otrzymujemy nierówność

$$\left(\frac{K}{\sqrt{n}(n-1)m}\right)^{2p-1} \cdot \max_{1\leqslant i\leqslant m} |f_i(w)|$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{\sqrt{n}(n-1)m}{K}\right)^{m-1} \left(\frac{\sqrt{n}(n-1)m(m-1)}{2L}\right)^{m-1} 2^{2p-1}(2p)^{m-1}R_3,$$

co prowadzi do

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} |f_i(w)| < L^{-m}K^{-(2p+m)}2^{2p}n^{3p+3m}m^{2p+3m}p^m R_3 = m^{\frac{-1}{2p}}.$$

Możemy ponownie oszacować normę wektora w aby otrzymać

$$1 \leqslant ||w|| = \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} < \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2p}} = 1.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia. □

8.4. Dowód wniosku 8.2

W bieżącym podrozdziale zastosujemy twierdzenie 8.1 do udowodnienia wniosku 8.2.

Dowód wniosku 8.2

Wykorzystamy twierdzenie 8.1 dla konkretnych funkcjonałów $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Niech $X = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$, gdzie norma $||\cdot||$ jest zdefiniowana tak jak w wypowiedzi twierdzenia 8.1 z $m = n+2$, $p = \lceil\frac{n+2}{2}\rceil$, $f_i(x) = x_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, $f_{n+1}(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ oraz $f_{n+2}(x) = \frac{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}{n}$. Dla tak wybranych funkcjonałów oszacujemy parametry α i β określone jak w twierdzeniu 8.1.

Udowodnimy najpierw oszacowanie $\alpha \geqslant \frac{1}{2n}$, które sprowadza się do nierówności

$$\operatorname{dist}(f_i, \operatorname{lin}\{f_j, f_k, f_l\}) \geqslant \frac{1}{2n}$$

dla dowolnych $0 \leqslant j < k < l \leqslant n+2$, $0 \leqslant i \leqslant n+2$, $i \notin \{j,k,l\}$. Zauważmy, że dla dowolnego wektora $v \neq 0$ takiego, że $f_j(v) = f_k(v) = f_l(v) = 0$ mamy

$$\operatorname{dist}(f_i,\ \operatorname{lin}\{f_j, f_k, f_l\}) \geqslant \frac{|f_i(v)|}{||v||}.$$

Dla różnych indeksów $i,\ j,\ k,\ l$ wykorzystamy różne wektory v aby otrzymać żądane oszacowanie dolne. Rozważmy następujące przypadki:

- $i,j,k,l \leqslant n$. Weźmy $v = e(i)$. Wówczas $||v|| = \left(2 + \frac{i^{2p}}{n^{2p}}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant 2$ oraz $f_i(v) = 1$. Odległość jest więc nie mniejsza niż $\frac{1}{2}$.

- $i,j,k \leqslant n$ oraz $l = n+1$. Jako, że $n \geqslant 4$ możemy wybrać $s \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i,j,k\}$. Weźmy $v = e(i) - e(s)$. Wówczas $||v|| \leqslant 4$ oraz $f_i(v) = 1$. Odległość jest nie mniejsza niż $\frac{1}{4}$.

- $i,j,k \leqslant n$ oraz $l = n+2$. Wybierzmy $s \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i,j,k\}$ i $v = se(i) - ie(s)$. Wówczas
$$||v|| = \left(s^{2p} + i^{2p} + \frac{|s-i|^{2p}}{n^{2p}}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant 2n$$
oraz $f_i(v) = s \geqslant 1$. Odległość jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2n}$.

- $i,j \leqslant n$, $k = n+1$ oraz $l = n+2$. Wybierzmy różne indeksy $s_1, s_2 \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}$ oraz
$$v = e(i) + \frac{i-s_2}{s_2-s_1}e(s_1) + \frac{s_1-i}{s_2-s_1}e(s_2).$$
Wówczas
$$||v|| = \left(1 + \frac{(i-s_1)^{2p} + (i-s_2)^{2p}}{(s_1-s_2)^{2p}}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant \left(1 + 2n^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant 2n$$
oraz $f_i(v) = 1$. Odległość jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2n}$.

- $i = n+1$, $j,k,l \leqslant n$. Wybierzmy $s \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j,k,l\}$ i $v = e(s)$. Wówczas $||v|| \leqslant 2$ oraz $f_i(v) = 1$. Odległość jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}$.

- $i = n+1$, $j,k \leqslant n$ oraz $l = n+2$. Wybierzmy różne indeksy $s_1, s_2 \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j,k\}$ i $v = s_2e(s_1) - s_1e(s_2)$. Wówczas $||v|| \leqslant 2n$ oraz $|f_i(v)| = |s_1 - s_2| \geqslant 1$. Odległość jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2n}$.

- $i = n+2$, $j,k,l \leqslant n$. Wybierzmy $s \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j,k,l\}$ i $v = e(s)$. Wówczas $||v|| \leqslant 2$ oraz $f_i(v) = \frac{s}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Odległość jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2n}$.

- $i = n+2$, $j,k \leqslant n$ oraz $l = n+1$. Wybierzmy różne indeksy $s_1, s_2 \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j,k\}$ i $v = e(s_1) - e(s_2)$. Wówczas $||v|| \leqslant 4$ oraz
$$|f_i(v)| = \frac{|s_1^2 - s_2^2|}{n} \geqslant \frac{2}{n}.$$
Odległość jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2n}$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że $\alpha \geqslant \frac{1}{2n}$. W podobny sposób oszacujemy od góry parametr β przez n^2. Inymi słowy wykażemy, że dla $0 \leqslant j < k \leqslant n+2$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\max\{|f_j(x)|, |f_k(x)|\} \leqslant n^2 \max_{1 \leqslant i \leqslant m, i \notin \{j,k\}} |f_i(x)|.$$

Zapiszemy w tym celu każdy z funkcjonałów $f_i(x)$ jako liniową kombinację dowolnych n z pozostałych w taki sposób, że suma modułów współczynników kombinacji nie przekracza n^2. Rozważymy następujące przypadki

- $j = n+1$ oraz $k = n+2$. Wówczas $f_{n+1} = \sum_{i=1}^n f_i$ oraz $f_{n+2} = \sum_{i=1}^n i f_i$.
- $j \leqslant n$ oraz $k = n+2$. Wówczas $f_j = f_{n+1} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} f_i$ oraz $f_{n+2} = \frac{1}{n}\left(j f_{n+1} + \sum_{i=1}^n (i-j) f_i\right)$.
- $j \leqslant n$ oraz $k = n+1$. Wówczas $f_j = \frac{n}{j} f_{n+2} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} \frac{i}{j} f_i$ oraz $f_{n+1} = \frac{n}{j} f_{n+2} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} \left(\frac{i}{j} - 1\right) f_i$.
- $j < k \leqslant n$. Wówczas $f_j = \frac{n}{j} f_{n+2} - \frac{k}{j} f_{n+1} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} \left(\frac{k}{j} - \frac{i}{j}\right) f_i$ i podobnie $f_k = \frac{n}{k} f_{n+2} - \frac{j}{k} f_{n+1} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq k} \left(\frac{j}{k} - \frac{i}{k}\right) f_i$.

Prostym rachunkiem bezpośrednio sprawdzamy, że w przypadku każdej z powyższych kombinacji liniowych suma modułów współczynników nie przekracza n^2. Daje to żądane oszacowanie górne parametru β.

Aby zakończyć dowód wniosku zauważmy, że w naszym przypadku mamy $\alpha^{-1} \leqslant 2(n+3)$ oraz $2p \leqslant n+3$. Co więcej $m + 2\beta^{2p} \leqslant n + 2 + 2n^{2(n+3)}$ i nietrudno zweryfikować nierówność,

$$n + 2 + 2n^{2(n+3)} \leqslant (n+3)^{2(n+3)},$$

z której dalej wynika, że

$$(n + 2 + 2n^{2(n+3)})^7 \leqslant (n+3)^{14(n+3)} \leqslant (n+3)^{2(n+3)^2}$$

gdyż $n \geqslant 4$. Bezpośrednie szacowanie daje nam więc

$$\lambda(Y,X) > 1 + (n+3)^{-2(n+3)} \left((n+3)^{-6} 2^{-16} (n+3)^{-12} (n+3)^{-11} (n+3)^{-4}\right)^{6(n+3)^2}$$

$$> 1 + \left(2\,(n+3)^2\right)^{-100(n+3)^2},$$

dla dowolnej hiperpłaszczyzny $Y \subset X$ i dowód jest zakończony.

□

9. Dalsze problemy dotyczące projekcji minimalnych

Na koniec części pracy dotyczącej projekcji minimalnych w skończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych zaproponujemy kilka problemów, które naturalnie wynikają z naszych rozważań.

We wniosku 7.9 uzyskaliśmy, że dowolna n-wymiarowa przestrzeń unormowana X posiada hiperpłaszczyznę Y, dla której $\lambda(Y, X) < 2 - \frac{2}{n}$. Z klasycznego argumentu opierającego się na zwartości wynika istnienie stałej $c > 0$ (zależnej od n) takiej, że dowolna n-wymiarowa przestrzeń unormowana X posiada hiperpłaszczyznę Y, która spełnia $\lambda(Y, X) \leqslant 2 - \frac{2}{n} - c$. Nasuwa się pytanie o najlepszą możliwą stałą c. Innymi słowy, proponujemy wariację problemu Bosznaya i Garaya 6.12 w kontekście podprzestrzeni kowymiaru 1.

Problem 9.1. *Dla danej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć (lub oszacować) wartość*

$$\sup_X \inf_{Y \subset X} \lambda(Y, X),$$

gdzie X przebiega zbiór n-wymiarowych przestrzeni unormowanych, zaś $Y \subset X$ jest podprzestrzenią wymiaru $n - 1$.

Zauważmy, że z drugiej strony we wniosku 8.2 dla dowolnego $n \geqslant 4$ uzyskaliśmy oszacowanie dolne: istnieje n-wymiarowa podprzestrzeń X taka, że

$$\lambda(Y, X) > 1 + \left(2\,(n+3)^2\right)^{-100(n+3)^2}$$

dla dowolnej hiperpłaszczyzny $Y \subset X$. Wiadomo więc, że dla $n \geqslant 4$ wartość, o którą pytamy w powyższym problemie znajduje się w przedziale otwartym

$$\left(1 + \left(2\,(n+3)^2\right)^{-100(n+3)^2},\ 2 - \frac{2}{n}\right).$$

Uzyskany przez nas przedział jest bardzo szeroki i nie jest jasne, gdzie znajduje się w nim szukana przez nas liczba. W przypadku trójwymiarowym, w którym powyższy problem pokrywa się z problemem 6.12 Bosznaya i Garaya, wiemy jedynie, że odpowiedź znajduje się w przedziale $(1, \frac{4}{3} - 0.0007)$ (zobacz wniosek 7.15). Wyznaczenie poprawnej wartości w tej sytuacji uważamy za trudny i atrakcyjny problem z dziedziny trójwymiarowych ciał wypukłych. W oczywisty sposób nie nasuwa się żaden kandydat symetrycznego ciała wypukłego w $\mathbb{R}^3$, który miałby maksymalizować powyższą wartość.

Aby uzyskać lepsze oszacowanie dolne w powyższym problemie można próbować wzmocnić uzyskany przez nas wynik w twierdzeniu 8.1 dotyczącym podprzestrzeni przestrzeni ℓ_{2p}^m. Nasz rezultat z całą pewnością można poprawić, gdyż w wielu miejscach zastosowaliśmy mało precyzyjne oszacowania dla osiągnięcia bardziej przejrzystego toku rozumowania. Wierzymy jednak, że możliwe jest uzyskanie oszacowania dużo lepszego rzędu.

Wydaję się być wysoce prawdopodobne, że za pomocą naszych metod podobne oszacowania na relatywną stałą projekcji hiperpłaszczyzn można uzyskać również dla innych klas przestrzeni. Dwa najważniejsze elementy czyli oszacowanie modułu wypukłości przestrzeni dualnej oraz opis jej elementów są uzyskane w przypadku wielu klas przestrzeni. Obiecującym kandydatem jest klasa podprzestrzeni przestrzeni Musielaka-Orlicza.

W twierdzeniu 7.8 znaleźliśmy oszacowanie górnę na liczbę hiperpłaszczyzn o maksymalnej relatywnej stałej projekcji w zależności od liczby $(n-1)$-wymiarowych ścian kuli jednostkowej. W przypadku trójwymiarowym udało się nam uzyskać optymalne oszacowanie przez 4 (zobacz twierdzenie 7.11). Warto więc zapytać o wyznaczenie maksymalnej możliwej liczby takich hiperpłaszczyzn w przypadku n-wymiarowym, lub przynajmniej o podanie lepszego oszacowania.

Problem 9.2. *Dla danej liczby całkowitej $n \geqslant 4$ wyznaczyć maksymalną możliwą liczbę $(n-1)$-wymiarowych podprzestrzeni n-wymiarowej przestrzeni unormowanej, których relatywna stała projekcji jest równa $2-\frac{2}{n}$. Lub podać oszacowanie górne, które zależy tylko od n, zaś nie od X.*

Na sam koniec proponujemy pytanie nie dotyczące bezpośrednio projekcji, lecz które pojawiło się naturalnie w ramach rozumowania prowadzonego w poprzednim rozdziale (zobacz podrozdział 8.2). Można je sklasyfikować jako zagadnienie należące do dziedziny geometrii dyskretnej.

Problem 9.3. *Niech m, $n \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Rozważmy normę $||\cdot||$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz funkcjonały liniowe $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o normie 1 (w normie dualnej $||\cdot||^*$). Podać oszacowanie dolne na wartość $\max_{||x||=1} \min_{1\leqslant i\leqslant m} |f_i(x)|$.*

Problem sformułowany jest w bardzo ogólny sposób, ale możemy zwrócić uwagę na kilka wariacji, z których żadna nie wydaje się być oczywista. Możemy wybrać normę $||\cdot||$ w konkretny sposób (na przykład jako pewną normę ℓ_p) i zapytać o optymalne oszacowanie dolne powyższej wartości. Jest wysoce prawdopodobne, że podanie zwięzłego wzoru dla dowolnych m, n będzie zadaniem bardzo trudnym, ale i tutaj mamy pewne możliwości wariacji. Można dla przykładu ustalić m i przy $n \to \infty$ wyznaczyć optymalną asymptotykę. Lub odwrotnie, ustalić n i wyznaczyć asymptotykę dla $m \to \infty$. Wydaje się, że nawet dla małych, ustalonych m i dowolnych n postawiony przez nas problem może być wymagający. Możemy również nie ustalać normy $||\cdot||$ i próbować wyznaczyć optymalne oszacowanie dolne przy zmieniającej się normie. Tutaj również istnieje wiele wariacji dotyczących wyborów m i n. Przypomnijmy, że w lemacie 8.6 udało się nam uzyskać oszacowanie dolne przez $\frac{1}{(n-1)m}$ w przypadku normy euklidesowej oraz przez $\frac{1}{\sqrt{n}(n-1)m}$ w przypadku dowolnej normy.

Niektóre z proponowanych przez nas wariacji powyższego problemu mogły już być rozważane. Wydaje się jednak, że pytania z tej kategorii mogą otwierać nowy, interesujący kierunek badań.

Literatura

[1] N. Alon and V. D. Milman, *Embeddings of ℓ_∞^k in finite dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. **45** (1983), 265–280.

[2] N. Alon, P. Pudlák, *Equilateral sets in ℓ_p^n*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 467-482.

[3] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhauser Verlag, Basel (1986).

[4] T. Ando, *Contractive projections in L_p spaces*, *Pacific J. Math.* **17** (1966), 391-405.

[5] G. Averkov, *On nearly equilateral simplices and nearly ℓ_∞ spaces*, Canad. Math. Bull. **53** (2010), 394-397.

[6] H.J. Bandelt, V. Chepoi, M. Laurent, *Embedding into rectilinear spaces*, Discrete Comput. Geom **19** (1998), 595-604.

[7] M. Baronti, P.L. Papini, *Norm-one projections onto subspaces of ℓ_p*, Ann. Mat. Pura Appl. **152** (1988), 53-61.

[8] M. Baronti, P.L. Papini, *Norm-one projections onto subspaces of finite codimension in ℓ_1 and c_0*, Period. Math. Hungar. **22** (1991), 161-174.

[9] J. Blatter, E.W. Cheney, *Minimal projections onto hyperplanes in sequence spaces*, Ann. Mat. Pura ed Appl. **101** (1974), 215-227.

[10] F. Bohnenblust, *Convex regions and projections in Minkowski spaces*, Ann. of Math. **39** (1938), 301-308.

[11] F. Bohnenblust, *Subspaces of ℓ_p^n spaces*, Amer. J. Math **63** (1941), 64-72.

[12] A.P. Bosznay, B.M. Garay, *On norms of projections*, Acta Sci. Math. **50** (1986), 87-92.

[13] P. Brass, *On equilateral simplices in normed spaces*, Beitrage Algebra Geom. **40** (1999), 303-307.

[14] B.L. Chalmers, F.T. Metcalf, *Determination of minimal projection from $C[-1,1]$ onto the quadratics*, Numer. Funt. Anal. Optim. **11** (1990), 1-10.

[15] B.L. Chalmers, F.T. Metcalf, *The determination of minimal projections and extensions in L_1*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 289-305.

[16] B. L. Chalmers, G. Lewicki, *Symmetric spaces with maximal projection constant*, J. Funct. Anal. **200** (2003), 1-22.

[17] B. L. Chalmers, G. Lewicki, *Three-dimensional subspace of l_∞^5 with maximal projection constant*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 553-592.

[18] B. L. Chalmers, G. Lewicki, *A proof of the Grunbaum conjecture*, Stud. Math. **200** (2010), 103-129.

[19] E.W. Cheney, P.D. Morris, *On the existence and characterization of minimal projections*, J. Reine Angew. Math. **270** (1974), 61-76.

[20] E.W. Cheney, C. Franchetti, *Minimal projections in L_1-space*, Duke Math J. **43** (1976), 501-510.

[21] B.V. Dekster, *Simplexes with prescribed edge lengths in Minkowski and Banach spaces*, Acta Math.Hungar. **86** (2000), 343-358.

[22] R.G. Douglas, *Contractive projections on an L_1-space*, Pacific J. Math. **15** (1965), 443-462.

[23] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V.M. Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag (2001).

[24] S.D. Fisher, P.D. Morris, D.E. Wulbert, *Unique minimality of Fourier projections*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), 235-246.

[25] C. Franchetti, *Relationship between the Jung constant and a certain projection constant in Banach spaces*, *Ann. Univ. Ferrara* **23** (1977), 39-44.

[26] C. Franchetti, *Projections onto hyperplanes in Banach spaces*, J. Approx. Theory **38** (1983), 319-333.

[27] C. Franchetti, *Lower bounds for the norms of projections with small kernels*, Bull. Austral. Math. Soc. **46** (1992), 507-511.

[28] Z. Füredi, J.C. Lagarias, F. Morgan, *Singularities of minimal surfaces and networks and related extremal problems in Minkowski space*, Discrete and computational geometry (New Brunswick, NJ, 1989/1990), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 95-109.

[29] W. Gautschi, *On inverses of Vandermonde and confluent Vandermonde matrices*, Numer. Math. **4** (1962), 117-123.

[30] M. Ghomi, *Optimal smoothing for convex polytopes*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 483-492.

[31] E. D. Gluskin, *Finite-dimensional analogues of spaces without a basis*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **261** (1981), 1046-1050.

[32] P.R. Goodey, *Homothetic ellipsoids*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **93** (1983), 25-34.

[33] Y. Gordon, *Some inequalities for Gaussian processes and application*, Israel J. Math. **50** (1985), 265-289.

[34] M.L. Gromov, *Simplexes inscribed in a hypersurface*, Mat. Zametki **5** (1969), 81-89.

[35] B. Grünbaum, *On a conjecture of H. Hadwiger*, Pacific J. Math. **11** (1961), 215-219.

[36] R.K. Guy, *An olla-podrida of open problems, often oddly posed*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 196-199.

[37] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1990).

[38] R. C. James, *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559-566.

[39] J.E. Jamison, A. Kamińska, G.Lewicki, *One-complemented subspaces of Musielak-Orlicz sequence spaces*, J. Approx. Theory **130** (2004), 1-37.

[40] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience (1948), 187-204.

[41] M.I. Kadec, M.G. Snobar, *Certain functionals on the Minkowski compactum*, Mat. Zametki **10** (1971), 453-457.

[42] S. Kakutani, *Some characterizations of Euclidean space*, Japan J. Math. **16** (1939), 93-97.

[43] T. Kobos, *An alternative proof of Petty's theorem on equilateral sets*, Ann. Pol. Math. **109** (2013), 165-175.

[44] T. Kobos, *Equilateral Dimension of Certain Classes of Normed Spaces*, Numer. Func. Anal. Opt. **35** (2014), 1340-1358.

[45] T. Kobos, *Hyperplanes of finite-dimensional normed spaces with the maximal relative projection constant*, Bull. Austral. Math. Soc. **91** (2015), 447-463.

[46] T. Kobos, *A uniform estimate of the relative projection constant*, preprint: arXiv:1508.03518 [math.FA] (2015).

[47] J. Koolen, M. Laurent, A. Schrijve, *Equilateral dimension of the rectilinear space*, Designs, Codes Cryptogr. **21** (2000), 149-164.

[48] H. König, N. Tomczak-Jaegermann, *Norms of minimal projections*, J. Funct. Anal. **119** (1994), 253-280.

[49] H. König, C. Schuett, N. Tomczak-Jaegermann, *Projection constants of symmetric spaces and variants of Khinchine's inequality*, J. Reine Angew. Math **511** (1999), 1-42.

[50] H. Kramer, A.B. Németh, *The application of Brouwer's fixed point theorem to the geometry of convex bodies*, An. Univ. Timisoara Ser. Sti. Mat. **13** (1975), 33-39.

[51] R. Latala, P. Mankiewicz, K. Oleszkiewicz, N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur distances and projections on random subgaussian polytopes*, Discrete Comput. Geom. **38** (2007), 29-50.

[52] B. Lemmens, O. van Gaans , *On One-Complemented Subspaces of Minkowski Spaces with Smooth Riesz Norms*, Rocky Mountain J. Math. **36** (2006), 1937-1955.

[53] G. Lewicki and W. Odyniec, *Minimal projections in Banach Spaces*, Lectures Notes in Mathematics **1449**, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[54] G. Lewicki, *Best approximation in spaces of bounded linear operators*, Dissertationes Math. **330** (1994).

[55] G. Lewicki, *On minimal projections in $\ell_\infty^{(n)}$*, Monatsh. Math. **129** (2000), 119-131.

[56] G. Lewicki, M. Prophet, *Codimension-one minimal projections onto Haar subspace*, J. Approx. Theory **127** (2004), 198-206.

[57] G. Lewicki, G. Trombetta, *Optimal and one-complemented subspaces*, Monatsh. Math. **153** (2008), 115-132.

[58] S.M. Lozinski, *On a class of linear operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **61** (1948), 193-196.

[59] Saint-Raymond, *J. Sur le volume des corps convexes symétriques (French)* (1981), Initiation Seminar on Analysis: G. Choquet-M. Rogalski-J. Saint-Raymond, 20th Year: 1980/1981., Exp. No. 11, Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie, 46, Univ. Paris VI, Paris, pp. 25.

[60] E. Makai, H. Martini, *Projections of normed linear spaces with closed sub-spaces of finite codimension as kernels*, Period. Math. Hungar. **52** (2006), 41-46.

[61] V.V. Makeev, *The degree of a mapping in some problems of combinatorial geometry*, J. Soviet Math. **51** (1987), 2544-2546.

[62] V.V. Makeev, *Equilateral simplices in normed 4-space*, Geometry and topology. Part 9, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **329**, POMI, St. Petersburg (2005), 88–91.

[63] H. Martini, K.J. Swanepoel, and G. Weiss, *The geometry of Minkowski spaces—a survey. Part I.*, Expo. Math. **19** (2001), 97–142. Erratum Expo. Math. **19** (2001), 364.

[64] A.E. Mayer, *Eine Überkonvexität*, Math. Z. **39** (1935), 511–531.

[65] A. Meir, *On the moduli of smoothness of L_p spaces*, Rendiconti di Math **4** (1984), 215-219.

[66] C.M. Petty, *Equilateral sets in Minkowski spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 369–374.

[67] R.S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516-541.

[68] B. Randrianantoanina, *1-complemented subspaces of spaces with 1-unconditional bases*, Canad. J. Math. **49** (1997), 1242-1264.

[69] B. Randrianantoanina, *Contractive projections and isometries in sequence spaces*, Rocky Mountain J. Math. **28** (1998), 323-340.

[70] B. Randrianantoanina, *Norm one projections in Banach spaces*, Taiwaneese J. Math. **5** (2001), 35-95.

[71] B. Randrianantoanina, *Contractive projections in Orlicz sequence spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2** (2004), 133-146.

[72] K. Schütte, *Minimale Durchmesser endlicher Punktmengen mit vorgeschriebenem Mindestabstand*, Math. Ann. **150** (1963), 91–98.

[73] L. Skrzypek, *Uniqueness of minimal projections in smooth matrix spaces*, J. Approx. Theory **107** (2000), 315-336.

[74] P.S. Soltan, *Analogues of regular simplexes in normed spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **222** (1975), 1303–1305. Tłumaczenie angielskie: Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 787–789.

[75] K.J. Swanepoel, *Equilateral sets in finite-dimensional normed spaces*, Seminar of Mathematical Analysis, eds. Daniel Girela Álvarez, Genaro López Acedo, Rafael Villa Caro, Secretariado de Publicationes, Universidad de Sevilla, Seville, 2004, 195-237.

[76] K.J. Swanepoel, *A problem of Kusner on equilateral sets*, Archiv der Mathematik (Basel) **83** (2004), 164-170.

[77] K.J. Swanepoel, R. Villa, *A lower bound for the equilateral number of normed spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **136** (2008), 127-131.

[78] K.J. Swanepoel, R. Villa, *Maximal Equilateral Sets*, Discrete & Computational Geometry **50** (2013), 354-373.

[79] S.J. Szarek, *The finite dimensional basis problem, with an appendix on nets of Grassman manifold*, Acta Math. **159** (1983), 153-179.

[80] J. Väisälä, *Regular simplices in three-dimensional normed spaces*, Contributions to Algebra and Geometry **53** (2012), 569-570.