Uniwersytet Jagielloński

Tomasz Lenarcik

O automorfizmach pewnych rozmaitości afinicznych

ROZPRAWA DOKTORSKA

promotor
Prof. dr hab. Zbigniew Jelonek

Kraków 2013

Streszczenie

Mówimy, że rozmaitość afiniczna V ma *gładkie, rzutowe uzwarcenie bez dywizorów prostokreślnych w nieskończoności* jeżeli istnieje taka gładka rozmaitość rzutowa X i hiperpowierzchnia $H \subset X$ bez składowych prostokreślnych, że $V \simeq X \setminus H$ i H jest dywizorem szerokim. ([1]) W pracy zajmujemy się badaniem grupy automorfizmów $\mathrm{Aut}(V)$. Pokażemy, że dla $\dim V \geqslant 2$ jest to grupa skończona i co więcej każdy automorfizm V rozszerza się do automorfizmu X.

Oryginalnie, twierdzenie to zostało udowodnione przez Jelonka (zob. [Jel94]) dla rozmaitości nad $\mathbb{C}$ i przy założeniu, że H jest dywizorem bardzo szerokim bez składowych *uniprostokreślnych* (od ang. *uniruled*). Prezentowany wynik jest zatem wzmocnieniem twierdzenia Jelonka poprzez dopuszczenie dowolnej charakterystyki ciała bazowego i osłabienie założeń o dywizorze H.

[1] Każdą hiperpowierzchnię identyfikujemy ze zredukowanym dywizorem Weila.

Podziękowania

Chciałbym w tym miejscu wyrazić moją serdeczną wdzięczność dla profesora Zbigniewa Jelonka za bezcenną pomoc merytoryczną oraz inspirujące dyskusje, które za każdym razem napełniały mnie entuzjazmem do studiowania matematyki.

Dziękuję mojej rodzinie za wyrozumiałość i wsparcie. Jestem szczególnie wdzięczny Piotrkowi i Marysi, którzy byli świadkami moich zmagań redakcyjnych praktycznie od początku aż do samego końca. Dziękuję mojej kochanej Asi za troskę o mnie i nieugiętą wiarę w to, że uda mi się ukończyć pracę w terminie. Dziękuję moim przyjaciołom za cierpliwość i za każde dobre słowo.

Pracę tę dedykuję moim Rodzicom.

I ja, ostatni, wykazałem czujność,
jak ten, kto podnosi resztki po zbierających winne grona.
Z błogosławieństwem Pana dotarłem,
i jak ten, co zbiera winogrona, napełniłem tłocznię.
Zważcie, że nie dla siebie samego się trudziłem,
ale dla tych wszystkich, którzy szukają wykształcenia.

Syr 33, 16–18 ([2])

[2] w tłumaczeniu Biblii Tysiąclecia, wyd. V

Spis treści

Wstęp

Niech k będzie ciałem dowolnej charakterystyki.

Definicja. W tej pracy termin *rozmaitość nad ciałem* k oznacza zredukowany schemat, lokalnie skończonego typu nad spektrum ciała k.

Definicja (rozmaitość prostokreślna)**.** Niech X będzie nierozkładalną rozmaitością nad ciałem k. Mówimy, że rozmaitość X jest *prostokreślna nad* k, jeżeli ciało funkcji wymiernych $K(X)$ jest czysto transcendentnym rozszerzeniem pewnego skończenie generowanego rozszerzenia ciała k lub równoważnie, istnieje k-odwzorowanie biwymierne

$$\varphi : Y/k \times \mathbb{P}^1_k \dashrightarrow X,$$

gdzie Y jest rozmaitością nad k. Jeżeli istnieje odwzorowanie wymierne φ, które jest generycznie skończone to mówimy, że rozmaitość X jest *uniprostokreślna* (od ang. *uniruled*). Załóżmy dodatkowo, że X jest geometrycznie nierozkładalna. Wówczas, jeżeli rozmaitość $\operatorname{Spec} \overline{k} \times_{\operatorname{Spec} k} X$ jest prostokreślna to mówimy, że X jest *geometrycznie prostokreślna*. Wtedy również istnieje takie skończone rozszerzenie k'/k, że rozmaitość $\operatorname{Spec} k' \times_{\operatorname{Spec} k} X$ jest prostokreślna.

Załóżmy, że ciało k jest algebraicznie domknięte i niech V będzie gładką rozmaitością afiniczną nad k. W pracy badamy związek pomiędzy skończonością grupy automorfizmów $\operatorname{Aut}(V)$, a geometrycznymi własnościami V, takimi jak prostokreślność lub istnienie uzwarcenia pewnego szczególnego typu.

Uwaga. Poza rozdziałem o twierdzeniu Rosenlichta (zob. twierdzenie 3.4.2), przyjmujemy umowę, że rozmaitości są domyślnie „nad ciałem” algebraicznie domkniętym. Chcemy w ten sposób uniknąć ciągłego powtarzania założenia o algebraicznej domkniętości ciała k.

Główny wynik

Definicja. Mówimy, że rozmaitość afiniczna V ma *gładkie, rzutowe uzwarcenie bez dywizorów prostokreślnych w nieskończoności*, lub krótko *„uzwarcenie bez dywizorów prostokreślnych”*, jeżeli istnieje taka gładka rozmaitość rzutowa X i hiperpowierzchnia $H \subset X$ bez składowych prostokreślnych, że $V \simeq X \setminus H$ oraz H jest dywizorem szerokim.

Uwaga. Tutaj i w dalszej części pracy każdą hiperpowierzchnię na gładkiej, lub przynajmniej normalnej, rozmaitości będziemy identyfikować z odpowiadającym jej zredukowanym dywizorem Weila. W takim sensie należy rozumieć stwierdzenie „H jest dywizorem szerokim (bardzo szerokim)”.

Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie 5.2.1, które można streścić w następujący sposób:

Twierdzenie (główny wynik)**.** *Niech V będzie gładką rozmaitością afiniczną wymiaru $\geqslant 2$, nad algebraicznie domkniętym ciałem k, dowolnej charakterystyki. Załóżmy, że istnieje gładkie uzwarcenie X bez dywizorów prostokreślnych. Wówczas grupa automorfizmów* $\operatorname{Aut}(V)$ *jest skończona i każdy automorfizm V jest zawężeniem pewnego automorfizmu X.*

Dowód. zob. wniosek 5.2.3 z twierdzenia 5.2.1

Twierdzenie to po raz pierwszy udowodnił Jelonek (zob. [Jel94]) w przypadku $k = \mathbb{C}$ i przy nieco bardziej restrykcyjnych założeniach na temat dywizora $X \setminus V$. Dokładne różnice omówimy w dalszej części wstępu.

Przykład. Oznaczmy $X := \mathbb{P}^n$ i niech $H \subset X$ będzie gładką hiperpowierzchnią stopnia $d \geqslant n + 1$. Wówczas H jest dywizorem bardzo szerokim i nie jest prostokreślna. Rzeczywiście, ponieważ wiązka kanoniczna K_H jest izomorficzna z $\mathcal{O}(-n-1+d)$ oraz $-n-1+d \geqslant 0$, to widzimy, że $\Gamma(H, K_H) \neq 0$. Mamy jednak następującą własność:

Lemat. *Niech X będzie gładką, właściwą rozmaitością uniprostokreślną. Wówczas $\Gamma(X, K_X^{\otimes m}) = 0$ dla każdego $m > 0$.*

Dowód. zob. [Kol96, Cor 1.11, str. 189]

Oprócz głównego wyniku przedstawimy również przykład, który pokazuje jak opisywane metody można stosować do badania prostokreślności zbioru punktów stałych.

Twierdzenie 4.3.3. *Niech $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^3)$ będzie (wielomianowym) automorfizmem nieskończonego rzędu o jakobianie równym 1. Wówczas, jeśli zbiór punktów stałych $\mathrm{Fix}(f)$ zawiera hiperpowierzchnię, to jest ona prostokreślna.*

Tego rodzaju zagadnienia były również badane przez Białynickiego-Birulę i innych (zob. np. [BB73], [Miy69], [JLas09]).

Przykład. Niech automorfizm $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ będzie dany wzorem [3]

$$(x, y, z) \longmapsto \Big(x + (x^2 - yz)z,\ y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2 z,\ z\Big).$$

Wówczas zbiór punktów stałych $\mathrm{Fix}(f) = \{x^2 - yz\}$, jest stożkiem, a więc jest prostokreślny.

Jednym z podstawowych twierdzeń wskazujących na silny związek między prostokreślnością a strukturą grupy automorfizmów rozmaitości jest następujący klasyczny wynik Rosenlichta, który wykorzystamy w dowodzie głównego wyniku.

Twierdzenie 3.4.2. *Załóżmy, że grupa $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$ działa nietrywialnie na rozmaitości X. Wówczas X jest prostokreślna.*

Intuicja jest tutaj jasna. Jeżeli na X działa grupa jednoparametryczna, to przez każdy punkt przechodzi pewna orbita, izomorficzna z krzywą wymierną. Okazuje się, że w rozsądnych sytuacjach, np. gdy pracujemy nad ciałem algebraicznie domkniętym, własność ta implikuje już uniprostokreślność (zob. np. [JLas09, Prop. 2.4]). Siła twierdzenia Rosenlichta polega więc na tym, że można udowodnić nie tylko „uni-", ale również prostokreślność X. Co więcej, w rozdziale 3. przekonamy się, że twierdzenie Rosenlichta działa również dla rozmaitości nad ciałem niekoniecznie algebraicznie domkniętym. Z punktu widzenia naszych zastosowań ta subtelna własność będzie miała istotne znaczenie, na przykład w dowodzie twierdzenia 4.4.1 mówiącego o prostokreślności „włókien w nieskończoności".

W dowodzie wspomnianego twierdzenia 4.3.3 wykorzystujemy następujący wynik Jelonka z pracy [Jel96], który z kolei jest konsekwencją twierdzenia Rosenlichta, oraz teorii modeli minimalnych:

Twierdzenie 4.3.1. *Przypuśćmy, że V jest gładką rozmaitością afiniczną wymiaru 2 lub 3 nad algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki zero. Wówczas, jeśli V nie jest uniprostokreślna, to $\#\,\mathrm{Aut}(V) < \infty$.*

[3] Jest to słynny przykład Nagaty (zob. [Nag72]) automorfizmu $\mathbb{C}^3$, który nie jest *tame*.

Stosując bardzo podobne metody można otrzymać analogiczną tezę o skończoności grupy automorfizmów dla rozmaitości, które posiadają uzwarcenie bez dywizorów uniprostokreślnych w nieskończoności, choć same mogą być uniprostokreślne. Główny wynik jest uogólnieniem następującego twierdzenia, które również pochodzi od Jelonka (zob. [Jel94]):

Twierdzenie. *Niech $X/\mathbb{C}$ będzie gładką rozmaitością rzutową, a $H \subset X$ hiperpowierzchnią bez składowych* ***uniprostokreślnych****. Jeżeli H jest dywizorem* ***bardzo szerokim****, to* $\mathrm{Aut}(X \setminus H)$ *jest grupą skończoną. Co więcej, każdy automorfizm $X \setminus H$ jest zawężeniem pewnego automorfizmu X.*

Pierwsze uogólnienie polega na opuszczeniu założenia $k = \mathbb{C}$ i dopuszczeniu dowolnej charakterystyki ciała. Oryginalny dowód Jelonka w istotny sposób korzysta z twierdzenia Hironaki o desingularyzacji, więc rozumowanie nie przenosi się bezpośrednio na przypadek charakterystyki dodatniej. Okazuje się jednak, że twierdzenie Hironaki można zastąpić znacznie prostszym lematem Abhyankara (por. twierdzenie 2.3.1), który jest klasycznym faktem z geometrii biwymiernej i działa w każdej charakterystyce. Dzięki zastosowaniu lematu Abhyankara założenia twierdzenia można dodatkowo osłabić wymagając jedynie aby hiperpowierzchnia H nie zawierała składowych **prostokreślnych**. Wynik ten został opublikowany we wspólnej pracy z Jelonkiem (zob. [JLen13]).

Drugie uogólnienie, które udało się uzyskać, i które nie było wcześniej publikowane, polega na osłabieniu założenia o dywizorze H z **„bardzo szeroki”** na **„szeroki”**. W dowodzie wykorzystujemy istotnie własności liniowych grup algebraicznych oraz twierdzenie Rosenlichta w pełnej ogólności, tj. dla rozmaitości nad ciałami, które nie muszą być algebraicznie domknięte.

W pracy prezentujemy pełne dowody lematu Abhyankara (rozdział 2) oraz twierdzenia Rosenlichta (rozdział 3). Pierwszy dowód jest kompilacją oryginalnych metod Abhyankara (głównie język waluacji) z artykułów [Abh56] i [AZ55], oraz bardziej współczesnego geometrycznego ujęcia zaprezentowanego w podręczniku Kollára [Kol96]. Łącząc zalety obu punktów widzenia udało nam się uzyskać rozumowanie czysto algebraiczne. O ile lemat Abhyankara pojawia się w literaturze stosunkowo często, to znalezienie dowodu twierdzenia Rosenlichta w wersji nad dowolnym ciałem wymagało od autora dużego nakładu pracy. Artykuły Rosenlichta (zob. [Ros56], [Ros63], [Ros67]), w których znajdują się poszczególne fragmenty dowodu, są napisane w języku André Weila i czyta się je wyjątkowo trudno. Było to jedną z motywacji do przeredagowania całości dowodu w języku bardziej współczesnym co autor uważa za istotny wkład niniejszej pracy.

Organizacja treści

Pierwsze cztery rozdziały zawierają materiał przygotowujący do dowodu głównego wyniku, tj. twierdzenia 5.2.1, który zaprezentujemy w rozdziale 5.

Rozdział 1. zawiera podsumowanie podstawowych faktów z teorii *pierścieni lokalnych regularnych* oraz *pierścieni uniwersalnie łańcuchowych*. Materiał ten ma charakter pomocniczy i zamieszczamy go z nadzieją, że ułatwi on czytanie pracy osobie ze słabszą znajomością algebry przemiennej. Doświadczony czytelnik może ten rozdział pominąć praktycznie w całości. Wyjątek stanowi dowód propozycji 1.5.1, która w języku algebry wyraża własność, że regularność zachowuje się przy rozdmuchaniu wzdłuż gładkiego centrum.

W rozdziale 2. prezentujemy pełny dowód lematu Abhyankara (zob. twierdzenie 2.3.1), który korzysta przede wszystkim z własności *pierścieni uniwersalnie łańcuchowych*, ze wspomnianej propozycji 1.5.1 oraz z *„Głównego Twierdzenia” Zariskiego* (twierdzenie 2.2.3), a dokładniej z wersji dla rozmaitości *lokalnie faktorialnych*. Na końcu rozdziału omawiamy dwa przykładowe zastosowania lematu Abhyankara: pierwsze związane z uzwarceniami przestrzeni afinicznej (zob. twierdzenie 2.4.1), drugie z własnościami tzw. *izomorfizmów w kowymiarze 1* (zob. propozycja 2.4.3).

Rozdział 3. to krótkie wprowadzenie do teorii *liniowych grup algebraicznych*. Z oczywistych względów jesteśmy zmuszeni zacytować większość faktów bez dowodu. Szczególnie istotną rolę odgrywają twierdzenia strukturalne, z których wynika, że każda nieskończona grupa afiniczna zawiera $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$ jako domkniętą podgrupę (zob. wniosek 3.2.10). Najważniejszą częścią rozdziału jest dowód twierdzenia Rosenlichta (zob. twierdzenie 3.4.2), który prezentujemy dla dowolnego ciała bazowego.

Rozdział 4. poświęciliśmy technice polegającej na przechodzeniu z prostokreślnością od włókna generycznego do włókna specjalnego dla schematów nad krzywą gładką. Opisujemy zastosowanie do badania prostokreślności dywizora w nieskończoności gdy na gładkiej rozmaitości afinicznej działa grupa $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$ zachowując pewną formę liniową (zob. twierdzenie 4.4.1). Przedstawimy również wynik dotyczący prostokreślności zbioru punktów stałych automorfizmu nieskończonego rzędu (zob. twierdzenie 4.3.3).

Wreszcie rozdział 5 zawiera dowód głównego wyniku, tj. twierdzenia 5.2.1 oraz wniosku 5.2.3. Podajemy również kilka przykładów na istotność założeń.

ROZDZIAŁ 1

Pierścienie lokalne regularne

Ponieważ prostokreślność – będąc własnością ciała ułamków rozmaitości – może być badana lokalnie, a więc na przykład na podzbiorach afinicznych, to w wielu sytuacjach można ograniczyć się do metod algebry przemiennej. Tak jest również w naszym przypadku. Podstawowym narzędziem będą dla nas pierścienie lokalne regularne, dlatego chcielibyśmy poświęcić ten rozdział na omówienie podstawowych pojęć i faktów związanych z tymi obiektami. Następnie powiemy trochę o elementarnych własnościach pierścieni *uniwersalnie łańcuchowych*, które okażą się najbardziej użyteczne dopiero w późniejszych rozdziałach, zdecydowaliśmy jednak wspomnieć o nich już tutaj, gdyż forma prezentacji odpowiada przeglądowemu charakterowi tego wprowadzającego rozdziału. Punktem kulminacyjnym jest dowód propozycji 1.5.1 wraz z wnioskiem 1.5.2, których geometryczne znaczenie jest takie, że gładkość (regularność) zachowuje się podczas rozdmuchania wzdłuż gładkiego centrum. Przedstawiony przez nas dowód jest czysto algebraiczny i bazuje na wspólnej pracy Abhynakara i Zariskiego [AZ55]. Poza tym artykułem, naszą główną referencją będą podręczniki *Commutative Algebra* Matsumury [Mat80], oraz *Commutative Rings* Kaplansky'ego [Kap74].

1.1 Pierścienie lokalne

Definicja 1.1.1 (pierścień lokalny)**.** Pierścień A nazywamy *lokalnym*, jeśli w A istnieje dokładnie jeden ideał maksymalny $\mathfrak{m} \lhd A$. Ciało $k = k(\mathfrak{m}) := A/\mathfrak{m}$ będziemy nazywali *ciałem residualnym*, lub po prostu *ciałem reszt*, pierścienia lokalnego A. Nadużywając nieco języka i pozwalając sobie na wygodny skrót myślowy, będziemy dość często pisać „niech $(A, \mathfrak{m})$ będzie pierścieniem lokalnym".

Przykład. Jeżeli $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ jest dowolnym ideałem pierwszym, to lokalizacja pierścienia A względem zbioru multiplikatywnego $S := A \setminus \mathfrak{p}$, ozn. $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$ jest pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ i ciałem reszt

$$k(\mathfrak{p}) \overset{\text{ozn.}}{=} k(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p} \big/ \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \simeq (A/\mathfrak{p})_{(0)}.$$

Definicja 1.1.2 (homomorfizm lokalny)**.** Niech $(A, \mathfrak{m})$ oraz $(B, \mathfrak{n})$ będą pierścieniami lokalnymi. Homomorfizm pierścieni $\varphi : A \longrightarrow B$ nazywamy *lokalnym*, gdy $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Zauważmy, że każdy homomorfizm lokalny indukuje monomorfizm ciał reszt $\overline{\varphi} : k(\mathfrak{m}) \longrightarrow k(\mathfrak{n})$.

Definicja 1.1.3 (relacja dominowania)**.** Niech $(A, \mathfrak{m})$, $(B, \mathfrak{n})$ będą całkowitymi pierścieniami lokalnymi o wspólnym ciele ułamków K. Mówimy, że *pierścień B dominuje A*, ozn. „$A < B$", gdy $A \subset B$ oraz $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$. Relacja dominowania zadaje częściowy porządek na rodzinie podpierścieni lokalnych ciała K.

Uwaga 1.1.4. Sprawdza się, że każdy łańcuch względem tego porządku ma majorantę i że elementami maksymalnymi są pierścienie waluacyjne. W szczególności, z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że każdy pierścień lokalny jest dominowany przez pewien pierścień waluacyjny.

Mamy następującą, elementarną własność modułów skończenie generowanych o współczynnikach w pierścieniu lokalnym.

Propozycja 1.1.5 (lemat Nakayamy)**.** *Niech $(A, \mathfrak{m})$ będzie pierścieniem lokalnym a M skończenie generowanym A-modułem. Jeśli $N \subset M$ jest takim podmodułem, że zachodzi równość $N + \mathfrak{m}M = M$, to $N = M$.*

Dowód. Ponieważ M możemy zastąpić przez M/N, to dowód wystarczy przeprowadzić w przypadku $N = 0$. Mamy pokazać, że jeśli $\mathfrak{m}M = M$ to $M = 0$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $M \neq 0$ i wybierzmy minimalny, skończony układ generatorów $x_1, \ldots, x_s \in M$. Ponieważ $\mathfrak{m}M = M$, to dla dowolnego $m \in \mathfrak{m}$ istnieją takie elementy $\alpha_i \in A$, że $x_1 = \alpha_1 m x_1 + \alpha_2 m x_2 + \ldots + \alpha_s m x_s$, a więc

$$(1 - \alpha_1 m)x_1 = \alpha_2 m x_2 + \ldots + \alpha_s m x_s.$$

Ponieważ pierścień A jest lokalny oraz $m \in \mathfrak{m}$, to element $(1 - \alpha_1 m)$ jest jednością, co pokazuje że x_1 można „wyliczyć" z pozostałych generatorów, a to przeczy minimalności. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $M = 0$.

Wniosek 1.1.6. *Niech $(A, \mathfrak{m}, k)$ będzie pierścieniem lokalnym a M skończenie generowanym A-modułem. Przypomnijmy, że moduł $M/\mathfrak{m}M$ ma naturalną strukturę skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem rest $A/\mathfrak{m} = k$. Załóżmy, że*

$$\mathrm{span}_k\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s\} = M/\mathfrak{m}M.$$

Wówczas $M = Ax_1 + \ldots + Ax_s$.

Dowód. Oznaczmy $N := Ax_1 + \ldots + Ax_s$. Z założenia wiemy, że każdy element $x \in M$ daje się przedstawić w postaci

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + m, \quad \text{gdzie } \alpha_i \in A,\ m \in \mathfrak{m}M.$$

Mamy więc $M = N + \mathfrak{m}M$. Z lematu Nakayamy wynika, że $M = N$.

Kolejną ważną konsekwencją lematu Nakayamy, związaną z teorią wymiaru jest następujący wynik Cohena i Seidenberga.

Wniosek 1.1.7 (going-up). *Niech $A \subset B$ będzie całkowitym rozszerzeniem pierścieni. Wówczas, dla dowolnego ciągu ideałów pierwszych $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ pierścienia A istnieje taki ciąg ideałów pierwszych $\mathfrak{P}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{P}_n$ pierścienia B, że $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \cap A$.*

Dowód. Ponieważ możemy zastosować argument indukcyjny, wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku $n = 1$, tj. udowodnimy, że dla dowolnego ideału pierwszego $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ istnieje taki ideał pierwszy $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$, że $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{P}$. Wystarczy jeśli udowodnimy, że własność ta zachodzi dla lokalizacji względem zbioru multiplikatywnego $S := A \setminus \mathfrak{p}$, tj. dla rozszerzenia $S^{-1}A \subset S^{-1}B$. Możemy zatem założyć, że A jest pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $\mathfrak{p}$. Dowód byłby zakończony gdybyśmy pokazali, że ideał $\mathfrak{p}B$ jest właściwy. Rzeczywiście, wtedy jako $\mathfrak{P}$ wystarczyłoby wybrać dowolny ideał maksymalny pierścienia B zawierający $\mathfrak{p}B$. Jego zawężenie $\mathfrak{P} \cap A$ będzie ideałem pierwszym zawierającym ideał maksymalny $\mathfrak{p}$, a więc $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.

Dowód zakończymy argumentując nie wprost. Przypuśćmy mianowicie, że $\mathfrak{p}B = B$, tj. dla pewnych $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{p}$ oraz $b_1, \ldots, b_s \in B$ jest $a_1 b_1 + \ldots + a_s b_s = 1$. Oznaczmy $B' = A[b_1, \ldots, b_s]$. Wówczas $A \subset B'$ jest skończenie generowanym rozszerzeniem całkowitym, a więc B' jest skończenie generowanym A-modułem. Ponadto, $B' = \mathfrak{p}B'$ ponieważ $a_1 b_1 + \ldots + a_s b_s = 1$. Z lematu Nakayamy wynikałoby zatem, że $B' = 0$, co jest absurdalne. Przypuszczenie $\mathfrak{p}B = B$ musiałoby być zatem niesłuszne.

Wniosek 1.1.8. *Niech* $A \subset B$ *będzie całkowitym rozszerzeniem pierścieni. Wówczas* $\dim A = \dim B$*.*

Dowód. Z wniosku 1.1.7 mamy $\dim A \leqslant \dim B$. Aby udowodnić nierówność $\dim A \geqslant \dim B$ zauważymy, że jeżeli $\mathfrak{P}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{P}_n$ jest ciągiem ideałów pierwszych w B, to $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap A$ jest wstępującym ciągiem ideałów pierwszych w A, tzn. $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$. Rzeczywiście, przechodząc do pierścieni ilorazowych $A/\mathfrak{p}_i \subset B/\mathfrak{P}_i$ możemy przyjąć, że A oraz B są pierścieniami całkowitym. Chcemy zatem sprawdzić, że jeśli $\mathfrak{P}$ jest niezerowym ideałem pierwszym w B, to $\mathfrak{P} \cap A \neq 0$. Niech $0 \neq x \in \mathfrak{P}$. Ponieważ rozszerzenie $A \subset B$ jest całkowite, to istnieją takie $a_i \in A$, że $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Dzięki temu, że B jest pierścieniem całkowitym, możemy wybrać taką relację, że $a_n \neq 0$. Ale $a_n \in A \cap \mathfrak{P}$, co pokazuje, że $A \cap \mathfrak{P} \neq 0$.

Twierdzenie 1.1.7 ma swój dualny odpowiednik.

Twierdzenie 1.1.9 (going-down)**.** *Niech* $A \subset B$ *będzie całkowitym rozszerzeniem pierścieni, przy czym* A *jest pierścieniem całkowitym i normalnym, a* B *pierścieniem całkowitym. Wówczas dla każdego ciągu ideałów pierwszych* $\mathfrak{p}_n \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_1$ *pierścienia* A *i takiego ideału pierwszego* $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$*, że* $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}_n$ *istnieje taki ciąg ideałów pierwszych* $\mathfrak{P}_n \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{P}_1$ *pierścienia* B*, że* $\mathfrak{P}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$*, oraz* $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_n$*.*

Dowód. zob. [Mat80, 5.E Thm 5(v)]

Uwaga 1.1.10. Teza twierdzenia 1.1.9 zachodzi również gdy $A \subset B$ jest rozszerzeniem płaskim, a więc np. gdy B jest pierścieniem wielomianów o współczynnikach w A (zob. [Mat80, 5.D Thm 4]).

Wniosek 1.1.11. *Niech* $A \subset B$ *będzie całkowitym rozszerzeniem pierścieni, dla którego zachodzi teza twierdzenia going-down. Wówczas, dla dowolnego ideału pierwszego* $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$ *jest* $\operatorname{ht}(\mathfrak{P}) = \operatorname{ht}(A \cap \mathfrak{P})$*.*

Dowód. Oszacowanie $\operatorname{ht}(\mathfrak{P}) \leqslant \operatorname{ht}(A \cap \mathfrak{P})$ jest konsekwencją twierdzenia *going-down.* Nierówność „$\geqslant$” sprawdza się tak samo jak we wniosku 1.1.8.

Bardzo ważną i znacznie mniej oczywistą konsekwencją lematu Nakayamy jest tzw. *twierdzenie Krulla o przecięciu.* Poniższy dowód pochodzi z podręcznika Kaplansky'ego [Kap74, Thm 73].

Twierdzenie 1.1.12 (Krulla o przecięciu)**.** *Niech* $(A, \mathfrak{m})$ *będzie lokalnym pierścieniem noetherowskim. Wówczas* $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i = 0$*.*

Dowód. Oznaczmy $I := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i$. Niech J będzie elementem maksymalnym w rodzinie ideałów spełniających warunek $J \cap I = \mathfrak{m}I$. Oczywiście $\mathfrak{m}I$ jest elementem tej rodziny, więc jest ona niepusta. Istnienie elementów maksymalnych jest zatem konsekwencją noetherowskości lub lematu Kuratowskiego-Zorna. Gdybyśmy pokazali, że dla pewnego s jest $\mathfrak{m}^s \subset J$, to mielibyśmy $I \subset \mathfrak{m}^s \subset J$, a stąd $I = \mathfrak{m}I$ i teza wynikałaby z lematu Nakayamy. Ponieważ ideał $\mathfrak{m}$ jest skończenie generowany, to wystarczy sprawdzić, że dla dowolnego elementu $x \in \mathfrak{m}$ istnieje takie s, że $x^s \in J$. W tym celu rozważmy następującą rodzinę ideałów:

$$\mathfrak{m}I \subset (J : x^s) = \{a \in A : ax^s \in J\},\ s = 1, 2, \dots$$

Ponieważ A jest pierścieniem noetherowskim, to możemy wybrać takie s, że zachodzi równość $(J : x^{s+1}) = (J : x^s)$. Twierdzimy, że

$$(Ax^s + J) \cap I = \mathfrak{m}I. \tag{1.1}$$

Inkluzja „$\supseteq$” jest oczywista. Dla dowodu „$\subseteq$” weźmy element $y \in I$ postaci $y = ax^s + b$, gdzie $a \in A$, $b \in J$. Wówczas $xy \in \mathfrak{m}I \subset J$, a zatem

$$ax^{s+1} = xy - b \in J \Rightarrow a \in (J : x^{s+1}) = (J : x^s) \Rightarrow ax^s \in J \Rightarrow y \in J,$$

i w konsekwencji $y \in J \cap I = \mathfrak{m}I$. To dowodzi, że zachodzi równość (1.1). Z maksymalności J wynika teraz, że $x^s \in J$.

1.2 Pierścienie lokalne regularne

1.2.1 Lokalne układy parametrów

Szczególną rolę odgrywają lokalne pierścienie noetherowskie. Okazuje się mianowicie, że ich wymiar Krulla jest zawsze skończony. Jest to pośrednią konsekwencją następującego fundamentalnego twierdzenia:

Twierdzenie 1.2.1 (Hauptidealsatz). *Niech A będzie pierścieniem noetherowskim. Wówczas każdy minimalny ideał pierwszy dowolnego ideału głównego jest wysokości co najwyżej 1.*

Dowód. zob. [Kap74, Thm 142]

Fakt ten można uogólnić w następujący sposób:

Twierdzenie 1.2.2 (twierdzenie Krulla o wysokości)**.** *Niech A będzie pierścieniem noetherowskim i niech $I \neq A$ będzie ideałem generowanym przez n elementów. Wówczas każdy minimalny ideał pierwszy zawierający I jest wysokości co najwyżej n.*

Dowód. zob. [Kap74, Thm 152]

Wniosek 1.2.3. *Jeżeli $(A, \mathfrak{m})$ jest lokalnym pierścieniem noetherowskim, to*

$$\dim A \leqslant \textit{minimalna liczba generatorów ideału } \mathfrak{m}\textit{-prymarnego.} \tag{1.2}$$

Dowód. Niech $I = (x_1, \ldots, x_s)$ będzie dowolnym ideałem $\mathfrak{m}$-prymarnym, tzn. $\mathfrak{m} = \mathrm{rad}(I)$. Ponieważ A jest pierścieniem noetherowskim, to dla pewnego $n \gg 0$ mamy $\mathfrak{m}^n \subset I$. Jeżeli teraz $I \subset \mathfrak{p}$ jest dowolnym ideałem pierwszym, to z inkluzji $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ wynika, że $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Widzimy więc, że $\mathfrak{m}$ jest jedynym ideałem pierwszym zawierającym I. Ostatecznie $\dim A = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \mathrm{ht}(I) \leqslant s$, przy czym ostatnia nierówność jest konsekwencją twierdzenia 1.2.2.

Definicja 1.2.4 (lokalny układ parametrów)**.** Niech A będzie lokalnym pierścieniem noetherowskim. Z wniosku 1.2.3 wiemy, że $d := \dim A < \infty$. Ciąg $x_1, \ldots, x_d$ nazywamy *lokalnym układem parametrów*, lub po prostu *układem parametrów*, jeżeli ideał $(x_1, \ldots, x_d)$ jest $\mathfrak{m}$-prymarny.

Uwaga 1.2.5. Można udowodnić, że układy parametrów rzeczywiście istnieją (zob. [Mat80, 12.H Thm 17]), a więc nierówność (1.2) jest optymalna.

Wykorzystując lemat Nakayamy (tj. propozycję 1.1.5) można udowodnić jeszcze inne oszacowanie wymiaru.

Wniosek 1.2.6. *Jeżeli $(A, \mathfrak{m}, k)$ jest lokalnym pierścieniem noetherowskim, to zachodzi oszacowanie $\dim A \leqslant \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Dowód. Niech $x_1, \ldots, x_s$ będzie minimalnym układem generatorów ideału $\mathfrak{m}$. Z twierdzenia 1.2.2 mamy $\dim A \leqslant s$, wystarczyłoby zatem udowodnić, że $s = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Jest to konsekwencją następującego lematu:

Lemat 1.2.7. *Niech $(A, \mathfrak{m}, k)$ będzie lokalnym pierścieniem noetherowskim, a $x_1, \ldots, x_s$ minimalnym układem generatorów ideału maksymalnego. Wówczas $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ jest bazą k-przestrzeni wektorowej $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Dowód lematu. Oczywiście $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ jest układem generatorów przestrzeni wektorowej $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Można zatem wybrać podzbiór stanowiący bazę. Gdyby jednak był to podzbiór właściwy, to na mocy wniosku 1.1.6 otrzymalibyśmy mniejszy podzbiór generujący $\mathfrak{m}$ co stoi w sprzeczności z założeniem minimalności.

1.2.2 Regularne układy parametrów

Możemy teraz zdefiniować pierścień *lokalny regularny.*

Definicja 1.2.8 (pierścień lokalny regularny)**.** Mówimy, że pierścień lokalny $(A, \mathfrak{m}, k)$ jest pierścieniem *(lokalnym) regularnym*, jeśli jest noetherowski i zachodzi równość $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. ([1]) Każdy minimalny układ generatorów ideału $\mathfrak{m}$ nazywamy *regularnym układem parametrów.*

Następująca obserwacja jest natychmiastową konsekwencją lematu 1.2.7.

Obserwacja 1.2.9. *Niech $(A, \mathfrak{m}, k)$ będzie pierścieniem lokalnym regularnym. Jeżeli $x_1, \ldots, x_s$ jest regularnym układem parametrów, to $x_i \notin \mathfrak{m}^2$.*

Można powiedzieć, że pewnym daleko idącym uogólnieniem powyższej obserwacji jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.2.10. *Niech $(A, \mathfrak{m}, k)$ będzie lokalnym pierścieniem noetherowskim. Wówczas, A jest regularny wtedy i tylko wtedy gdy pierścień*

$$\mathrm{gr}(A) := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}, \quad \mathfrak{m}^0 := A,$$

jest izomorficzny – jako k-algebra z gradacją – z pierścieniem wielomianów o współczynnikach w ciele k.

Dowód. zob. [Mat80, 17.E]

Wniosek 1.2.11. *Jeśli $(A, \mathfrak{m})$ jest pierścieniem lokalnym regularnym to odwzorowanie dane wzorem*

$$v : A \ni x \longmapsto \sup\{i \in \mathbb{N} : x \in \mathfrak{m}^i\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

jest waluacją pierścienia A. W szczególności, A jest pierścieniem całkowitym, oraz v rozszerza się do waluacji ciała ułamków $A_{(0)}$.

Uwaga. Równość $A = \{x \in A_{(0)} : v(x) \geqslant 0\}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\dim A = 1$, a więc na ogół A nie jest pierścieniem waluacyjnym.

[1] Oczywiście z wniosku 1.2.6 wiemy, że zawsze zachodzi oszacowanie „$\leqslant$”.

Dowód. Zauważmy najpierw, że z twierdzenia Krulla o przecięciu, tj. z twierdzenia 1.1.12, mamy $v(x) = \infty \iff x = 0$. Ponieważ nierówności:

$$v(x+y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\} \quad \text{oraz} \quad v(xy) \geqslant v(x) + v(y)$$

są oczywiste, pozostaje uzasadnić $v(xy) \leqslant v(x)+v(y)$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla pewnych $x, y \in A \setminus 0$ jest $v(xy) > v(x) + v(y)$. To oznacza, że istnieją takie $s, t \in \mathbb{N}$, że $x \in \mathfrak{m}^s \setminus \mathfrak{m}^{s+1}$, $y \in \mathfrak{m}^t \setminus \mathfrak{m}^{t+1}$ oraz $xy \in \mathfrak{m}^{s+t+1}$. Zauważmy najpierw, że x oraz y indukują w pierścieniu z gradacją $\mathrm{gr}(A)$ niezerowe elementy jednorodne $\overline{x} \in \mathfrak{m}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{m}^{\mathfrak{s}+1}$ oraz $\overline{y} \in \mathfrak{m}^{\mathfrak{t}}/\mathfrak{m}^{\mathfrak{t}+1}$, których iloczyn jest równy zero. Rzeczywiście, mamy przecież

$$xy \in \mathfrak{m}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{t}+1} \Longrightarrow \overline{xy} = 0 \in \mathfrak{m}^{s+t}/\mathfrak{m}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{t}+1}.$$

Z drugiej strony, z twierdzenia 1.2.10 wynika, że $\mathrm{gr}(A)$ jest pierścieniem całkowitym. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $v(xy) = v(x)+v(y)$, a więc istotnie v jest waluacją.

Przykład. Niech A będzie lokalizacją pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]$ w ideale maksymalnym $\mathfrak{m} := (x_1, \ldots, x_n)$. Wówczas A jest pierścieniem lokalnym regularnym, a waluacja zdefiniowana we wniosku 1.2.11 to nic innego jak *rząd znikania* funkcji wymiernej w punkcie.

1.2.3 Pierścienie regularne

Na koniec cytujemy jeszcze niezwykle ważny i głęboki wynik Serre'a, który mówi, że lokalizacja w ideale pierwszym zachowuje regularność.

Twierdzenie 1.2.12 (Serre)**.** *Niech A będzie pierścieniem lokalnym regularnym, i niech $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Wówczas $A_{\mathfrak{p}}$ jest również pierścieniem lokalnym regularnym.*

Dowód. zob. [Mat80, 18.G]

Definicja 1.2.13 (pierścień regularny)**.** Mówimy, że pierścień noetherowski A jest *regularny* jeżeli lokalizacja w każdymi ideale pierwszym jest pierścieniem lokalnym regularnym.

Wniosek 1.2.14 (z twierdzenia Serre'a)**.** *Pierścień noetherowski A jest regularnym wtedy i tylko wtedy gdy lokalizacja w każdym ideale* ***maksymalnym*** *jest pierścieniem lokalnym regularnym. W szczególności, każdy pierścień lokalny regularny jest pierścieniem regularnym.*

Regularność przenosi się na pierścienie wielomianów:

Twierdzenie 1.2.15. *Jeśli A jest pierścieniem regularnym to również pierścień $A[X_1, \ldots, X_n]$ jest regularny.*

Dowód. zob. [Mat80, 17.J Thm 40]

1.3 Teoria wymiaru algebr afinicznych

Omówimy teraz skrótowo kilka podstawowych faktów związanych z wymiarem k-algebr afinicznych, tj. skończenie generowanych rozszerzeń ciała k.

1.3.1 Twierdzenie Hilberta o zerach

Rozumowanie, które prezentujemy poniżej pochodzi z podręcznika Kaplansky'ego (zob. [Kap74, Ch 1.3]) i jest prawdopodobnie jednym z najprostszych i najkrótszych dowodów twierdzenia Hilberta o zerach.

Definicja 1.3.1. Mówimy, że pierścień całkowity A z ciałem ułamków K jest *G-dziedziną* ([2]) jeśli ciało K jest generowane nad A przez skończenie wiele elementów lub równoważnie, gdy istnieje taki element $x \in A$, że $K = A[x^{-1}]$.

Obserwacja 1.3.2. *Dla pierścienia całkowitego A z ciałem ułamków K oraz elementu $x \in A$, następujące warunki są równoważne:*

(i) Każdy niezerowy ideał pierwszy zawiera x.

(ii) Każdy niezerowy ideał zawiera potęgę x.

(iii) Zachodzi równość $K = R[x^{-1}]$.

Wniosek 1.3.3. *Pierścień całkowity A jest G-dziedziną wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie wszystkich niezerowych ideałów, lub równoważnie wszystkich niezerowych ideałów pierwszych, jest nietrywialne.*

Wniosek 1.3.4. *Dziedzina ideałów głównych jest G-dziedziną wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera skończenie wiele ideałów pierwszych.*

Uwaga. Można również udowodnić, że noetherowski pierścień całkowity jest G-dziedziną wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera skończenie wiele ideałów pierwszych, z których każdy jest maksymalny.

[2] Nazwa pochodzi od nazwiska Oscara Goldmana.

Propozycja 1.3.5. *Jeżeli A jest pierścieniem całkowitym, to pierścień wielomianów $A[X]$ nie może być G-dziedziną.*

Dowód. Oznaczmy przez K ciało ułamków pierścienia A. Gdyby pierścień $A[X]$ był G-dziedziną, to również $K[X]$ musiałby być G-dziedziną, a to jest niemożliwe ponieważ $K[X]$ jest dziedziną ideałów głównych i zawiera nieskończenie wiele ideałów pierwszych, co jest sprzeczne z wnioskiem 1.3.4.

Twierdzenie 1.3.6. *Niech $A \subset B$ będzie skończenie generowanym rozszerzeniem pierścieni całkowitych o ciałach ułamków K i L odpowiednio. Załóżmy ponadto, że ciało L jest algebraiczne nad K. Wówczas A jest G-dziedzina wtedy i tylko wtedy, gdy B jest G-dziedziną.*

Dowód. Jeśli B jest G-dziedziną, to istnieje taki element $y \in B$, że $L = B[y^{-1}]$. Dzięki założeniu, że pierścień B jest skończenie generowany nad A, istnieje taki element $x \in A \setminus \{0\}$, że $A[x^{-1}] \subset B[y^{-1}] = L$ jest rozszerzeniem całkowitym. Ponieważ L jest ciałem, to również $A[x^{-1}]$ jest ciałem i musi zachodzić równość $A[x^{-1}] = K$. To pokazuje, że A jest G-dziedziną.

Odwrotnie, jeśli A jest G-dziedziną, to dla pewnego elementu $x \in A$ jest $K = A[x^{-1}]$. Wówczas $B[x^{-1}]$ pierścieniem całkowitym, algebraicznym nad ciałem K, sam zatem musi być ciałem i koniecznie równym L.

Definicja 1.3.7 (G-ideał)**.** Ideał $I \lhd A$ nazywamy *G-ideałem* gdy pierścień ilorazowy A/I jest G-dziedziną. W szczególności każdy G-ideał jest z definicji ideałem pierwszym.

Obserwacja. *Każdy ideał maksymalny jest G-ideałem.*

Propozycja 1.3.8. *Niech A będzie dowolnym pierścieniem. Rozważmy pierścień wielomianów $B := A[X]$. Wówczas każdy G-ideał pierścienia B zawęża się do G-ideału pierścienia A. Odwrotnie, każdy G-ideał jest śladem pewnego ideału maksymalnego (a więc G-ideału) pierścienia B.*

Dowód. Niech $\mathfrak{P} \lhd B$ będzie G-ideałem i niech $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{P}$. Mamy więc

$$A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{P} = (A/\mathfrak{p})[x],$$

gdzie x jest obrazem zmiennej X przez kanoniczny homomorfizm. Ponieważ pierścień $B/\mathfrak{P}$ jest G-dziedziną, to z propozycji 1.3.5 wynika, że element x musi być algebraiczny nad $A/\mathfrak{p}$, a więc z twierdzenia 1.3.6 otrzymujemy, że również $A/\mathfrak{p}$ jest G-dziedziną.

Odwrotnie, jeśli $\mathfrak{p}$ jest G-ideałem, to istnieje taki element $x \in A/\mathfrak{p}$, że zachodzi równość $(A/\mathfrak{p})[x^{-1}] = k(\mathfrak{p})$. ([3]) Wówczas homomorfizm $A[X] \longrightarrow k(\mathfrak{p})$ określony przez warunki $A \longrightarrow A/\mathfrak{p} \subset k(\mathfrak{p})$ oraz $X \mapsto x$ jest epimorfizmem, którego jądrem jest taki ideał maksymalny $\mathfrak{P} \lhd B$, że $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.

Wniosek 1.3.9. *Niech $\mathfrak{M}$ będzie ideałem maksymalnym pierścienia wielomianów $k[X_1, \ldots, X_n]$, przy czym $n \geqslant 2$. Wówczas $\mathfrak{M} \cap k[X_i] \neq 0$.*

Dowód. Stosując wielokrotnie propozycję 1.3.8 otrzymujemy, że $\mathfrak{M} \cap k[X_i]$ jest G-ideałem. Ponieważ dziedzina ideałów głównych $k[X_i]$ zawiera nieskończenie wiele ideałów pierwszych, to z wniosku 1.3.4 nie może być G-dziedziną, a więc ostatecznie $\mathfrak{M} \cap k[X_i] \neq 0$.

Wniosek 1.3.10 (twierdzenie Hilberta o zerach)**.** *Załóżmy, że k jest ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathfrak{M}$ będzie ideałem maksymalnym pierścienia $k[X_1, \ldots, X_n]$. Wówczas, istnieją takie $a_i \in k$, że $\mathfrak{M} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$.*

Wniosek 1.3.11. *Niech L/k będzie skończenie generowanym rozszerzeniem ciał. Wówczas L jest algebraiczne nad k.*

Dowód. Z założenia mamy $L \simeq k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{M}$, gdzie $\mathfrak{M}$ jest pewnym ideałem maksymalnym. Z wniosku 1.3.10 istnieją takie elementy $a_1, \ldots, a_n \in \overline{k}$, że ideał $\mathfrak{M}$ jest jądrem homomorfizmu $k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \overline{k}$ zdefiniowanego w ten sposób, że $X_i \longmapsto a_i$. To pokazuje, że $L \subset \overline{k}$.

Wniosek 1.3.12. *Niech $A \subset B$ będzie rozszerzeniem k-algebr afinicznych, a $\mathfrak{M} \in \operatorname{Spec} B$ pewnym ideałem maksymalnym. Wówczas $\mathfrak{m} := A \cap \mathfrak{M}$ jest ideałem maksymalnym pierścienia A.*

Dowód. Z założenia mamy inkluzję pierścieni $A/\mathfrak{m} \subset B/\mathfrak{M}$. Ponieważ B jest skończenie generowany nad k, to z poprzedniego wniosku, ciało $B/\mathfrak{M}$ jest algebraiczne nad k. Pierścień całkowity $k \subset A/\mathfrak{m}$ składa się z elementów algebraicznych nad k czyli musi być ciałem $\Longrightarrow$ ideał $\mathfrak{m}$ jest maksymalny.

Wniosek 1.3.13. *Ideał maksymalny w pierścieniu wielomianów n zmiennych o współczynnikach w ciele można wygenerować za pomocą n elementów.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę zmiennych. Dla $n = 1$ twierdzenie zachodzi ponieważ pierścień wielomianów jednej zmiennej jest dziedziną ideałów głównych. Załóżmy więc, że $n \geqslant 2$ i niech $\mathfrak{m}$ będzie

[3] Przypomnijmy, że $k(\mathfrak{p})$ oznacza ciało residualne ideału $\mathfrak{p}$, tj. $k(\mathfrak{p}) = (A/\mathfrak{p})_{(0)}$.

ideałem maksymalnym w pierścieniu wielomianów $k[X_1, \dots, X_n]$. Z wniosku 1.3.9 wiemy, że ideał (główny) $\mathfrak{m} \cap k[X_1] = (f)$ jest również maksymalny. Oznaczmy przez $\overline{\mathfrak{m}}$ obraz ideału $\mathfrak{m}$ w pierścieniu ilorazowym

$$k[X_1, X_2, \dots, X_n] \Big/ (f) \simeq L[X_2, \dots, X_n],$$

gdzie $L = k[X_1]/(f)$ jest ciałem. Wówczas $\overline{\mathfrak{m}}$ jest ideałem maksymalnym, zatem z założenia indukcyjnego istnieje $(n-1)$-elementowy zbiór generatorów $\overline{y}_2, \dots, \overline{y}_n \in \overline{\mathfrak{m}}$, czyli ostatecznie $\mathfrak{m} = (f, y_2, \dots, y_n)$.

1.3.2 Pierścienie Hilberta

Pojęcie *pierścienia Hilberta* nie będzie potrzebne w dalszej części pracy, a więc poniższe uwagi należy traktować raczej informacyjnie.

Definicja 1.3.14 (pierścień Hilberta)**.** Pierścień A nazywamy *pierścieniem Hilberta* gdy każdy G-ideał jest ideałem maksymalnym.

Przykład. Oczywiście każde ciało jest pierścieniem Hilberta. Z wniosku 1.3.4 wynika również, że każda dziedzina ideałów głównych o nieskończonej liczbie ideałów pierwszych jest pierścieniem Hilberta.

Obserwacja. *Ponieważ odpowiedniość między ideałami pierścienia i ideałami pierścienia ilorazowego zachowuje własność bycia G-ideałem, to homomorficzny obraz pierścienia Hilberta jest pierścieniem Hilberta.*

Twierdzenie 1.3.15. *Pierścień A jest pierścieniem Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień wielomianów $A[X]$ jest pierścieniem Hilberta.*

Dowód. Wobec obserwacji, wystarczy udowodnić implikację „$\Longrightarrow$”. Załóżmy więc, że A jest pierścieniem Hilberta i niech $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A[X]$ będzie G-ideałem. Z propozycji 1.3.8 wynika, że również $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$ jest G-ideałem. Skoro A jest pierścieniem Hilberta, to $\mathfrak{p}$ jest maksymalny, a więc $A/\mathfrak{p}$ jest ciałem. Dodatkowo, z propozycji 1.3.5 widzimy, że rozszerzenie $A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{P} = (A/\mathfrak{p})[x]$ musi być algebraiczne, a więc również $B/\mathfrak{P}$ jest ciałem, czyli $\mathfrak{P}$ jest maksymalny.

Wniosek 1.3.16. *Każdy pierścień wielomianów skończonej liczby zmiennych o współczynnikach w ciele jest pierścieniem Hilberta.*

Wniosek 1.3.17. *W pierścieniu Hilberta A radykał ideału I jest przecięciem wszystkich ideałów maksymalnych zawierających I.*

Dowód. Możemy założyć, że $I = 0$. Wystarczy zatem pokazać, że zbiór nilpotentów jest przecięciem wszystkich G-ideałów pierścienia A. Inkluzja „$\subset$" jest oczywista. Odwrotnie, jeśli $x \in A$ nie jest nilpotentem, to zbiór multiplikatywny $S := \{1, x, x^2, \ldots\}$ nie zawiera zera. Pierścień $S^{-1}A$ zawiera zatem pewien ideał maksymalny, który odpowiada ideałowi pierwszemu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ rozłącznemu ze zbiorem S. Teraz z maksymalności $\mathfrak{p}$ wynika, że w pierścieniu ilorazowym $A/\mathfrak{p}$ każdy niezerowy ideał zawiera pewną potęgę x, ale to oznacza, że pierścień $A/\mathfrak{p}$ jest G-dziedziną (por. obserwacja 1.3.2).

Wniosek 1.3.18 (silna wersja Nullstellensatz)**.** *Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym a $f, g_1, \ldots, g_s$ wielomianami n zmiennych o współczynnikach w k. Załóżmy, że f znika na zbiorze wspólnych zerach wielomianów $g_1, \ldots, g_s$. Wówczas pewna potęga f należy do ideału $(g_1, \ldots, g_s)$.*

Dowód. Mamy pokazać, że f należy do radykału $I := (g_1, \ldots, g_n)$. Ponieważ pierścień wielomianów jest pierścieniem Hilberta, to z wniosku 1.3.17 wystarczy sprawdzić, że f należy do każdego ideału maksymalnego zawierającego I. Ale to jest *de facto* treścią naszego założenia, co wynika z twierdzenia Hilberta o zerach (por. wniosek 1.3.10).

1.3.3 Wymiar pierścienia wielomianów

Twierdzenie 1.3.19. *Wysokość ideału maksymalnego w pierścieniu wielomianów $k[x_1, \ldots, x_n]$ jest równa n. W szczególności, $\dim k[x_1, \ldots, x_n] = n$.*

Dowód. Dzięki twierdzeniu *going-down* (por. twierdzenie 1.1.9) możemy założyć, że ciało k jest algebraicznie domknięte. Niech $\mathfrak{m} \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ będzie ideałem maksymalnym. Z twierdzenia Hilberta o zerach (zob. wniosek 1.3.10) wiemy, że $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ dla pewnych $a_i \in k$. Istnieje zatem wstępujący ciąg ideałów pierwszych

$$(x_1 - a_1) \subsetneq (x_1 - a_1, x_2 - a_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) = \mathfrak{m},$$

co pokazuje, że $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) \geqslant n$. Z drugiej strony, skoro $\mathfrak{m}$ da się wygenerować przy pomocy n generatorów, to z twierdzenia Krulla o wysokości jest $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) \leqslant n$. □

Uwaga. Powyższe twierdzenie można również udowodnić całkowicie elementarnie, tj. bez wykorzystania twierdzenia Krulla o wysokości, czy nawet twierdzenia Hilberta o zerach. Rozumowanie przebiega wtedy w następujący sposób.

Inny dowód twierdzenia 1.3.19. Niech ciąg

$$0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_{s-1} \subsetneq \mathfrak{p}_s \tag{1.3}$$

będzie maksymalnym ciągiem ideałów pierwszych w pierścieniu $k[x_1, \ldots, x_n]$. Zatem $\mathfrak{p}_s$ jest ideałem maksymalnym. Aby pokazać, że $n = s$ wykorzystamy argument indukcyjny. Zauważmy najpierw, że dla pewnego indeksu i musi być $k[x_i] \cap \mathfrak{p}_{s-1} = 0$. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy inkluzję

$$k[x_1, \ldots, x_n] \Big/ \mathfrak{p}_{s-1} \subset k[x_1]/(f_1) \times \ldots \times k[x_n]/(f_n),$$

gdzie $0 \neq (f_i) = \mathfrak{p}_{s-1} \cap k[x_i]$. A więc k-algebra ilorazowa $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_{s-1}$ byłaby pierścieniem całkowitym (dzielimy przez ideał pierwszy) skończonego wymiaru nad k, a więc ciałem. Ale wtedy $\mathfrak{p}_{s-1}$ musiałby być ideałem maksymalnym wbrew założeniu. Bez straty ogólności możemy zatem przyjąć, że $\mathfrak{p}_{s-1} \cap k[x_1] = 0$. Przechodząc do lokalizacji względem zbioru multiplikatywnego $k[x_1] \setminus \{0\}$ przenosimy ciąg (1.3) do pierścienia wielomianów $k(x_1)[x_2, \ldots, x_n]$, zachowując wszystkie ideały pierwsze aż do $\mathfrak{p}_{s-1}$. Z założenia indukcyjnego wymiar tego pierścienia jest równy $n-1$, a więc $s - 1 \leqslant n - 1$.

Wniosek 1.3.20. *Niech* $A := k[x_1, \ldots, x_n]$ *będzie pierścieniem wielomianów. Oznaczmy* $\mathfrak{p}_i := (x_1, \ldots, x_i) \in \operatorname{Spec}(A)$, *dla* $i = 1, \ldots, n$. *Wówczas* $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_i) = i$.

Dowód. Z jednej strony dla dowolnego $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ mamy nierówność:

$$n = \dim A \leqslant \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim A/\mathfrak{p}.$$

Z drugiej $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_i) \geqslant i$ oraz $A/\mathfrak{p}_i \simeq k[x_{i+1}, \ldots, x_n]$ a więc z twierdzenia 1.3.19 mamy $\dim A/\mathfrak{p}_i = n - i$. Łącząc te oszacowania otrzymujemy $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_i) = i$.

1.3.4 Lemat normalizacyjny Noether

W badaniu wymiaru algebr afinicznych można przyjąć również nieco inną strategię, bazującą na następującym klasycznym wyniku:

Lemat 1.3.21 (normalizacyjny Noether)**.** *Niech* k *będzie dowolnym ciałem,* A *– skończenie generowaną* k*-algebrą oraz* $0 \neq I \lhd A$ *ideałem. Wówczas, istnieją takie elementy* $y_1, \ldots, y_s, y_{s+1}, \ldots, y_n \in A$, *algebraicznie niezależne nad* k, *że* $k[y_1, \ldots, y_n] \cap I = (y_1, \ldots, y_s)$ *oraz* $k[y_1, \ldots, y_n] \subset A$ *jest rozszerzeniem całkowitym. Jeżeli* A *jest pierścieniem całkowitym, to* $n = \operatorname{tr.deg.}(A_{(0)} : k)$.

Dowód. zob. [Mat80, 14.F, Thm 24 & Cor. 1]

Wniosek 1.3.22. *Niech A będzie całkowitą k-algebrą afiniczną. Wówczas*

$$\dim A = \operatorname{tr.deg.}(A_{(0)} : k).$$

Dowód. Z lematu normalizacyjnego istnieją takie elementy $y_1, \ldots, y_n \in A$ algebraicznie niezależne nad k, że $k[y_1, \ldots, y_n] \subset A$ jest rozszerzeniem całkowitym. Z twierdzenia *going-up* mamy $\dim A = n$. Ponieważ $k(y_1, \ldots, y_n) \subset A_{(0)}$ jest rozszerzeniem algebraicznym, to $\operatorname{tr.deg.}(A_{(0)} : k) = n$.

Wniosek 1.3.23. *Niech $\mathfrak{P}$ będzie ideałem pierwszym całkowitej k-algebry afinicznej A. Wówczas*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{P}) + \dim A/\mathfrak{P} = \dim A.$$

Dowód. Z lematu normalizacyjnego Noether (zob. 1.3.21) zastosowanego do ideału $\mathfrak{P} \lhd A$ znajdziemy takie elementy $y_1, \ldots, y_s, y_{s+1}, \ldots, y_n \in A$, ozn. $n := \operatorname{tr.deg.}(A : k)$, algebraicznie niezależne nad k, że (ozn. $\underline{y} = y_1, \ldots, y_n$)

$$k[\underline{y}] \subset A, \quad k[\underline{y}] \big/ \mathfrak{P} \cap k[\underline{y}] = k[\underline{y}] \big/ (y_1, \ldots, y_s) \simeq k[y_{s+1}, \ldots, y_n] \subset A/\mathfrak{P}$$

są rozszerzeniami całkowitymi. Z twierdzenia *going-up*, mamy zatem

$$\dim A = \dim k[\underline{y}] = n,$$
$$\dim B/\mathfrak{P} = \dim k[y_{s+1}, \ldots, y_n] = n - s.$$

Pierścień $k[\underline{y}]$ jest normalny i w związku z tym dla rozszerzenia $k[\underline{y}] \subset A$ zachodzi również twierdzenie *going-down*. Zatem na mocy wniosku 1.3.20 mamy

$$\operatorname{ht}\mathfrak{P} = \operatorname{ht}(\mathfrak{P} \cap k[\underline{y}]) = \operatorname{ht}(y_1, \ldots, y_s) = s.$$

Podsumowując: $\dim B/\mathfrak{P} + \operatorname{ht}\mathfrak{P} = (n - s) + s = n$, co chcieliśmy pokazać.

1.4 Pierścienie uniwersalnie łańcuchowe

Zdefiniujemy teraz pierścienie łańcuchowe *pierścieni łańcuchowych.* Dla prostoty będziemy pracowali wyłącznie z pierścieniami noetherowskimi.

Definicja 1.4.1 (pierścień łańcuchowy)**.** Niech A będzie pierścieniem noetherowskim. Mówimy, że pierścień A jest *łańcuchowy*, jeżeli dla dowolnej pary ideałów pierwszych $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ długość każdego maksymalnego łańcucha ideałów pierwszych pomiędzy $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{q}$ jest równa $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})$, tj. wysokości obrazu ideału pierwszego $\mathfrak{p}$ w pierścieniu ilorazowym $A/\mathfrak{q}$. Pierścień A nazywamy *uniwersalnie łańcuchowym*, jeżeli każda skończenie generowana A-algebra jest pierścieniem łańcuchowym.

Następująca obserwacja (por. [Mat80, 14.B]) jest natychmiastową konsekwencją elementarnych własności spektrum pierścienia przemiennego.

Obserwacja 1.4.2. *Lokalizacja oraz homomorficzny obraz pierścienia (uniwersalnie) łańcuchowego jest pierścieniem (uniwersalnie) łańcuchowym. Zatem A jest pierścieniem uniwersalnie łańcuchowym wtedy i tylko wtedy gdy każdy pierścień wielomianów $A[X_1, \dots, X_n]$ jest pierścieniem łańcuchowym.*

Kolejna własność (por. [Mat80, 14.B]) jest niezwykle użyteczna w sprawdzaniu, że pierścień jest łańcuchowy.

Obserwacja 1.4.3. *Niech A będzie pierścieniem noetherowskim. Następujące warunki są równoważne*

(i) A jest pierścieniem łańcuchowym,

(ii) dla dowolnych ideałów pierwszych $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ zachodzi równość

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{q}),$$

(iii) jeśli $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, oraz $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = 1$ to $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + 1$.

Dowód. Wystarczy udowodnić implikację $(iii) \Longrightarrow (i)$. Niech

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}$$

będzie maksymalnym ciągiem ideałów pierwszych. Z warunku (iii) zastosowanego wielokrotnie do par ideałów pierwszych $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ mamy $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + s$. To pokazuje, że każdy maksymalny ciąg ideałów pierwszych pomiędzy $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{q}$ ma długość s, więc w szczególności $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = s$. □

Pierścienie uniwersalnie łańcuchowe mają kluczowe znaczenie ze względu na tzw. *formułę wymiaru*, na którą wielokrotnie będziemy powoływali się w dowodzie lematu Abhyankara. Przypomnijmy, że jeżeli $A \subset B$ są pierścieniami całkowitymi, to definiujemy

$$\mathrm{tr.deg.}(B : A) := \mathrm{tr.deg.}(B_{(0)} : A_{(0)}).$$

Zachodzi następująca własność:

Twierdzenie 1.4.4 (formula wymiaru)**.** *Niech $A \subset B$ będą całkowitymi pierścieniami noetherowskimi i niech B będzie skończenie generowany nad A. Załóżmy, że $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$ oraz $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$. Wówczas*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{tr.\,deg.}(B : A) - \mathrm{tr.\,deg.}(k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{p})). \tag{1.4}$$

Ponadto, równość zachodzi gdy A jest uniwersalnie łańcuchowy, lub gdy B jest pierścieniem wielomianów $A[X_1, \ldots, X_n]$.

Dowód. zob. [Mat80, 14.C]

Definicja 1.4.5. Mówimy, że dla skończenie generowanego rozszerzenia całkowitych pierścieni noetherowskich $A \subset B$ *zachodzi formuła wymiaru*, jeżeli dla każdego ideału pierwszego $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, B$ we wzorze (1.4) mamy równość.

Wykorzystując formułę wymiaru można również podać ciekawą charakteryzację uniwersalnej łańcuchowości (por. [Mat80, 14.D]).

Twierdzenie 1.4.6. *Pierścień noetherowski A jest uniwersalnie łańcuchowy wtedy i tylko wtedy gdy*

(*i*) *A jest łańcuchowy, oraz ...*

(*ii*) *... dla każdego ideału pierwszego $\mathfrak{p}$ formuła wymiaru zachodzi dla dowolnej skończenie generowanej „nad-dziedziny” $A/\mathfrak{p} \subset B$.*

Dowód. Implikacja „$\Longrightarrow$” jest treścią twierdzenia 1.4.4. Odwrotnie, niech $A \subset B$ będzie skończenie generowanym rozszerzeniem. Chcemy pokazać, że B jest pierścieniem łańcuchowym lub równoważnie dla każdego ideału pierwszego $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, B$, pierścień $B/\mathfrak{P}$ jest łańcuchowy. Zastępując A przez $A/A \cap \mathfrak{P}$ oraz B przez $B/\mathfrak{P}$ możemy założyć, że $A \subset B$ jest skończenie generowanym rozszerzeniem pierścieni całkowitych. Wobec obserwacji 1.4.3 wystarczy sprawdzić, że dla dowolnej pary ideałów pierwszych $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q}$ pierścienia B zachodzi równość:

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{P}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{Q}). \tag{1.5}$$

Oznaczmy $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{P}$ oraz $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{Q}$. Z warunku (*ii*) oraz z formuły wymiaru zastosowanej do rozszerzenia $A \subset B$ dostajemy

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{tr.\,deg.}(B : A) - \mathrm{tr.\,deg.}(k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{p}))$$
$$\mathrm{ht}(\mathfrak{Q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + \mathrm{tr.\,deg.}(B : A) - \mathrm{tr.\,deg.}(k(\mathfrak{Q}) : k(\mathfrak{q})).$$

Ponadto stosując formułę wymiaru do $A/\mathfrak{q} \subset B/\mathfrak{Q}$ oraz ideału pierwszego $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} = \overline{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Spec} B/\mathfrak{Q}$ mamy również

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) + \operatorname{tr.deg.}(k(\mathfrak{Q}) : k(\mathfrak{q})) - \operatorname{tr.deg.}(k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{p})).$$

Z założenia (i) jest pierścieniem łańcuchowym a więc na mocy obserwacji 1.4.3 mamy także $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) - \operatorname{ht}(\mathfrak{q})$. Oczekiwaną tożsamość (1.5) otrzymamy teraz dodając i odejmując stronami powyższe równości.

Wniosek 1.4.7. *Każde ciało jest pierścieniem uniwersalnie łańcuchowym.*

Dowód. Niech k będzie dowolnym ciałem. Ponieważ 0 jest jedynym ideałem pierwszym k, to na mocy twierdzenia 1.4.6 wystarczy uzasadnić, że dla dowolnej całkowitej k-algebry B i ideału pierwszego $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$ zachodzi równość

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{P}) = 0 + \operatorname{tr.deg.}(B : k) - \operatorname{tr.deg.}((B/\mathfrak{P})_{(0)} : k).$$

Ponieważ $\operatorname{tr.deg.}(B : k) = \dim B$ oraz $\operatorname{tr.deg.}((B/\mathfrak{P})_{(0)} : k) = \dim B/\mathfrak{P}$, to teza jest bezpośrednią konsekwencją wniosku 1.3.23.

Uwaga 1.4.8. Można również udowodnić, że każdy pierścień regularny, a nawet każdy pierścień Cohena–Macaulay'a jest pierścieniem uniwersalnie łańcuchowym (zob. [Liu06, Ch 8 Prop 2.15 & Cor 2.16]). W szczególności każdy pierścień Dedekinda, a więc także każda dziedzina ideałów głównych, jest pierścieniem uniwersalnie łańcuchowym.

1.5 Gładkie rozdmuchania

Przechodzimy do najważniejszej części tego rozdziału, w której udowodnimy (zob. wniosek 1.5.2), jak regularność pierścienia lokalnego zachowuje się przy pewnych modyfikacjach wyjściowego pierścienia. Czytelnik zechce zauważyć, że operacje te w rzeczywistości odpowiadają odpowiadają konstrukcji rozdmuchania. Ta geometryczna interpretacja ma jednak dla nas drugorzędne znaczenie, a wszystkie fakty wypowiadamy w języku czystej algebry przemiennej. Następująca propozycja pochodzi z pracy Abhynakara i Zariskiego (dokładniej [AZ55, Lemma 3]).

Propozycja 1.5.1. *Niech $(R, \mathfrak{m})$ będzie pierścieniem lokalnym regularnym wymiaru $r > 1$ z ciałem ułamków K. Niech $x_1, \ldots, x_r$ będzie regularnym układem parametrów. Połóżmy $y_1 := x_1$, $y_i := x_i/x_1$, dla $i = 2, \ldots, r$ oraz*

$B := R[y_2, \ldots, y_r]$. Wówczas $y_1 B \cap R = \mathfrak{m}$, a zatem ciało reszt $R/\mathfrak{m}$ można utożsamić z pewnym podciałem $k \subset B/y_1B$. Ponadto obrazy $y_2, \ldots, y_r$ są algebraicznie niezależne nad k w pierścieniu ilorazowym B/y_1B, tj. pierścień

$$B/y_1B = k[\overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_r]$$

jest izomorficzny z pierścieniem wielomianów $r-1$ zmiennych. W szczególności, y_1B jest ideałem pierwszym.

Dowód. Ponieważ z definicji mamy $\mathfrak{m} \subset y_1B \cap R$, to dla wykazania równości wystarczy sprawdzić, że $y_1B \subsetneq B$. Niech $v : K \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ będzie waluacją skojarzoną z pierścieniem R tak jak we wniosku 1.2.11, tj. dla każdego $x \in R$ mamy $v(x) = \sup\{i \in \mathbb{N} : x \in \mathfrak{m}^i\}$. Z obserwacji 1.2.9 wynika, że dla każdego $i = 1, \ldots, r$ jest $v(x_i) = 1$ a więc

$$v(y_1) = v(x_1) = 1, \quad v(y_i) = v(x_i) - v(x_1) = 0, \quad \text{dla} \quad i = 2, \ldots, r.$$

To pokazuje, że $y_1B \subset \{v > 0\} \cap B \subsetneq B$.

Pozostaje zatem sprawdzić, że elementy $\overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ są algebraicznie niezależne nad $k = R/\mathfrak{m}$. Przypuśćmy więc, że zachodzi relacja

$$f(y_2, \ldots, y_n) = y_1 g(y_2, \ldots, y_r), \quad f, g \in R[T_2, \ldots, T_r].$$

Pokażemy, że współczynniki wielomianów f oraz g leżą w $\mathfrak{m}$. Najpierw, przepiszmy powyższą równość wykorzystując tożsamości $y_i = x_i/x_1$ oraz mnożąc obie strony przez $x_1^{\deg f + \deg g}$. Dostaniemy w ten sposób

$$x_1^{\deg g} F(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1^{1+\deg f} G(x_1, x_2, \ldots, x_r), \tag{1.6}$$

gdzie F oraz G są formami stopnia $\deg f$ i $\deg g$ odpowiednio, otrzymanymi poprzez ujednorodnienie wielomianów f i g. Następnie zauważmy, że wielomian

$$H(T_1, \ldots, T_r) := T_1^{\deg g} F(T_1, \ldots, T_r) - T_1^{1+\deg f} G(T_1, \ldots, T_r)$$

ma te same współczynniki co f oraz g, gdyż jest sumą dwóch form różnych stopni, a więc nie mogę wystąpić żadne „skrócenia”. Przechodzimy teraz do k-algebry z gradacją $\mathrm{gr}(R) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ oznaczając przez $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ obrazy regularnego układu parametrów w części jednorodnej $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Z twierdzenia 1.2.10 wiemy, że elementy $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ pierścienia $\mathrm{gr}(R)$ są algebraicznie niezależne nad $k = R/\mathfrak{m}$. Z drugiej strony, z tożsamości (1.6) mamy $H(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = 0$, a więc musi być $H = 0$ jako element $k[T_1, \ldots, T_r]$, tj. współczynniki H leżą w ideale $\mathfrak{m}$, co chcieliśmy wykazać.

Możemy teraz udowodnić następujący fakt (por. [AZ55, Corollary 1]):

Wniosek 1.5.2. *Niech $\mathfrak{n}$ będzie ideałem maksymalnym pierścienia B, zawierającym y_1. Wówczas pierścień $B^* := B_\mathfrak{n}$ jest lokalny regularny wymiaru r, a y_1 można rozszerzyć do regularnego układu parametrów.*

Dowód. Obraz ideału $\mathfrak{n}$ w pierścieniu ilorazowym B/y_1B, ozn. $\overline{\mathfrak{n}}$, jest ideałem maksymalnym. Ponieważ B/y_1B jest pierścieniem wielomianów $r-1$ zmiennych, to z wniosku 1.3.13 wynika, że ideał $\overline{\mathfrak{n}}$ da się wygenerować przy pomocy $r-1$ generatorów, powiedzmy $\overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_r$. Wówczas:

$$\mathfrak{n} = By_1 + Bz_2 + \ldots + Bz_r, \tag{1.7}$$

Mamy oczywiste oszacowanie $r = \dim B \geqslant \dim B_\mathfrak{n} = \mathrm{ht}(\mathfrak{n})$. Ponadto w pierścieniu wielomianów o współczynnikach w ciele wysokość ideału maksymalnego jest równa wymiarowi (por. twierdzenie 1.3.19), a więc $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{n}}) = r-1$. Ponieważ y_1B jest ideałem pierwszym, to $\mathrm{ht}(y_1B) \geqslant 1$, ale z drugiej strony z Hauptidealsatz (por. twierdzenie 1.2.1) mamy oszcacowanie „$\leqslant$". Podsumowując to wszystko, otrzymamy ciąg nierówności

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{n}) \geqslant \mathrm{ht}(y_1B) + \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{n}}) \geqslant 1 + (r-1) = r,$$

czyli ostatecznie jest $\mathrm{ht}(\mathfrak{n}) = \dim B_\mathfrak{n} = r$. To jednak pokazuje w połączeniu z (1.7), że $B_\mathfrak{n}$ jest pierścieniem lokalnym regularnym.

ROZDZIAŁ 2

Morfizmy biwymierne

W tym rozdziale przedstawimy dowód klasycznego wyniku w geometrii biwymiernej, tzw. *lematu Abhyankara* (zob. twierdzenie 2.3.1). Jest on pierwszym z dwóch najważniejszych narzędzi, które wykorzystamy w dowodzie głównego wyniku (zob. twierdzenie 5.2.1). Prezentowane rozumowanie jest rozbudowaną wersją dowodu z podręcznika Kollára (por. [Kol96, Ch. VI.1]). Został on przeredagowany z taką intencją, aby nawet czytelnik, który po praz pierwszy spotyka się z tą tematyką, mógł przestudiować go z pełnym zrozumieniem i bez konieczności uzupełniania szczegółów przy pomocy literatury. W bardzo istotny sposób wykorzystamy fakty z poprzedniego rozdziału, dotyczące pierścieni uniwersalnie łańcuchowych oraz pierścieni lokalnych regularnych.

Na koniec rozdziału podamy również przykładowe zastosowania lematu Abhyankara dotyczące *izomorfizmów w kowymiarze 1* (zob. propozycja 2.4.3) oraz uzwarceń przestrzeni afinicznej (zob. twierdzenie 2.4.1). Oba te wyniki odegrają istotną rolę w dowodzie głównego twierdzenia.

Uwaga (odnośnie pojęcia rozmaitości). W tym rozdziale umawiamy się dodatkowo, że każda rozmaitość jest z definicji nierozkładalna.

2.1 Pierścienie waluacji dyskretnej

Jednym z podstawowych narzędzi w dowodzie lematu Abhyankara, będą *pierścienie waluacji dyskretnej.* Zaczniemy zatem od bardzo skrótowego przypomnienia terminologii dotyczącej *pierścieni waluacyjnych.*

Definicja 2.1.1 (waluacja)**.** Niech K będzie dowolnym ciałem, a G grupą uporządkowaną. Funkcję $v : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ nazywamy *waluacją ciała* K jeśli dla dowolnych $x, y \in K$ zachodzą warunki: (i) $v(0) = \infty$, (ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$, (iii) $v(x + y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$. Jeżeli $v(K \setminus 0) = 0$, to mówimy, że *waluacja jest trywialna.*

Obserwacja 2.1.2. *Niech v będzie dowolną waluacją ciała K. Wówczas, zbiór $R := \{v \geqslant 0\}$ jest lokalnym podpierścieniem ciała K, z ideałem maksymalnym równym $\{v > 0\}$.*

Definicja 2.1.3 (pierścień waluacyjny)**.** Każdy pierścień ciała K pochodzący od pewnej waluacji tak jak w obserwacji 2.1.2, będziemy nazywali *pierścieniem waluacyjnym* ciała K. W szczególności, K jest pierścieniem waluacyjnym pochodzącym od trywialnej waluacji.

Następujący wynik charakteryzuje pierścienie waluacyjne w klasie wszystkich pierścieni całkowitych. Pozwalamy sobie pominąć dowód.

Obserwacja 2.1.4. *Niech A będzie podpierścieniem ciała K. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *A jest pierścieniem waluacyjnym ciała K,*
- (ii) *pierścień A jest lokalny, $A_{(0)} = k$ oraz każdy skończenie generowany ideał w A jest główny, przy czym jedyny (z dokładnością do stowarzyszenia) generator tego ideału można wybrać z dowolnego skończonego układu generatorów,*
- (iii) *dla dowolnego podpierścienia $A \subset B \subset K$ istnieje taki ideał pierwszy $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, że $B = A_{\mathfrak{p}}$,*
- (iv) *pierścień A jest lokalny oraz dla dowolnego podpierścienia $A \subsetneq B \in K$ istnieje taki element $a \in \mathfrak{m}_A$, że $a^{-1} \in B$,*
- (v) *dla dowolnego $x \in k$ mamy $x \in A$ lub $x^{-1} \in A$,*
- (vi) *$A_{(0)} = k$ oraz każde dwa ideały główne w A są porównywalne w sensie inkluzji.*

Wniosek 2.1.5. *Warunek (iv) w obserwacji 2.1.4 pokazuje, że każdy pierścień waluacyjny jest maksymalnym, w sensie relacji dominowania, podpierścieniem lokalnym ciała K. Okazuje się, że zachodzi także implikacja odwrotna, tj. każdy maksymalny (w sensie relacji dominowania) podpierścień lokalny ciała K jest pierścieniem waluacyjnym.*

Wniosek 2.1.6. *Każdy lokalny podpierścień ciała K zawiera się w pewnym pierścieniu waluacyjnym (por. uwaga 1.1.4).*

Definicja 2.1.7 (pierścień waluacji dyskretnej)**.** Mówimy, że pierścień jest *pierścieniem waluacji dyskretnej*, lub krótko *„jest DVR-em"* (od ang. *discrete valuation ring*), jeżeli grupa wartości skojarzonej waluacji jako grupa uporządkowana jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$.

Wniosek 2.1.8. *Jeżeli R jest DVR-em z ciałem ułamków K, to R jest maksymalnym podpierścieniem właściwym ciała K, nie tylko w sensie relacji dominowania, ale „w ogóle", tj. w sensie inkluzji.*

Dowód. Niech $v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ oznacza waluację skojarzoną z R. Jeżeli $x \notin R$, to $v(x) < 0$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ istnieje taki element $y \in R$ oraz liczba naturalna $k \geqslant 0$, że $v(yx^k) = n$. To pokazuje, że pierścień $R[y] = K$.

Następujące twierdzenie okaże się bardzo użyteczne w sprawdzaniu czy dany pierścień jest DVR-em.

Twierdzenie 2.1.9. *Dla pierścienia A następujące warunki są równoważne:*

(i) *A jest DVR-em,*

(ii) *A jest lokalną dziedziną ideałów głównych, która nie jest ciałem,*

(iii) *A jest lokalny, całkowity, noetherowski, normalny oraz* $\dim A = 1$,

(iv) *A jest lokalny, noetherowski, ideał $\mathfrak{m}_A$ jest główny oraz* $\dim A > 0$.

Dowód. Implikacje $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$ są oczywiste. Aby udowodnić implikację $(iv) \Longrightarrow (i)$ wystarczy skonstruować waluację tak jak we wniosku 1.2.11. Zajmiemy się teraz implikacją $(iii) \Longrightarrow (iv)$.

Mamy pokazać, że ideał $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A$ jest główny. W tym celu zdefiniujmy

$$\mathfrak{m}^{-1} := (A : \mathfrak{m}) = \{x \in K : x\mathfrak{m} \subset A\}.$$

Wówczas $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} \subset A$. Twierdzimy, że $A \subsetneq \mathfrak{m}^{-1}$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $A = (A : \mathfrak{m})$. Wtedy również $A = (A : \mathfrak{m}^s)$, dla każdego $s > 0$. Weźmy dowolny element $a \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Z uwagi na $\dim A = 1$ mamy $\operatorname{rad}(aA) = \mathfrak{m}$, a więc z noetherowskości istnieje takie $s > 0$, że $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^s = \mathfrak{m}^{s+1} \subset aA$. Z własności $(A : \mathfrak{m}^{s-1}) = A$ wynikałoby zatem, że $\mathfrak{m} \subset aA$ czyli w rezultacie $\mathfrak{m} = Aa$. Ale wtedy $(A : \mathfrak{m}) = (A : aA)$ zawiera element a^{-1}, który nie należy do A. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że musimy przyjąć $A \subsetneq \mathfrak{m}^{-1}$.

Pokażemy teraz, że $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = A$. Rzeczywiście, gdyby $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} \subsetneq A$ to musiałoby być $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}$. Wybierając dowolny element $x \in \mathfrak{m}^{-1} \setminus A$ widzimy zatem, że $x\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Ponieważ $\mathfrak{m}$ jest skończenie generowanym A-modułem to pokazuje, że x jest całkowity nad A, a więc z normalności $x \in A$ i w ten sposób znowu uzyskujemy sprzeczność. Musi być zatem $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = A$.

Na koniec, wybierzmy element $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, którego istnienie gwarantuje lemat Nakayamy (por. propozycja 1.1.5). i zdefiniujmy ideał $I := x\mathfrak{m}^{-1} \subset A$. Gdyby $I \subset \mathfrak{m}$, to $I\mathfrak{m} = x\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = xA \subset \mathfrak{m}^2$ wbrew założeniu $x \notin \mathfrak{m}^2$. Musi być zatem $x\mathfrak{m}^{-1} = I = A$, czyli $\mathfrak{m} = I\mathfrak{m} = x\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = xA$.

2.2 Główne twierdzenie Zariskiego

Definicja 2.2.1. Powiemy, że rozmaitość X jest *lokalnie faktorialna*, jeśli dla każdego $x \in X$, pierścień lokalny $\mathcal{O}_{x,X}$ jest faktorialny.

Uwaga 2.2.2. Ponieważ pierścienie lokalne regularne są faktorialne, ([1]) to każda gładka rozmaitość jest lokalnie faktorialna.

Twierdzenie 2.2.3 (główne twierdzenie Zariskiego)**.** *Niech X będzie rozmaitością lokalnie faktorialną, $n := \dim X$, i niech $f : Y \longrightarrow X$ będzie morfizmem biwymiernym. Wówczas, istnieje taki niepusty podzbiór otwarty $U \subset X$, że*

(*i*) $\mathrm{res}(f) : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ *jest izomorfizmem,*

(*ii*) *jeżeli $E_1, \ldots, E_k$ oznaczają składowe $Y \setminus f^{-1}(U)$, to $\dim E_i = n - 1$ oraz $\dim \overline{f(E_i)} \leqslant n - 2$, dla każdego i.*

W szczególności, jeżeli $x \in X \setminus U$ jest punktem domkniętym, to albo włókno nad x jest puste, albo wszystkie składowe $f^{-1}(x)$ są dodatniego wymiaru.

Dowód. zob. [Mum99, Ch. III.9, Prop. 1]

Główne twierdzenie Zariskiego jest zwykle cytowane w następującej, nieco innej formie (por. [Mum99, Ch. III.9]):

Twierdzenie (wersja oryginalna)**.** *Niech X będzie* ***normalną*** *rozmaitością nad ciałem algebraicznie domkniętym k, Y rozmaitością nad k, a $f : Y \longrightarrow X$ morfizmem biwymiernym o skończonych włóknach. Wówczas f jest izomorfizmem Y na otwarty podzbiór X.*

[1] Jest to treścią twierdzenia Auslandera-Buchsbauma (zob. [Mat80, 19.B]).

Jest jasne, że przy założeniu lokalnej faktorialności X, fakt ten jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 2.2.3. Podkreślmy jednak, że cała subtelność polega właśnie na zrezygnowaniu z założenia faktorialności, toteż w rezultacie oryginalna wersja – mimo iż teza zawiera mniej informacji – jest znacznie trudniejsza do udowodnienia. Z drugiej strony, twierdzenie 2.2.3 posiada elementarny dowód. Ponieważ będziemy pracowali głównie z rozmaitościami gładkimi, to wersja z twierdzenia 2.2.3 będzie dla nas wystarczająca.

Wniosek 2.2.4. *Podzbiór U zdefiniowany w tezie jest największym otwartym podzbiorem X dla którego zachodzi warunek (i) z wypowiedzi twierdzenia 2.2.3.*

Następujący fakt jest niezwykle użyteczny. Wykorzystamy go później w dowodzie twierdzenia 2.4.1 oraz w dowodzie propozycji 2.4.3.

Wniosek 2.2.5. *Niech X będzie rozmaitością lokalnie faktorialną, Y rozmaitością zupełną a $f : Y \longrightarrow X$ morfizmem biwymiernym.* ([2]) *Przypuśćmy, że w X istnieją takie nierozkładalne hiperpowierzchnie $H_1, \ldots, H_r$, że*

$$\mathrm{res}(f) : f^{-1}(X \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_r)) \longrightarrow X \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_r)$$

jest izomorfizmem. Oznaczmy $V := X \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_r)$. Wówczas

$$Y \setminus f^{-1}(V) = \widetilde{H_1} \cup \ldots \cup \widetilde{H_r} \cup E_1 \cup \ldots \cup E_k, \tag{2.1}$$

gdzie wszystkie zbiory $\widetilde{H_1}, \ldots, \widetilde{H_r}$ oraz $E_1, \ldots, E_k$ są nierozkładalnymi hiperpowierzchniami w Y. Ponieważ Y jest rozmaitością zupełną, to $\overline{f(E_j)} = f(E_j)$. Dodatkowo, zachodzi $\operatorname{codim} f(E_j) \geqslant 2$ *dla $j = 1, \ldots, k$ oraz*

$$\mathrm{res}(f) : \widetilde{H_i} \longrightarrow H_i$$

jest morfizmem biwymiernym dla każdego $i = 1, \ldots, r$.

Dowód. Niech $E_1, \ldots, E_k$ oraz zbiór otwarty $U \subset X$ będą takie jak w tezie twierdzenia 2.2.3. Ponieważ $\operatorname{codim} f(E_j) \geqslant 2$ i rozmaitość Y jest zupełna, to

$$X = f(Y) = U \cup f(E_1) \cup \ldots f(E_k),$$

a więc $\operatorname{codim} X \setminus U \geqslant 2$ i w konsekwencji $U \cap H_i \neq \varnothing$ dla każdego $i = 1, \ldots, r$. Możemy dzięki temu zdefiniować nierozkładalne hiperpowierzchnie

$$\widetilde{H_i} := \overline{f^{-1}(H_i \cap U)} \subset Y. \tag{2.2}$$

[2] Zauważmy, że *implicite* zakładamy tutaj zupełność X.

Ponieważ $\operatorname{res}(f) : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ jest izomorfizmem, to odpowiednie zawężenie indukuje morfizm biwymierny $\widetilde{H_i} \longrightarrow H_i$. Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem sprawdzić, że zachodzi równość (2.1). Z wniosku 2.2.4 mamy inkluzję $V \subset U$, a więc jest

$$E_1 \cup \ldots \cup E_k = Y \setminus f^{-1}(U) \subset Y \setminus f^{-1}(V).$$

Ponadto z definicji (2.2) jest $\widetilde{H_i} \subset Y \setminus f^{-1}(V)$ co pokazuje, że w (2.1) zachodzi inkluzja „$\supseteq$". Dla dowodu „$\subseteq$", weźmy $x \in Y \setminus f^{-1}(V)$. Wtedy $f(x) \notin U$ lub $f(x) \in U \setminus V$. W pierwszym przypadku mamy $x \in E_1 \cup \ldots \cup E_k$ a w drugim

$$f(x) \in (U \cap H_1) \cup \ldots \cup (U \cap H_r),$$

zatem dla pewnego $i \in \{1, \ldots, r\}$ jest $x \in f^{-1}(U \cap H_i) \subset \widetilde{H_i}$.

2.3 Lemat Abhyankara

Definicja (zbiór wyjątkowy)**.** Niech X będzie rozmaitością normalną i niech $f : Y \longrightarrow X$ będzie morfizmem biwymiernym. Domknięty zbiór

$$E(f) = \{y \in Y : f \text{ nie jest lokalnym izomorfizmem w } y\}$$

nazywamy *zbiorem wyjątkowym* f. Składowe $E(f)$ kowymiaru 1 będziemy nazywali *dywizorami wyjątkowymi.*

Następujące twierdzenie jest cytowane w literaturze jako *lemat Abhyankara* (por. [Kol96, Ch. VI.1] oraz [Abh56, Propozycja 3]). Dalszą część rozdziału poświęcimy na dowód tego interesującego faktu.

Twierdzenie 2.3.1 (lemat Abhyankara)**.** *Niech Y będzie rozmaitością normalną, X gładką rozmaitością a $f : Y \longrightarrow X$ morfizmem biwymiernym. Wówczas każda składowa zbioru wyjątkowego $E(f)$ jest prostokreślna nad X.* ([3])

Uwaga 2.3.2. Ponieważ założenia twierdzenia 2.3.1 pociągają lokalną faktorialność rozmaitości X (por. uwaga 2.2.2), to z twierdzenia 2.2.3 wynika, że wszystkie składowe zbioru wyjątkowego $E(f)$ są hiperpowierzchniami. Istotną zatem treścią lematu Abhyankara jest stwierdzenie, że każdy dywizor wyjątkowy jest prostokreślny.

[3] Tzn. jest prostokreślna jako włókno morfizmu f, rozumiane jako schemat nad ciałem residualnym pewnego punktu X.

Przykład 2.3.3. Niech X będzie gładką rozmaitością wymiaru n, a $Z \subset X$ gładką podrozmaitością kowymiaru r. Oznaczmy przez $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$, rozdmuchanie X wzdłuż centrum Z. Wtedy π jest morfizmem biwymiernym oraz dywizor wyjątkowy $\pi^{-1}(Z)$ jest lokalnie izomorficzny z $\mathbb{P}^{n-r} \times Z$, a więc jest prostokreślny.

2.3.1 Główna konstrukcja

Niech rozmaitości X, Y oraz morfizm $f : Y \longrightarrow X$ będą takie jak w założeniach lematu Abhyankara. Załóżmy, że $H \subset E(f) \subset Y$ jest nierozkładalną hiperpowierzchnią i oznaczmy przez Z domknięcie – nierozkładalne – obrazu $f(H) \subset X$. Niech $x \in Z$ będzie puntem generycznym. Oznaczmy przez K wspólne ciało ułamków X i Y, ([4]) a przez y punkt generyczny hiperpowierzchni H. Mamy inkluzje pierścieni lokalnych regularnych

$$\mathcal{O}_{x,X} \subsetneq \mathcal{O}_{y,Y} \subsetneq K.$$

a nawet, pierścień $\mathcal{O}_{y,Y}$ dominuje $\mathcal{O}_{x,X}$, tj. $\mathfrak{m}_y \cap \mathcal{O}_{x,X} = \mathfrak{m}_x$. Regularność $\mathcal{O}_{x,X}$ jest bezpośrednią konsekwencją gładkości X, natomiast regularność $\mathcal{O}_{y,Y}$ wynika z faktu, że Y jest rozmaitością normalną, oraz $\dim \mathcal{O}_{y,Y} = 1$. Innymi słowy, pierścień lokalny $\mathcal{O}_{y,Y}$ jest DVR-em. Skoro y jest punktem generycznym dywizora wyjątkowego, to pierwsza inkluzja jest istotna, a z twierdzenia 2.2.3 wynika nawet, że $\dim \mathcal{O}_{x,X} > \dim \mathcal{O}_{y,Y} = 1$.

Ponieważ X i Y są rozmaitościami nad ciałem k, to morfizm $f : Y \longrightarrow X$ jest skończonego typu. Istnieją więc takie k-algebry afiniczne $A \subset B$, oraz ideały pierwsze oraz ideały pierwsze $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$, że $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{P}$ i mamy diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \mathcal{O}_{x,X} \arrow[d, "\subseteq"] \\ B_{\mathfrak{P}} \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{O}_{y,Y} \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Ponieważ A jest pierścieniem uniwersalnie faktorialnym, to z *formuły wymiaru* (por. twierdzenie 1.4.4) otrzymujemy równość

$$1 = \mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \underbrace{\mathrm{tr.deg.}(B : A)}_{0} - \mathrm{tr.deg.}(k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{p})). \tag{2.4}$$

[4] Morfizm $f : Y \longrightarrow X$ biwymierny indukuje izomorfizm ciał $f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$.

a więc po uwzględnieniu izomorfizmów w (2.3) mamy ostatecznie

$$\operatorname{tr.deg.}(k(y) : k(x)) = \dim \mathcal{O}_{x,X} - 1.$$

Naszym celem jest udowodnić, że $k(y)$ jest czysto transcendentnym rozszerzeniem pewnego skończenie generowanego rozszerzenia $k(x)$. Wobec dotychczasowych obserwacji widzimy, że problem sprowadza się do sprawdzenia następującego faktu z algebry przemiennej:

Twierdzenie 2.3.4 (lemat Abhyankara, wersja algebraiczna)**.** *Niech* $(R, \mathfrak{m}_R)$ *będzie pierścieniem waluacji dyskretnej ciała* K. *Załóżmy, że* $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ *jest innym pierścieniem lokalnym regularnym (a więc noetherowskim), dominowanym przez* R, *uniwersalnie łańcuchowym, o ciele ułamków* K *i wymiaru* $\geqslant 2$. *Załóżmy, że zachodzi równość*

$$\operatorname{tr.deg.}(k(\mathfrak{m}_R) : k(\mathfrak{m})) = \dim \mathcal{O} - 1.$$

Wówczas ciało residualne $k(\mathfrak{m}_R)$ *jest czysto transcendentnym rozszerzeniem pewnego skończenie generowanego rozszerzenia ciała* $k(\mathfrak{m})$.

Uwaga. Każdy pierścień regularny jest uniwersalnie łańcuchowy, a więc założenie o uniwersalnej łańcuchowości nie jest konieczne.

Aby udowodnić twierdzenie 2.3.4, skonstruujemy pewien ciąg pierścieni lokalnych regularnych dominujących pierścień $\mathcal{O}$. Każdy kolejny pierścień będzie lokalizacją skończenie generowanego rozszerzenia swojego poprzednika. Szczęśliwie dla nas okaże się (zob. lemat 2.3.9), że pierścień R będzie elementem tego ciągu. Ponadto dzięki założeniu o regularności $\mathcal{O}$ będziemy potrafili powiedzieć dość dużo o tym jak zmieniają się ciała residualne kolejnych elementów.

Konstrukcja 2.3.5. Przyjmujemy oznaczenia jak w twierdzeniu 2.3.4 i dodatkowo, niech v_R oznacza waluację skojarzoną z R. Połóżmy $\mathcal{O}_1 := \mathcal{O}$, $\mathfrak{m}_1 := \mathfrak{m}$. Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg pierścieni lokalnych regularnych

$$\mathcal{O}_{x,X} =: \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2 < \ldots < \mathcal{O}_n < \ldots < R \tag{2.5}$$

w następujący sposób. Załóżmy, że mamy już $\mathcal{O}_n$. Niech $x_1, \ldots, x_r$ będzie minimalnym układem generatorów ideału maksymalnego $\mathfrak{m}_n$. Jeśli $r = 1$, to ideał $\mathfrak{m}_n$ jest główny, zatem $\mathcal{O}_n$ jest DVR-em (por. twierdzenie 2.1.9) i musi być $\mathcal{O}_n = R$, bo DVR-y są maksymalnymi podpierścieniami właściwymi swojego ciała ułamków (por. wniosek 2.1.8). W takim przypadku kładziemy $\mathcal{O}_{n+1} := \mathcal{O}_n$ $(= R)$. Załóżmy więc, że jest $r > 1$. Bez straty ogólności możemy przyjąć $v_R(x_1) \leqslant \ldots \leqslant v_R(x_r)$. Niech $y_i := x_i/x_1$, dla $i = 2, \ldots, r$. Ponieważ $v_R(y_i) \geqslant 0$, to $y_i \in R$ dla każdego i. Niech zatem $B := \mathcal{O}_n[y_2, \ldots, y_r]$, $\mathfrak{p} := B \cap \mathfrak{m}_R$ i wreszcie

$$\mathcal{O}_{n+1} := B_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{m}_{n+1} := \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}.$$

Z bezpośredniego sprawdzenia widzimy, że $\mathcal{O}_n < \mathcal{O}_{n+1} < R$. Za chwilę udowodnimy również, że regularność $\mathcal{O}_n$ implikuje regularność $\mathcal{O}_{n+1}$.

Uwaga 2.3.6. Proste rozumowanie indukcyjne pokazuje, że każdy pierścień $\mathcal{O}_n$ jest lokalizacją pewnej skończenie generowanej $\mathcal{O}$-algebry. W konsekwencji, każde ciało reszt $k_n := \mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n$ jest skończenie generowanym rozszerzeniem ciała $k(\mathfrak{m}) = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.

Uwaga 2.3.7. Z powyższej konstrukcji wynika następująca własność:

$$\mathcal{O}_n \subsetneq R \Longrightarrow \mathcal{O}_n \subsetneq \mathcal{O}_{n+1}.$$

Rzeczywiście, gdyby $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{n+1}$ to dla każdego $i = 2, \ldots, r$ mielibyśmy $y_i = x_i/x_1 \in \mathcal{O}_n$, tj. $x_i \in x_1\mathcal{O}_n$, co oznacza, że ideał $\mathfrak{m}_n$ jest główny. Zatem argumentując jak wyżej mamy $\mathcal{O}_n = R$.

Obserwacja 2.3.8. *Przy oznaczeniach jak w konstrukcji 2.3.5, regularność pierścienia $\mathcal{O}_n$ pociąga regularność $\mathcal{O}_{n+1}$.*

Dowód. Zastosujmy propozycję 1.5.1 do $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$ i ciągu regularnego jak w konstrukcji 2.3.5. Zgodnie z konstrukcją $\mathcal{O}_{n+1} = B_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} = \{y \in B : v_R(y) > 0\}$. Ponieważ $y_1 \in \mathfrak{m}_n$ to $v_R(y_1) > 0$, a więc $y \in \mathfrak{p}$. Niech teraz $\mathfrak{M}$ będzie dowolnym ideałem maksymalnym zawierającym $\mathfrak{p}$. Ponieważ $y_1 \in \mathfrak{M}$, to z wniosku 1.5.2 wiemy, że $B_{\mathfrak{M}}$ jest pierścieniem lokalnym regularnym. Ponieważ $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{M}$ to pierścień $\mathcal{O}_{n+1} = B_{\mathfrak{p}}$ jest izomorficzny lokalizacją $B_{\mathfrak{M}}$ w ideale pierwszym $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{M}}$. Teza wynika zatem z twierdzenia Serre'a, zob. 1.2.12.

2.3.2 Charakteryzacja dywizorów pierwszych

Skoro ciąg (2.5) jest ściśle rosnący, tak długo jak tylko jego elementy są właściwymi podpierścieniami R (zob. uwaga 2.3.7), to nasuwa się naturalne pytanie: *czy dla dostatecznie dużych n, musi już być $\mathcal{O}_n = R$?* Okazuje się, że...

Lemat 2.3.9. *...przy oznaczeniach jak w konstrukcji 2.3.5, następujące warunki są równoważne:*

(i) $R = \mathcal{O}_n$ dla dostatecznie dużych n,

(ii) *R jest lokalizacją skończenie generowanej $\mathcal{O}$-algebry,*

(iii) $\operatorname{tr.deg.}(R/\mathfrak{m}_R : k(\mathfrak{m})) = \dim \mathcal{O} - 1$.

Definicja (dywizory pierwsze)**.** Przy oznaczeniach jak w konstrukcji 2.3.5, jeżeli dla pierścieni $\mathcal{O}$ i R zachodzą równoważne warunki (i)–(iii), to mówimy że R jest *dywizorem pierwszym* ciała K o centrum w $\mathcal{O}$.

Uwaga. Chcielibyśmy podkreślić, że dowód najtrudniejszej implikacji, mianowicie $(iii) \Longrightarrow (i)$, istotnie upraszcza się dzięki temu, że w naszym przypadku wszystkie pierścienie $\mathcal{O}_n$ są regularne. Okazuje się, że z założenia regularności można zrezygnować o ile tylko pierścień $\mathcal{O}$ jest *pierścieniem Nagaty*, tj. jeśli dla każdego ideału pierwszego $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ oraz dla każdego skończonego rozszerzenia ciał $(\mathcal{O}/\mathfrak{p})_{(0)} \subset L$, domknięcie całkowite pierścienia $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ w L jest skończenie generowane nad $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$. Bez wchodzenia w szczegóły zaznaczmy jeszcze, że prawie wszystkie pierścienie występujące w geometrii algebraicznej są pierścieniami Nagaty (por. [Mat80, §31]).

Dowód lematu 2.3.9. Implikacja $(i) \Longrightarrow (ii)$ jest natychmiastowa (por. uwaga 2.3.6) natomiast $(ii) \Longrightarrow (iii)$ jest konsekwencją *formuły wymiaru* (zob. twierdzenie 1.4.4). Pozostaje zatem udowodnić, że $(iii) \Longrightarrow (i)$.

Oznaczmy przez $k_n := \mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n$, n-te ciało residualne. Zaczniemy od oszacowania wymiaru pierścienia $\mathcal{O}_n$. Z konstrukcji 2.3.5 wynika, że wszystkie pierścienie $\mathcal{O}_n$ są lokalizacjami skończenie generowanych $\mathcal{O}_1$-algebr. Każdy z nich jest zatem pierścieniem uniwersalnie łańcuchowym. Możemy więc skorzystać z *formuły wymiaru* na każdym poziomie, otrzymując

$$\operatorname{tr.deg.}(k_n : k_1) = \dim \mathcal{O}_1 - \dim \mathcal{O}_n,$$

czyli w połączeniu z warunkiem (iii) mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{tr.deg.}(R/\mathfrak{m}_R : k_n) &= \\ &\operatorname{tr.deg.}(R/\mathfrak{m}_R : k_1)) - \operatorname{tr.deg.}(k_n : k_1) = \\ &\qquad (\dim \mathcal{O}_1 - 1) - (\dim \mathcal{O}_1 - \dim \mathcal{O}_n) = \dim \mathcal{O}_n - 1.\end{aligned}$$

Gdyby udało się uzasadnić, że stopień $\operatorname{tr.deg.}(R/\mathfrak{m} : k_n)$ maleje wraz z n aż do zera, to dla pewnego n mielibyśmy $\dim \mathcal{O}_n = 1$. Wtedy $\mathcal{O}_n$ byłby lokalnym pierścieniem całkowitym, regularnym (zob. obserwacja 2.3.8) oraz wymiaru 1, a więc DVR-em (por. twierdzenie 2.1.9). Z maksymalności DVR-ów mielibyśmy natychmiast $\mathcal{O}_n = R$ (por. wniosek 2.1.8).

Pozostaje zatem sprawdzić, że istotnie dla $n \gg 1$ jest

$$d_n := \operatorname{tr.deg.}(R/\mathfrak{m}_R : k_n) = 0$$

Ponieważ $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejącym ciągiem liczb naturalnych, to musi się stabilizować, tj. dla pewnego $d \geqslant 0$ i dla dostatecznie dużych n jest

$$\operatorname{tr.deg.}(R/\mathfrak{m}_R : k_n) = d.$$

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $d > 0$. Oznacza to, że istnieje element $u \in R$, którego obraz w ciele $R/\mathfrak{m}_R$ jest przestępny nad każdym z ciał k_n. W szczególności, $u \notin \mathcal{O}_n$ dla każdego n. Jednocześnie, dla każdego n istnieją takie $a, b \in \mathcal{O}_n$, że $u = a/b$. Możemy założyć, że wybraliśmy takie n i taką reprezentację u, że liczba $v_R(b)$ jest najmniejsza możliwa. Ponieważ $u \notin \mathcal{O}_n$, to musi być $b \in \mathfrak{m}_n$, a więc $v_R(b) > 0$. Z drugiej strony mamy przecież $u \in R$, więc $v_R(a) - v_R(b) = v_R(u) \geqslant 0$, co pokazuje, że również $a \in \mathfrak{m}_n$. Wobec tego, dla pewnych $a_i, b_i \in \mathcal{O}_n$ będzie

$$a = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i, \quad b = \sum_{i=1}^{r} b_i x_i$$

gdzie $x_1, \ldots, x_r$ jest minimalnym układem generatorów ideału maksymalnego $\mathfrak{m}_n$ (jak w konstrukcji 2.3.5). Możemy oczywiście założyć, że

$$v_R(x_1) \leqslant \ldots \leqslant v_R(x_r).$$

Połóżmy $a' = \sum_{i=1}^{r} a_i(x_i/x_1)$ i $b' = \sum_{i=1}^{r} b_i(x_i/x_1)$. Wtedy z definicji $\mathcal{O}_{n+1}$ mamy $a', b' \in \mathcal{O}_{n+1}$, $u = a'/b'$ i oczywiście

$$v_R(b') = v_R(b/x_1) = v_R(b) - v_R(x_1) < v_R(b),$$

gdyż $v_R(x_1) > 0$, a to stoi w sprzeczności z minimalnością $v_R(b)$. Dowiedliśmy w ten sposób, że przypuszczenie $d > 0$ było niesłuszne, czyli musi być $d = 0$.

2.3.3 Dowód lematu Abhyankara

Możemy teraz przejść do właściwego dowodu twierdzenia 2.3.4. Dla wygody czytelnika powtarzamy jego wypowiedź.

Twierdzenie 2.3.4 (lemat Abhyankara, wersja algebraiczna). *Niech $(R, \mathfrak{m}_R)$ będzie pierścieniem waluacji dyskretnej ciała K. Załóżmy, że $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ jest innym pierścieniem lokalnym regularnym (a więc noetherowskim), dominowanym przez R, uniwersalnie łańcuchowym, o ciele ułamków K i wymiaru $\geqslant 2$.*

Załóżmy, że zachodzi równość

$$\operatorname{tr.deg.}(k(\mathfrak{m}_R) : k(\mathfrak{m})) = \dim \mathcal{O} - 1. \tag{2.6}$$

Wówczas ciało residualne $k(\mathfrak{m}_R)$ jest czysto transcendentnym rozszerzeniem pewnego skończenie generowanego rozszerzenia ciała $k(\mathfrak{m})$.

Dowód. Zastosujmy konstrukcję 2.3.5 do pary $\mathcal{O} \subset R$. Dzięki równości (2.6) możemy zastosować lemat 2.3.9, z którego wynika, że otrzymamy ciąg pierścieni lokalnych regularnych (zob. obserwacja 2.3.8):

$$\mathcal{O}_{x,X} = \mathcal{O}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{O}_{s-1} \subsetneq \mathcal{O}_s = R.$$

Ponadto musi być $\dim \mathcal{O}_{s-1} > 1$. Rzeczywiście, ponieważ wiemy, że pierścień $\mathcal{O}_{s-1}$ jest lokalny regularny, to z równości $\dim \mathcal{O}_{s-1} = 1$ wynikałoby, że $\mathcal{O}_{s-1}$ jest DVR-em, a więc $\mathcal{O}_{s-1} = R$ (por. wniosek 2.1.8) wbrew założeniu.

Możemy zastosować propozycję 1.5.1 do $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{s-1}$ i do regularnego układu parametrów $x_1, \ldots, x_r$ ideału maksymalnego $\mathfrak{m}_{s-1}$. Przypomnijmy, że

$$B = \mathcal{O}_{s-1}[y_1, \ldots, y_r], \quad \text{gdzie} \quad y_1 = x_1,\ y_i = x_i/x_1,\ i \geqslant 2.$$

Wówczas $y_1 B$ jest ideałem pierwszym, oraz $y_1 B \subset \mathfrak{p} := B \cap \mathfrak{m}_R$. Ponieważ $\dim R = 1$ i R jest lokalizacją B w $\mathfrak{p}$, to $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ a więc $y_1 B = \mathfrak{p}$. Mamy następujące utożsamienia:

$$R/\mathfrak{m}_R \simeq B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \simeq (B/\mathfrak{p})_{(0)} = (B/y_1 B)_{(0)}.$$

Z propozycji 1.5.1 wiemy, że pierścień $B/y_1 B$ jest izomorficzny z pierścieniem wielomianów o współczynnikach w ciele $k_{s-1} = \mathcal{O}_{s-1}/\mathfrak{m}_{s-1}$, a więc $R/\mathfrak{m}_R$ jest czysto transcendentnym rozszerzeniem k_{s-1}. Pozostaje odnotować, że k_{s-1} jest skończenie generowanym rozszerzeniem ciała $k(\mathfrak{m})$ (por. uwaga 2.3.6).

2.4 Przykładowe zastosowania

Omówimy teraz kilka zastosowań lematu Abhyankara oraz głównego twierdzenia Zariskiego w badaniu odwzorowań biwymiernych.

2.4.1 Uzwarcenia przestrzeni afinicznej

We wstępie zdefiniowaliśmy pewną klasę rozmaitości afinicznych dopuszczających *gładkie uzwarcenie bez dywizorów prostokreślnych.* Udowodnimy później (zob. wniosek 5.2.3), że takie rozmaitości mają skończoną grupę automorfizmów. *A posteriori* zobaczymy zatem, że przestrzeni $\mathbb{A}^n$ nie można uzwarcić bez użycia dywizorów prostokreślnych. Okazuje się jednak, że zupełnie niezależnie od naszego głównego wyniku zachodzi znacznie mocniejsze stwierdzenie, udowodnione przez Jelonka w pracy [Jel93, Corollary 6, p. 604].

Twierdzenie 2.4.1. *Niech X będzie gładką rozmaitością zupełną a $H \subset X$ taką hiperpowierzchnią, że $X \setminus H \simeq \mathbb{A}^n$. Wówczas **wszystkie składowe** H są prostokreślne.*

Dowód. Niech $\varphi : \mathbb{A}^n \longrightarrow X \setminus H$ będzie izomorfizmem. Oznaczmy przez $\Gamma \subset \mathbb{P}^n \times X$ domknięcie wykresu φ, a przez $\widetilde{\Gamma}$ jego normalizację i rozważmy morfizmy biwymierne

$$p_1 : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup H_\infty \quad \text{oraz} \quad p_2 : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow X,$$

indukowane przez odpowiednie projekcje. Skoro φ jest izomorfizmem, to

$$\operatorname{res}(p_1) : p_1^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus H_\infty) \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_\infty, \ \operatorname{res}(p_2) : p_2^{-1}(X \setminus H) \longrightarrow X \setminus H,$$

są izomorfizmami, a ponadto zachodzi równość

$$p_1^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus H_\infty) = p_2^{-1}(X \setminus H).$$

Z wniosku 2.2.5 zastosowanego do morfizmu p_1 wynika, że istnieją takie hiperpowierzchnie $E_1, \ldots, E_k$, $\widetilde{H_\infty} \subset \widetilde{\Gamma}$, że $\operatorname{codim} p_1(E_i) \geqslant 2$ dla $i = 1, \ldots, k$, $\widetilde{H_\infty}$ jest biwymierna z H_∞ i zachodzi równość

$$\widetilde{\Gamma} \setminus p_2^{-1}(X \setminus H) = \widetilde{\Gamma} \setminus p_1^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus H_\infty) = E_1 \cup \ldots \cup E_k \cup \widetilde{H_\infty}. \tag{2.7}$$

Wszystkie składowe zbioru (2.7) są prostokreślne. Rzeczywiście, $\widetilde{H_\infty}$ jest biwymierna z H_∞, natomiast prostokreślność dywizorów wyjątkowych $E_1, \ldots, E_k$ wynika z lematu Abhyankara (zob. twierdzenie 2.3.1). Stosując wniosek 2.2.5, tym razem do morfizmu p_2, otrzymujemy

$$\widetilde{H_1} \cup \ldots \cup \widetilde{H_r} \subset \widetilde{\Gamma} \setminus p_2^{-1}(X \setminus H) = E_1 \cup \ldots \cup E_k \cup \widetilde{H_\infty}.$$

gdzie $\widetilde{H_1}, \ldots, \widetilde{H_r}$ są nierozkładalnymi hiperpowierzchniami, biwymiernymi ze wszystkimi składowymi zbioru H. Z jednoznaczności rozkładu na składowe nierozkładalne wynika zatem, że wszystkie $\widetilde{H_1}, \ldots, \widetilde{H_r}$, a więc również składowe zbioru H, są prostokreślne.

2.4.2 Izomorfizmy w kowymiarze 1

Zacznijmy od wprowadzenia nowych pojęć.

Definicja 2.4.2. Niech X oraz Y będą gładkimi rozmaitościami a $\rho : X \dashrightarrow Y$ odwzorowaniem biwymiernym. Powiemy, że ρ rozszerza się do *izomorfizmu w kowymiarze 1*, lub że *jest izomorfizmem w kowymiarze 1*, gdy dla pewnych zbiorów otwartych $U \subset X$, $V \subset Y$ takich, że

$$\operatorname{codim} X \setminus U \geqslant 2, \quad \operatorname{codim} Y \setminus V \geqslant 2,$$

istnieje izomorfizm $\widetilde{\rho} : U \longrightarrow V$ rozszerzający ρ. Jeżeli $X = Y$, to będziemy mówili, że ρ jest *automorfizmem w kowymiarze 1*, ozn. $\varphi \in \mathrm{Aut}_1(X)$.

Uwaga. Łatwo przekonać się, że zbiór $\mathrm{Aut}_1(X)$ stanowi podgrupę tzw. *grupy Cremony* $\mathrm{Bir}(X)$ przekształceń biwymiernych rozmaitości X.

Jako kolejny przykład zastosowania *lematu Abhyankara* udowodnimy teraz, że każdy izomorfizm pomiędzy otwartymi podzbiorami dwóch gładkich rozmaitości rzutowych rozszerza się do izomorfizmu w kowymiarze 1, o ile tylko dopełnienia tych zbiorów nie zawierają składowych prostokreślnych. Przedstawione rozumowanie jest lekko rozbudowaną wersją dowodu z pracy [JLen13].

Propozycja 2.4.3. *Niech X, X' będą gładkimi rzutowymi rozmaitościami a H oraz H' hiperpowierzchniami w X i X' odpowiednio, bez składowych prostokreślnych. Niech $\varphi : X \setminus H \longrightarrow X' \setminus H'$ będzie izomorfizmem. Wówczas istnieją takie zbiory otwarte*

$$X \setminus H \subset U \subset X \ \textit{oraz}\ X' \setminus H' \subset U' \subset X',$$

że $X \setminus U$ i $X' \setminus U'$ są kowymiaru $\leqslant 2$ oraz φ rozszerza się do izomorfizmu $\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow U'$. Mówiąc krócej, każdy izomorfizm między $X \setminus H$ a $X' \setminus H'$ rozszerza się do izomorfizmu w kowymiarze 1.

Niestety nie możemy bezpośrednio powołać się na wniosek 2.2.5 (co znacznie skróciłoby dowód), bo φ nie musi być morfizmem. Jednak dzięki założeniu o rzutowości, możemy skorzystać z następującego dobrze znanego faktu:

Twierdzenie 2.4.4. *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem wymiernym, X rozmaitością normalną a Y rozmaitością rzutową. Wówczas*

$$\operatorname{codim}(V \setminus \operatorname{dom}(f)) \geqslant 2.$$

Dowód. zob. [Iit82, Thm 2.17]

Dowód propozycji 2.4.3. Oznaczmy $U := \mathrm{dom}(f)$. Oczywiście $X \setminus H \subset U$. Ponieważ X jest gładka a X' rzutowa, to z twierdzenia 2.4.4 $\operatorname{codim} X \setminus U \geqslant 2$. Mamy zatem dobrze określony morfizm biwymierny $\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow X'$. Ponieważ rozmaitość X' jest gładka, to z twierdzenia Auslandera-Buchsbauma jest również lokalnie faktorialna (por. uwaga 2.2.2). Z głównego twierdzenia Zariskiego (zob. twierdzenie 2.2.3) wynika zatem, że dla pewnego otwartego podzbioru $U' \subset X$ zawężenie $\mathrm{res}(\widetilde{\varphi}) : \widetilde{\varphi}^{-1}(U') \longrightarrow U' \subset X$ jest izomorfizmem i zbiór wyjątkowy jest postaci

$$E(\widetilde{\varphi}) = U \setminus \widetilde{\varphi}^{-1}(U') = E_1 \cup \ldots \cup E_k,$$

gdzie każda składowa E_i jest kowymiaru 1. Ponieważ $\widetilde{\varphi}$ jest izomorfizmem na $X \setminus H$, to dla każdego i musi być $E_i \cap (X \setminus H) = \varnothing$, czyli $E_i \subset H$. Z drugiej strony, z *lematu Abhyankara wiemy*, że zbiory E_i są prostokreślne, co byłoby w sprzeczności z założeniem o H. Musi być zatem $E(\widetilde{\varphi}) = \varnothing$ i w konsekwencji $\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow U' \subset X'$ jest izomorfizmem.

Pozostaje zatem sprawdzić, że $\operatorname{codim} X' \setminus U' \geqslant 2$. W tym celu pokażemy równość $U' = \mathrm{dom}(\varphi^{-1})$. Ponieważ $\widetilde{\varphi}^{-1}$ pokrywa się z φ^{-1} na części wspólnej U' oraz $X' \setminus H'$, to z maksymalności dziedziny wynika, że $U' \subset \mathrm{dom}(\varphi^{-1})$. Sprawdzimy teraz odwrotną inkluzję. Dla zbioru $V' := \mathrm{dom}(\varphi^{-1})$ oraz odwzorowania wymiernego φ^{-1} możemy przeprowadzić takie rozumowanie, jak wcześniej dla U oraz φ. Przekonamy się wówczas, że φ^{-1} rozszerza się do izomorfizmu

$$\widetilde{\varphi^{-1}} : V' \longrightarrow V \subset X,$$

gdzie V jest pewnym otwartym podzbiorem X. Oczywiście $(\widetilde{\varphi^{-1}})^{-1} : V \longrightarrow V'$ pokrywa się z φ na zbiorze $V \cap (X \setminus H)$, co pokazuje, że $V \subset \mathrm{dom}(\varphi) = U$. Ponadto $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\varphi^{-1}} : V' \longrightarrow V'$ jest dobrze określonym morfizmem, który jest identycznością na pewnym otwartym i niepustym podzbiorze V', a więc $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\varphi^{-1}}$ musi być identycznością na V'. Mamy wobec tego

$$\mathrm{dom}(\varphi^{-1}) = V' = \widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi^{-1}}(V')) \subset \widetilde{\varphi}(U) \subset U'$$

co ostatecznie dowodzi równości $U' = \mathrm{dom}(\varphi^{-1})$ i tym samym kończy dowód.

Uwaga 2.4.5. Z powyższego dowodu wynika, że jako U możemy przyjąć zbiór $\mathrm{dom}(\varphi)$, a jako U' zbiór $\mathrm{dom}(\varphi^{-1})$.

Jako efekt uboczny otrzymaliśmy następujący wniosek:

Wniosek. *Załóżmy, że* $H \subset X$, $H' \subset X'$ *są jak w propozycji 2.4.3. Jeśli* H *i* H' *mają różną liczbę składowych nierozkładalnych, to rozmaitości* $X \setminus H$ *oraz* $X' \setminus H'$ *nie są izomorficzne.*

ROZDZIAŁ 3

Liniowe grupy algebraiczne

W tym rozdziale zajmiemy się omówieniem związku pomiędzy istnieniem nietrywialnego działania liniowej grupy algebraicznej na rozmaitości a prostokreślnością tej ostatniej.

Wspomnieliśmy już o tym we wstępie, chcielibyśmy jednak podkreślić raz jeszcze, że domyślnie pracujemy w kategorii rozmaitości nad pewnym ustalonym z góry, algebraicznie domkniętym ciałem k dowolnej charakterystyki. Jedyny wyjątek od tej reguły stanowi twierdzenie Rosenlichta, które udowodnimy dla schematów nad dowolnym ciałem. Ta ogólność będzie kluczowa z punktu wiedzenia późniejszych zastosowań (por. np. twierdzenie 4.4.1).

Naszym głównym celem jest udowodnienie następujących twierdzeń:

Twierdzenie 3.3.1. *Niech G będzie liniową grupą algebraiczną dodatniego wymiaru. Wówczas G zawiera podgrupę izomorficzną z $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$.*

Twierdzenie 3.4.2 (Rosenlicht)**.** *Załóżmy, że grupa G ($\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$) działa nietrywialnie na rozmaitości X. Wówczas X jest prostokreślna.*

Twierdzenie 3.3.1 jest stosunkowo prostą konsekwencją twierdzeń strukturalnych dotyczących liniowych grup algebraicznych i dla specjalisty może się wydawać oczywiste. Autor zauważył jednak, że w charakterystyce dodatniej wynik ten może budzić zaskoczenie. Dlatego decydujemy się zamieścić szkic dowodu bazujący na znanych faktach z teorii grup algebraicznych. Niestety większości z nich nie będziemy w stanie tutaj udowodnić, wszędzie jednak gdzie brak pełnego rozumowania odsyłamy czytelnika do odpowiedniego fragmentu podręcznika Humphreysa [Hum75], który jest naszą główną referencją.

Nieco inaczej podchodzimy do twierdzenia Rosenlichta. Wynik ten wydaje się bardzo dobrze znany (zob. np. [BB73, Thm. 2], [BB66, Prop. 1] oraz [Miy69, Thm 2.2]), jednak wszystkie dowody, do których udało się dotrzeć autorowi, bazują na nietrywialnych faktach z teorii niezmienników, jak istnienie rozmaitości ilorazowej (zob. [Ros63]) czy istnienie sekcji na przestrzeniach jednorodnych (zob. [Ros56, §4] oraz [Ros67]). Co gorsza, w cytowanych pracach wyjątkowo trudno znaleźć deklarację, że wynik pozostaje prawdziwy bez założenia algebraicznej domkniętości ciała bazowego, tj. dla zredukowanych i nierozkładalnych schematów skończonego typu nad spektrum ciała. To wszystko skłania nas do zaprezentowania alternatywnego dowodu, którego esencją są metody podpatrzone w pracy [Ros56].

3.1 Przykłady i definicje

Dla naszych potrzeb przyjmujemy następującą, trochę minimalistyczną, ([1]) definicję grupy algebraicznej:

Definicja 3.1.1 (grupa algebraiczna)**.** Niech k będzie dowolnym ciałem, nie koniecznie algebraicznie domkniętym. *Grupą algebraiczną* będziemy nazywali rozmaitość G/k wyposażoną w strukturę grupy zdefiniowaną za pomocą k-morfizmów. W szczególności, punkt wyróżniony odpowiadający elementowi neutralnemu jest określony przez k-morfizm $\operatorname{Spec} k \longrightarrow G$, a więc jest punktem k-wymiernym. Jeżeli dodatkowo G jest rozmaitością afiniczną, to grupę G nazywamy *grupą afiniczną*.

Uwaga. Domyślnie zakładamy, że ciało k jest algebraicznie domknięte. W takiej sytuacji możemy sobie pozwolić na to, aby na grupę algebraiczną patrzeć jak na zbiór punktów domkniętych wraz z odpowiednim działaniem. Tam jednak, gdzie algebraicznej domkniętości nie zakładamy (np. w dowodzie twierdzenia 3.4.2) będziemy już trochę ostrożniejsi.

Przykład 3.1.2. Rozmaitości

$$\mathbb{G}_m := \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \simeq \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}],$$
$$\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1 \simeq \operatorname{Spec} k[t]$$

[1] Autor ma świadomość, że tak postawiona definicja nie dopuszcza niezredukowanych schematów grupowych. Z punktu widzenia tej pracy jest to jednak bez znaczenia.

są grupami afinicznymi z działaniem danym odpowiednio przez mnożenie i dodawanie. Okazuje się, że są to jedyne jednowymiarowe grupy **afiniczne**.

Uwaga. Jeżeli C/k jest gładką krzywą zupełną (rzutową) genusu 1, to można wyposażyć ją w strukturę jednowymiarowej grupy algebraicznej. Nie jest to jednak grupa afiniczna.

Definicja 3.1.3. Mówimy, że $H \subset G$ jest (domkniętą) podgrupą G jeżeli H jest taką domkniętą podrozmaitością G, że morfizmy zadające strukturę grupy na G indukują na H strukturę grupy algebraicznej.

Przykład 3.1.4. Grupa $\mathrm{GL}(n,k) \simeq \operatorname{Spec} k[x_{ij}, \det(x_{ij})^{-1}]$ macierzy odwracalnych jest grupą afiniczną zawierającą jako domknięte podgrupy

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}(n,k) &= \{X \in \mathrm{GL}(n,k) : \det X = 1\},\\
D(n,k) &= \{X \in \mathrm{GL}(n,k) : x_{ij} = 0,\ \text{dla } i \neq j\},\\
T(n,k) &= \{X \in \mathrm{GL}(n,k) : x_{ij} = 0,\ \text{dla } i > j\},\\
U(n,k) &= \{X \in T(n,k) : x_{ii} = 1\},\\
\mathrm{Aff}(n-1,k) &= \{X \in \mathrm{GL}(n,k) : x_{nj} = 0,\ \text{dla } j < n, x_{nn} = 1\}.
\end{aligned}$$

W szczególności $\mathrm{GL}(1,k) \simeq \mathbb{G}_m$ oraz $U(2,k) \simeq \mathbb{G}_a$. Są to przykłady tzw. *liniowych grup algebraicznych*.

Definicja 3.1.5. Każdą grupę G izomorficzną z domkniętą podgrupą $\mathrm{GL}(n,k)$ dla pewnego n, nazywamy *liniową grupą algebraiczną*.

Definicja 3.1.6. Grupę izomorficzną z $D(n,k)$ nazywamy *torusem*.

Uwaga. Ponieważ domknięta podrozmaitość rozmaitości afinicznej jest rozmaitością afiniczną, to każda liniowa grupa algebraiczna jest grupą afiniczną. Okazuje się, że zachodzi również stwierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 3.1.7. *Każda grupa afiniczna jest izomorficzna z domkniętą podgrupą* $\mathrm{GL}(n,k)$ *dla pewnego* n.

Dowód. zob. [Hum75, Thm in §8.6]

Uwaga. Terminów *liniowa grupa algebraiczna* oraz *grupa afiniczna* będziemy używali zamiennie. Zwykle jednak, mówiąc *liniowa grupa algebraiczna* będziemy mieli na myśli grupę, której zanurzenie w $\mathrm{GL}(n)$ jest dane *explicite*.

Przykład. Grupa $\mathrm{PGL}(n,k)$ jest grupą afiniczną, gdyż

$$\mathrm{PGL}(n,k) \simeq \mathbb{P}^{n^2-1} \setminus \{\det = 0\}.$$

Z twierdzenia 3.1.7 wynika zatem, że $\mathrm{PGL}(n,k)$ jest izomorficzna z pewną domkniętą podgrupą grupy macierzy. *A priori* nie jest jednak oczywiste jak takie zanurzenie wskazać.

Mamy następujące elementarne własności

Propozycja 3.1.8. *Niech G będzie grupą algebraiczną. Wówczas:*

(*i*) *Istnieje jedyna składowa nierozkładalna G zawierająca element neutralny; będziemy ją oznaczać przez G°.*

(*ii*) *G° jest domkniętą, normalną podgrupą skończonego indeksu, której warstwy są wszystkimi nierozkładalnymi (spójnymi) składowymi G.*

(*iii*) *Każda domknięta podgrupa skończonego indeksu w G zawiera G°.*

Dowód. zob. [Hum75, §7.3]

Uwaga. Dalej będziemy zajmowali się już tylko **grupami afinicznymi**.

3.2 Grupy rozwiązalne

Definicja 3.2.1. Niech $A, B \subset G$ będą domkniętymi podgrupami. Definiujemy *komutator* $(A, B) \subset G$ jako najmniejszą domkniętą podgrupę zawierającą elementy postaci $xyx^{-1}y^{-1}$, $x \in A$, $y \in B$.

Definicja 3.2.2. Niech G będzie grupą afiniczną. Indukcyjnie definiujemy ciąg podgrup $\mathcal{D}^0G := G$, oraz $\mathcal{D}^{i+1}G := (\mathcal{D}^iG, \mathcal{D}^iG)$. Mówimy, że grupa G jest rozwiązalna jeżeli dla pewnego i jest $\mathcal{D}^iG = \{e\}$.

Mamy następujący wynik analogiczny do teorii grup skończonych

Propozycja 3.2.3. *Podgrupy i homomorficzne obrazy grup rozwiązalnych są rozwiązalne.*

Dowód. zob. [Hum75, §17.3]

Wniosek 3.2.4. *Ponieważ $T(n,k)$ jest grupą rozwiązalną,* ([2]) *to każda domknięta podgrupa $T(n,k)$ jest również podgrupą rozwiązalną.*

[2] To sprawdza się *explicite*.

Mamy również twierdzenie odwrotne, które jest konsekwencją następującego ważnego faktu:

Twierdzenie 3.2.5 (Lie-Kolchin)**.** *Niech G będzie spójną, rozwiązalną podgrupą $\mathrm{GL}(V)$, przy pewnym $V \neq 0$ skończonego wymiaru. Wówczas elementy G mają wspólny wektor własny.*

Dowód. zob. [Hum75, §17.6]

Prostą wnioskiem z twierdzenia Lie'go-Kolchina jest następujący fakt:

Wniosek 3.2.6. *Każdą spójną grupę rozwiązalną można zanurzyć w grupę macierzy trójkątnych $T(n,k)$.*

Własność ta ma bardzo ważne konsekwencje. Rozważmy następujący ciąg dokładny grup (por. przykład 3.1.4):

$$1 \longrightarrow U(n,k) \longrightarrow T(n,k) \xrightarrow{\pi} D(n,k) \longrightarrow 1. \tag{3.1}$$

Niech G będzie spójną grupą rozwiązalną widzianą jako podgrupa $T(n,k)$. Wówczas ciąg (3.1) zacieśnia się do

$$1 \longrightarrow G \cap U(n,k) \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 1, \tag{3.2}$$

gdzie $T = \pi(G)$ jest domkniętą i spójną podgrupą $D(n,k)$ a więc torusem. Mamy bowiem następujący fakt (por. [Hum75, §16.2, Thm p. 104]):

Twierdzenie 3.2.7. *Każda domknięta, spójna podgrupa $D(n,k)$ jest izomorficzna z pewnym torusem.*

Uwaga 3.2.8. Jeżeli pewien element $x \in G$ należy do zbioru $G_u := G \cap U(n,k)$, to nazywamy go *elementem unipotentnym*. Ogólniej, jeżeli $G \subset \mathrm{GL}(n,k)$ i macierz reprezentując $x \in G$ jest unipotentna to nazywamy *elementem unipotentnym*. Okazuje się, że definicja ta nie zależy od zanurzenia w $\mathrm{GL}(n,k)$. Podobnie, x nazywamy *elementem półprostym*, jeżeli dla pewnego (każdego) zanurzenia $\mathrm{GL}(n,k)$ reprezentująca go macierz jest półprosta.

Wróćmy do ciągu dokładnego (3.2). Okazuje się, że grupa $G_u = G \cap U(n,k)$ jest zawsze spójna, oraz posiada ciąg normalny, indukowany przez analogiczny ciąg w grupie $U(n,k)$, którego kolejne wyrazy są kowymiaru 1 w poprzednich (por. [Hum75, §19.1]). Okazuje się również, że ciąg dokładny (3.2) rozszczepia się, a więc G zawiera jako domkniętą podgrupę pewien torus izomorficzny z T. Całą dyskusję podsumowuje następujące twierdzenie (por. [Hum75, §19.3]):

Twierdzenie 3.2.9. *Niech G będzie spójną, rozwiązalną grupą afiniczną.*

(*i*) *Zbiór elementów unipotentnych G_u jest domkniętą spójną i normalną podgrupą G zawierającą (G, G); ponadto G_u posiada ciąg domkniętych spójnych podgrup, każda normalna w G i kowymiaru 1 w poprzedniej.*

(*ii*) *Wszystkie torusy w G maksymalnego wymiaru są sprzężone. Jeżeli T jest jednym z nich, to $G = T \ltimes G_u$.*

Wniosek 3.2.10. *Każda spójna grupa rozwiązalna dodatniego wymiaru zawiera jednowymiarową podgrupę.*

3.3 Podgrupy jednowymiarowe

Widzieliśmy przed chwilą (por. wniosek 3.2.10), że każda grupa rozwiązalna posiada domkniętą jednowymiarową podgrupę. Okazuje się, że można udowodnić mocniejszy fakt:

Twierdzenie 3.3.1. *Niech G będzie liniową grupą algebraiczną dodatniego wymiaru. Wówczas G zawiera podgrupę izomorficzną z $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$.*

Szkic dowodu. Dowód mógłby składać się z dwóch etapów. Po pierwsze, należałoby pokazać, że każda grupa afiniczna dodatniego wymiaru, nie koniecznie rozwiązalna, posiada jednowymiarową podgrupę domkniętą. W świetle wniosku 3.2.10 wystarczyłoby zatem sprawdzić, że każda grupa afiniczna dodatniego wymiaru zawiera nietrywialną podgrupę rozwiązalną. Następnie możemy wykorzystać następujące twierdzenie strukturalne:

Twierdzenie 3.3.2. *Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym dowolnej charakterystyki. Z dokładnością do izomorfizmu istnieją dokładnie dwie jednowymiarowe grupy afiniczne nad k, mianowicie $\mathbb{G}_a$ oraz $\mathbb{G}_m$.*

Dowód. zob. [Hum75, Thm in §20.5]

Kwestię istnienia nietrywialnej (domkniętej) podgrupy rozwiązalnej rozstrzyga następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.3.3. *Przypuśćmy, że spójna grupa afiniczna G nie zawiera żadnej podgrupy rozwiązalnej. Wówczas G jest trywialna.*

Szkic dowodu. Możemy założyć, że $G \subset \mathrm{GL}(n,k)$. I niech V oznacza skojarzoną, n-wymiarową przestrzeń reprezentacji. Działanie G na V indukuje działanie na tzw. rozmaitości flagowej $\mathcal{F}$, tj. rozmaitości parametryzującej wszystkie możliwe wstępujące ciągi przestrzeni wektorowych:

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = V.$$

Sprawdza się, że $\mathcal{F}$ jest rozmaitością rzutową. Każde działanie ma domkniętą orbitę (por. [Hum75, §8.3]), ozn. $\mathrm{Orb}(x)$, $x \in \mathcal{F}$. Ponadto, stabilizator $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}$ jest domkniętą podgrupą normalną ponieważ zbiór macierzy, które zachowują pewną flagę można sprowadzić do postaci trójkątnej. Z założenia mamy zatem $\mathrm{Stab}(x) = \{1\}$. To pokazuje, że G jest izomorficzna z domkniętą (a więc rzutową) podrozmaitością $\mathcal{F}$. Ponieważ G jest afiniczna, to musi być $\dim G = 0$.

Powyższe twierdzenie jest również konsekwencją następującego, nieco ogólniejszego faktu:

Twierdzenie 3.3.4. *Niech B będzie maksymalną domkniętą, spójną i rozwiązalną podgrupą G. Wówczas G/B jest rozmaitością rzutową.*

Dowód. zob. [Hum75, Thm in §21.3]

Uwaga. Każdą podgrupę $B \subset G$ o własnościach jak w założeniach powyższego twierdzenia nazywamy podgrupą *Borela* grupy G (por. [Hum75, §21.3]).

3.4 Twierdzenie Rosenlichta

Definicja 3.4.1 (działanie grupy)**.** Powiemy, że grupa (algebraiczna) G działa na rozmaitości V jeśli istnieje morfizm $\varphi : G \times V \longrightarrow V$ spełniający dla wszystkich $v \in V$, oraz $g, h \in G$ warunki: (i) $\varphi(g, \varphi(h, v)) = \varphi(g * h, v)$, (ii) $\varphi(1_G, v) = v$. Dla uproszczenia będziemy stosowali skrót $gv := \varphi(g, v)$.

Celem tego podrozdziału jest udowodnienie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.4.2. *Załóżmy, że grupa G ($\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$) działa nietrywialnie na rozmaitości X. Wówczas X jest prostokreślna. Co więcej, jeżeli X jest rozmaitością nad k (dowolne ciało) oraz działanie jest dane przez k-morfizm, to X jest k-prostokreślna.*

Uwaga. Tak jak wspomnieliśmy we wstępie, w przypadku twierdzenia Rosenlichta nie będziemy wymagali, aby ciało bazowe było algebraicznie domknięte. Podkreślmy więc, że od tego momentu i aż do końca rozdziału pisząc *„rozmaitość nad ciałem k”* mamy w na myśli *„zredukowany i nierozkładalny schemat skończonego typu nad* Spec k*”*.

W połączeniu z twierdzeniem 3.3.1 otrzymujemy następujący wniosek, jednak tylko dla rozmaitości nad ciałem algebraicznie domkniętym.

Wniosek 3.4.3. *Załóżmy, że ciało bazowe jest algebraicznie domknięte. Jeżeli grupa afiniczna G działa wiernie na rozmaitości X, to X jest prostokreślna.*

Uwaga 3.4.4. Jeżeli pracujemy nad ciałem bazowym k, które nie jest algebraicznie domknięte, to definicja 3.4.1 jest na ogół mało praktyczna, gdyż interesująca nas rozmaitość może w ogóle nie mieć punktów k-wymiernych. Warunki (i) i (ii) jednak zapisać za pomocą następujących diagramów

$$\begin{tikzcd} G \times G \times V \arrow[r, "(\mathrm{Id}_G, \varphi)"] \arrow[d, "(*, \mathrm{Id}_V)"'] & G \times V \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times V \arrow[r, "\varphi"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{1_G\} \times V \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\simeq"'] & G \times V \arrow[d, "\varphi"] \\ V \arrow[r, equal] & V \end{tikzcd}$$

Z takiego kategoryjnego ujęcia będziemy korzystali wielokrotnie, np. w dowodzie twierdzenia 3.4.2 Rosenlichta, oraz twierdzenia 4.4.1 o istnieniu składowych prostokreślnych włókna w nieskończoności.

3.4.1 Rozszerzenia skończenie generowane

W dowodzie twierdzenia Rosenlichta kluczową rolę odgrywa następujący klasyczny wynik Lürotha:

Twierdzenie 3.4.5 (Lüroth)**.** *Niech K/k będzie rozszerzeniem czysto transcendentnym stopnia 1. Wówczas każde pośrednie rozszerzenie $k \subsetneq k' \subset K$ jest również rozszerzeniem czysto transcendentnym, koniecznie stopnia 1.*

Dowód. zob. [vdW49, §63]

Wykorzystamy również następującą użyteczną własność:

Propozycja 3.4.6. *Niech $k \subset K$ będzie skończenie generowanym rozszerzeniem ciał. Wówczas każde pośrednie rozszerzenie $k \subset k' \subset K$ jest również skończenie generowane.*

Dowód. Zacznijmy od następującego lematu:

Lemat. *Niech $k \subset k'$ będzie rozszerzeniem ciał i niech x będzie elementem pewnego większego ciała. Wówczas, jeśli $k'(x)$ jest skończenie generowanym rozszerzeniem k, to również k' jest skończenie generowanym rozszerzeniem k.*

Dowód lematu. Generatory $k'(x)$ nad k są postaci $f_i(x)$, dla $i = 1, \ldots, s$, przy czym $f_i \in k'(T)$ są pewnymi funkcjami wymiernymi jednej zmiennej o współczynnikach w ciele k'. Oznaczmy przez L najmniejsze ciało zawierające k oraz wszystkie współczynniki funkcji wymiernych $f_1, \ldots, f_s$. Wtedy L jest skończenie generowane nad k, oraz zachodzą inkluzje

$$k \subset L \subset k' \subset k'(x) = L(x).$$

Wystarczy zatem uzasadnić, że k' jest skończenie generowane nad L. Jeżeli element x jest algebraiczny nad L, to rozszerzenie $L(x)/L$ jest skończone, a więc każde pośrednie rozszerzenie jest skończone i tym bardziej skończenie generowane. Załóżmy zatem, że element x jest algebraicznie niezależny nad L. Wówczas, możemy skorzystać z twierdzenia Lürotha (zob. twierdzenie 3.4.5), lub po prostu zauważyć, że w tym przypadku inkluzja $L \subset k'$ oraz równość $k'(x) = L(x)$ implikują równość ciał $L = k'$. □

Możemy teraz przejść do dowodu propozycji. Niech $x_1, \ldots, x_n \in K$ będą generatorami K nad k. Rozważmy ciąg rozszerzeń

$$k \subset k' \subset k'(x_1) \subset k'(x_1, x_2) \subset \ldots \subset k'(x_1, \ldots, x_n) = K.$$

Ponieważ ostatnie ciało jest skończenie generowanym rozszerzeniem k, to stosując lemat do kolejnych elementów w powyższym ciągu licząc „od końca" otrzymamy ostatecznie, że k' jest skończenie generowanym rozszerzeniem k.

Wniosek 3.4.7. *Niech K/k będzie dowolnym skończenie generowanym rozszerzeniem ciał i niech $G \subset \mathrm{Aut}_k K$ będzie dowolną podgrupą (nawet zbiorem!). Wówczas ciało niezmienników $k \subset K^G \subset K$ jest skończenie generowanym rozszerzeniem k.*

Chcielibyśmy podkreślić w tym miejscy, że podobna własność nie zachodzi w przypadku skończenie generowanych k-algebr. Najlepszy wynik dotyczący skończoności pierścienia niezmienników względem działania pewnej grupy to następujące twierdzenie Hilberta (por. [vdE00, Thm 9.2.1]):

Twierdzenie (Hilbert)**.** *Załóżmy, że k jest algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki zero. Niech G będzie reduktywną grupą afiniczną* ([3]) *działającą na rozmaitości afinicznej X. Wówczas pierścień niezmienników $A(X)^G$ jest skończenie generowaną k-algebrą.*

Jednocześnie, można wskazać przykłady działania grup nie reduktywnych (np. grupy $\mathbb{G}_a$) prowadzących do pierścieni niezmienników, które nie są skończenie generowane nad ciałem bazowym. W tym sensie można powiedzieć, że twierdzenie Hilberta jest optymalne. Ponieważ klasa grup reduktywnych obejmuje wszystkie grupy skończone (przynajmniej w charakterystyce zero), to twierdzenie Hilberta uogólnia wcześniejszy wynik Emmy Noether, mówiący o skończoności pierścienia niezmienników względem działania grupy skończonej. Inny szczególny przypadek twierdzenia Hilberta, mianowicie $G = \mathrm{SL}_2$, udowodnił w 1868 roku Paul Gordan (zob. [Gor68]).

3.4.2 Rozszerzenia regularne

Omówimy teraz dwa typy rozszerzeń ciał, mianowicie *rozszerzenia rozdzielczo generowane* i *rozszerzenia regularne*, których własności okażą się przydatne w dowodzie twierdzenia Rosenlichta.

Definicja 3.4.8 (rozszerzenie rozdzielczo generowane)**.** Mówimy, że rozszerzenie ciał K/k jest *rozdzielczo generowane* jeżeli istnieje taka baza przestępna $x_1, \ldots, x_s$ nad k, że (algebraiczne) rozszerzenie $K/k(\{x_i\})$ jest rozdzielcze.

Propozycja 3.4.9. *Niech K/k będzie rozszerzeniem skończenie generowanym i niech $G \subset \mathrm{Aut}_k(K)$ będzie dowolną grupą automorfizmów. Wówczas rozszerzenie $K^G \subset K$ jest rozdzielczo generowane.*

Dowód. zob. [Ros55, Lemma in §3]

Z naszego punktu widzenia, kluczową własnością rozszerzeń *rozdzielczo generowanych* jest to, że zachowują regularność schematu przy zmianie bazy.

Twierdzenie 3.4.10. *Niech K/k będzie rozszerzeniem rozdzielczo generowanym i niech X będzie schematem regularnym skończonego typu nad $\operatorname{Spec} k$. Wówczas schemat $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$ jest również regularny.*

[3] Mówimy, że grupa G jest *reduktywna* jeżeli każda skończenie wymiarowa liniowa reprezentacja grupy G jest *całkowicie redukowalna*, tj. skojarzony z reprezentacją $k[G]$-moduł jest *półprosty*.

Dowód. zob. [Liu06, Ch. 4, Thm 3.36 & Prop. 3.38]

Drugim ważnym typem rozszerzeń, które pojawią się w dowodzie twierdzenia Rosenlichta są *rozszerzenia regularne.*

Definicja 3.4.11 (rozszerzenia regularne)**.** Mówimy, że rozszerzenie ciał K/k jest regularne jeśli K/k jest rozdzielczo generowane i ciało k jest algebraicznie domknięte w K.

Propozycja 3.4.12. *Załóżmy, że rozszerzenie K/k jest skończenie generowane. Wówczas, następujące warunki są równoważne:*

(i) K/k jest regularne,

(ii) K oraz $\overline{k}$ są liniowo rozłączne nad k,

(iii) k-algebra $K \otimes_k \overline{k}$ jest pierścieniem całkowitym.

Dowód. zob. [Sal07, Thm 8.1.6, Thm 8.3.2]

Twierdzenie 3.4.13. *Niech X będzie geometrycznie zredukowaną i nierozkładalną krzywą rzutową nad ciałem k. Wówczas, jeśli $p_a(X) \leqslant 0$ to:*

(i) Krzywa X jest k-izomorficzna z gładką stożkową.

(ii) Mamy równoważność: $X \simeq \mathbb{P}^1 \iff X$ zawiera punkt k-wymierny.

Dowód. zob. [Liu06, Ch. 7, Prop. 4.1]

3.4.3 Dowód twierdzenia Rosenlichta

Dla prostoty notacji przyjmijmy, że $G \simeq \mathbb{G}_a$. W przypadku $G \simeq \mathbb{G}_m$ dowód przebiega praktycznie tak samo. Niech X będzie (nierozkładalną) rozmaitością nad ciałem k, dowolnej charakterystyki i niekoniecznie algebraicznie domkniętym. Niech K oznacza ciało funkcji wymiernych na X. Ograniczając się do otwartych podzbiorów afinicznych z łatwością uzasadnimy, że definiujący działanie grupy morfizm $G \times X \longrightarrow X$ (por. uwaga 3.4.4) indukuje inkluzję ciał

$$\sigma : K \ni f \longmapsto \sigma(f) = \sigma(f,t) \in K(t), \tag{3.3}$$

gdzie t jest dowolnym elementem algebraicznie niezależnym nad K oraz zachodzą równości (i) $\sigma(\sigma(f,t),u) = \sigma(f,t+u)$, (ii) $\sigma(f,0) = f$.

Przyjmując $\sigma(t) := t$ możemy rozszerzyć σ do automorfizmu ciała $K(t)$. Istotnie, z własności (i) i (ii) wynika, że automorfizmem odwrotnym jest homomorfizm określony przez warunki $f \mapsto \sigma(f, -t), t \mapsto t$. Możemy teraz zdefiniować ciało $K^G := K(t)^\sigma \cap K$. Ponieważ zachodzą inkluzje $k \subset K^G \subset K$ to z propozycji 3.4.6 wynika, że K^G jest skończenie generowanym rozszerzeniem ciała k. Dowód będzie zakończony gdy pokażemy, że $K^G \subset K$ jest czysto transcendentnym rozszerzeniem stopnia 1.

Lemat. *Podciało K^G jest algebraicznie domknięte w K.*

Dowód lematu. Jeśli dla pewnych $a_i \in K^G$, nie wszystkich równych zero, oraz dla $f \in K$ zachodzi relacja $a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \ldots + a_{n-1} f + a_0 = 0$, to działając na obie strony równości automorfizmem $\sigma : K(t) \longrightarrow K(t)$ otrzymujemy

$$a_0 \sigma(f)^n + a_1 \sigma(f)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\sigma(f) + a_0 = 0.$$

Ponieważ ciało K jest algebraicznie domknięte w $K(t)$, to $\sigma(f) \in K$, czyli funkcja wymierna $\sigma(f) = \sigma(f, t)$ nie zależy od zmiennej t. Z własności (ii) automorfizmu σ mamy $\sigma(f, t) = \sigma(f, 0) = f$, a więc istotnie $f \in K^G$. □

Ponieważ K jest skończenie generowanym rozszerzeniem ciała k, to tym bardziej jest skończenie generowanym rozszerzeniem ciała K^G. Co więcej, skoro każde ciało algebraiczne ma normalny model rzutowy, to możemy wybrać taki zbiór generatorów $y_1, \ldots, y_s \in K$, że domknięcie rzutowe $Y \subset \mathbb{P}^s_{K^G}$ rozmaitości afinicznej $V := \operatorname{Spec} B \subset \mathbb{A}^s_{K^G}$, gdzie

$$B := K^G[y_1, \ldots, y_s] \simeq K^G[X_1, \ldots, X_s] \big/ \mathfrak{p},$$

jest normalne (por. [Liu06, Ch. 7, Prop. 3.13]). Chcemy najpierw dokładniej przyjrzeć się rozmaitości $V_K := V \times_{\operatorname{Spec} K^G} \operatorname{Spec} K \simeq K[\underline{X}]/\mathfrak{p}^e$. W tym celu zdefiniujmy homomorfizm

$$\Theta : K[\underline{X}] = K[X_1, \ldots, X_s] \longrightarrow K(u), \quad X_i \longmapsto \sigma(y_i)|_{t=u} = \sigma(y_i, u), \qquad (3.4)$$

gdzie u jest dowolnym elementem algebraicznie niezależnym nad $K(t)$ i oznaczmy $\mathfrak{P} := \ker \Theta$. Jeżeli $F \in K^G[\underline{X}]$, to mamy ciąg równoważności

$$F(y_1, \ldots, y_s) = 0 \iff F(\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_s)) = 0 \iff F \in \ker \Theta,$$

a zatem $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K^G[\underline{X}]$. Ponieważ $K \subset (K[\underline{X}]/\mathfrak{P})_{(0)} \subset K(u)$, to z twierdzenia Lürotha (zob. twierdzenie 3.4.5) wynika, że rozmaitość afiniczna $\operatorname{Spec} K[\underline{X}]/\mathfrak{P}$

jest biwymierna z prostą rzutową $\mathbb{P}^1_K$. Dodatkowo, homomorfizm Θ indukuje skończone rozszerzenie ciał

$$L := \left(K[\underline{X}] \big/ \mathfrak{P}\right)_{(0)} \longrightarrow K(u), \tag{3.5}$$

które odegra bardzo ważną rolę w dalszej części dowodu.

Załóżmy na chwilę, że udowodniliśmy równość $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}^e$. Mamy wówczas naturalny K^G-izomorfizm $\operatorname{Spec} K[\underline{X}]/\mathfrak{P} \simeq V_K$, a więc V_K jest krzywą wymierną. Jeżeli przez $Y_K \subset \mathbb{P}^s_K$ oznaczymy domknięcie rzutowe $V_K \subset \mathbb{A}^s_K$ to oczywiście $Y_K = Y \times_{\operatorname{Spec} K^G} \operatorname{Spec} K$. Ponieważ wymiar i genus arytmetyczny nie zmieniają się przy rozszerzeniu ciała bazowego ([4]) to widzimy, że $\dim Y = 1$ oraz $p_a(Y) = p_a(Y_K)$. Zatrzymajmy się na moment i wróćmy do ciała funkcji wymiernych na (normalnej) krzywej rzutowej Y. Przypomnijmy, że każdemu K^G-automorfizmowi ciała K odpowiada pewien automorfizm krzywej Y. Chcielibyśmy zdefiniować rodzinę automorfizmów $\varphi_\lambda : Y \longrightarrow Y$, dla $\lambda \in K$, przy użyciu automorfizmów ciała K postaci:

$$\varphi^*_\lambda : K \simeq \left(K^G[X_1, \ldots, X_s] \big/ \mathfrak{p}\right)_{(0)} \longrightarrow K, \quad X_i \longmapsto \sigma(y_i)|_{t=\lambda}.$$

Wystarczy zapewnić, aby funkcje wymierne $\sigma(y_i) \in K(t)$, $i = 1, \ldots, s$, nie miały biegunów w punkcie $t = \lambda$, a więc φ_λ uda się zdefiniować przynajmniej dla prawie wszystkich $\lambda \in K$. Ponieważ K jest ciałem funkcji wymiernych rozmaitości dodatniego wymiaru, to $\#K = \infty$ i dzięki temu stwierdzenie „dla prawie wszystkich λ" oznacza w dalszym ciągu nieskończenie wiele wartości. Skoro tak, to ciało K^G można zidentyfikować wewnątrz K jako podciało elementów stałych ze względu na działanie rodziny automorfizmów $\varphi^*_\lambda \in \operatorname{Aut}(K)$.

Z propozycji 3.4.9 wynika, że rozszerzenie $K^G \subset K$ jest rozdzielczo generowane, a więc z twierdzenia 3.4.10 krzywa Y_K jest normalna. Ponieważ wiedzieliśmy już wcześniej, że jest ona biwymierna z prostą rzutową, to możemy teraz stwierdzić izomorfizm $Y_K \simeq \mathbb{P}^1_K$. W szczególności, mamy $0 = p_a(Y_K) = p_a(Y)$. Dodatkowo, homomorfizm ciał (3.5) indukuje K-morfizm rozmaitości

$$\varphi : \mathbb{G}_a/K \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1_K \longrightarrow Y_K.$$

Naszym celem jest pokazać, że $Y \simeq \mathbb{P}^1_{K^G}$. Ponieważ rozszerzenie $K^G \subset K$ jest rozdzielczo generowane i z lematu wiemy, że K^G jest algebraicznie domknięte w K, to K/K^G jest rozszerzeniem regularnym. Z propozycji 3.4.12 wynika, że

[4] Zauważmy, że wielomian Hilberta jest taki sam.

krzywa Y jest geometrycznie zredukowana i nierozkładalna. ([5]) Moglibyśmy zatem zastosować twierdzenie 3.4.13 o ile pokażemy, że krzywa Y zawiera punkt K^G-wymierny. Dokładniej, udowodnimy, że punkt $\varphi(\infty)$ jest K^G-wymierny.

Zauważmy, że każdy automorfizm $\varphi_\lambda : Y \longrightarrow Y$ podnosi się do automorfizmu $\widetilde{\varphi_\lambda} : Y_K \longrightarrow Y_K$. Ponieważ krzywa $Y_K \simeq \mathbb{P}^1_K$ jest geometrycznie zredukowana, to w dalszej części dowodu możemy bezpiecznie rozszerzyć ciało bazowe do $\overline{K}$ co pozwoli nam traktować morfizmy jak odwzorowania wielomianowe na punktach domkniętych. Ponieważ morfizm φ jest zdefiniowany nad K, to oczywiście $\varphi(\infty) \in Y_{\overline{K}}$ jest punktem K-wymiernym. Gdybyśmy pokazali, że $\varphi(\infty)$ jest punktem stałym pewnego nietrywialnego K^G-automorfizmów φ_λ, to wiedzielibyśmy również, że $\varphi(\infty)$ jest algebraiczny nad K^G a więc wobec lematu, $\varphi(\infty)$ musiałby być K^G-wymierny. Z definicji automorfizmu φ_λ oraz morfizmu φ wynika, że dla dowolnego $x \in \mathbb{G}_a(\overline{K})$ mamy równość

$$\varphi_\lambda(\varphi(x)) = \varphi(x + \lambda). \tag{3.6}$$

Ponieważ każdy automorfizm prostej rzutowej musi mieć punkt stały, to rzeczywiście istnieje taki element $x \in \mathbb{G}_a(\overline{K}) \cup \{\infty\}$, że $\varphi_\lambda(\varphi(x)) \equiv \varphi(x)$. Gdyby jednak $x \in \mathbb{G}_a(\overline{K})$, to z własności (3.6) dla p. wszystkich $\mu \in K$ mielibyśmy

$$\varphi_\lambda(\varphi(x + \mu)) = \varphi(x + \mu + \lambda) = \varphi_\mu(\varphi_\lambda(x)) = \varphi_\mu(\varphi(x)) = \varphi(x + \mu).$$

Ponieważ φ ma skończone włókna to widzimy, że automorfizm φ_λ jest stały na gęstym podzbiorze $Y_{\overline{K}}$ co oznacza, że jest trywialny wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $x = \infty$, a więc rzeczywiście $\varphi(\infty)$ jest punktem stałym automorfizmu φ_λ.

Na koniec sprawdzimy jeszcze, że istotnie $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{P}$. Ponieważ wiemy już, że $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K^G[\underline{X}]$, to wystarczy pokazać, że ideał $\mathfrak{P}$ można wygenerować za pomocą wielomianów o współczynnikach w K^G. Zastosujemy następujące klasyczne twierdzenie:

Twierdzenie 3.4.14 (Weil)**.** *Niech K będzie dowolnym ciałem, a $\mathfrak{A}$ ideałem pierścienia*

$$K[X] = K[X_1, \ldots, X_n].$$

Wówczas, spośród wszystkich podciał $k \subset K$ dla których $\mathfrak{A}$ ma układ generatorów o współczynnikach w k, istnieje najmniejsze ciało k_0 zawarte we wszystkich pozostałych. Ponadto, jeżeli σ jest automorfizmem K, to σ przeprowadza $\mathfrak{A}$ w siebie wtedy i tylko wtedy gdy jest identycznością na k_0.

[5] Moglibyśmy w tym momencie skorzystać również z tego, że $Y_K \simeq \mathbb{P}^1_K$ jest geometrycznie zredukowana i nierozkładalna. To implikuje, że również Y ma te własności.

Dowód. zob. [Wei62, Ch I.7, Lem. 2 on p.19]

Niech k_0 oznacza minimalne ciało definicji ideału $\mathfrak{P}$ wewnątrz ciała $K(t)$, tak jak w powyższym twierdzeniu. Mamy sprawdzić, że $k_0 \subset K^G$. Zauważmy, że ciało K^G można zidentyfikować wewnątrz $K(t)$ jako ciało stałe ze względu na działanie automorfizmu $\sigma : K(t) \longrightarrow K(t)$, zdefiniowanego jak w (3.3), oraz nieskończonej rodziny automorfizmów postaci

$$\tau_\lambda : K(t) \longrightarrow K(t), \quad t \longmapsto \lambda t,$$

gdzie $\lambda \in K$. Gdybyśmy teraz stwierdzili, że każdy z tych automorfizmów stabilizuje ideał $\mathfrak{P}$ to wobec twierdzenia 3.4.14 mielibyśmy $k_0 \subset K^G$. Weźmy zatem dowolny wielomian $F \in \mathfrak{P} = \ker \Theta$, homomorfizm Θ zdefiniowany jak w (3.4), $F = \sum_I a_I X^I$ dla pewnych $a_I \in K$. Dla automorfizmów τ_λ nie ma czego sprawdzać, gdyż $\mathfrak{P}$ jest zdefiniowany nad K i w związku z tym jest zachowywany przez wszystkie K-automorfizmy. Przechodzimy więc do automorfizmu σ. Ponieważ $F \in \ker \Theta$ to $0 = F(\sigma(y_1, u), \ldots, \sigma(y_s, u))$, a więc również

$$\begin{aligned} 0 = (F(\sigma(y_1, u), \ldots, \sigma(y_s, u)))^\sigma = \\ \left(\sum_I a_I \sigma(y, u)^I\right)^\sigma = \sum_I a_I^\sigma \sigma(\sigma(y, u), t)^I = \sum_I a_I^\sigma \sigma(y, u + t)^I = \\ F^\sigma(\sigma(y_1, u + t), \ldots, \sigma(y_s, u + t)). \end{aligned}$$

Ponieważ u jest algebraicznie niezależne nad $K(t)$, oraz współczynniki a_I^σ nie zależą od zmiennej u, to nie zaburzając równości

$$F^\sigma(\sigma(y_1, u + t), \ldots, \sigma(y_s, u + t)) = 0,$$

możemy podstawić $u - t$ w miejsce u. Mamy $F^\sigma(\sigma(y_1, u), \ldots, \sigma(y_s, u)) = 0$ czyli rzeczywiście $F^\sigma \in \ker \Theta = \mathfrak{P}$, co chcieliśmy wykazać.

ROZDZIAŁ 4

Prostokreślność włókien

Celem tego rozdziału jest zaprezentowanie prostej techniki, z której pośrednio skorzystamy w dowodzie głównego wyniku. Pomysł polega na tym, że dla schematów nad spektrum DVR-a prostokreślność przenosi się z włókna generycznego na włókno specjalne (por. twierdzenie 4.2.1). Wykorzystując tę własność udowodnimy ważne dla nas twierdzenie 4.4.1 mówiące o własnościach domknięcia rzutowego rozmaitości afinicznej, które w pewnych sytuacjach pozwala stwierdzić, że dywizor w nieskończoności zawiera składową prostokreślną. Tak będzie na przykład, gdy na rozmaitości afinicznej działa jednowymiarowa grupa $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$ zachowując włókna pewnego rzutowania. Wynik ten odgrywa kluczową rolę w ostatnim, podsumowującym rozdziale – dokładnie w dowodzie lematu 5.4.2.

Jako przykład zastosowania omawianych metod udowodnimy także twierdzenie 4.3.3 mówiące o prostokreślności zbioru punktów stałych wielomianowego automorfizmu $\mathbb{C}^3$ nieskończonego rzędu.

4.1 Preliminaria algebraiczne

Chcieliśmy zacząć od przypomnienia kilku prostych faktów, na które powołamy się w dowodzie głównego rezultatu tego rozdziału, tj. twierdzenia 4.2.1.

Definicja 4.1.1 (włókno nad punktem)**.** Niech $A \subset B$ będzie inkluzją pierścieni, oraz $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ dowolnym ideałem pierwszym. Oznaczmy przez S

zbiór multiplikatywny $A \setminus \mathfrak{p}$. *Włóknem nad* $\mathfrak{p}$ nazywamy pierścień:

$$B \otimes_{A_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) \simeq S^{-1}B \Big/ \mathfrak{p}S^{-1}B.$$

Z własności spektrum wynika, że ideały pierwsze pierścienia $B \otimes_{A_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p})$ odpowiadają dokładnie tym ideałom pierwszym $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$, dla których zachodzi równość $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.

Propozycja 4.1.2. *Niech $A \subset B$ będą pierścieniami noetherowskimi. Weźmy dowolny ideał pierwszy $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$ i zdefiniujmy $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{P}$. Wówczas:*

$$\operatorname{ht} \mathfrak{P} \leqslant \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}B) \tag{4.1}$$

czyli innymi słowy: $\dim B_\mathfrak{P} \leqslant \dim A_\mathfrak{p} + \dim B_\mathfrak{P} \otimes k(\mathfrak{p})$. *Jeśli ponadto dla pary $A \subset B$ zachodzi twierdzenie going-down, a więc np. gdy B jest A-płaski (por. uwaga 1.1.10), to w* (4.1) *zachodzi równość.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $(A, \mathfrak{p})$ i $(B, \mathfrak{P})$ są pierścieniami lokalnymi oraz $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$. Mamy wówczas izomorfizm. $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \simeq B/\mathfrak{p}B$. Chcemy sprawdzić, że zachodzi nierówność $\dim B \leqslant \dim A + \dim(B/\mathfrak{p}B)$. Oznaczmy $s := \dim A$ oraz $r := \dim B/\mathfrak{p}B$ i niech $x_1, \dots, x_s$ oraz $y_1, \dots, y_r$ będą układami parametrów pierścieni A i $B/\mathfrak{p}B$ odpowiednio (por. definicja 1.2.4 i uwaga 1.2.5). Wystarczy teraz zauważyć, że ideał $I := (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$ jest $\mathfrak{P}$-prymarny, a więc z twierdzenia Krulla o wysokości (por. twierdzenie 1.2.2 oraz wniosek 1.2.3) dostajemy $\dim B = \operatorname{ht} \mathfrak{P} \leqslant r + s$.

Przypuśćmy teraz, że dla pary $A \subset B$ zachodzi twierdzenie *going-down*. Przy oznaczeniach jak wyżej, istnieje ciąg ideałów pierwszych

$$\mathfrak{p}B \subset \mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_s = \mathfrak{P},$$

pierścienia B o długości s, ciąg ideałów pierwszych $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ pierścienia A o długości r, który dzięki *going-down* (zauważmy, że $\mathfrak{P}_0 \cap A = \mathfrak{p}$) możemy „podnieść” do ciągu w B otrzymując w sumie ciąg

$$\mathfrak{Q}_0 \subsetneq \mathfrak{Q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{Q}_r = \mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_s = \mathfrak{P}$$

o łącznej długości $r + s$. To pokazuje, że $\operatorname{ht} \mathfrak{P} \geqslant r + s$.

Wniosek 4.1.3. *Jeżeli w propozycji 4.1.2 przyjmiemy dodatkowo, że A jest dziedziną ideałów głównych a B jest pierścieniem całkowitym, to w* (4.1) *mamy równość dla każdego ideału pierwszego $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$.*

Dowód. Z założenia wynika, że B jest A-modułem beztorsyjnym. Ponieważ A jest dziedziną ideałów głównych, to beztorsyjność implikuje płaskość.

Wniosek 4.1.4. *Niech $(R, \mathfrak{m})$ będzie DVR-em a $R \subset B$ całkowitym pierścieniem noetherowskim. Jeżeli $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$ jest minimalnym ideałem pierwszym włókna nad $\mathfrak{m}$, tzn. pierścienia $A \otimes_R R/\mathfrak{m}$, to $\operatorname{ht} \mathfrak{P} = 1$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że skoro $\mathfrak{P}$ jest minimalnym ideałem pierwszym włókna, to $\operatorname{ht}(\mathfrak{P}/\mathfrak{m}B) = 0$. Oczywiście R jest dziedziną ideałów głównych, a więc z wniosku 4.1.3 mamy $\operatorname{ht} \mathfrak{P} = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = 1$.

Zacytujmy jeszcze dobrze znaną własność ideałów pierwszych pierścienia wielomianów o współczynnikach w dziedzinie ideałów głównych.

Obserwacja 4.1.5. *Niech R będzie dziedziną ideałów głównych. Wówczas każdy ideał pierwszy $\mathfrak{p} \neq 0$ pierścienia $R[X]$ ma jedną z następujących postaci:*

(1) $\mathfrak{p} = (x)$, *element $x \in R$ jest nierozkładalny,*

(2) $\mathfrak{p} = (f)$, *wielomian $f \in R[X] \setminus P$ jest nierozkładalny,*

(3) $\mathfrak{p} = (x, f)$, *$x \in R$ oraz $f \in R[X]$ nierozkładalny w pierścieniu $R/(x)[X]$,*

4.2 Przejście do włókna specjalnego

Udowodnimy teraz kilkukrotnie zapowiadane twierdzenie o przechodzeniu z prostokreślnością do włókna specjalnego. Prezentowany dowód jest algebraiczną wersją dowodu z książki Kollára [Kol96].

Twierdzenie 4.2.1. *Niech $(R, \mathfrak{m})$ będzie DVR-em z ciałem ułamków K i ciałem residualnym k. Połóżmy $T := \operatorname{Spec} R$. Niech $X \longrightarrow T$ będzie dominującym morfizmem skończonego typu, przy czym X jest schematem noetherowskim, normalnym i nierozkładalnym. Wówczas, jeśli włókno generyczne X_K jest prostokreślne nad K, to wszystkie składowe włókna specjalnego X_k są prostokreślne nad k.*

Dowód. Niech x będzie punktem generycznym którejś składowej włókna X_k. Morfizm $X \longrightarrow T$ indukuje inkluzję pierścieni lokalnych $R \subset \mathcal{O}_{x,X}$, przy czym $\mathfrak{m}_x \cap R = \mathfrak{m}$. Z założenia ideał $\mathfrak{m}_x$ jest minimalnym ideałem pierwszym pierścienia $\mathcal{O}_{x,X}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_{x,X}$. Z wniosku 4.1.4 mamy $\dim \mathcal{O}_{x,X} = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}_x) = 1$, a ponieważ pierścień $\mathcal{O}_{x,X}$ jest normalny i noetherowski, to oznacza, że jest DVR-em. Oznaczmy przez v skojarzoną waluację ciała $L := K(X)$.

Z prostokreślności X_K wynika, że istnieją takie elementy $y_1, \ldots, y_s \in L$ oraz $t \in L$, algebraicznie niezależny nad $K(y_1, \ldots, y_s)$, że zachodzi równość $K(y_1, \ldots, y_s, t) = L$. Ponieważ zastąpienie y_i przez y_i^{-1} lub t przez t^{-1}, nic nie zmienia, to bez straty ogólności możemy przyjąć, że $y_1, \ldots, y_s, t \in \mathcal{O}_{x,X}$. Niech

$$B := \{y \in K(y_1, \ldots, y_s) : v(y) \geqslant 0\}.$$

Zauważmy, że waluacja v jest nietrywialna na $K(y_1, \ldots, y_s)$ ponieważ jest nietrywialna na podpierścieniu $R \subset K$. Zatem z definicji, B jest pewnym DVR-em ciała $K(y_1, \ldots, y_s)$, a $B[t]$ jest izomorficzny z pierścieniem wielomianów jednej zmiennej. Weźmy teraz ideał pierwszy $\mathfrak{P} := B[t] \cap \mathfrak{m}_x$. Ponieważ mamy

$$0 \neq \mathfrak{m} = R \cap \mathfrak{m}_x \subset B \cap \mathfrak{m}_x = B \cap \mathfrak{P},$$

to ze struktury ideałów pierwszych w pierścieniu wielomianów $B[t]$ (por. obserwacja 4.1.5) wynika, że $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = 2$. Założyliśmy również, że morfizm $X \longrightarrow T$ jest skończonego typu, a więc pierścień $\mathcal{O}_{x,X}$ jest lokalizacją skończenie generowanej R-algebry, czyli tym bardziej jest lokalizacją skończenie generowanej $B[t]_{\mathfrak{P}}$-algebry. Podkreślmy jeszcze, że pierścień $B[t]$ jest regularny i uniwersalnie łańcuchowy (por. uwaga 1.4.8 oraz twierdzenie 1.2.15). Para $B[t]_{\mathfrak{P}} \subset \mathcal{O}_{x,X}$ spełnia zatem wszystkie założenia lematu Abhyankara (zob. twierdzenie 2.3.4), z którego wynika, że włókno specjalne $\mathcal{O}_{x,X}/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{x,X}$ jest prostokreślne.

Jako wniosek możemy jeszcze otrzymać następujący fakt:

Wniosek 4.2.2. *Przy oznaczeniach jak w twierdzeniu 4.2.1 załóżmy, że włókno generyczne jest prostokreślne. Wówczas każda zredukowana składowa włókna specjalnego jest geometrycznie prostokreślna.*

Dowód. zob. [Kol96, Ch IV, Thm 1.6]

4.3 Prostokreślność zbioru punktów stałych

W tej części rozdziału zakładamy, że $k = \mathbb{C}$. Część wyników można wprawdzie uogólnić na dowolne alg. domknięte ciało k, ale nie przejmujemy się tym za bardzo, gdyż naszym głównym celem jest jedynie zilustrowanie metody. Oprócz twierdzenia o przechodzeniu do włókna specjalnego (zob. twierdzenie 4.2.1) wykorzystamy również następujący wynik Jelonka (zob. [Jel95] lub [Jel96]):

Twierdzenie 4.3.1 (Jelonek)**.** *Niech X będzie gładką powierzchnią afiniczną nad algebraicznie domkniętym ciałem K charakterystyki zero. Jeżeli X ma nieskończoną grupę automorfizmów, to X jest prostokreślna.*

Oryginalnie u Jelonka teza brzmi: *„X jest uniprostokreślna”*, jednak w wymiarze 2 i dla char $k = 0$ pojęcia te pokrywają się (zob. [Kol96, Ch. IV.1]). Dodatkowo, twierdzenie 4.3.1 pozostaje prawdziwe w wyższych wymiarach przy założeniu, że X ma model minimalny (zob. [Jel96, Thm 4.8 & Cor. 4.9]). To pokazuje, że również twierdzenie 4.3.2, którym zajmiemy się za moment, można udowodnić w szerszej klasie przypadków.

Twierdzenie 4.3.2. *Niech $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C}^3)$ będzie wielomianowym automorfizmem nieskończonego rzędu. Załóżmy, że $h \in \mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ jest f-niezmienniczym wielomianem bezkwadratowym, tj. $h(f) = h$. Wówczas hiperpowierzchnia $H = \{h = 0\}$ ma składowe prostokreślne.*

Dowód. Oznaczmy $X := \mathbb{A}^3$ oraz $T := \mathbb{A}^1$ i rozważmy rzutowanie

$$\pi : X \ni x \longmapsto h(x) \in T.$$

Niech $K := K(T)$. Włókno generyczne $Y = X \times_T \operatorname{Spec} K$ jest gładkim schematem afinicznym wymiaru 2 nad $\operatorname{Spec} K$. Dzięki założeniu $h \circ f = h$ widzimy, że f indukuje na Y automorfizm nieskończonego rzędu. ([1]) Z twierdzenia Jelonka (por. twierdzenie 4.3.1) wynika, że powierzchnia Y jest geometrycznie prostokreślna. Ponieważ (taktycznie) założyliśmy, że h jest wielomianem bezkwadratowym to włókno specjalne $\pi^{-1}(0)$ ma składowe zredukowane. Z wniosku 4.2.2 wynika teraz, że wszystkie składowe zbioru $\{h = 0\}$ są geometrycznie prostokreślne, a więc prostokreślne bo pracujemy nad ciałem algebraicznie domkniętym.

Twierdzenie 4.3.3. *Niech $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C}^3)$ będzie automorfizmem nieskończonego rzędu o jakobianie równym 1. Wówczas, jeśli zbiór punktów stałych* $\operatorname{Fix}(f)$ *zawiera hiperpowierzchnię, to jest ona prostokreślna.*

Dowód. Niech $H = \{h = 0\} \subset \operatorname{Fix}(f)$, przy czym h jest wielomianem bezkwadratowym. Dzięki twierdzeniu 4.3.2 wystarczy pokazać, że wielomian h jest f-niezmienniczy. Ponieważ f jest automorfizmem oraz $f|_H \equiv 1_H$, to dla pewnego $c \in k$ mamy $h(f) = ch$. Wystarczy zatem udowodnić, że $c = 1$.

Różniczkując obustronnie dostajemy $(\nabla h)(f) \circ \operatorname{Jac} f = c\nabla h$, czyli dla dowolnego $x \in H$, wtedy $x = f(x)$, mamy równość $\nabla h \circ \operatorname{Jac} f = c\nabla h$. Oznacza

[1] Najłatwiej zobaczyć to z punktu widzenia skojarzonego automorfizmu pierścienia współrzędnych $f^* : \mathbb{C}[\underline{X}] \longrightarrow \mathbb{C}[\underline{X}]$. Przejście do włókna generycznego odpowiada lokalizacji względem zbioru multiplikatywnego $S := \mathbb{C}[h] \setminus \{0\}$. Zatem jeżeli $(S^{-1}f^*)^n \equiv \mathrm{Id}$, to również $S^{-1}(f^*)^n \equiv \mathrm{Id}$ i wreszcie samo $(f^*)^n \equiv \mathrm{Id}$ jest identycznością, wbrew założeniu.

to, że c jest wartością własną operatora $\operatorname{Jac} f$ na zbiorze H. Skoro H zawiera się w zbiorze rozwiązań układu równań

$$f_i - x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

i $\operatorname{codim} H = 1$, to z twierdzenia o rzędzie wynika, że macierz $\operatorname{Jac} f - \mathrm{Id}$ jest rzędu co najwyżej 1, a co za tym idzie jedynka jest co najmniej $n-1$ krotną wartością własną $\operatorname{Jac} f$. Zauważmy teraz, że musi być $c = 1$. Rozumując nie wprost przypuśćmy, że $c \neq 1$. Znamy w takim razie cały komplet wartości własnych $\operatorname{Jac} f$ i możemy wyliczyć

$$c \cdot 1^{n-1} = \det \operatorname{Jac} f = 1,$$

a więc wbrew założeniu $c = 1$.

4.4 Prostokreślność w nieskończoności

Udowodnimy teraz twierdzenie, które w pewnych sytuacjach pozwala wnioskować o prostokreślności składowych dywizora w nieskończoności.

Twierdzenie 4.4.1. *Niech $G \subset \operatorname{Aff}(n)$ będzie domkniętą podgrupą izomorficzną z $\mathbb{G}_m$ lub $\mathbb{G}_a$. Niech $V \subset \mathbb{A}^n \simeq \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$ będzie G-niezmienniczą rozmaitością afiniczną, która nie zawiera się w żadnej właściwej podprzestrzeni afinicznej, i której domknięcie rzutowe*

$$X := \overline{V} \subset \mathbb{P}^n \simeq \operatorname{Proj} k[x_1, \dots, x_n, y].$$

jest normalne. Załóżmy dodatkowo, że istnieje taka G-niezmiennicza forma liniowa $l(x) \in k[x_1, \dots, x_n]$, która znika na dywizorze w nieskończoności, tzn. $X \setminus V \subset \{l = 0\}$. Wówczas $X \setminus V$ ma przynajmniej jedną składową prostokreślną.

Uwaga. Twierdzenie to można również udowodnić bez założenia $G \subset \operatorname{Aff}(n)$, czy nawet $G \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{A}^n)$. Wystarczy tylko wiedzieć, że grupa G działa nietrywialnie na rozmaitości V i istnieje takie (liniowe) rzutowanie $\pi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^1$, że zawężenie $\pi|_V : V \longrightarrow \mathbb{A}^1$ jest G-niezmiennicze.

Dowód. Możemy przyjąć, że $l = x_1$. Rozważmy rzutowanie

$$\pi : \mathbb{A}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \in \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^n \setminus \{\infty\}.$$

Ponieważ z założenia V nie zawiera się w żadnym z włókien π, to zawężenie $\pi|_V : V \longrightarrow \mathbb{A}^1$ jest morfizmem dominującym, a zatem odpowiadający mu homomorfizm pierścieni

$$\pi^* : k[x_1] \longrightarrow k[V] \simeq k[x_1, \ldots, x_n] \big/ I \tag{4.2}$$

jest iniektywny. Mamy więc $I \cap k[x_1] = (0)$, gdzie I oznacza ideał wielomianów znikających na V. Dzięki założeniu o normalności X możemy skorzystać z twierdzenia 2.4.4 o dziedzinie odwzorowania wymiernego. Istnieje zatem taki otwarty podzbiór $U := \operatorname{dom}(\pi|_V) \subset X$, że $\operatorname{codim} X \setminus U \geqslant 2$ oraz $\pi|_V$ rozszerza się do morfizmu $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Zauważmy, że włókno $\varphi^{-1}(\infty)$ jest niepuste, ponieważ pokrywa się ze suportem dywizora biegunów niestałej funkcji wymiernej x_1/y. Ponadto, z wniosku 4.1.4 mamy $\operatorname{codim} \varphi^{-1}(\infty) = 1$, a skoro

$$\varphi(V) \subset \pi(V) \subset \mathbb{A}^1 \Longrightarrow \varphi^{-1}(\infty) \subset U \cap X \setminus V$$

to widzimy, że każda ze składowych zbioru $\varphi^{-1}(\infty)$ jest otwartym podzbiorem pewnej składowej $X \setminus V$. Wystarczyłoby zatem udowodnić, że włókno generyczne morfizmu $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ jest prostokreślne, gdyż na mocy twierdzenia 4.2.1, pamiętając, że U jest rozmaitością normalną, moglibyśmy wnioskować o prostokreślności składowych zbioru $\varphi^{-1}(\infty)$, a zatem również o prostokreślności którejś ze składowych $X \setminus V$.

Pozostaje nam sprawdzić, że włókno generyczne morfizmu $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ jest prostokreślne. Możemy oczywiście ograniczyć się do części afinicznej, tzn. uzasadnić, że rozmaitość $V_g := V \times_{\operatorname{Spec} k[x_1]} \operatorname{Spec} k(x_1)$ jest prostokreślna. Chcemy zastosować w tym celu twierdzenie Rosenlichta (zob. twierdzenie 3.4.2). Pokażemy więc, że działanie G na V „podnosi się" do działania na włóknie generycznym. Weźmy zbiór multiplikatywny $S := k[x_1] \setminus \{0\}$. Wówczas $S^{-1}k[x_1] = k(x_1)$. Z wcześniejszej dyskusji wiemy już, że $S \cap I = 0$. Mamy następujące izomorfizmy pierścieni:

$$\begin{aligned} k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \big/ I \otimes_{k[x_1]} k(x_1) \simeq S^{-1} \Big(k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \big/ I \Big) \simeq \\ \Big(S^{-1} k[x_1, x_2 \ldots, x_n] \big/ S^{-1} I \Big) \simeq k(x_1)[x_2, \ldots, x_n] \big/ S^{-1} I . \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że V_g można modelować jako domknięty podschemat przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_K^{n-1} \simeq \operatorname{Spec} K[x_2, \ldots, x_n]$, gdzie $K := k(x_1)$, dany przy pomocy tych samych równań co V. Oczywiście $S^{-1}I$ pozostaje ideałem pierwszym. Zobaczmy teraz, że działanie G na $\mathbb{A}^n$ indukuje w naturalny sposób działanie G na $\mathbb{A}_K^{n-1}$, które zachowuje podschemat V_g i po zawężeniu do V_g pozostaje nietrywialne.

Dla uproszczenia notacji przyjmijmy $G \simeq \mathbb{G}_a$ (dla $G \simeq G_m$ rozumowanie przebiega identycznie). Działanie $\mathbb{G}_a$ na $\mathbb{A}^n$ jest zdefiniowane przez pewien morfizm k-rozmaitości $\mathbb{G}_a(k) \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$. Weźmy teraz skojarzony z nim homomorfizm k-algebr

$$\varphi : k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow k[x_1, \dots, x_n, t] \simeq k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[t],$$

spełniający odpowiednie warunki zgodności (por. uwaga 3.4.4). Mianowicie, odwzorowanie $\varphi|_{t=0} : k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ jest identycznością i mamy następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} k[x_1, \dots, x_n] \arrow[r, "\varphi|_{t=u}"] \arrow[d, "\varphi|_{t=w}"'] & k[x_1, \dots, x_n, u] \arrow[d, "u \mapsto t+w"] \\ k[x_1, \dots, x_n, w] \arrow[r, "\varphi \otimes 1"] & k[x_1, \dots, x_n, t, w] \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Dodatkowo, z założenia o G-niezmienniczości formy liniowej x_1 mamy równość $\varphi(x_1) = x_1$. Ponieważ podrozmaitość $V \subset \mathbb{A}^n$ jest G-niezmiennicza, to homomorfizm φ indukuje diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd} k[x_1, \dots, x_n] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & k[x_1, \dots, x_n, t] \arrow[d] \\ k[x_1, \dots, x_n] / I \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & k[x_1, \dots, x_n, t] / I^e \end{tikzcd}$$

gdzie I^e oznacza rozszerzenie ideału I w pierścieniu $k[x_1, \dots, x_n, t]$. Oznaczmy $\underline{x} := x_2, \dots, x_n$. Przechodząc do lokalizacji względem zbioru multiplikatywnego S otrzymujemy diagram homomorfizmów pierścieni

$$\begin{tikzcd} K[\underline{x}] \arrow[r, "S^{-1}\varphi"] \arrow[d] & K[\underline{x}, t] \arrow[r, equal] \arrow[d] & K[\underline{x}] \otimes_K K[t] \arrow[d] \\ K[\underline{x}] / S^{-1}I \arrow[r, "S^{-1}\overline{\varphi}"] & K[\underline{x}, t] / S^{-1}I^e \arrow[r, equal] & K[\underline{x}] / S^{-1}I \otimes_K K[t] \end{tikzcd}$$

Dzięki równości $\varphi(x_1) = x_1$, wszystkie strzałki są identycznością na $K = k(x_1)$, w szczególności $S^{-1}\overline{\varphi}$ jest morfizmem K-algebr afinicznych, który zadaje działanie schematu grupowego $\mathbb{G}_a/K$ na V_g. Odpowiednie warunki zgodności przenoszą się się w oczywisty sposób, dzięki (4.3). Gdyby działanie to było trywialne, homomorfizm $S^{-1}\overline{\varphi}$ byłby identycznością na $K[\underline{x}]/S^{-1}I$. Jednak wówczas także $\overline{\varphi}$ musiałoby być identycznością na $k[x_1, \dots, x_n]/I$ wbrew założeniu. $\square$

Czytelnik może zastanawiać się teraz czy powyższego rozumowania nie dałoby się zmodyfikować w taki sposób aby wykazać, że wszystkie składowe zbioru $X \setminus V$ są prostokreślne. Między innymi, nasuwa się następujące pytanie:

Czy przypadkiem wszystkie składowe zbioru $U \cap (X \setminus V)$ nie zawierają się we włóknie $\varphi^{-1}(\infty)$?

Okazuje się, że nie. Rozważmy następujący przykład (por. [Bor13]):

Przykład 4.4.2. Rozważmy zanurzenie Veronese stopnia 3 postaci:

$$\mathbb{P}^2 \ni (u_0 : u_1 : u_2) \longmapsto (u_0^2 u_1 : u_0 u_1 u_2 : \ldots) \in \mathbb{P}^9 \simeq \operatorname{Proj} k[v_0, v_1, \ldots].$$

Niech $X \subset \mathbb{P}^9$ oznacza obraz tego zanurzenia, izomorficzny z $\mathbb{P}^2$. Jako hiperpłaszczyznę „w nieskończoności" wybieramy $H := \{v_0 = 0\}$, a zatem

$$\{u_0 = 0\} \cup \{u_1 = 0\} \simeq X \cap H \subset \{v_0 = 0\} \cap \{v_1 = 0\}.$$

Rozważmy rzutowanie

$$\pi : \mathbb{P}^9 \setminus \{v_0 = 0,\, v_1 = 0\} \ni (v_0 : v_1 : \ldots) \longmapsto (v_0 : v_1) \in \mathbb{P}^1.$$

Po zawężeniu do $X \simeq \mathbb{P}^2$ mamy

$$\pi|_X : X \ni (u_0 : u_1 : u_2) \longmapsto (u_0^2 u_1 : u_0 u_1 u_2) = (u_0 : u_2) \in \mathbb{P}^1,$$

czyli $\pi|_X$ jest dobrze określone poza punktem $(0 : 1 : 0) \in X$. We włóknie nad punktem $(0 : 1)$ leży jedna ze składowych zbioru $X \cap H$, dana równaniem $\{u_0 = 0\}$. Z kolei druga składowa, tj. $\{u_1 = 0\}$, rzutuje się biwymiernie na prostą $\mathbb{P}^1$ a więc nie zawiera się w żadnym włóknie. Dodatkowo, działanie grupy $\mathbb{G}_m$ na $\mathbb{P}^2$ dane wzorem:

$$G_m \times \mathbb{P}^2 \ni (t, (u_0 : u_1 : u_2)) \longmapsto (u_0 : t^{-1} u_1 : t u_2) \in \mathbb{P}^2$$

przedłuża się w oczywisty sposób do $\mathbb{P}^9$.

Uwaga 4.4.3. Oczywiście w powyższym przykładzie obie składowe dywizora w nieskończoności są prostokreślne. Można go jednak łatwo zmodyfikować biorąc zanurzenie Veronese dostatecznie wysokiego stopnia i wstawiając w miejsce zmiennej u_1 równanie krzywej dodatniego genusu.

ROZDZIAŁ 5

Grupa automorfizmów

Przygotowane do tej pory narzędzia wykorzystamy teraz do badania grupy automorfizmów takich rozmaitości afinicznych, które dopuszczają *gładkie uzwarcenie bez prostokreślnych dywizorów w nieskończoności* (definicja we wstępie). Z twierdzenia Hironaki o desingularyzacji wynika, że każda rozmaitość afiniczna w charakterystyce zero ma gładkie uzwarcenie. Jednak w procesie rozwiązywania osobliwości, poprzez rozdmuchania, na ogół pojawią się prostokreślne dywizory wyjątkowe. Trudno więc oczekiwać, że uzwarcenia bez dywizorów prostokreślnych będzie łatwo znaleźć w sposób algorytmiczny.

Odpowiednie przykłady można jednak konstruować wychodząc od gładkiej rozmaitości rzutowej X danej wraz z pewnym zanurzeniem w $\mathbb{P}^n$, czyli *de facto*, wraz z pewnym dywizorem bardzo szerokim. Jeżeli cięcie pewną hiperpłaszczyzną $X \cap H$ nie zawiera składowych prostokreślnych, to $X \setminus H$ jest rozmaitością dopuszczającą uzwarcenie bez dywizorów prostokreślnych. Zasadniczą informacją zawartą w przedstawionych poniżej twierdzeniach jest to, że grupa automorfizmów takich rozmaitości jest na ogół niewielka, tzn. jest grupą afiniczną, a dość często jest grupą skończoną.

5.1 Terminologia

5.1.1 Automorfizmy w kowymiarze 1

Niech X będzie gładką rozmaitością rzutową a $\rho : X \dashrightarrow X$ *automorfizmem w kowymiarze 1* (por. definicja 2.4.2). Przypomnijmy, że wówczas dla pewnych zbiorów otwartych $U, V \subset X$ takich, że

$$\operatorname{codim} X \setminus U \geqslant 2, \quad \operatorname{codim} X \setminus V \geqslant 2, \tag{5.1}$$

istnieje izomorfizm $\widetilde{\rho} : U \longrightarrow V$ rozszerzający ρ. Zauważmy, że dzięki założeniu (5.1) odwzorowanie zadane na zbiorze dywizorów pierwszych wzorem $\rho^*(P) := \overline{\rho^{-1}(V \cap P)}$ jest dobrze określone i rozszerza się addytywnie do automorfizmu grupy dywizorów Weila rozmaitości X. Dodatkowo, dla dowolnej funkcji wymiernej $f \in K(X)$ jeżeli D jest dywizorem zer funkcji f, to $\varphi^*(D)$ jest dywizorem zer funkcji $f \circ \rho$. To pokazuje, że ρ^* zachowuje relację równoważności między dywizorami, a więc także indukuje pewien automorfizm grupy klas dywizorów $\operatorname{Cl} X$.

Uwaga 5.1.1. Zdefiniowany powyżej automorfizm ρ^* w oczywisty sposób zachowuje odwzorowanie stopnia $\operatorname{Div} X \longrightarrow \mathbb{Z}$. W szczególności, jeżeli $\operatorname{Cl} X \simeq \mathbb{Z}$, to ρ^* zachowuje klasy równoważności dywizorów. Innymi słowy, jest identycznością na grupie klas $\operatorname{Cl} X$.

Uwaga. W dalszej części rozdziału, a szczególnie w wypowiedziach twierdzeń, będziemy często stosowali skrót myślowy polegający na tym, że jeśli odwzorowanie wymierne $\rho : X \dashrightarrow X$ rozszerza się do automorfizmu w kowymiarze 1, to mówimy że właśnie to odwzorowanie, a nie pewne jego rozszerzenie, indukuje (zdefiniowany powyżej) automorfizm ρ^* grupy dywizorów. Mamy nadzieję, że nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

5.1.2 Nieskończenie wymiarowe grupy algebraiczne

Definicja 5.1.2 (grupa nieskończenie wymiarowa)**.** Jeżeli V jest rozmaitością afiniczną, to grupa $\operatorname{Aut}(V)$ dopuszcza naturalną strukturę *nieskończenie wymiarowej grupy algebraicznej* (por. [Kam79, §1]) w następującym sensie:

(*i*) Istnieje taki ciąg rozmaitości $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \operatorname{Aut}(V)$, oraz dla każdego $i \in \mathbb{N}$, G_i jest domkniętą podrozmaitością G_{i+1}.

(*ii*) Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ istnieje taka inwolucja $\operatorname{inv}_i : G_i \longrightarrow G_i$, że

$$\varphi \in G_i \Longrightarrow \operatorname{inv}_i(\varphi) = \varphi^{-1},$$

a więc w szczególności $\varphi \in G_i \iff \varphi^{-1} \in G_i$.

(*iii*) Dla każdej pary $i, j \in \mathbb{N}$ istnieje morfizm $\operatorname{mult}_{ij} : G_i \times G_j \longrightarrow G_{i+j}$, że

$$\varphi \in G_i,\ \varphi' \in G_j \Longrightarrow \varphi \circ \varphi' = \operatorname{mult}_{ij}(\varphi,\ \varphi') \in G_{i+j}.$$

Konstrukcja 5.1.3 (szkic). Załóżmy, że $V \subset \mathbb{A}^n$. Dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$, oznaczmy przez $\mathrm{Mor}_d(V, \mathbb{A}^n) \subset \mathrm{Mor}(V, \mathbb{A}^n) \simeq k[V]^n$ podprzestrzeń złożoną z takich odwzorowań wielomianowych, które są zawężeniem pewnych odwzorowań $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ stopnia d. ([1]) Otrzymujemy w ten sposób filtrację postaci

$$\mathrm{Mor}_0(V, \mathbb{A}^n) \subset \mathrm{Mor}_1(V, \mathbb{A}^n) \subset \mathrm{Mor}_2(V, \mathbb{A}^n) \subset \ldots \subset \mathrm{Mor}(V, \mathbb{A}^n),$$

której wszystkie elementy są przestrzeniami skończonego wymiaru. Dodatkowo, wybierzmy pewną przeliczalną bazę $\mathcal{B} = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ przestrzeni $\mathrm{Mor}(V, \mathbb{A}^n)$, zgodną z powyższą filtracją. Zdefiniujmy najpierw

$$\mathrm{End}_i(V, \mathbb{A}^n) := \{\varphi \in \mathrm{Mor}_i(V, \mathbb{A}^n) : \varphi(V) \subset V\}.$$

Patrząc na warunek $\varphi(V) \subset V$ w języku współrzędnych wektora φ wyrażonych w bazie $\mathcal{B}$ stosunkowo łatwo zobaczyć, że $\mathrm{End}_i(V, \mathbb{A}^n)$ jest algebraicznym podzbiorem $\mathrm{Mor}_i(V, \mathbb{A}^n)$. Oczywiście, jeśli tylko $\varphi \in \mathrm{End}_i(V, \mathbb{A}^n)$ oraz $\psi \in \mathrm{End}_j(V, \mathbb{A}^n)$, to $\varphi \circ \psi \in \mathrm{End}_{i+j}(V, \mathbb{A}^n)$. Jedyny nieoczywisty fakt to, że odwzorowanie złożenia

$$\mathrm{End}_i(V, \mathbb{A}^n) \times \mathrm{End}_i(V, \mathbb{A}^n) \ni (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \circ \psi \in \mathrm{End}_{i+j}(V, \mathbb{A}^n)$$

daje się wyrazić wielomianowo we współrzędnych bazy $\mathcal{B}$. Ostatecznie

$$G_i := \{(\varphi, \psi) \in \mathrm{End}_{i+1}(V, \mathbb{A}^n) \times \mathrm{End}_{i+1}(V, \mathbb{A}^n) : (\varphi \circ \psi)|_V = \mathrm{Id}_V\}.$$

Własności (i), (ii), (iii) są bardzo łatwe do sprawdzenia.

Uwaga 5.1.4. Zauważmy, że z powyższej konstrukcji wynika, że wszystkie G_i są rozmaitościami afinicznymi.

Definicja 5.1.5. Jeżeli Y jest dowolną rozmaitością a $H \subset X \subset Y$ są podrozmaitościami, to definiujemy następujące (abstrakcyjne) podgrupy:

$$\mathrm{Stab}_Y(X) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(Y) : \varphi(X) = X\},$$
$$\mathrm{Stab}_Y(X, H) := \mathrm{Stab}_Y(X) \cap \mathrm{Stab}_Y(H).$$

Jeśli dodatkowo $\mathrm{Aut}(Y)$ ma strukturę grupy algebraicznej, lub przynajmniej nieskończenie wymiarowej grupy algebraicznej (jak w definicji 5.1.2) to zbiory $\mathrm{Stab}_Y(X)$ oraz $\mathrm{Stab}_Y(X, H)$ są podgrupami domkniętymi.

[1] Przez „stopień” rozumiemy tutaj maksimum stopnia współrzędnych.

5.2 Sformułowanie głównego wyniku

Celem tego rozdziału jest dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 5.2.1. *Niech $X \subset \mathbb{P}^n$ będzie gładką rozmaitością rzutową. Załóżmy, że X nie zawiera się w żadnej hiperpłaszczyźnie i niech $H \subset \mathbb{P}^n$ będzie taką hiperpłaszczyzną, że $X \cap H$ nie ma składowych prostokreślnych. Wówczas:*

(*i*) *Każdy automorfizm $X \backslash H$ rozszerza się do automorfizmu w kowymiarze 1. W szczególności, każdy element* $\mathrm{Aut}(X \setminus H)$ *indukuje (poprzez pullback) zachowujący stopień automorfizm grupy* $\mathrm{Div}\, X$.

(*ii*) $\mathrm{Aut}(X \setminus H)$ *jest grupą afiniczną i zawiera* $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$ *jako domkniętą podgrupę skończonego indeksu, złożoną z tych elementów, które stabilizują, system liniowy dywizora przecięcia*

$$X \cap H = m_1 H_1 + \ldots + m_r H_r,$$

gdzie $H_1, \ldots, H_r$ są różnymi składowymi nierozkładalnymi.

(*iii*) *Jeżeli* $\dim X \geqslant 2$ *to* $\# \mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H) < \infty$*; a więc również, wobec poprzedniego punktu,* $\# \mathrm{Aut}(X \setminus H) < \infty$.

Uwaga 5.2.2. Punkt pierwszy twierdzenia 5.2.1 jest natychmiastową konsekwencją propozycji 2.4.3, oraz uwag w poprzednim podrozdziale.

Następujący fakt został udowodniony wcześniej w pracach [JLen13] oraz [Jel94] (tutaj dla $k = \mathbb{C}$, oraz H bez składowych uniprostokreślnych) przy dodatkowym założeniu, że H jest dywizorem bardzo szerokim.

Wniosek 5.2.3. *Niech X będzie gładką rozmaitością rzutową wymiaru* $\geqslant 2$. *Niech H będzie hiperpowierzchnią w X bez składowych prostokreślnych. Jeżeli H jest dywizorem szerokim to grupa* $\mathrm{Aut}(X \setminus H)$ *jest skończona oraz*

$$\mathrm{Aut}(X \setminus H) = \mathrm{Stab}_X(H).$$

Dowód. Skoro $H = H_1 + \ldots + H_r$ jest dywizorem szerokim, to dla dostatecznie dużego m istnieje takie zanurzenie $X \subset \mathbb{P}^n$, że $D := mH$ jest dywizorem przecięcia X z pewną hiperpowierzchnią w $\mathbb{P}^n$. Z twierdzenia 5.2.1(i), (iii) wynika, że $\# \mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H) < \infty$ oraz każdy automorfizm $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \setminus H)$ rozszerza się do automorfizmu w kowymiarze 1.

Indukowany automorfizm grupy dywizorów $\varphi^* : \operatorname{Div} X \longrightarrow \operatorname{Div} X$ musi permutować składowe $H_1, \ldots, H_r$, a ponieważ wszystkie współczynniki w D są jednakowe to $\varphi^*(D) = D$. Dzięki własności

$$D' \sim D \Longrightarrow \varphi^*(D') \sim \varphi^*(D) = D$$

wodzimy więc, że φ^* zachowuje system liniowy $|D|$, a więc teza jest konsekwencją części (ii) twierdzenia 5.2.1.

Wniosek 5.2.4. *Niech X będzie gładką rozmaitością rzutową wymiaru $\geqslant 2$, a $H \subset X$ hiperpowierzchnią bez składowych prostokreślnych. Załóżmy dodatkowo, że H jest* ***suportem efektywnego dywizora bardzo szerokiego****. Wówczas grupa* $\operatorname{Aut}(X \setminus H)$ *jest skończona.*

Dowód. Przy odpowiednim zanurzeniu $X \subset \mathbb{P}^n$ możemy założyć, że $H = X \cap L$ dla pewnej hiperpowierzchni $L \subset \mathbb{P}^n$. Z twierdzenia 5.2.1 wynika, że grupa $\operatorname{Aut}(X \setminus H)$ jest afiniczna i zawiera jako podgrupę skończonego indeksu skończoną grupę $\operatorname{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$.

5.2.1 Przykłady i kontrprzykłady

Uwaga 5.2.5. Punkt (i) tezy twierdzenia 5.2.1 zachodzi w sposób oczywisty gdy X jest krzywą. Rzeczywiście, każde odwzorowanie biwymierne między krzywymi rzutowymi rozszerza się do izomorfizmu. Grupa automorfizmów krzywej afinicznej nie musi być oczywiście skończona, co pokazuje przykład prostej rzutowej $\mathbb{P}^1$ z wyrzuconym punktem $H = \{\infty\}$.

Przykład 5.2.6. Bez założenia gładkości X, twierdzenie 5.2.1 nie zachodzi. Niech $Y \subset \mathbb{C}^3$ będzie dwuwymiarowym stożkiem o wierzchołku w zerze, nad dowolną krzywą (płaską) C dodatniego genusu. Niech X będzie domknięciem Y w $\mathbb{P}^3$. Wówczas $H = X \setminus Y \simeq C$, zatem dywizor H (bardzo szeroki) nie ma składowych prostokreślnych. Tymczasem $\mathbb{C}^* \subset \operatorname{Aut}(X \setminus H)$. Gdy C jest krzywą eliptyczną, to dodatkowo

$$C \simeq \operatorname{Aut}(C) \subset \operatorname{Aut}(X \setminus H)$$

co pokazuje, że $\operatorname{Aut}(X \setminus H)$ nie może być grupą afiniczną.

Przykład 5.2.7. Założenie o algebraicznym domknięciu ciała k odgrywa bardzo subtelną rolę. Rozważmy gładką (nawet geometrycznie gładka) kwadrykę

$$X := \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}.$$

Dywizor w nieskończoności nie jest prostokreślny, tzn. ciało ułamków

$$\left(\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4] \big/ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^4)\right)_{(0)}$$

nie jest czysto transcendentnym rozszerzeniem żadnego skończenie generowanego rozszerzenia $\mathbb{R}$ (zob. [Tot07]). Zauważmy, że część afiniczna X to trójwymiarowa sfera, zatem grupa automorfizmów zawiera w tym przypadku grupę ortogonalną, ([2]) a zatem część (*iii*) twierdzenia 5.2.1 ewidentnie nie zachodzi.

Przykład 5.2.8. Niech X będzie gładką powierzchnią, a $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ morfizmem, którego włóknami są krzywe eliptyczne. Tego typu przykład można skonstruować rozdmuchując płaszczyznę rzutową w dziewięciu punktach w generycznym położeniu. Jeżeli φ ma co najmniej dwie sekcje wymiarne, to można pokazać, że powierzchnia $X \setminus H$, gdzie $H = \varphi^{-1}(S)$ dla dowolnego skończonego podzbioru $\varnothing \neq S \subset \mathbb{P}^1$, ma nieskończoną grupę automorfizmów. Hiperpowierzchnia H nie może być dywizorem szerokim, a nawet suportem dywizora szerokiego, gdyż przecina się pusto z każdym włóknem $\varphi^{-1}(y)$, dla $y \notin S$.

5.3 Grupa automorfizmów jest afiniczna

Część (*ii*) twierdzenia 5.2.1 jest wnioskiem z następującej propozycji:

Propozycja 5.3.1. *Niech X będzie gładką rozmaitością rzutową a D dywizorem bardzo szerokim. Niech $i_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ będzie pewnym ustalonym zanurzeniem danym przez bazę $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D))$. Wówczas każdy izomorfizm $\varphi : X \dashrightarrow X$ w kowymiarze 1, który zachowuje system liniowy $|D|$, rozszerza się do automorfizmu $\widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, tj. $i_D \circ \varphi = \widetilde{\varphi} \circ i_D$.*

Dowód. Izomorfizm w kowymiarze 1 indukuje automorfizm grupy dywizorów Weila $\varphi^* : \operatorname{Div} X \longrightarrow X$. Snopy lokalnie wolne $\mathcal{L}(D)$ oraz $\mathcal{L}(\varphi^*(D))$ definiuje się jako podsnopy snopa funkcji wymiernych na X (por. [Har97, Ch II.6]). Sekcje globalne $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D))$, $s' \in \Gamma(X, \mathcal{L}(\varphi^*))$ odpowiadają pewnym funkcjom wymiernym (por. [Har97, Ch II.7, Prop. 7.7]) spełniającym warunki ([3])

$$(s) + D \geqslant 0 \text{ oraz } (s') + \varphi^*(D) \geqslant 0,$$

Zauważmy, że skoro φ jest odwzorowaniem biwymiernym, to zadaje automorfizm ciał $\varphi^* : K(X) \longrightarrow K(X)$. Jest zatem sens mówić o funkcjach wymiernych

[2] W pracy [Tot07] Totaro dowodzi nawet, że mamy tutaj równość.

[3] Przez $(*)$ oznaczamy dywizor zer i biegunów funkcji wymiernej.

$\varphi^* s_0, \ldots, \varphi^* s_n$. Skoro $(s) + D \geqslant 0$, to mamy także

$$(\varphi^* s) + \varphi^* D = \varphi^*((s) + D) \geqslant 0,$$

co pokazuje, że $\varphi^* s_0, \ldots, \varphi^* s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}(\varphi^* D))$. Z założenia mamy $\varphi^* D \sim D$, zatem $\mathcal{L}(\varphi^* D) \simeq \mathcal{L}(D)$ i w konsekwencji również

$$\Gamma(X, \mathcal{L}(\varphi^* D)) \simeq \Gamma(X, \mathcal{L}(\varphi^* D)).$$

Ponieważ sekcje $\varphi^* s_0, \ldots, \varphi^* s_n$ są liniowo niezależne to muszą tworzyć bazę przestrzeni $\Gamma(X, \mathcal{L}(\varphi^* D))$. Niech teraz $i_{\varphi^* D} : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ oznacza zanurzenie zadane przez tę bazę. Mamy następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "i_{\varphi^* D}"] & \\ X \arrow[r, "i_D"'] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Z drugiej strony, skoro $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{L}(\varphi^* D)$ to zanurzenia zdefiniowane przez te dwa snopy muszą być równoważne, a więc istnieje taki liniowy automorfizm $\lambda : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, że $\lambda \circ i_D = i_{\varphi^* D}$. W połączeniu z (5.2) otrzymujemy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_D"] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "i_{\varphi^* D}"] & \mathbb{P}^n \arrow[d, "\lambda"] \\ X \arrow[r, "i_D"'] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Ponieważ oba trójkąty są przemienne, to cały diagram komutuje. Pokazaliśmy wobec tego, że $\lambda \circ i_D = i_D \circ \varphi$, czyli λ jest poszukiwanym rozszerzeniem.

Możemy teraz udowodnić część (ii) twierdzenia 5.2.1.

Wniosek 5.3.2. *Niech $X \subset \mathbb{P}^n$ będzie gładką rozmaitością rzutową. Załóżmy, że X nie zawiera się w żadnej hiperpłaszczyźnie. Niech $H \subset \mathbb{P}^n$ będzie taką hiperpłaszczyzną, że $X \cap H$ nie ma składowych prostokreślnych. Wówczas* $\mathrm{Aut}(X \setminus H)$ *jest grupą afiniczną zawierającą* $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$ *jako domkniętą podgrupę skończonego indeksu, złożoną z tych elementów, które stabilizują system liniowy dywizora przecięcia*

$$D := X \cap H = m_1 H_1 + \ldots + m_r H_r,$$

gdzie $H_1, \ldots, H_r$ są różnymi składowymi nierozkładalnymi.

Dowód. Ponieważ $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}(1)|_X$ oraz wszystkie automorfizmy $\mathbb{P}^n$ są liniowe, to oczywiście każdy element $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$ zachowuje system liniowy $|D|$. Z drugiej strony to, że każdy element $\mathrm{Aut}(X \setminus H)$ zachowujący $|D|$ rozszerza się do automorfizmu $\mathbb{P}^n$ jest konsekwencją propozycji 5.3.1 oraz założeń o braku składowych prostokreślnych w przecięciu $X \cap H$. Dzięki temu wiemy, że każdy element $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \setminus H)$ rozszerza się izomorfizmu w kowymiarze 1 (por. porpozycja 2.4.3).

Wyjaśnimy teraz część tezy dotyczącą struktury grupy $\mathrm{Aut}(X\setminus H)$. *A priori* wiemy jedynie, że $\mathrm{Aut}(X\setminus H)$ jest nieskończenie wymiarową grupą algebraiczną (por. definicja 5.1.2). Niech

$$G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset \mathrm{Aut}(X \setminus H)$$

będzie taką filtracją, że $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H) \subset G_0$ (por. konstrukcja 5.1.3). Gdybyśmy pokazali, że dla pewnych elementów $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in \mathrm{Aut}(X \setminus H)$ jest

$$\mathrm{Aut}(X \setminus H) \subset \varphi_1 G_0 \cup \ldots \cup \varphi_s G_0, \tag{5.3}$$

to udowodnilibyśmy jednocześnie, że $\mathrm{Aut}(X \setminus X)$ jest grupą afiniczną (zob. uwaga 5.1.4), oraz $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$ jest podgrupą skończonego indeksu.

Zauważmy najpierw, że każdy element $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \setminus H)$ indukuje jedną spośród wszystkich możliwych $r!$ permutacji zbioru dywizorów $\{H_1, \ldots, H_r\}$. Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in \mathrm{Aut}(X \setminus H)$ reprezentują wszystkie permutacje, które można uzyskać w ten sposób. Jeżeli teraz $\varphi \in \mathrm{Aut}(X \setminus H)$ jest dowolnym elementem, to dla pewnego i, automorfizm $\varphi_i \circ \varphi$ zachowuje każdy z dywizorów H_j, dla $j = 1, \ldots, r$, a więc z addytywności $(\varphi_i \circ \varphi)^*(D) = D$. Z pierwszej części dowodu wynika zatem, że $\varphi_i \circ \varphi \in \mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$. Pokazaliśmy tym samym, że elementy $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(X \setminus H)$ spełniają (5.3), a więc dowód jest zakończony.

Z powyższego rozumowania wynika następujący wniosek:

Wniosek 5.3.3. *Przy oznaczeniach jak we wniosku 5.3.2 załóżmy dodatkowo, że $m_1 = \ldots = m_r$. Wówczas każdy automorfizm $X \setminus H$ rozszerza się do liniowego automorfizmu $\mathbb{P}^n$.*

Wniosek 5.3.4. *Przy oznaczeniach jak we wniosku 5.3.2 załóżmy dodatkowo, że $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Wówczas każdy automorfizm $X \setminus H$ rozszerza się do automorfizmu $\mathbb{P}^n$.*

Dowód. Ponieważ φ^* zachowuje dywizory efektywne oraz stopień dywizora, który w tym przypadku charakteryzuje klasy równoważności, to φ^* musi zachowywać system liniowy $|D|$.

5.4 Grupa automorfizmów jest skończona

Zmierzamy teraz do dowodu części (*iii*) twierdzenia 5.2.1.

5.4.1 Przygotowanie do dowodu

Ponieważ w twierdzeniu 5.2.1 zakładamy gładkość rozmaitości X, to teza byłaby natychmiastową konsekwencją następującej propozycji:

Propozycja 5.4.1. *Niech $X \subset \mathbb{P}^n$ będzie normalną rozmaitością rzutową wymiaru co najmniej 2. Załóżmy, że X nie zawiera się w żadnej hiperpłaszczyźnie. Niech $H \subset \mathbb{P}^n$ będzie taką hiperpłaszczyzną, że żadna ze składowych*

$$X \cap H = F_1 \cup \ldots \cup F_r$$

nie jest prostokreslna. Wówczas, jeśli grupa $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$ jest nieskończona, to X ma punkt osobliwy w zbiorze $X \setminus H$.

Dowód. Niech L będzie najmniejszą podprzestrzenią $\mathbb{P}^n$ zawierającą $X \cap H$. Podkreślmy, że jest możliwa sytuacja, w której $L \subsetneq H$ (por. przykład 4.4.2). Ponieważ każdy element $\varphi \in \mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$ zachowuje L, to mamy dobrze określony homomorfizm grup afinicznych ([4])

$$\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H) \longrightarrow \mathrm{Stab}_L(X \cap H). \tag{5.4}$$

Aby udowodnić, że $\mathrm{Stab}_L(X \cap H)$ jest grupą skończoną wystarczy sprawdzić, że składowa spójna identyczności jest skończona.

Niech $G := \mathrm{Stab}_L(X \cap H)^\circ$. Twierdzimy, że dla każdego i jest $F_i = GF_i$. Ponieważ zbiór GF_i jest nierozkładalny jako obraz zbioru nierozkładalnego $G \times F_i$ przez $G \times L \longrightarrow L$, to musi zawierać się w pewnym F_j. Ale z drugiej strony $F_i \subset GF_i \subset F_j$, a więc istotnie musi być $i = j$.

Oznaczmy przez $L_i \subset L$ najmniejszą podprzestrzeń liniową $\subset \mathbb{P}^n$, która zawiera składową F_i. Wtedy, homomorfizm grup

$$\mathrm{Stab}_L(X \cap H)^\circ \ni \varphi \longmapsto (\varphi|_{L_i}) \in \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Stab}_{L_i}(F_i) \tag{5.5}$$

[4] Przypomnijmy, że $\mathrm{PGL}(n)$ jest grupą afiniczną, ponieważ jako rozmaitość powstaje poprzez wycięcie z przestrzeni rzutowej hiperpowierzchni $\{\det = 0\}$.

jest różnowartościowy. Ponieważ $\mathrm{Stab}_{L_i}(F_i)$ jest grupą afiniczną działającą (wiernie) na rozmaitości F_i, to musi być skończona. Rzeczywiście, w przeciwnym razie $\mathrm{Stab}_{L_i}(F_i)$ zawierałaby podgrupę izomorficzną z $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$ (por. twierdzenie 3.3.1), która działa nietrywialnie na F_i. Z twierdzenia Rosenlichta (zob. twierdzenie 3.4.2) F_i musiałaby być prostokreślna, ale to jest sprzeczne z naszym założeniem. Z iniektywności (5.5) widzimy teraz, że grupa $\mathrm{Stab}_L(X \cap H)^\circ$ jest skończona. Pozostaje zatem sprawdzić, że odwzorowanie restrykcji (5.4) ma skończone jądro. Oznaczmy

$$K = \{\varphi \in \mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H) : \varphi|_L \equiv \mathrm{Id}_L\}.$$

Wówczas K jest domkniętą podgrupą $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}^n}(X, H)$. Mamy następujący

Lemat. *Dla każdego elementu $\varphi \in K$ jest $\varphi(H) = H$.*

Dowód lematu. Wystarczy sprawdzić, że jeśli $z \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ jest sekcją globalną, której dywizorem zer jest H, to z jest wektorem własnym operatora φ^*. Porównując zawężenia

$$(\varphi|_X)^*(z|_X) = \varphi^*(z)|_X \quad \text{oraz} \quad z|_X, \tag{5.6}$$

widzimy, że obie sekcje mają jednakowy dywizor zer. Rzeczywiście, jeżeli x_i jest punktem generycznym dywizora F_i, to $\varphi|_X : X \longrightarrow X$ indukuje taki automorfizm pierścienia waluacji dyskretnej $\mathcal{O}_{x_i,X}$, który zachowuje waluację. To pokazuje, że krotności dywizorów $F_1, \ldots, F_r$ są zachowywane przy operacji pullbacku. Z drugiej strony, porównanie stopni pokazuje, że cofnięcie sekcji $z|_X$ nie może zerować się na dywizorach poza zbiorem $X \cap H$. A więc istotnie, sekcje (5.6) mają jednakowe dywizory zer. Ponieważ X jest gładką rozmaitością rzutową to musi być $\varphi^*(z)|_X = \lambda z|_X$, dla pewnego $\lambda \in k^*$.

Chcemy jednak pokazać więcej, a mianowicie $\varphi^*(z) = \lambda z$. Wystarczy jeśli stwierdzimy, że operacja zawężenia

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \ni s \longmapsto s|_X \in \Gamma(X, \mathcal{O}(1)|_X) \tag{5.7}$$

jest różnowartościowa, a więc jeśli $s_0, \ldots, s_n$ jest bazą przestrzeni $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ to $s_0|_X, \ldots, s_n|_X$ jest układem liniowo niezależnym w $\Gamma(X, \mathcal{O}(1)|_X)$. Przypuśćmy zatem, że dla pewnych $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in k$ jest

$$\lambda_0 s_0|_X + \ldots + \lambda_n s_n|_X = 0 \text{ a więc } X \subset \{\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n = 0\}.$$

Ponieważ założyliśmy, że X nie zawiera zawiera się w żadnej hiperpłaszczyźnie, to musi być $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$, co kończy dowód lematu. $\square$

Pokazaliśmy zatem, że elementy jądra K zachowują hiperpłaszczyznę w nieskończoności. Własność ta pozwala zobaczyć K jako domkniętą podgrupę w grupie $\mathrm{Aff}(n) \subset GL(n{+}1)$ przekształceń afinicznych przestrzeni $\mathbb{A}^n \simeq \mathbb{P}^n \backslash H$. Ponieważ elementy K są identycznością na L, to przy odpowiednim wyborze układu współrzędnych, $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m, z$, tj. w taki spósb, że

$$H = \{z = 0\}, \quad L = \{z = 0,\ y_1 = 0,\ \ldots\ , y_m = 0\},$$

każdy element K jest reprezentowany na zbiorze $\{z \neq 0\}$ przez macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{gathered} l = 1 + \dim L, \\ l + m = n, \\ \alpha \in k^*. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Zbiór takich macierzy, ozn. $\mathrm{Aff}(l, m)$, tworzy domkniętą podgrupę $\mathrm{Aff}(n)$. Przez V będziemy oznaczali część afiniczną X, tj. podzbiór otwarty $X \setminus H$ widziany jako (domknięta) podrozmaitość $\mathbb{A}^n$. Z definicji mamy $X = \overline{V}$. Skoro X nie jest zawarta w żadnej hiperpłaszczyźnie, to również V nie zawiera się w żadnej właściwej podprzestrzeni afinicznej. A więc K działa wiernie na V.

Dowód skończoności K można teraz przeprowadzić nie wprost, powołując się po raz kolejny na własności grup afinicznych. Mianowice, gdyby K była nieskończoną grupą afiniczną, to składowa identyczności K° musiałaby zawierać jako domkniętą podgrupę $\mathbb{G}_a$ lub $\mathbb{G}_m$ (zob. wniosek 3.2.10). Z uwagi na założenia o X sprzeczność wynika z następującego lematu, którego dowód jest treścią w dalszej części rozdziału.

Lemat 5.4.2. *Niech $G \subset \mathrm{Aff}(l, m)$ będzie domkniętą podgrupą izomorficzną z $\mathbb{G}_m$ lub z $\mathbb{G}_a$. Niech $V \subset \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^l \times \mathbb{A}^m$ będzie rozmaitością G-niezmienniczą o normalnym domknięciu rzutowym $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n$, która nie zawiera się w żadnej właściwej podprzestrzeni afinicznej, ale zachodzi $\overline{V} \setminus V \subset L$. Jeśli $G \simeq \mathbb{G}_a$ to zbiór $\overline{V} \setminus V$ zawiera składową prostokreślną. Jeśli $G \simeq \mathbb{G}_m$ to V ma punkt osobliwy lub zbiór $\overline{V} \setminus V$ zawiera składową prostokreślną.*

5.4.2 Przypadek multiplikatywny

Zajmiemy się teraz dowodem lematu 5.4.2 w przypadku multiplikatywnym, tj. gdy $G \simeq G_m$. Wykorzystamy następujący fakt geometryczny:

Twierdzenie 5.4.3. *Niech $V \subset \mathbb{A}^n$ będzie rozmaitością niezmienniczą ze względu na działanie torusa $\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ dane wzorem*

$$(t, x) \longmapsto (t^{s_1} x_1, \dots, t^{s_n} x_n), \ \textit{gdzie } s_i \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Wówczas V ma punkt osobliwy, lub jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną.

Dowód. Zacznijmy od następującego prostego lematu:

Lemat. *Ideał I wielomianów znikających na V jest jednorodny względem gradacji danej przez wagi $w(x_i) = s_i$, dla $i = 1, \dots, n$.*

Dowód lematu. Rzeczywiście, jeżeli $f \in I$ oraz $f = f^{(1)} + \ldots + f^{(d)}$ jest przedstawieniem za pomocą elementów jednorodnych, to

$$f(t^{s_1} x_1, \dots, t^{s_n} x_n) = \sum_{i=1}^{d} t^i f^{(i)}(x_1, \dots, x_n).$$

To pokazuje, że każda ze składowych jednorodnych musi znikać na zbiorze V, a zatem $f^{(1)}, \dots, f^{(d)} \in I$, więc istotnie I jest ideałem jednorodnym. □

Wracamy do dowodu twierdzenia. Na pierścieniu $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ definiujemy gradację jak w lemacie, przy czym załóżmy dla wygody, że wagi są uporządkowane, tj. $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_n$. Niech $I = I(V)$ będzie ideałem jednorodnym skojarzonym z rozmaitością V, a $g_1, \dots, g_N \in I$ jednorodnym układem generatorów. Jeżeli wszystkie wielomiany mają w zerze rząd $\geqslant 2$, to z kryterium jakobianowego wynika, że V ma osobliwość w zerze. Możemy zatem przyjąć, że g_1 zawiera pewną formę liniową. Mając na uwadze nierówności między wagami i to, że g_1 jest wielomianem jednorodnym widzimy, że musi być

$$g_1(x) = x_i + P(x_{j+1}, \dots, x_n), \tag{5.9}$$

dla pewnego wielomianu P. Przyporządkowanie $x_i \mapsto (-P)$ oraz identyczność na pozostałych zmiennych zadają izomorfizm pierścieni z gradacją

$$k[x_1, \dots, x_n] \big/ (g_1, \dots, g_N) \longrightarrow k[x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n] \big/ (\widetilde{g_2}, \dots, \widetilde{g_N}),$$

gdzie $\widetilde{g_j}$ oznacza wielomian g_j z podstawieniem $x_i \mapsto (-P)$. ([5]) Rozmaitość $\widetilde{V}$ zadana równaniami $\widetilde{g_2}, \dots, \widetilde{g_N}$ jest zatem izomorficzna z V. Proces ten możemy kontynuować tak długo aż wyczerpią się równania lub wszystkie będą miały w zerze rząd $\geqslant 2$. W pierwszym przypadku udowodnimy, że V jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną, w drugim zobaczymy, że V zawiera punkt osobliwy.

Przyda nam się jeszcze następujący fakt z algebry liniowej:

Lemat 5.4.4. *Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad algebraicznie domkniętym ciałem k. Niech $M \subset \mathrm{End}_k(V)$ będzie zbiorem przemiennych endomorfizmów. Wówczas istnieje baza $v_1, \dots, v_n$ przestrzeni V, w której wszystkie elementy zbioru M są reprezentowane przez macierze trójkątne. Jeżeli podzbiór $N \subset M$ składa się z elementów półprostych, to można zapewnić, aby macierze odpowiadające elementom N były diagonalne.* ([6]) *Co więcej, jeśli $W \subset V$ jest m-wymiarową podprzestrzenią stabilizowaną przez M, to bazę można wybrać w taki sposób, że $v_1, \dots, v_m \in W$.*

Dowód. zob. np. [Hum75, §15.4]

Możemy wreszcie przejść do dowodu lematu 5.4.2 w przypadku multiplikatywnym. Dla wygody czytelnika, powtarzamy jego wypowiedź.

Lemat 5.4.2. *Niech $G \subset \mathrm{Aff}(l, m)$ będzie domkniętą podgrupą izomorficzną z $\mathbb{G}_m$. Niech $V \subset \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^l \times \mathbb{A}^m$ będzie rozmaitością G-niezmienniczą o normalnym domknięciu rzutowym $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n$, która nie zawiera się w żadnej właściwej podprzestrzeni afinicznej, ale zachodzi $\overline{V} \setminus V \subset L$. Przypomnijmy tylko, że L oznacza podprzestrzeń w nieskończoności, zdefiniowaną jako wspólne miejsce zerowe pierwszych l zmiennych. Wówczas V ma punkt osobliwy lub zbiór $\overline{V} \setminus V$ zawiera składową prostokreślną.*

Dowód. Ponieważ grupa $G \simeq \mathbb{G}_m$ jest przemienna i składa się elementów półprostych (por. uwaga 3.2.8), to z lematu 5.4.4 wynika, że istnieje taka afiniczna zmiana współrzędnych w $\mathbb{A}^n$, że macierze reprezentujące elementy G są diago-

[5] Nie jest wykluczone, że $\widetilde{g_j} = 0$ dla pewnych j.

[6] Innymi słowy, $v_1, \dots, v_n$ są wektorami własnymi endomorfizmów ze zbioru N.

nalne. Izomorfizm $\mathbb{G}_m \longrightarrow G \subset \mathrm{Aff}(l, m)$ daje parametryzację postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_1(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \beta_m(t) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie funkcje wymierne $\alpha(t), \beta_i(t) \in k[t, t^{-1}]$ spełniają warunki

$$\alpha(tt') = \alpha(t)\alpha(t') \quad \text{oraz} \quad \beta_i(tt') = \beta_i(t)\beta_i(t'),\ i = 1, \dots, m.$$

Muszą zatem istnieć takie $s, s_i \in \mathbb{Z}$, że $\alpha(t) = t^s$ oraz $\beta_i(t) = t^{s_i}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć $s \geqslant 0$, oraz $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_n$.

Pokażemy najpierw, że $s_1 < s$. Przypuśćmy przeciwnie, tj. $s_1 \geqslant s$. Mamy zatem nierówności $s_1 - s \geqslant 0$ oraz $s_1 - s_i \leqslant 0$ dla każdego i. Wówczas, dla dowolnego punktu $p = (x, y) \in V$ krzywą $\overline{Gp} = \overline{\{gp : g \in G\}} \subset \overline{V}$ można sparametryzować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{P}^1 \ni (t : u) \longmapsto \\ (x_1 t^s u^{s_1 - s} : \ldots : x_l t^s u^{s_1 - s} : y_1 t^{s_1} : \ldots : y_m t^{s_m} u^{s_1 - s_m} : u^{s_1}) \in \overline{V} \subset \mathbb{P}^n. \end{aligned}$$

To pokazuje, że rozmaitość $\overline{V}$ zawiera punkt:

$$\gamma(1:0) = (\overbrace{* : \ldots : *}^{l} : \overbrace{y_1 : * : \ldots : *}^{m} : 0) \in \overline{V} \setminus V.$$

Pamiętając o założeniu $\overline{V} \setminus V \subset L$ dostajemy $y_1 = 0$. Ponieważ punkt $p \in V$ wybraliśmy dowolnie, to otrzymujemy $V \subset \{y_1 = 0\}$, ale to jest sprzeczne z założeniem o V. Przypuszczenie $s_1 \geqslant s$ musiało być zatem niesłuszne, co dowodzi, że $s > s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_m$.

Analogicznie udowodnimy nierówność $s_m \geqslant 0$. Gdyby bowiem $s_m < 0$ oraz $p = (x, y) \in V$, to parametryzacja krzywej $\overline{Gp}$ musiałaby mieć postać

$$\begin{aligned} (x_1 t^s : \ldots : x_l t^s : y_1 t^{s_1} u^{s - s_1} : \ldots : y_m t^{s_m} u^{s - s_m} : u^s) = \\ (x_1 t^{s - s_m} : \ldots : x_l t^{s - s_m} : y_1 t^{s_1 - s_m} u^{s - s_1} : \ldots : y_m u^{s - s_m} : t^{-s_m} u^s). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Zauważmy, że $s - s_m > 0$ oraz $s_i - s_m \geqslant 0$, $-s_m > 0$. Dla $t = 0$ i $u = 1$ otrzymujemy tym razem

$$(\overbrace{* : \ldots : *}^{l} : \overbrace{* : \ldots : * : y_m}^{m} : 0) \in \overline{V} \setminus V \subset L \Longrightarrow y_m = 0,$$

a więc mamy sprzeczność $V \subset \{y_m = 0\}$.

Pokazaliśmy do tej pory, że $s > s_1 > \ldots > s_m \geqslant 0$. Jeśli $s_m = 0$, to grupa G zachowuje formę liniową $l(x, y) = y_m$. Wtedy na mocy twierdzenia 4.4.1 zbiór $\overline{V} \setminus V$ zawiera składową prostokreślną. Przypuśćmy zatem, że $s_m > 0$. Z twierdzenia 5.4.3 wynika, że rozmaitość V ma punkt osobliwy albo jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną. W pierwszym przypadku dowód jest zakończony. W drugim, możemy zastosować twierdzenie 2.4.1 o uzwarceniu przestrzeni afinicznej, z którego wiemy, że jeśli V jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną, to wszystkie składowe $\overline{V} \setminus V$ muszą być prostokreślne.

Uwaga. W kontekście, w którym chcemy użyć lematu 5.4.2 wiemy, że grupa automorfizmów $\mathrm{Aut}(V)$ jest afiniczna. To pokazuje, że rozmaitość V nie może być izomorficzna z przestrzenią afiniczną.

5.4.3 Przypadek addytywny

Kluczową rolę w dowodzie odgrywa następujące twierdzenie charakteryzujące wszystkie zanurzenia $\mathbb{G}_a$ w grupę macierzy. Może się wydać zaskakującym, że nie zależy ono od charakterystyki bazowego ciała k.

Twierdzenie 5.4.5. *Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, dowolnej charakterystyki i niech $G \subset \mathrm{GL}(n, k)$ będzie jednowymiarową domkniętą podgrupą, przemienną, unipotentną. Jeżeli charakterystyka ciała k jest równa $p > 0$ to załóżmy dodatkowo, że G jest p-torsyjna. Wówczas, przestrzeń*

$$\mathfrak{N} := \mathrm{span}_k\{1 - g \in g \in G\} \subset \mathrm{M}(n \times n, k)$$

składa się wyłącznie z macierzy nilpotentnych. ([7]) *Ponadto, istnieje taka macierz $A \in \mathfrak{N}$, że odwzorowanie*

$$\mathbb{G}_a \ni t \longmapsto \exp(tA) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!} \in G \subset \mathrm{GL}(n, k) \tag{5.11}$$

ustala izomorfizm grup $\mathbb{G}_a \simeq G$.

[7] Nilpotentność macierzy $1 - g$ jest konsekwencją faktu, że grupa $\mathbb{G}_a$ jest unipotentna.

Uwaga. W przypadku charakterystyki dodatniej p-torsyjność grupy G implikuje, że $A^p = 0$. Zatem suma kończy się dokładnie tam gdzie trzeba, tj. na wyrazie $i = p - 1$.

Dowód. Zob. [Hum75, §15.1] oraz [Hum75, §20.2]. Warto podkreślić, że twierdzenie to jest najważniejszym krokiem dowodu, że jednowymiarowa grupa afiniczna o wymienionych w tezie własnościach musi być izomorficzna z $\mathbb{G}_a$.

Przechodzimy teraz do dowodu lematu 5.4.2 w przypadku addytywnym. Dla wygody czytelnika powtarzamy jeszcze raz jego wypowiedź.

Lemat 5.4.2. *Niech $G \subset \mathrm{Aff}(l,m)$ będzie domkniętą podgrupą izomorficzną z $\mathbb{G}_a$. Niech $V \subset \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^l \times \mathbb{A}^m$ będzie rozmaitością G-niezmienniczą o normalnym domknięciu rzutowym $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n$, która nie zawiera się w żadnej właściwej podprzestrzeni afinicznej, ale zachodzi $\overline{V} \setminus V \subset L$. Przypomnijmy, że L oznacza podprzestrzeń w nieskończoności, zdefiniowaną jako wspólne miejsce zerowe pierwszych l zmiennych. Wówczas $\overline{V} \setminus V$ zawiera składową prostokreślną.*

Dowód. Z twierdzenia 5.4.5 wynika, że musi istnieć taka nilpotentna macierz $A \in \mathrm{span}_k\{1 - g : g \in G\}$, że każdy element $g = g(t) \in G$ jest reprezentowany przez $\exp(tA)$. Ponieważ $G \subset \mathrm{Aff}(l,m)$, to macierz A musi być postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_1 & * \\ 0 & A_2 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} A_1 \in \mathrm{M}(l \times m) \\ A_2 \in \mathrm{M}(m \times m) \end{matrix}, \quad \text{ozn. } B := \begin{bmatrix} A_2 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Macierz B będzie pełniła funkcję pomocniczą. Dowód zakończymy analizując trzy przypadki: **1.** $m = 0$, **2.** $m \geqslant 1$, $\operatorname{rank} B < m$, **3.** $m \geqslant 1$, $\operatorname{rank} B = m$.

Ad 1. Gdy $m = 0$, to oczywiście $n = l$. Wówczas $\dim\ker A = n$. Rzeczywiście, z jednej strony jądro macierzy A pokrywa się z przestrzenią własną każdej macierzy $g(t) = \exp(tA)$, bo jeśli $Av = 0$ (lub $vA = 0$), to mamy

$$\exp(tA)v = \Big(1 + \sum (t^i A^i)/i!\Big)\, v = v + \sum (t^i A^i v)/i! = v + 0.$$

Z drugiej strony, ze względu na postać elementów grupy $\mathrm{Aff}(l,m)$ każdy element $g = g(t) \in G$ ma dokładnie n wektorów własnych odpowiadających wartości własnej 1. Macierz A musi mieć zatem postać Jordana z dokładnie jedną nietrywialną klatką 2×2, np. w pewnym układzie współrzędnych ([8])

[8] *A priori* nie musi to być afiniczna zmiana układu współrzędnych, tj. zachowująca hiperpłaszczyznę w nieskończoności, choć można pokazać, że taką również da się znaleźć. Przekonamy się o tym w dalszej części dowodu.

może wyglądać tak

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ czyli } \exp(tA) \sim \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

To oznacza, że $\overline{V}$ można wypełnić liniami prostymi postaci:

$$(t : u) \longmapsto (v_1 u : \ldots : v_n u + v_{n+1} t : u v_{n+1}), \tag{5.13}$$

gdzie $(v_1 : \ldots : v_n : v_{n+1}) \in \overline{V}$. A więc $\overline{V}$ jest stożkiem o wierzchołku w punkcie $p := (0 : \ldots : 0 : 1 : 0)$.

Uwaga. Gdybyśmy założyli, że domknięcie rzutowe $\overline{V}$ jest gładkie, to dowód pierwszego przypadku byłby zakończony, gdyż jedyne gładkie stożki to podprzestrzenie liniowe. Skoro jednak pracujemy przy założeniu samej normalności, to będziemy potrzebowali jeszcze jednego argumentu.

Chcemy teraz „odnaleźć” dywizor $\overline{V} \setminus V$. Wprawdzie zmieniliśmy układ współrzędnych, jednak podprzestrzeń L możemy w dalszym ciągu zidentyfikować jako zbiór punktów stałych działania grupy G. Wobec (5.13) mamy

$$L = \{(y_1 : \ldots : y_n : y_{n+1}) \in \mathbb{P}^n : y_{n+1} = 0\}.$$

W konsekwencji $p \in \overline{V} \setminus V = \overline{V} \cap L$. To pokazuje, że również $\overline{V} \setminus V$ jest stożkiem. Dowód kończy zatem następująca obserwacja:

Obserwacja. *Każdy stożek $C \subset \mathbb{P}^n$ jest prostokreślny.*

Ad 2. Zakładamy teraz, że $m \geqslant 1$ oraz $\operatorname{rank} B < m$. Wówczas w lewostronnym jądrze macierzy B leży wektor własny $(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1})$, różny od trywialnego $(0, \ldots, 0, 1)$. Dopisując odpowiednią liczbę zer na początku, zdefiniujmy

$$v := (0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_m, 0) = \\ (0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}) - v_m \cdot (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, 1),$$

który leży w lewostronnym jądrze macierzy A, a więc jest także wektorem własnym macierzy $g(t)\exp(tA) \in G$. Oznacza to, że forma liniowa:

$$l(x, y) = v_1 y_1 + \ldots + v_m y_m \in k[x, y]$$

jest G-niezmiennicza. Z założenia mamy $\overline{V} \setminus V \subset L \subset \{l = 0\}$. Ponieważ $\overline{V}$ jest rozmaitością normalną, to możemy skorzystać z twierdzenia 4.4.1 dowodząc tym samym, że $\overline{V} \setminus V$ zawiera składową prostokreślną.

Ad 3. Na koniec pokażemy, że sytuacja $m \geqslant 1$ oraz $\operatorname{rank} B = m$ w ogóle nie może mieć miejsca. Gdyby $\operatorname{rank} B = m$ to macierz A miałaby postać Jordana

$$J := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad \text{czyli} \quad \exp(tA) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(tK) \end{bmatrix},$$

gdzie K jest klatką o wymiarach $(m+1) \times (m+1)$ pochodzącą od B. Pamiętamy, że że B jest macierzą nilpotentną o jądrze wymiaru 1. W szczególności, $m+1$ jest najmniejszą taką liczbą całkowitą, że $A^{m+1} = 0$. Podkreślmy, że w przypadku charakterystyki dodatniej, to już implikuje $m + 1 = p$, bo wówczas grupa G jest p-torsyjna.

Twierdzimy, że można sprowadzić A do postaci J za pomocą afinicznej zmiany zmiennych, tj. istnieje taki automorfizm $Q \in \operatorname{Aff}(n)$, że $QAQ^{-1} = J$. Istotnie, weźmy dowolny lewostronny wektor cykliczny macierzy B, czyli taki, że $v \notin \ker B^m$. Następnie zdefiniujmy

$$\widetilde{v} := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{l}, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m).$$

Niech P będzie macierzą złożoną z wierszy

$$e_1, \ \ldots, \ e_l, \ \widetilde{v}A, \ \widetilde{v}A^2, \ \ldots, \ \widetilde{v}A^{m-1}, \ \widetilde{v}A^m,$$

gdzie $e_1, \ldots, e_l \in k^{n+1}$ oznaczają kolejne wektory bazy kanonicznej. Z oczywistych względów mamy $QA = JQ$. Dzięki założeniu, że v jest wektorem cyklicznym macierzy B łatwo również zobaczyć, że Q ma wiersze liniowo niezależne. Ponieważ każdy z wierszy $\widetilde{v}A^i$ rozpoczyna się zerami, to w rzeczywistości Q jest macierzą blokową. To pokazuje, że zadany przez Q automorfizm $\mathbb{P}^n$ stabilizuje przestrzeń L, co za moment okaże się bardzo istotne. Wreszcie, skoro $vB^m \in \ker B$ to $vB^m \sim (0, \ldots, 0, \lambda)$, więc po ewentualnym przeskalowaniu wektora v ([9]) możemy przyjąć, że $\lambda = 1$, czyli ostatecznie $Q \in \operatorname{Aff}(n)$.

Pokażemy teraz jak doprowadzić do sprzeczności. Eksponentę klatki K możemy łatwo wyznaczyć. Uwzględniając, że w przypadku dodatniej charaktery-

[9] Możemy to zrobić bo pracujemy nad ciałem algebraicznie domkniętym.

styki mamy $p = m + 1$, obliczamy

$$\exp(tK) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^m}{m!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla dowolnego punktu $v = (x, y) \in V$, odwzorowanie $t \longmapsto \exp(tA)v$ przedłuża się do morfizmu $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \overline{V}$ wzorem:

$$\begin{aligned} (t:u) \longmapsto \Big(& x_1 u^m : \ldots : x_l y^m : \\ & y_1 u^m + y_2 u^{m-1} t + y_3 \frac{u^{m-2} t^2}{2!} + \ldots + y_m \frac{u t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t^m}{m!} : \\ & y_2 u^m + y_3 u^{m-1} t + y_4 \frac{u^{m-2} t^2}{2!} + \ldots + \frac{u t^{m-1}}{(m-1)!} : \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & y_{m-1} u^m + y_m u^{m-1} t + \frac{u^{m-2} t^2}{2!} : y_m u^m + m u^{m-1} t : u^m \Big). \end{aligned}$$

Podstawiając $t = 1$ i $u = 0$ widzimy, że każda taka krzywa zawiera punkt

$$p := (\underbrace{0 : \ldots : 0}_{l} : 1 : \underbrace{0 : \ldots : 0}_{m}) \in \overline{V} \setminus V.$$

Pamiętamy, że wprowadzona zmiana zmiennych nie poruszyła przestrzeni L. Zatem ewidentnie $p \notin L$, co daje sprzeczność z założeniem $\overline{V} \setminus V \subset L$ i tym samym pozwala zakończyć dowód.

Bibliografia

[Abh56] S. Abhyankar. On the valuations centered in a local domain. *American Journal of Mathematics*, 78(2):321–348, 1956.

[AZ55] S. Abhyankar and O. Zariski. Spliting of valuations in extensions of local domains. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 41(2):84–90, 1955.

[BB66] A. Białynicki-Birula. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 14:177–181, 1966.

[BB73] A. Białynicki-Birula. On fixed point schemes of actions of multiplicative and additive groups. *Topology*, 12:99–103, 1973.

[Bor13] L. Borisov. Does every ample divisor span a hyperplane? Discussion at: http://mathoverflow.net/questions/144143/, Oct. 2013.

[Gor68] P. Gordan. Beweis, dass jede covariante und invariante einer binären form eine ganze function mit numerischen coefficienten einer endlichen anzahl solcher formen ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 69:323–354, 1868.

[Har97] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[Hum75] J. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975.

[Iit82] S. Iitaka. *Algebraic Geometry: An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1982.

[Jel93] Z. Jelonek. Irreducible identity sets for polynomial automorphisms. *Mathematische Zeitschrift*, 212:601–617, 1993.

[Jel94] Z. Jelonek. Affine smooth varieties with finite group of automorphisms. *Mathematische Zeitschrift*, 216:575–591, 1994.

[Jel95] Z. Jelonek. The group of automorphisms of an affine non-uniruled surface. *Univ. Iaegel. Acta Math.*, 32:65–68, 1995.

[Jel96] Z. Jelonek. The group of automorphisms of an affine smooth non-uniruled variety. In *Geometry Seminars, 1994–1995 (Italian) (Bologna)*, pages 169–180. Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1996.

[JLas09] Z. Jelonek and M. Lasoń. The set of fixed points of a unipotent group. *Journal of Algebra*, 322:2180–2185, 2009.

[JLen13] Z. Jelonek and T. Lenarcik. Automorphisms of affine smooth varieties. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 2013. to appear.

[Kam79] T. Kambayashi. Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group actions on affine space. *Journal of Algebra*, 60:439–451, 1979.

[Kap74] I. Kaplansky. *Commutative Rings. Revised Edition.* University of Chicago Press, 1974.

[Kol96] J. Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties.* A Series of Modern Surveys in Mathematics Series. Springer, 1996.

[Liu06] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 2006.

[Mat80] H. Matsumura. *Commutative algebra.* Mathematics Lecture Notes Series. Benjamin/Cummings Pob. Co., 1980.

[Miy69] M. Miyanishi. Some remarks on the actions of the additive group schemes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 10(1):189–205, 1969.

[Mum99] D. Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes.* Lacture Notes in Mathematics. Springer, 1999.

[Nag72] M. Nagata. *On automorphism group of* $k[x, y]$. Lectures in mathematics. Kinokuniya Book-store, 1972.

[Ros55] M. Rosenlicht. Automorphisms of function fields. *Transactions of the AMS*, 79(1):1–11, 1955.

[Ros56] M. Rosenlicht. Some basic theorems on algebraic groups. *American Journal of Mathematics*, 78(2):401–443, 1956.

[Ros63] M. Rosenlicht. A remark on quotient spaces. *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, 35:487–489, 1963.

[Ros67] M. Rosenlicht. Another proof of a theorem on rational cross sections. *Pacific Journal of Mathematics*, 20(1):129–133, 1967.

[Sal07] G. Salvador. *Topics in the Theory of Algebraic Function Fields.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser, 2007.

[Tot07] B. Totaro. The automorphism group of an affine quadric. *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.*, 143:1–8, 2007.

[vdE00] A. van der Essen. *Polynomial automorphisms and the Jacobian Conjecture.* Birkhäuser Verlag, 2000.

[vdW49] B. L. van der Waerden. *Modern algebra, vol. I.* Frederick Ungar Publishing Company, 1949.

[Wei62] A. Weil. *Foundations of Algebraic Geometry.* Number t. 29, pkt 1 in American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1962.