Polska Akademia Nauk
Instytut Matematyczny

Tomasz Paweł Rogala

Konstrukcja ceny kalkulacyjnej dla rynku z proporcjonalnymi kosztami za transakcje

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy
prof. dr hab. Łukasz Stettner
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Sierpień, 2014

Oświadczenie autora rozprawy

Oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

data podpis autora rozprawy

Oświadczenie promotora rozprawy

Niniejsza roprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

data podpis promotora rozprawy

Spis treści

Wstęp

Niniejsza rozprawa doktorska dotyczy problemu maksymalizacji oczekiwanej użyteczności na rynkach z kosztami za transakcje. Celem rozprawy jest konstrukcja rynku bez kosztów za transakcje, na którym cena aktywa (np. akcji) leży pomiędzy ceną sprzedaży a ceną kupna na rynku z kosztami za transakcje. Rynek ten ma być taki, by optymalna wartość oczekiwanej użyteczności była równa optymalnej wartości oczekiwanej użyteczności na rynku z kosztami za transakcje.

Problem ten jest tutaj rozwiązany dla rynku z czasem dyskretnym zarówno w czasie skończonym jak i nieskończonym dla bardzo ogólnego przypadku cen i bardzo ogólnych funkcji użyteczności. Zakładamy, że procesy cen są dowolnymi procesami, które spełniają założenie pełnego warunkowego nośnika, zaś funkcja użyteczności jest dowolną wklęsłą i ściśle rosnącą funkcją.

Chciałbym podziękować mojemu promotorowi prof. Łukaszowi Stettnerowi za kierowanie tą pracą, zachętę oraz poświęcony czas na licznych konsultacjach.

Pragnąłbym także podziękować Środowiskowym Studiom Doktoranckim z Nauk Matematycznych w ramach, których pisałem tę rozprawę, za możliwość podjęcia studiów doktoranckich.

Rozdział 1

Sformułowanie problemu

1.1 Używane oznaczenia oraz konwencja

W całej pracy przez int i cl oznaczać będziemy wnętrze i domknięcie zbioru odpowiednio. Natomiast przez $\overline{\mathbb{R}}$ rozumieć będziemy zbiór $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a przez $\mathbb{R}_+$ rozumiemy zbiór $[0, \infty)$. Przez $\mathbb{Q}$ oznaczamy zbiór liczb wymiernych. Przez $||\cdot||$ oznaczać będziemy euklidesową normę na $\mathbb{R}^d$. Przez $supp$ i $conv$ oznaczamy odpowiednio nośnik i otoczkę wypukłą wektora losowego. Jeśli $a \in \overline{\mathbb{R}}$, to przez a^+ i a^- oznaczać będziemy część dodatnią i ujemną a odpowiednio.

W pracy rozważamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Wprowadzamy następujące dwie konwencje.

Konwencja 1.1. *Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ niech będzie σ-ciałem. Niech X będzie taką zmienną losową na tej przestrzeni probabilistycznej, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Poprzez warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej X pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G}$ rozumieć będziemy jej regularną wersję, której istnienie udowodnione jest w [16].*

Konwencja 1.2. *Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ niech będzie σ-ciałem. Przyjmujemy, że warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej $Z := -\infty$ pod warunkiem $\mathcal{G}$ jest równa $-\infty$, tzn.*

$$\mathbb{E}(-\infty|\mathcal{G}) := -\infty. \tag{1.1}$$

Definicja 1.1. *Niech (X, σ) będzie przestrzenią mierzalną. Funkcję $f : X \times \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazwiemy funkcją losową, jeśli f jest funkcją $\sigma \otimes \mathcal{F}$-mierzalną taką, że dla każdej zmiennej losowej Y przyjmującej wartości w przestrzeni X funkcja $f(Y, \cdot) : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest zmienną losową. Zamiast pisać, że $f : X \times \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją losową będziemy pisać, że $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją losową.*

Powiemy, że funkcja losowa $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest ciągła, jeśli dla każdego $\omega \in \Omega$ funkcja $f(\cdot, \omega) : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest ciągła.

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Powiemy, że funkcja losowa $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna, jeśli odwzorowanie $f : X \times \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest $\sigma \otimes \mathcal{G}$-mierzalne.

Definicja 1.2. *Niech (X, σ) będzie przestrzenią mierzalną. Funkcję losową $f : X \times \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy półciągłą z dołu, jeśli dla każdego $u \in X$ mamy*

$$\liminf_{x \longrightarrow u} f(x) \geq f(u) \tag{1.2}$$

a półciągłą z góry, jeśli finkcja losowa $-f$ jest półciągła z dołu.

W całej pracy przez $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ oznaczać będziemy funkcję wklęsłą (niekoniecznie ściśle) i ściśle rosnącą.

Przez γ oznaczać będziemy dowolną stałą z przedziału $(0, 1)$. Stałą tę interpretować będziemy jako dyskonto.

Zdefiniujmy zbiór

$$\mathbb{D} := \{(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{R}^4_+ : \overline{s} > \underline{s} > 0\}. \tag{1.3}$$

Każdy element $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ składa się z czterech elementów. Pierwszy interpretujemy jako ilość pieniędzy w banku, drugi jaki ilość akcji, trzeci jako cenę sprzedaży jednostki akcji a czwarty jako cenę kupna jednostki akcji.

1.2 Problem w czasie skończonym

Niech na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dane będą procesy $\underline{S} = (\underline{S}_n)_{n=0}^N$ i $\overline{S} = (\overline{S}_n)_{n=0}^N$ adaptowane do filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ takie, że $\overline{S}_n > \underline{S}_n > 0$ dla $n = 0, 1, 2, ..., N$, interpretowane jako ceny sprzedaży i kupna akcji odpowiednio na rynku. Załóżmy, że procesy te spełniają następujące założenie pełnego warunkowego nośnika

$$\begin{aligned} conv(supp\mathbb{E}[(\underline{S}_n, \underline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]) &= \{\underline{S}_n\} \times [0, \infty), \\ conv(supp\mathbb{E}[(\overline{S}_n, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]) &= \{\overline{S}_n\} \times [0, \infty) \end{aligned} \tag{1.4}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, gdzie powyższe warunkowe wartości oczekiwane rozumiemy jako ich regularne wersje.

Znaczenie warunku (1.4) jest następujące. W każdym momencie czasu w przyszłości niezależnie od przeszłości z niezerowym prawdopodobieństwem cena sprzedaży może być dowolnie bliska zeru, zaś cena sprzedaży może być dowolnie duża. W efekcie, aby uniknąć bankructwa inwestor nie może ani zadłużać się w banku ani dokonać krótkiej sprzedaży.

Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem z czasem dyskretnym o N okresach, na którym w każdej chwili $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ inwestor może kupować akcje, płacąc $\overline{S}_n$ za jednostkę akcji, sprzedawać akcje po $\underline{S}_n$ za jednostkę. Zakładamy, że akcje są nieskończenie podzielne, zaś swoje pieniądze inwestor trzyma na bezpiecznym rachunku bankowym o zerowej stopie zwrotu. Inwestor w każdej chwili czasowej przeznacza część swoich pieniędzy na konsumpcję.

Definicja 1.3. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. *Powiemy, że adaptowany do filtracji* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ *ciąg zmiennych losowych* $u = (x_n, y_n, c_n, l_n, m_n)_{n=0}^N$ *z* $\mathbb{R}_+^5$ *jest strategią dopuszczalną z pozycją początkową* (x, y) *i cenami początkowymi* $(\underline{s}, \overline{s})$*, jeśli dla każdego* $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ *mamy*

$$
\begin{aligned}
0 \leq x_{n+1} :=& x_n - c_n + \underline{S}_n m_n - \overline{S}_n l_n, \\
0 \leq y_{n+1} :=& y_n - m_n + l_n, \\
0 \leq & c_n \leq x_n + \underline{S}_n y_n,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

gdzie $(x_0, y_0, \underline{S}_0, \overline{S}_0) := (x, y, \underline{s}, \overline{s})$. *Zbiór wszystkich strategii dopuszczalnych z pozycją początkową* (x, y) *i cenami początkowymi* $(\underline{s}, \overline{s})$ *oznaczać będziemy* $\mathcal{U}_{(x,y)}^N(\underline{S}, \overline{S})$*, gdzie* $\underline{S}$ *i* $\overline{S}$ *są zdefiniowanymi powyżej procesami.*

Omówmy powyższą Definicję. W każdym momencie $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ inwestor ma pozycję (x_n, y_n), zaś cena sprzedaży wynosi $\underline{S}_n$ a cena kupna $\overline{S}_n$. Inwestor konsumuje c_n, sprzedaje m_n akcji po cenie $\underline{S}_n$ i kupuje l_n akcji po cenie $\overline{S}_n$. W efekcie w momencie $n+1$ jego pozycją będzie (x_{n+1}, y_{n+1}).

Inwestor swoje decyzje podejmuje w taki sposób, aby zmaksymalizować wartość funkcjonału

$$
\mathbf{J}^N(u) := \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N} \gamma^n g(c_n)
\tag{1.6}
$$

po wszystkich strategiach $u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^N(\underline{S}, \overline{S})$.

Znaczenie funkcjonału $\mathbf{J}^N$ jest oczywiste. Jest to funkcjonał opisujący wartość oczekiwaną zdyskontowanej użyteczności z konsumpcji.

Zakładamy, że

$$
\forall_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}} \quad \sup_{u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^N(\underline{S}, \overline{S})} \mathbf{J}^N(u) < \infty.
\tag{1.7}
$$

Wniosek 1.1. *Dla każdego* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ *i dla każdego* $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ *mamy*

$$
\mathbb{E} g(x + \underline{S}_n y) < \infty.
\tag{1.8}
$$

Dowód. Ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ i $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne.

Weźmy pod uwagę strategię $u^\varepsilon \in \mathcal{U}_{(x+\varepsilon,y)}^N(\underline{S}, \overline{S})$ taką, że dla $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ mamy

(i) $c_n^\varepsilon = \frac{1}{2^n} \cdot \varepsilon$, gdy $k \neq n$,

(ii) $c_n^\varepsilon = x + \underline{S}_n y$,

(iii) $l_k^\varepsilon = m_k^\varepsilon = 0$.

Na mocy założenia (1.7) dostajemy, że

$$\infty > \sup_{u \in \mathcal{U}^N_{(x+\varepsilon,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^N(u) \geq \mathbf{J}^N(u^\varepsilon) = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{N} \gamma^k g(c_k^\varepsilon),$$

co oczywiście oznacza w szczególności, że $\mathbb{E}g(x + \underline{S}_n y) < \infty$.

To kończy dowód. □

Zakładamy, że

$$\forall_{n\in\{0,1,2,\ldots,N\}}\ \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}_+\setminus\{(0,0)\}}\ \ \mathbb{E}g(x + \underline{S}y)^- < \infty. \tag{1.9}$$

Powyższe założenie na proces ceny sprzedaży $(\underline{S}_n)_{n=0}^N$ jest techniczne. Zgodnie z Lematem 3.1 założenie to gwarantuje, że wprowadzone równania Bellmana mają pewne ważne własności.

Definicja 1.4. *Powiemy, że strategia $\hat{u} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$ jest optymalna dla problemu (1.6), jeśli*

$$\mathbf{J}^N(\hat{u}) = \sup_{u\in\mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^N(u). \tag{1.10}$$

Definicja 1.5. *Niech $\varepsilon > 0$. Powiemy, że strategia $u^{(\varepsilon)} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$ jest ε-optymalna dla problemu (1.6), jeśli*

$$\mathbf{J}^N(u^{(\varepsilon)}) + \varepsilon \geq \sup_{u\in\mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^N(u). \tag{1.11}$$

Łatwo zauważyć, że z definicji supremum wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje strategia $u^{(\varepsilon)} \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$, która jest ε-optymalna dla problemu (1.6).

Celem niniejszej pracy jest zbadanie, czy istnieje taki rynek bez kosztów za transakcje, w którym cena znajduje się pomiędzy ceną kupna i sprzedaży z rynku z kosztami za transakcje tak, by optymalna wartość funkcjonału (1.6) na obu rynkach jest identyczna.

Zbiór strategii dopuszczalnych możemy również zdefiniować dla każdego rynku, na którym nie ma kosztów za transakcje. W szczególności możemy go zdefiniować dla rynku bez kosztów za transakcje, na którym cena w każdym momencie czasu zależy od pozycji inwestora w początkowej chwili każdego okresu czasowego.

Definicja 1.6. *Niech*

$$S^* = \{S_n^* : n \in \{0,1,2,\ldots,N\}, S_n^* : \mathbb{D} \longrightarrow (0,\infty) \textit{ jest funkcją losową}\}$$

będzie taką rodziną, że dla każdego $n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ i dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ zmienna losowa $S_n^*(x,y,\underline{s},\overline{s})$ jest $\mathcal{F}_n$-mierzalna. Adaptowany ciąg $(x_n,y_n,c_n,l_n,m_n)_{n=0}^N$ zmiennych losowych przyjmujący wartości w $\mathbb{R}^5_+$ nazwiemy strategią dopuszczalną dla S^*, jeśli dla każdego $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{n+1} :=& x_n - c_n + S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)m_n - S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)l_n, \\ 0 \leq y_{n+1} :=& y_n - m_n + l_n, \\ 0 \leq& c_n \leq x_n + S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)y_n, \end{aligned} \tag{1.12}$$

gdzie $(x_0,y_0,\underline{S}_0,\overline{S}_0) := (x,y,\underline{s},\overline{s})$. Zbiór wszystkich strategii dopuszczalnych dla S^* z pozycją początkową (x,y) oznaczać będziemy przez $\mathcal{U}^N_{(x,y)}(S^*)$.

Zwróćmy uwagę, że powyższa definicja zawiera również przypadek, kiedy $S^* = (S_n^*)_{n=0}^N$, tzn. przypadek, kiedy S^* jest procesem stochastycznym. Innymi słowy, powyższa definicja zawiera przypadek rynku płynnego, tzn. takiego, na którym cena nie zależy od pozycji inwestora.

Jeżeli układ cen na rynku bez kosztów za transakcje przyjmuje wartości pomiędzy wartościami procesów $\underline{S}$ i $\overline{S}$, to rynek bez kosztów za transakcje jest zawsze lepszy dla inwestora niż rynek z kosztami za transakcje.

Stwierdzenie 1.1. *Niech*

$$S^* = \{S_n^* : n \in \{0,1,2,\dots,N\}, S_n^* : \mathbb{D} \longrightarrow (0,\infty) \textit{ jest funkcją losową}\}$$

będzie dowolną rodziną funkcji losowych takich, że

(i) dla każdego $n \in \{0,1,2,\dots,N\}$ i dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ zmienna losowa $S_n^*(x,y,\underline{s},\overline{s})$ jest $\mathcal{F}_n$-mierzalna,

(ii) $\forall_{n\in\{0,1,2,\dots,N\}}\forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}}\quad \underline{s} \le S_n^*(x,y,\underline{s},\overline{s}) \le \overline{s}$.

Wówczas

$$\sup_{u\in\mathcal{U}^N_{(x,y)}(S^*)} \mathbf{J}^N(u) \ge \sup_{u\in\mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^N(u) \tag{1.13}$$

Dowód. Niech $u \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$.

Skoro dla każdego $n \in \{0,1,2,\dots,N\}$ mamy

$$\underline{S}_n \le S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n) \le \overline{S}_n,$$

więc biorąc pod uwagę fakt, że $u \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$, dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&0 \le c_n \le x_n + \underline{S}_n y_n \le x_n + S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)y_n,\\
&0 \le x_n - c_n + \underline{S}_n m_n - \overline{S}_n l_n \le\\
&\quad \le x_n - c_n + S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)m_n - S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)l_n \le\\
&\quad \le x_n - c_n + S_n^*(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\cdot(m_n - l_n),\\
&0 \le y_n - m_n + l_n.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że $u \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(S^*)$. Innymi słowy zachodzi inkluzja $\mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S}) \subseteq \mathcal{U}^N_{(x,y)}(S^*)$. □

Naszym celem jest zbadanie istnienia najgorszego, z punktu widzenia inwestora, rynku bez kosztów za transakcje, na którym cena akcji przyjmuje wartości pomiędzy cenami kupna i sprzedaży z rynku z kosztami za transakcje.

Definicja 1.7. *Rodzinę*

$$\hat{S} = \{\hat{S}_n : n \in \{0,1,2,\ldots,N\}, \hat{S}_n : \mathbb{D} \longrightarrow (0,\infty) \text{ jest funkcją losową}\}$$

będziemy nazywać słabą ceną kalkulacyjną, jeśli

(i) dla każdego $n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ i dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ zmienna losowa $\hat{S}_n(x,y,\underline{s},\overline{s})$ jest $\mathcal{F}_n$-mierzalna,

(ii) $\forall_{n\in\{0,1,2,\ldots,N\}}\forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}}\quad \underline{s} \le \hat{S}_n(x,y,\underline{s},\overline{s}) \le \overline{s}$,

(iii) optymalna wartość funkcjonału (1.7) na rynku bez kosztów za transakcje, na którym inwestor mając w chwili $n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ pozycję (x,y), ma prawo handlować akcjami po cenie $\hat{S}_n(x,y,\underline{S}_n,\overline{S}_n)$, jest taka sama jak na rynku z kosztami za transakcje.

Podkreślmy tutaj bardzo wyraźnie, że słaba cena kalkulacyjna generuje rynek bez kosztów za transakcje, który nie jest płynny, tzn. taki rynek, na którym cena akcji w każdym momencie zależy od pozycji inwestora w tym momencie.

Poniższe Stwierdzenie orzeka, że każda optymalna strategia na rynku z kosztami za transakcje jest optymalną strategią na rynku ze słabą ceną kalkulacyjną.

Stwierdzenie 1.2. *Niech $\hat{u} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$ będzie optymalną strategią na rynku z kosztami za transakcje z początkową pozycją (x,y). Załóżmy, że istnieje słaba cena kalkulacyjna $\hat{S}$. Wówczas strategia $\hat{u}$ jest optymalną strategią na rynku bez kosztów za transakcje i z systemem cen $\hat{S}$.*

Dowód. Na mocy warunku (iii) Definicji 1.7 mamy

$$\sup_{u\in\mathcal{U}^N_{(x,y)}(\hat{S})} \mathbf{J}^N(u) = \sup_{u\in\mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^N(u) = \mathbf{J}^N(\hat{u}). \tag{1.14}$$

Pozostaje zatem pokazać, że $\hat{u}$ jest strategią dopuszczalną na rynku bez kosztów za transakcje i z systemem cen $\hat{S}$.

Skoro dla każdego $n \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ mamy

$$\underline{S}_n \le \hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n) \le \overline{S}_n,$$

więc biorąc pod uwagę fakt, że $\hat{u} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$, dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&0 \le \hat{c}_n \le \hat{x}_n + \underline{S}_n\hat{y}_n \le \hat{x}_n + \hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\hat{y}_n,\\
&0 \le \hat{x}_n - \hat{c}_n + \underline{S}_n\hat{m}_n - \overline{S}_n\hat{l}_n \le\\
&\quad \le \hat{x}_n - \hat{c}_n + \hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\hat{m}_n - \hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\hat{l}_n \le\\
&\quad \le \hat{x}_n - \hat{c}_n + \hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\cdot(\hat{m}_n - \hat{l}_n),\\
&0 \le \hat{y}_n - \hat{m}_n + \hat{l}_n.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że rzeczywiście, $\hat{u} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\hat{S})$. □

Uwaga 1.1. *Zgodnie z (1.13) w Stwierdzeniu 1.1 słaba cena kalkulacyjna generuje najgorszy z punktu widzenia inwestora niepłynny rynek, w którym cena akcji leży pomiędzy ceną sprzedaży i kupna z rynku z kosztami za transakcje.*

Wprowadzimy teraz pojęcie silnej ceny kalkulacyjnej.

Definicja 1.8. *Dla danej pozycji początkowej $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ proces $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{n=0}^N$ zależny od tej pozycji początkowej nazywać będziemy silną ceną kalkulacyjną, jeśli*

(i) *jest on adaptowany,*

(ii) $\forall_{n\in\{0,1,2,\dots,N\}} \quad \underline{S}_n \leq \tilde{S}_n \leq \overline{S}_n$,

(iii) *optymalna wartość funkcjonału (1.7) na rynku bez kosztów za transakcje z procesem ceny $\tilde{S}$ jest taka sama jak na rynku z kosztami za transakcje z pozycją początkową (x, y).*

Podkreślmy tutaj, że w przeciwieństwie do słabej ceny kalkulacyjnej silna cena kalkulacyjna jest procesem. Ponadto w przeciwieństwie do słabej ceny kalkulacyjnej zależy ona jedynie od pozycji początkowej.

Poniższe Stwierdzenie można dowieść w analogiczny sposób jak poprzednie.

Stwierdzenie 1.3. *Niech $\hat{u} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ optymalną strategia na rynku z kosztami za transakcje i z pozycją początkową (x, y). Załóżmy, że istnieje silna cena kalkulacyjna $\tilde{S}$. Wówczas $\hat{u}$ jest optymalną strategią na rynku bez kosztów za transakcje z pozycją początkową (x, y) i z procesem ceny $\tilde{S}$.*

Uwaga 1.2. *Szczególnym przypadkiem funkcjonału $\mathbf{J}^N$ jest funkcjonał $\mathbf{J}^N_*$ zdefiniowany za pomocą wzoru*

$$\mathbf{J}^N_*(u) := \mathbb{E}g(x_N + \underline{S}_N y_N), \tag{1.15}$$

który przedstawia oczekiwaną użyteczność wartości portfela w chwili końcowej. Ze względu na fakt, że metodologia dla tego funkcjonału jest identyczna przypadek tego funkcjonału pomijamy.

1.3 Problem w czasie nieskończonym

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją, na której są zdefiniowane dwa adaptowane procesy $\underline{S} = (\underline{S}_n)_{n=0}^\infty$ i $\overline{S} = (\overline{S}_n)_{n=0}^\infty$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy, że $\overline{S}_n > \underline{S}_n > 0$.

Załóżmy, że spełniony jest następujący warunek pełnego warunkowego nośnika w czasie nieskończonym

$$\begin{aligned} conv(supp\mathbb{E}[(\underline{S}_n, \underline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]) &= \{\underline{S}_n\} \times [0, \infty), \\ conv(supp\mathbb{E}[(\overline{S}_n, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]) &= \{\overline{S}_n\} \times [0, \infty) \end{aligned} \tag{1.16}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Znaczenie warunku (1.16) jest analogiczne do znaczenia (1.4) przy czym (1.16) jest rozpatrywany na nieskończonym horyzoncie czasowym. W każdym momencie czasu w przyszłości niezależnie od przeszłości z niezerowym prawdopodobieństwem cena sprzedaży może być dowolnie bliska zeru, zaś cena sprzedaży może być dowolnie duża. W efekcie inwestor nie może ani zadłużać się w banku ani dokonać krótkiej sprzedaży.

Definicja 1.9. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. Powiemy, że adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ ciąg zmiennych losowych $u = (x_n, y_n, c_n, l_n, m_n)_{n=0}^{\infty}$ z $\mathbb{R}_+^5$ jest strategią dopuszczalną z pozycją początkową (x, y) i cenami początkowymi $(\underline{s}, \overline{s})$, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy*

$$
\begin{aligned}
0 \leq x_{n+1} &:= x_n - c_n + \underline{S}_n m_n - \overline{S}_n l_n, \\
0 \leq y_{n+1} &:= y_n - m_n + l_n, \\
0 \leq c_n &\leq x_n + \underline{S}_n y_n,
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

gdzie $(x_0, y_0, \underline{S}_0, \overline{S}_0) := (x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Zbiór wszystkich strategii dopuszczalnych z pozycją początkową (x, y) i cenami początkowymi $(\underline{s}, \overline{s})$ oznaczać będziemy $\mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$, gdzie procesy $\underline{S}$ i $\overline{S}$ wprowadzone zostały powyżej.

Znaczenie powyższej Definicji jest podobne jak poprzednio. W każdym momencie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ inwestor ma pozycję (x_n, y_n), zaś cena sprzedaży wynosi $\underline{S}_n$ a cena kupna $\overline{S}_n$. Inwestor konsumuje c_n, sprzedaje m_n akcji po cenie $\underline{S}_n$ i kupuje l_n akcji po cenie $\overline{S}_n$. W efekcie w momencie $n+1$ jego pozycją będzie (x_{n+1}, y_{n+1}).

Będziemy rozważać problem maksymalizacji funkcjonału

$$
\mathbf{J}^{\infty}(u) := \liminf_{N \to \infty} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N} \gamma^n g(c_n) \tag{1.18}
$$

na zbiorze $\mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$.

Jest to funkcjonał opisujący wartość oczekiwaną zdyskontowanej użyteczności z konsumpcji. W tym wypadku, rozważając czas nieskończony, badamy granicę dolną.

Zakładamy, że

$$
\forall_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}} \sup_{u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})} \mathbf{J}^{\infty}(u) < \infty. \tag{1.19}
$$

Wniosek 1.2. *Dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ i dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy*

$$
\mathbb{E} g(x + \underline{S}_n y) < \infty. \tag{1.20}
$$

Dowód. Ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne.

Weźmy pod uwagę strategię $u^{\varepsilon} \in \mathcal{U}_{(x+\varepsilon,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$ taką, że dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy

(i) $c^\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}\cdot\varepsilon$, gdy $k \neq n$,

(ii) $c^\varepsilon_n = x + \underline{S}_n y$,

(iii) $l^\varepsilon_k = m^\varepsilon_k = 0$.

Na mocy założenia (1.19) dostajemy, że

$$\infty > \sup_{u\in\mathcal{U}^N_{(x+\varepsilon,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^N(u) \geq \mathbf{J}^N(u^\varepsilon) = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{N}\gamma^n g(c^\varepsilon_k),$$

co oczywiście oznacza w szczególności, że $\mathbb{E}g(x+\underline{S}_n y) < \infty$.

To kończy dowód. $\square$

Jeżeli funkcja użyteczności jest ograniczona z dołu, to bez straty ogólności możemy zakładać, że jest ona nieujemna.

Uwaga 1.3. *Jeśli $g(0) > -\infty$, to problem (1.18) jest 'równoważny' problemowi maksymalizacji*

$$\tilde{\mathbf{J}}^\infty(u) := \liminf_{N\to\infty}\mathbb{E}\sum_{n=0}^{N}\gamma^n\tilde{g}(c_n) \tag{1.21}$$

na zbiorze $\mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$, gdzie $\tilde{g}(t) := g(t) - g(0)$. Innymi słowy, jeśli $g(0) > -\infty$, to możemy ograniczyć się do przypadku, gdy $g(0) = 0$, tzn. do przypadku, gdy g jest nieujemna.

Podobnie jak poprzednio zbiór strategii dopuszczalnych zdefiniować możemy dla rynku bez kosztów za transakcje, dopuszczając ewentualną zależność ceny od pozycji.

Definicja 1.10. *Niech*

$$S^* = \{S^*_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, S^*_n : \mathbb{D}\longrightarrow(0,\infty) \text{ jest funkcją losową}\}$$

będzie taką rodziną nieujemnych funkcji losowych, że dla każdego $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ i dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}$ zmienna losowa $S^*_n(x,y,\underline{s},\overline{s})$ jest $\mathcal{F}_n$-mierzalna. Adaptowany ciąg $(x_n,y_n,c_n,l_n,m_n)_{n=0}^\infty$ zmiennych losowych przyjmujący wartości w $\mathbb{R}^5_+$ nazwiemy strategią dopuszczalną dla S^*, jeśli dla każdego $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{n+1} :=& x_n - c_n + S^*_n(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)m_n - S^*_n(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)l_n,\\ 0 \leq y_{n+1} :=& y_n - m_n + l_n,\\ 0 \leq& c_n \leq x_n + S^*_n(x_n,y_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)y_n, \end{aligned} \tag{1.22}$$

gdzie $(x_0,y_0,\underline{S}_0,\overline{S}_0) := (x,y,\underline{s},\overline{s})$. Zbiór wszystkich strategii dopuszczalnych dla S^* z pozycją początkową (x,y) oznaczać będziemy przez $\mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(S^*)$.

Tak jak poprzednio dla skończonego horyzonty czasowego tak i dla nieskończonego horyzontu czasowego jeżeli układ cen na rynku bez kosztów za transakcje przyjmuje wartości pomiędzy wartościami procesów $\underline{S}$ i $\overline{S}$, to rynek bez kosztów za transakcje jest zawsze lepszy dla inwestora niż rynek z kosztami za transakcje.

Stwierdzenie 1.4. *Niech*

$$S^* = \{S_n^* : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, S_n^* : \mathbb{D} \longrightarrow (0, \infty) \text{ jest funkcją losową}\}$$

będzie dowolną rodziną funkcji losowych takich, że

(i) dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *zmienna losowa* $S_n^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *jest* $\mathcal{F}_n$*-mierzalna,*

(ii) $\forall_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}} \quad \underline{s} \leq S_n^*(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \leq \overline{s}.$

Wówczas

$$\sup_{u \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(S^*)} \mathbf{J}^\infty(u) \geq \sup_{u \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^\infty(u) \tag{1.23}$$

Dowód. Niech $u \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$.

Skoro dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy

$$\underline{S}_n \leq S_n^*(x_n, y_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) \leq \overline{S}_n,$$

więc biorąc pod uwagę fakt, że $u \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$, dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&0 \leq c_n \leq x_n + \underline{S}_n y_n \leq x_n + S_n^*(x_n, y_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) y_n, \\
&0 \leq x_n - c_n + \underline{S}_n m_n - \overline{S}_n l_n \leq \\
&\quad \leq x_n - c_n + S_n^*(x_n, y_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) m_n - S_n^*(x_n, y_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) l_n \leq \\
&\quad \leq x_n - c_n + S_n^*(x_n, y_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) \cdot (m_n - l_n), \\
&0 \leq y_n - m_n + l_n.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że $u \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(S^*)$. Innymi słowy zachodzi inkluzja $\mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S}) \subseteq \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(S^*)$. □

Celem naszym będzie znalezienie najgorszego rynku dla inwestora, na którym nie ma kosztów za transakcje, ale na którym cena przyjmuje wartości pomiędzy ceną sprzedaży i kupna z rynku z kosztami za transakcje.

Definicja 1.11. *Rodzinę* $\hat{S} := \{\hat{S}_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}\}$ *zmiennych losowych będziemy nazywać słabą ceną kalkulacyjną, jeśli*

(i) dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *zmienna losowa* $\hat{S}_n(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *jest* $\mathcal{F}_n$*-mierzalna,*

(ii) $\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}}\quad \underline{s}\leq \hat{S}_n(x,y,\underline{s},\overline{s})\leq \overline{s}$,

(iii) *optymalna wartość funkcjonału (1.21) na rynku bez kosztów za transakcje, na którym inwestor mając w chwili $n\in\{0,1,2,\ldots,N\}$ pozycję (x,y), ma prawo handlować akcjami po cenie $\hat{S}_n(x,y,\underline{S}_n,\overline{S}_n)$, jest taka sama jak na rynku z kosztami za transakcje.*

Podkreślmy tutaj bardzo wyraźnie, że słaba cena kalkulacyjna generuje rynek bez kosztów za transakcje, który nie jest płynny, tzn. taki rynek, na którym cena akcji w każdym momencie zależy od pozycji inwestora w tym momencie.

Poniższe Stwierdzenie orzeka, że każda optymalna strategia na rynku z kosztami za transakcje jest optymalną strategią na rynku ze słabą ceną kalkulacyjną.

Stwierdzenie 1.5. *Niech $\hat{u}\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$ będzie optymalną strategią na rynku z kosztami za transakcje z początkową pozycją (x,y). Załóżmy, że istnieje słaba cena kalkulacyjna $\hat{S}$. Wówczas strategia $\hat{u}$ jest optymalną strategią na rynku bez kosztów za transakcje i z systemem cen $\hat{S}$.*

Dowód. Na mocy warunku *(iii)* Definicji 1.7 mamy

$$\sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\hat{S})}\mathbf{J}^{\infty}(u)=\sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})}\mathbf{J}^{\infty}(u)=\mathbf{J}^{\infty}(\hat{u}). \tag{1.24}$$

Pozostaje zatem pokazać, że $\hat{u}$ jest strategią dopuszczalną na rynku bez kosztów za transakcje i z systemem cen $\hat{S}$.

Skoro dla każdego $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ mamy

$$\underline{S}_n\leq\hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\leq\overline{S}_n,$$

więc biorąc pod uwagę fakt, że $\hat{u}\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$, dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&0\leq\hat{c}_n\leq\hat{x}_n+\underline{S}_n\hat{y}_n\leq\hat{x}_n+\hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\hat{y}_n,\\
&0\leq\hat{x}_n-\hat{c}_n+\underline{S}_n\hat{m}_n-\overline{S}_n\hat{l}_n\leq\\
&\quad\leq\hat{x}_n-\hat{c}_n+\hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\hat{m}_n-\hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\hat{l}_n\leq\\
&\quad\leq\hat{x}_n-\hat{c}_n+\hat{S}_n(\hat{x}_n,\hat{y}_n,\underline{S}_n,\overline{S}_n)\cdot(\hat{m}_n-\hat{l}_n),\\
&0\leq\hat{y}_n-\hat{m}_n+\hat{l}_n.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że rzeczywiście, $\hat{u}\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\hat{S})$. □

Uwaga 1.4. *Zgodnie z (1.23) w Stwierdzeniu 1.4 słaba cena kalkulacyjna generuje najgorszy z punktu widzenia inwestora niepłynny rynek, w którym cena akcji leży pomiędzy ceną sprzedaży i kupna z rynku z kosztami za transakcje.*

1.4 Przegląd uzyskanych rezultatów

Problematyka poruszana w tej pracy jest dosyć nowa. W tym podrozdziale omówimy pokrótce kilka najważniejszych prac z tematyki poruszanej w niniejszej pracy.

W pracy [9] badano kwestię maksymalizacji funkcjonału

$$\mathbb{E}\int_0^\infty e^{-\delta t}\ln c_t dt, \tag{1.25}$$

gdzie $(c_t)_{t\geq 0}$ jest strumieniem konsumpcji, w modelu Blacka-Scholesa z proporcjonalnymi liniowymi kosztami za transakcje. W pracy [19] skonstruowana została cena kalkulacyjna (*shadow price*) dla tego rynku. W pracy tej, korzystając z intuicyjnych sformułowań, znajdują oni ewentualnego kandydata na cenę kalkulacyjną, aby następnie dzięki wzorowi Itô znaleźć skomplikowane równanie różniczkowe zwyczajne drugiego stopnia. Dzięki Twierdzeniu Skorohoda autorzy dowodzą, że uzyskany drogą nieformalnego rozumowania kandydat jest, rzeczywiście ceną kalkulacyjną.

W pracy [12] poruszony jest ten sam problem co w [19]. Tutaj metoda jest bardzo podobna przy czym pojawiające się równanie różniczkowe jest nieco prostsze. Autorom udało się także znaleźć szeregi, które umożliwiają znalezienie optymalnych pozycji inwestycyjnych.

W [20] udowodniono istnienie ceny kalkulacyjnej w sytuacji skończonej przestrzeni probabilistycznej.

W [4] i w [13] znaleziono przypadki rynków z kosztami za transakcje, dla kórych nie można znaleźć ceny kalkulacyjnej.

W [25] omówiono uogólnioną cenę kalkulacyjną, która w bardzo ogólnej sytuacji istnieje w bardzo ogólnym przypadku.

Podejście stosowane w niniejszej rozprawie jest zupełnie inne niż w wymienionych wyżej pracach, które *de facto* nie pokazują z czego bierze się taki obiekt jak cena kalkulacyjna. Nasze podejście opiera się na programowaniu dynamicznym, które jest naturalne i pokazuje istotę konstrukcji silnej ceny kalkulacyjnej.

W szczególności uzyskane wyniki dotyczą bardzo ogólnych procesów cen. Wymagamy bowiem jedynie, aby procesy te spełniały warunek pełnego warunkowego nośnika. Ponadto funkcje użyteczności są także bardzo ogólne, gdyż wymagamy od nich jedynie, aby były to funkcje ściśle rosnące i wklęsłe (niekoniecznie ściśle wklęsłe). Nie ograniczamy się zatem do logarytmicznj funkcji użyteczności, jak ma to miejsce w większości prac.

W niniejszej rozprawie stosujemy metodę równań Bellmana dla czasu nieskończonego. W pracy [5] znaleziono analogiczne równania, ale jedynie do przypadku Markowskiego przy kolejnych stopach zwrotu z akcji będących niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Konstrukcja równań Bellmana w tej pracy opiera się na twierdzeniu Banacha o odwzorowaniach zwężających. Ze względu na markowskość procesu cen akcji oraz ze względu na jednorodność przyrostów (kolejne stopy zwrotu z akcji są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie) równania Bellmana są deterministycznymi funkcjami.

W naszym podejściu na skutek ogólności procesów, które dopuszczają m.in. bardzo złożoną zależność cen między okresami, odpowiednie równania Bellmana są funkcjami losowymi. Nie udało się znaleźć przestrzeni Banacha, w której znajdowałyby się te funkcje tak, aby możliwe było skorzystanie z twierdzenia Banacha o odwzorowaniach zwężających.

Podstawową wyprowadzenia konstrukcji ceny kalkulacyjnej w naszej pracy jest dokładne zbadanie zbiorów tych pozycji, w których inwestorowi nie opłaca się handlować akcjami w danym momencie, tzn. zbioru tych pozycji, w których w danym momencie bardziej opłaca się utrzymać bieżącą pozycję.

W przeciwieństwie do [25] zbiór strategii dopuszczalnych dla rynków bez kosztów za transakcje uzależniamy od cen na tym rynku a nie ograniczamy się do zbioru strategii dopuszczalnych na rynku z kosztami za transakcje. Nasze podejście wydaje się bardziej naturalne, gdyż swoje działania inwestor winien dostosowywać jedynie do ceny na rynku a nie do innych ograniczeń.

Wyniki dotyczące skończonego horyzontu czasowego dla ściśle wklęsłej funkcji użyteczności z niniejszej rozprawy zostały zawarte w pracy [24] złożonej do czasopisma Applied Mathematics and Optimization.

1.5 Układ pracy

W rozdziale 1 przedstawiony został problem badawczy poruszony w niniejszej rozprawie doktorskiej. Omówiliśmy też pokrótce ważniejsze prace związane z tym tematem. Naszkicowaliśmy także, co nowego i oryginalnego wnosi niniejsza rozprawa.

Rozdział 2 jest techniczny. Głównym wynikiem jest zbieżność w metryce Hausdorffa zbiorów parametrów sterujących dla rynku z kosztami za transakcje.

W rozdziale 3 konstruujemy równania Bellmana dla skończonego horyzontu czasowego oraz omawiamy ich własności.

W rozdziale 4 badamy własności modeli z chwilowym brakiem kosztów za transakcje i przedstawiamy ich zależność z modelem z kosztami za transakcje, które są kluczowe dla konstrukcji cen kalkulacyjnych.

W rozdziale 5 konstruujemy ceny kalkulacyjne dla skończonego horyzontu czasowego.

W rozdziale 6 budujemy równania Bellmana dla czasu nieskończonego i dzięki podobnej konstrukcji co dla skończonego horyzontu czasowego budujemy słabą cenę kalkulacyjna.

Rozdział 7 ma charakter techniczny i przedstawia pomocnicze lematy i twierdzenia stosowane w całej pracy.

Rozdział 2

Własności zbiorów parametrów sterujących

Celem niniejszego rozdziału jest systematyczny opis zbiorów, w które posłużą do opisu równań Bellmana wprowadzonych w rozdziale następnym. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 2.1 orzekające, że odwzorowanie wielowartościowe $\mathbb{A} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^3_+)$ jest ciągłe w metryce Hausdorffa.

2.1 Zdefiniowanie zbiorów parametrów sterujących i ich własności

Dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ zdefiniujmy zbiór

$$\begin{aligned} &\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \\ &\quad := \{(c, l, m) \in [0, x + \underline{s}y] \times \mathbb{R}^2_+ : \forall_{s \in [0,\infty)}\ x - c + \underline{s}m - \overline{s}l + s(y - m + l) \geq 0\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

W każdej chwili czasowej n strategia u inwestora składa się m.in. z następujących trzech zmiennych losowych: z konsumpcji c_n, ilości l_n kupowanych akcji oraz ilości m_n sprzedawanych akcji. Jeżeli więc na początku chwili czasowej n inwestor ma x pieniędzy w banku, y akcji, zaś ceny sprzedaży i kupna jednostki akcji wynoszą $\underline{s}$ i $\overline{s}$ odpowiednio, to wobec (1.4) inwestor może skonsumować c, kupić l akcji i sprzedać m akcji przy czym wektor (c, l, m) musi być elementem zbioru $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Jeżeli więc w chwili n pozycja inwestora to (x, y), zaś ceny kupna i sprzedaży to $\overline{s}$ i $\underline{s}$ odpowiednio, to strategia jednokrokowa inwestora (c_n, l_n, m_n) jest $\mathcal{F}_n$-mierzalną zmienną losową, która przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ i dla $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ niech $\mathcal{A}_n(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ będzie zbiorem wszystkich $\mathcal{F}_n$-mierzalnych zmiennych losowych przyjmujących wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Lemat 2.1 (dodatnia jednorodność zbiorów $\mathbb{A}$). *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. *Dla każdego* $\rho \geq 0$ *mamy*

$$\mathbb{A}(\rho x, \rho y, \underline{s}, \overline{s}) = \rho \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{2.2}$$

Jest to oczywiste wobec definicji $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Lemat 2.2. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. *Wówczas*

$$\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \{(c, l, m) \in [0, x + \underline{s}y] \times \mathbb{R}^2_+ : x - c + \underline{s}m - \overline{s}l \geq 0, y - m + l \geq 0\}, \tag{2.3}$$

Dowód. Oznaczmy

$$\hat{\mathbb{B}}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \{(c, l, m) \in [0, x + \underline{s}y] \times \mathbb{R}^2_+ : x - c + \underline{s}m - \overline{s}l \geq 0, y - m + l \geq 0\}. \tag{2.4}$$

'$\supseteq$' Niech $(c, l, m) \in \hat{\mathbb{B}}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Wtedy $c \in [0, x + \underline{s}y]$, $x - c + \underline{s}m - \overline{s}l \geq 0$ i dla wszystkich $s \in [0, \infty)$ mamy $s(y - m + l) \geq 0$. W konsekwencji dla każdego $s \in [0, \infty)$ mamy

$$x - c + \underline{s}m - \overline{s}l + s(y - m + l) \geq 0,$$

czyli $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

'$\subseteq$' Załóżmy, że $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \not\subseteq \hat{\mathbb{B}}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Wtedy istnieje pewne

$$(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \setminus \hat{\mathbb{B}}(x, y, \underline{s}, \overline{s}).$$

Skoro $c \in [0, x + \underline{s}y]$, więc musi być $x - c + \underline{s}m - \overline{s}l < 0$ lub $y - m + l < 0$.

W pierwszej sytuacji, biorąc $s = 0$, otrzymujemy, że

$$x - c + \underline{s}m - \overline{s}l + s(y - m + l) = x - c + \underline{s}m - \overline{s}l < 0,$$

czyli $(c, l, m) \notin \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ co jest sprzecznością.

W drugiej sytuacji dla $s \in [0, \infty)$ dostatecznie dużego mamy

$$x - c + \underline{s}m - \overline{s}l + s(y - m + l) < 0,$$

czyli $(c, l, m) \notin \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, co także jest sprzecznością.

Tak więc w obu sytuacjach otrzymujemy sprzeczność. Oznacza to, że $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \subseteq \hat{\mathbb{B}}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. $\square$

Lemat 2.3. *Dla* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *zbiór* $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *jest zwarty.*

Dowód. Pokażemy, że zbiór $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest ograniczony i domknięty.

Z Lematu 2.2 wiemy, że

$$\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \{(c, l, m) \in [0, x + \underline{s}y] \times \mathbb{R}^2_+ : x - c + \underline{s}m - \overline{s}l \geq 0, y - m + l \geq 0\}.$$

Najpierw pokażemy, że zbiór ten jest ograniczony.

Niech $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Skoro $m \leq y + l$, więc

$$0 \leq x - c + \underline{s}m - \overline{s}l \leq x - c + \underline{s}(y + l) - \overline{s}l = x - c + \underline{s}y + (\underline{s} - \overline{s})l.$$

Otrzymujemy stąd, że $(\overline{s} - \underline{s})l \leq x - c + \underline{s}y$, czyli, że $l \leq \frac{1}{\overline{s} - \underline{s}} \cdot (x - c + \underline{s}y)$. Oznacza to, że l jest ograniczone. Skoro $y + l \geq m$, więc m również jest ograniczone. Co więcej, c także jest ograniczone, gdyż $c \in [0, x + \underline{s}y]$.

Zbiór $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest więc ograniczony.

Teraz pokażemy, że zbiór $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest domknięty.

Niech $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem z $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, który zbiega do jakiegoś $(c, l, m) \in \mathbb{R}_+^3$.

Dla kżdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq & c_n \leq x + \underline{s}y, \\ 0 \leq & x - c_n + \underline{s}m_n - \overline{s}l, \\ 0 \leq & y - m_n + l_n. \end{aligned}$$

Biorąc $n \longrightarrow \infty$, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} 0 \leq & c \leq x + \underline{s}y, \\ 0 \leq & x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, \\ 0 \leq & y - m + l, \end{aligned}$$

czyli, że $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Oznacza to, że zbiór $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest domknięty. □

Lemat 2.4. *Dla $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ zbiór $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest wypukły.*

Dowód. Niech $(c_1, l_1, m_1), (c_2, l_2, m_2) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $t \in [0, 1]$ będą dowolne. Wówczas

$$\begin{aligned} x - & (tc_1 + (1 - t)c_2) + \underline{s}(tm_1 + (1 - t)m_2) - \overline{s}(tl_1 + (1 - t)l_2) = \\ & = t(x - c_1 + \underline{s}m_1 - \overline{s}l_1) + (1 - t)(x - c_2 + \underline{s}m_2 - \overline{s}l_2) \geq t \cdot 0 + (1 - t) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} y - & (tm_1 + (1 - t)m_2) + (tl_1 + (1 - t)l_2) = \\ & = t(y - m_1 + l_1) + (1 - t)(y - m_2 + l_2) \geq t \cdot 0 + (1 - t) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że $tc_1 + (1 - t)c_2 \in [0, x + \underline{s}y]$ oraz $0 \leq tm_1 + (1 - t)m_2, tl_1 + (1 - t)l_2$.

Oznacza to, że $t(c_1, l_1, m_1) + (1 - t)(c_2, l_2, m_2) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. □

Lemat 2.5. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. *Wówczas zachodzą następujące implikacje*

$$(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \Longrightarrow \forall_{\rho \in [0,1]} (\rho c, \rho l, \rho m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \tag{2.5}$$

oraz

$$(c, l, m) \in \mathbb{R}^3_+ \setminus \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \Longrightarrow \forall_{\rho \geq 1} (\rho c, \rho l, \rho m) \notin \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{2.6}$$

Dowód. Najpierw pokażemy (2.5). Niech $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ oraz $\rho \in [0, 1]$. Wtedy

$$\begin{aligned}
0 \leq& \rho \cdot 0 \leq \rho c \leq \rho \cdot (x + \underline{s}y) \leq x + \underline{s}y, \\
0 \leq& \rho \cdot 0 \leq \rho \cdot (x - c + \underline{s}m - \overline{s}l) \leq x - \rho c + \underline{s}\rho m - \overline{s}\rho l, \\
0 \leq& \rho \cdot 0 \leq \rho(y - m + l) \leq y - \rho m + \rho l, \\
0 \leq& \rho \cdot 0 \leq \rho m, \rho l
\end{aligned}$$

czyli $(\rho c, \rho l, \rho m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Teraz pokażemy (2.6). Niech $(c, l, m) \notin \mathbb{R}^3_+ \setminus \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Wówczas zachodzi co najmniej jedna z następujących nierówności

$$\begin{aligned}
&(i)\ x + \underline{s}y < c, \\
&(ii)\ x - c + \underline{s}m - \overline{s}l < 0, \\
&(iii)\ y - m + l < 0.
\end{aligned}$$

Jeśli (i) zachodzi, to dla każdego $\rho \geq 1$ mamy $x + \underline{s}y < c \leq \rho c$. Jeżeli zachodzi (ii), to dla każdego $\rho \geq 1$ mamy

$$\begin{aligned}
x - \rho c + \underline{s}\rho m - \overline{s}\rho l &= x - \rho x + \rho x - \rho c + \underline{s}\rho m - \overline{s}\rho l = \\
&= (1 - \rho)x + \rho \cdot (x - c + \underline{s}m - \overline{s}l) < 0,
\end{aligned}$$

gdyż $1 - \rho \leq 0$.

Jeśli zachodzi (iii), to dla każdego $\rho \geq 1$ mamy

$$y - \rho m + \rho l = y - \rho y + \rho y - \rho m + \rho l = (1 - \rho)y + \rho \cdot (y - m + l) < 0.$$

Tym samym dla każdego $\rho \geq 1$ mamy $(\rho c, \rho l, \rho m) \notin \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. $\square$

Lemat 2.6. *Niech* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2_+$ *oraz* $(\underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{R}^2_+$ *będą takie, że* $\overline{s} > \underline{s} > 0$. *Wówczas dla każdego* $t \in [0, 1]$ *zachodzi następująca inkluzja*

$$t\mathbb{A}(x_1, y_1, \underline{s}, \overline{s}) + (1 - t)\mathbb{A}(x_2, y_2, \underline{s}, \overline{s}) \subseteq \mathbb{A}(tx_1 + (1 - t)x_2, ty_1 + (1 - t)y_2, \underline{s}, \overline{s}). \tag{2.7}$$

Dowód. Ustalmy $t \in [0, 1]$.

Niech $(c, l, m) \in t\mathbb{A}(x_1, y_1, \underline{s}, \overline{s}) + (1 - t)\mathbb{A}(x_2, y_2, \underline{s}, \overline{s})$.

Oczywiście, istnieją $(c_1, l_1, m_1) \in \mathbb{A}(x_1, y_1, \underline{s}, \overline{s})$ i $(c_2, l_2, m_2) \in \mathbb{A}(x_2, y_2, \underline{s}, \overline{s})$ takie, że $(c, l, m) = t(c_1, l_1, m_1) + (1-t)(c_2, l_2, m_2)$.

Mamy

$$\begin{aligned} c =& tc_1 + (1-t)c_2 \in [0, t(x_1 + \underline{s}y_1) + (1-t)(x_2 + \underline{s}y_2)], \\ 0 \leq& t(x_1 - c_1 + \underline{s}m_1 - \overline{s}l_1) + (1-t)(x_2 - c_2 + \underline{s}m_2 - \overline{s}l_2) = \\ &= [tx_1 + (1-t)x_2] - [tc_1 + (1-t)c_2] + \underline{s}[tm_1 + (1-t)m_2] - \overline{s}[tl_1 + (1-t)l_2] = \\ &= [tx_1 + (1-t)x_2] - c + \underline{s}m - \overline{s}l, \\ 0 \leq& t(y_1 - m_1 + l_1) + (1-t)(y_2 - m_2 + l_2) = \\ &= [ty_1 + (1-t)y_2] - [tm_1 + (1-t)m_2] + [tl_1 + (1-t)l_2] = \\ &= [ty_1 + (1-t)y_2] - m + l, \\ 0 \leq& l, m. \end{aligned}$$

Skoro $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in \mathbb{R}^2_+$, więc $(c, l, m) \in \mathbb{A}(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2, \underline{s}, \overline{s})$.

Oznacza to, że inkluzja (2.7) zachodzi. □

Lemat 2.7. *Niech* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2_+$ *oraz* $(\underline{s}_1, \overline{s}_1), (\underline{s}_2, \overline{s}_2) \in \mathbb{R}^2_+$ *będą takie, że* $\overline{s}_1 > \underline{s}_1 > 0$ *i* $\overline{s}_2 > \underline{s}_2 > 0$. *Jeśli* $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2, \underline{s}_1 \leq \underline{s}_2$ *i* $\overline{s}_1 \geq \overline{s}_2$, *to*

$$\mathbb{A}(x_1, y_1, \underline{s}_1, \overline{s}_1) \subseteq \mathbb{A}(x_2, y_2, \underline{s}_2, \overline{s}_2). \tag{2.8}$$

Dowód. Niech $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x_1, y_1, \underline{s}_1, \overline{s}_1)$. Pokażemy, że $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x_2, y_2, \underline{s}_2, \overline{s}_2)$.

Oczywiście, $c \in [0, x_1 + \underline{s}_1 y_1] \subseteq [0, x_2 + \underline{s}_2 y_2]$. Co więcej,

$$0 \leq x_1 - c + \underline{s}_1 m - \overline{s}_1 l \leq x_2 - c + \underline{s}_2 m_2 - \overline{s}_2 l$$

oraz

$$0 \leq y_1 - m + l \leq y_2 - m + l.$$

Tym samym $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x_2, y_2, \underline{s}_2, \overline{s}_2)$. □

Lemat 2.8. *Niech* $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem z* $\mathbb{D}$, *który zbiega do pewnego* $(x_0, y_0, \underline{s}_0, \overline{s}_0) \in \mathbb{D}$. *Wtedy zbiór*

$$cl(\mathbb{A}(x_0, y_0, \underline{s}_0, \overline{s}_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)) \tag{2.9}$$

jest zwarty.

Dowód. Załóżmy, że jest to nieprawda.

Skoro zbiór ten jest domknięty, więc jest nieograniczony. Tym samym istnieje ciąg $(c_k, l_k, m_k)_{k=1}^{\infty}$ elementów z $\mathbb{A}(x_0, y_0, \underline{s}_0, \overline{s}_0) \cup \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$ taki, że

$$\lim_{k \to \infty} \| (c_k, l_k, m_k) \| = \infty. \tag{2.10}$$

Dla każdego naturalnego M zbiór

$$\mathbb{A}(x_0, y_0, \underline{s}_0, \overline{s}_0) \cup \bigcup_{n=1}^{M} \mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$$

jest zwarty. Skoro dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zbiór $\mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$ jest zwarty, więc istnieje ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że dla $k \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych mamy $(c_k, l_k, m_k) \in \mathbb{A}(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}_{n_k}, \overline{s}_{n_k})$, tzn.

$$\begin{aligned} 0 \leq& l_k, m_k, \\ 0 \leq& c_k \leq x_{n_k} + \underline{s}_{n_k} y_{n_k}, \\ 0 \leq& x_{n_k} - c_k + \underline{s}_{n_k} m_k - \overline{s}_{n_k} l_k, \\ m_k - l_k \leq& y_{n_k}. \end{aligned}$$

Skoro $0 \leq c_k \leq x_{n_k} + \underline{s}_{n_k} y_{n_k} \leq \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (x_n + \underline{s} y_n) < \infty$, więc ciąg $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Skoro $m_k - l_k \leq y_{n_k} \leq \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} y_n < \infty$, więc z (2.10) otrzymujemy, że $\lim_{k \to \infty} m_k = \lim_{k \to \infty} l_k = \infty$. Ale

$$\begin{aligned} 0 \leq& x_{n_k} - c_k + \underline{s}_{n_k} m_k - \overline{s}_{n_k} l_k = x_{n_k} - c_k + \underline{s}_{n_k} (m_k - l_k) - (\overline{s}_{n_k} - \underline{s}_{n_k}) l_k \leq \\ \leq& x_{n_k} - c_k + \underline{s}_{n_k} \cdot \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} y_n - (\overline{s}_{n_k} - \underline{s}_{n_k}) l_k \xrightarrow{k \to \infty} -\infty, \end{aligned}$$

gdyż $\overline{s}_0 > \underline{s}_0 > 0$. Jest to jednak sprzeczność, gdyż oznacza to, że (2.10) nie zachodzi. □

Lemat 2.9. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. Wówczas zachodzą następujące implikacje*

$$(0, \hat{l}, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \Longrightarrow \forall_{l \in [0, \hat{l}]} \quad (0, \hat{l} - l, 0) \in \mathbb{A}(x - \overline{s} l, y + l, \underline{s}, \overline{s}) \tag{2.11}$$

oraz

$$(0, 0, \hat{m}) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \Longrightarrow \forall_{m \in [0, \hat{m}]} \quad (0, 0, \hat{m} - m) \in \mathbb{A}(x + \underline{s} m, y + m, \underline{s}, \overline{s}). \tag{2.12}$$

Dowód. Najpierw udowodnimy (2.11).

Niech $(0, \hat{l}, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $l \in [0, \hat{l}]$.

Oczywiście,

$$\begin{aligned} 0 \leq& l \leq \hat{l}, \\ 0 \leq& x - \overline{s} \hat{l} \leq x - \overline{s} l, \\ 0 \leq& y + l \leq y + \hat{l}. \end{aligned}$$

Pokażemy, że $(x - \overline{s} l, y + l) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Jeśli $y+l=0$, to $y=l=0$, gdyż $0 \leq y, l$. Stąd $x-\overline{s}l = x-0>0$, gdyż $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$. Jeśli więc $y+l=0$, to $(x-\overline{s}l, y+l) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$.

Rozważmy więc przypadek, gdy $y+l>0$.

Jeśli $x-\overline{s}l=0$, to $x=\overline{s}l>0$ lub $x=l=0$. Jeśli $x=\overline{s}l>0$, to $l>0$ a wówczas $y+l>0$. Jeśli $x=l=0$, to $y+l=y>0$, gdyż musi być $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$.

Oznacza to, że $(x-\overline{s}l, y+l) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$.

Mamy

$$\begin{aligned}
0 \leq & \hat{l} - l, \\
0 \leq & x - \overline{s}\hat{l} = x - \overline{s}l + \overline{s}l - \overline{s}\hat{l} = (x-\overline{s}l) - \overline{s}(\hat{l}-l), \\
0 \leq & y + \hat{l} = (y+l) + (\hat{l}-l).
\end{aligned}$$

Oznacza to, że (2.11) zachodzi.

Teraz pokażemy (2.12).

Niech $(0,0,\hat{m}) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ oraz $m \in [0,\hat{m}]$.

Oczywiście,

$$\begin{aligned}
0 \leq & m \leq \hat{m}, \\
0 \leq & x + \underline{s}\hat{m}, \\
0 \leq & y - \hat{m}.
\end{aligned}$$

Pokażemy, że $(x+\underline{s}m, y-m) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$.

Jeśli $x+\underline{s}m=0$, to $x=m=0$ i tym samym $y-m=y>0$, gdyż musi być $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$.

Jeśli $y-m=0$, to $y=m=0$ lub $y=m>0$. Jeśli $y=m=0$, to $x+\underline{s}m=x>0$, gdyż $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$. Jeżeli $y=m>0$, to $x+\underline{s}m>0$, gdyż $x \in \mathbb{R}_+$.

Oznacza to, że $(x+\underline{s}m, y-m) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$.

Mamy

$$\begin{aligned}
0 \leq & \hat{m} - m, \\
0 \leq & x + \underline{s}\hat{m} = x + \underline{s}m - \underline{s}m + \underline{s}\hat{m} = (x+\underline{s}m) + \underline{s}(\hat{m}-m), \\
0 \leq & y - \hat{m} = y - m + m - \hat{m} = (y-m) + (\hat{m}-m).
\end{aligned}$$

Oznacza to, że (2.12) zachodzi. $\square$

2.2 Ciągłość w metryce Hausdorffa

W tym podrozdziale dowodzimy główny wynik tego rozdziału, który orzeka, że funkcja wielowartościowa $\mathbb{A}$ odwzorowująca zbiór $\mathbb{D}$ w zbiór zwartych podzbiorów $\mathbb{R}_+^3$ jest odwzorowaniem ciągłym w tzw. metryce Hausdorffa.

Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to przez $\mathcal{H}(X)$ oznaczać będziemy wszystkie zwarte podzbiory X.

Dla każdego $x \in X$ i dla każdego $A \in \mathcal{H}(X)$ niech

$$dist(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}. \tag{2.13}$$

Dla każdych $A, B \in \mathcal{H}(X)$ niech

$$dist(A, B) := \sup\{dist(x, B) : x \in A\}. \tag{2.14}$$

Można pokazać, że funkcja $h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \longrightarrow [0, \infty)$ zdefiniowana dla każdych $A, B \in \mathcal{H}(X)$ za pomocą wzoru

$$h(A, B) := \max\{dist(A, B), dist(B, A)\} \tag{2.15}$$

jest metryką na zbiorze $\mathcal{H}(X)$. Metrykę tę nazywamy metryką Hausdorffa. W [2] znaleźć można definicję oraz podstawowe własności tej metryki.

Niech funkcja $H : \mathbb{D} \to \mathcal{H}(\mathbb{R}_+^3)$ będzie zdefiniowana dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ za pomocą następującego wzoru

$$H(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{2.16}$$

Niech $h : \mathcal{H}(\mathbb{R}_+^3) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}_+^3) \to \mathbb{R}_+$ będzie metryką Hausdorffa na przestrzeni $\mathcal{H}(\mathbb{R}_+^3)$.

Stwierdzenie 2.1. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ i niech $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem z $\mathbb{D}$ zbieżnym do $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Wówczas*

$$d(H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n), H(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.17}$$

Dowód. Oczywiście, (2.17) równoważne jest następującemu warunkowi
(i) dla każdego ciągu $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$$

zachodzi

$$dist((c_n, l_n, m_n), H(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.18}$$

Pokażemy, że (i) zachodzi.

Niech $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągiem z $\mathbb{R}_+^3$ takim, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n).$$

Załóżmy, że (2.18) nie zachodzi. Wówczas istnieją $\varepsilon > 0$ i pewien podciąg $(c_{n_k}, l_{n_k}, m_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ takie, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$dist((c_{n_k}, l_{n_k}, m_{n_k}), H(x, y, \underline{s}, \overline{s})) > \varepsilon.$$

Skoro zbiór $cl(\cup_{n=1}^{\infty} H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n))$ jest zwarty, zaś ciąg $(c_{n_k}, l_{n_k}, m_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest ciagiem z tego zbioru, więc istnieje pewien podciąg $(c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$, który zbiega do pewnego (c^*, l^*, m^*) z tego zbioru.

Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
&0 \leq c_{n_{k_j}} \leq x_{n_{k_j}} + \underline{s}_{n_{k_j}} y_{n_{k_j}},\\
&0 \leq x_{n_{k_j}} - c_{n_{k_j}} + \underline{s}_{n_{k_j}} m_{n_{k_j}} - \overline{s}_{n_{k_j}} y_{n_{k_j}},\\
&0 \leq y_{n_{k_j}} - m_{n_{k_j}} + l_{n_{k_j}},\\
&0 \leq m_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}.
\end{aligned}$$

Biorąc $j \longrightarrow \infty$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&0 \leq c^* \leq x + \underline{s}y,\\
&0 \leq x - c^* + \underline{s} - \overline{s}y,\\
&0 \leq y - m^* + l^*,\\
&0 \leq m^*, l^*.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że $(c^*, l^*, m^*) \in H(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. W szczególności, dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
0 < \varepsilon < & dist((c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}}), H(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \leq \\
& \leq dist((c^*, l^*, m^*), H(x, y, \underline{s}, \overline{s})) + d((c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}}), (c^*, l^*, m^*)) = \\
& = 0 + d((c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}}), (c^*, l^*, m^*)).
\end{aligned}$$

Biorąc $j \longrightarrow \infty$, otrzymujemy, że $0 < \varepsilon \leq 0$, co jest sprzecznością.

Oznacza to, że (i) zachodzi. □

Lemat 2.10. *Niech $(x, y, \overline{s}, \underline{s}) \in \mathbb{D}$. Jeżeli $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest takie że $c \geq x + \underline{s}y$, to $c = x + \underline{s}y$, $l = 0$ oraz $m = y$.*

Dowód. Skoro $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $c \geq x + \underline{s}y$, to musi być $c = x + \underline{s}y$, gdyż $c \in [0, x + \underline{s}y]$. Co więcej, mamy $m - y \leq l$. Stąd

$$0 \leq x - c + \underline{s}m - \overline{s}l = x - x - \underline{s}y + \underline{s}m - \overline{s}l = \underline{s}(m - y) - \overline{s}l \leq \underline{s}l - \overline{s}l = (\underline{s} - \overline{s})l \leq 0.$$

Skoro $l \geq 0$ i $\overline{s} > \underline{s}$, więc musi być $l = 0$. Stąd otrzymujemy, że $m \leq y$. Tym samym

$$0 \leq x - c + \underline{s}m = x - x - \underline{s}y + \underline{s}m = \underline{s}(m - y) \leq 0.$$

Skoro $m \geq 0$ i $\underline{s} > 0$, więc musi być $m = y$. □

Lemat 2.11. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. Niech ciąg $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem z $\mathbb{D}$, który zbiega do $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Jeśli $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest takie, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $c \geq x_n + \underline{s}_n y_n$, to istnieje ciąg $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do (c, l, m) taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in \mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$.*

Dowód. Skoro $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $c \geq x_n + \underline{s}_n y_n$, więc biorąc $n \longrightarrow \infty$, otrzymujemy, że $c \geq x + \underline{s}y$. Z Lematu 2.10 otrzymujemy, że musi być $c = x + \underline{s}y$, $l = 0$ oraz $m = y$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $c_n := x_n + \underline{s}_n y_n$, $l_n = 0$ oraz $m_n := y_n$. Jest jasne, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in \mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$ oraz $(c_n, l_n, m_n) \xrightarrow{n \to \infty} (c, l, m)$. □

Lemat 2.12. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$, zaś $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem z $\mathbb{D}$, który zbiega do $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Załóżmy, że $(c, l, m) \in H(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest takie, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $0 < c < x_n + \underline{s}_n y_n$. Wówczas istnieje ciąg $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ z $\mathbb{R}_+^3$ zbieżny do (c, l, m) taki, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych mamy $(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$.*

Dowód. Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq x - c + \underline{s}m - \overline{s}l = \\ &= x - c + \underline{s}m - \overline{s}l + x_n + \underline{s}_n m - \overline{s}_n l - x_n - \underline{s}_n m + \overline{s}_n l = \\ &= x_n - c + \underline{s}_n m - \overline{s}_n l + [(x - x_n) + (\underline{s} - \underline{s}_n)m + (\overline{s}_n - \overline{s})l] =: \\ &=: x_n - c + \underline{s}_n m - \overline{s}_n l + d_n, \\ m - l &\leq y = y_n + (y - y_n) =: y_n + b_n, \end{aligned}$$

gdzie $d_n := (x - x_n) + (\underline{s} - \underline{s}_n)m + (\overline{s}_n - \overline{s})l$ i $b_n := y - y_n$.

Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ niech $\tilde{l}_n := l + b_n$ i $e_n := \overline{s}_n(\tilde{l}_n - l)$.

Oczywiście, $d_n, b_n, e_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Zauważmy, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$m - \tilde{l}_n = m - (l + b_n) = m - l - y + y_n \leq y - y + y_n = y_n. \tag{2.19}$$

Są cztery możliwości

1^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $d_n < 0$ i $b_n \leq 0$.

Niech $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie takim podciągiem liczb naturalnych, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ mamy $d_{n_k} < 0$ oraz $b_{n_k} \leq 0$.

Skoro $d_{n_k} < 0$, więc

$$0 \leq x_{n_k} - c + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} l + d_{n_k} < x_{n_k} - c + \underline{s}_{n_k} m - \underline{s}_{n_k} l. \tag{2.20}$$

Ponieważ $b_{n_k} \leq 0$, zatem
$$m - l \leq y_{n_k} + b_{n_k} \leq y_{n_k}. \tag{2.21}$$
Skoro dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $0 < c < x_n + \underline{s}_n y_n$, więc $(c, l, m) \in H(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}_{n_k}, \overline{s}_{n_k})$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że stały ciąg $(\overline{c}_{n_k}, \overline{l}_{n_k}, \overline{m}_{n_k}) = (c, l, m) \in H(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}_{n_k}, \overline{s}_{n_k})$ zbiega do (c, l, m).

2^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $d_n < 0$ i $b_n > 0$.

Niech $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie takim podciągiem liczb naturalnych, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ mamy $d_{n_k} < 0$ oraz $b_{n_k} > 0$.

Zwróćmy uwagę, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ mamy
$$\begin{aligned} 0 \leq & x_{n_k} - c + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} l + d_{n_k} < x_{n_k} - c + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} l = \\ & = x_{n_k} - c + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} \tilde{l}_{n_k} + \overline{s}_{n_k} (\tilde{l}_{n_k} - l) = \\ & = x_{n_k} - c + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} \tilde{l}_{n_k} + e_{n_k} = x_{n_k} - (c - e_{n_k}) + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} \tilde{l}_{n_k}. \end{aligned}$$

Skoro $b_{n_k} > 0$, więc $\tilde{l}_{n_k} = l + b_{n_k} > l$. Tym samym $e_{n_k} > 0$. Skoro $e_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, więc dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych mamy $0 < c - e_{n_k} < x_{n_k} + \underline{s}_{n_k} y_{n_k}$. Tym samym dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych mamy
$$\begin{aligned} 0 &< c - e_{n_k} < x_{n_k} + \underline{s}_{n_k} y_{n_k}, \\ 0 &< x_{n_k} - (c - e_{n_k}) + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} \tilde{l}_{n_k}, \\ m - \tilde{l}_{n_k} &\leq y_{n_k}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $(c - e_{n_k}, \tilde{l}_{n_k}, m) \in H(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}_{n_k}, \overline{s}_{n_k})$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych. Co więcej, $(c - e_{n_k}, \tilde{l}_{n_k}, m) \xrightarrow{k\to\infty} (c, l, m)$.

3^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $d_n \geq 0$ oraz $b_n \leq 0$.

Niech $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie takim podciągiem liczb naturalnych, że dla wszytkich $k \in \mathbb{N}$ mamy $d_{n_k} \geq 0$ oraz $b_{n_k} \leq 0$.

Skoro ciąg $(d_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbiega do zera, więc dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$ mamy
$$\begin{aligned} 0 &< c - d_{n_k} \leq c < x_{n_k} + \underline{s}_{n_k} y_{n_k}, \\ 0 &\leq x - (c - d_{n_k}) + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} l, \\ m - l &\leq y \leq y_{n_k} + b_{n_k} \leq y_{n_k}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych mamy $(c - d_{n_k}, l, m) \in H(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}_{n_k}, \overline{s}_{n_k})$. Oczywiście, $(c - d_{n_k}, l, m) \xrightarrow{k\to\infty} (c, l, m)$.

4^o Dla nieskończnie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $d_n \geq 0$ oraz $b_n > 0$.

Niech $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie takim podciągiem liczb naturalnych, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ mamy $d_{n_k} \geq 0$ oraz $b_{n_k} > 0$.

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq & x_{n_k} - c + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} \tilde{l}_{n_k} + d_{n_k} + e_{n_k} = x_{n_k} - (c - d_{n_k} - e_{n_k}) + \underline{s}_{n_k} m - \overline{s}_{n_k} \tilde{l}_{n_k}, \\ m - \tilde{l}_{n_k} \leq & y_{n_k}. \end{aligned}$$

Skoro $b_{n_k} \geq 0$, więc $\tilde{l}_{n_k} \geq l$ i w ten sposób $e_{n_k} = \overline{s}_{n_k}(\tilde{l}_{n_k} - l) \geq 0$. W tej sytuacji ciągi $(d_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ oraz $(e_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ są nieujemne i zbiegają do zera. Oznacza to, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych mamy $0 < c - d_{n_k} - e_{n_k} \leq c < x_{n_k} + \underline{s}_{n_k} y_{n_k}$.

Tym samym dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużych mamy $(c - d_{n_k} - e_{n_k}, \tilde{l}_{n_k}, m) \in H(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}_{n_k}, \overline{s}_{n_k})$.

Oczywiście, $(c - d_{n_k} - e_{n_k}, \tilde{l}_{n_k}, m) \xrightarrow{k \to \infty} (c, l, m)$.

Po wzięciu pod uwagę wszystkich możliwych przypadków, ciąg $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ zdefiniujmy w następujący sposób. Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ niech

$$(c_n, l_n, m_n) := \begin{cases} (c, l, m) & \text{jeśli } d_n < 0 \text{ i } b_n \leq 0 \\ (c - e_n, \tilde{l}_n, m) & \text{jeśli } d_n < 0 \text{ i } b_n > 0 \\ (c - d_n, l, m) & \text{jeśli } d_n \geq 0 \text{ i } b_n \leq 0 \\ (c - d_n - e_n, \tilde{l}_n, m) & \text{jeśli } d_n \geq 0 \text{ i } b_n > 0 \end{cases}. \tag{2.22}$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dostatecznie dużego mamy, że $(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$. Co więcej, $(c_n, l_n, m_n) \xrightarrow{n \to \infty} (c, l, m)$. □

Lemat 2.13. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$, zaś $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem z $\mathbb{D}$ zbieżnym do $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Niech $(0, l, m) \in H(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Wtedy istnieje ciąg $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ z $\mathbb{R}_+^3$ zbieżny do $(0, l, m)$ taki, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$.*

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq & m, l, \\ 0 \leq & x + \underline{s} m - \overline{s} l, \\ m - l \leq & y. \end{aligned}$$

Oczywiście, jeśli $m = 0$, to ciąg $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $l_n := [\frac{x_n}{\overline{s}_n} \wedge l]$ zbiega do l. Wynika stąd, że ciąg $(0, l_n, 0)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do $(0, l, m)$ oraz że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$.

Oznacza to, że, jeśli $m = 0$, to Lemat jest prawdziwy.

Załóżmy, że $m > 0$.

Są dwie możliwości.

1^o. $0 < x + \underline{s}m - \overline{s}l$.

Dla każdego $L > 0$ dostatecznie dużego mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq & m, l, \\ 0 \leq & (x - \frac{1}{L}) + \underline{s}m - \overline{s}l, \\ m - l \leq & y, \end{aligned}$$

czyli, że $(\frac{1}{L}, l, m) \in H(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Oczywiście, $(\frac{1}{L}, l, m) \xrightarrow{L \to \infty} (0, l, m)$.

Ale z Lematu 2.12 wynika, że istnieje ciąg $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $(\frac{1}{L}, l, m)$ taki, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}, \overline{s})$.

Oznacza to, że w tej sytuacji istnieje ciąg $(c_n, l_n, m_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do $(0, l, m)$ taki, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$.

2^o. $x + \underline{s}m - \overline{s}l = 0$.

Jeśli $m - l = y$, to $m = y + l$ i tym samym

$$0 = x + \underline{s}(y + l) - \overline{s}l = x + \underline{s}y + (\underline{s} - \overline{s})l,$$

tzn. $l = \frac{x + \underline{s}y}{\overline{s} - \underline{s}}$ oraz $m = \frac{(\overline{s} - \underline{s})y + x + \underline{s}y}{\overline{s} - \underline{s}} = \frac{x + \overline{s}y}{\overline{s} - \underline{s}}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy

$$(c_n, l_n, m_n) := (0, \frac{x_n + \underline{s}_n y_n}{\overline{s}_n - \underline{s}_n}, \frac{x_n + \overline{s}_n y_n}{\overline{s}_n - \underline{s}_n}). \tag{2.23}$$

Oczywiście, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(0, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$ oraz

$$(0, l_n, m_n) \xrightarrow{n \to \infty} (0, l, m).$$

Jeśli $m - l < y$, to dla dostatecznie dużych $L > 0$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq & (m + \frac{1}{L}), l \\ 0 < & x + \underline{s}(m + \frac{1}{L}) - \overline{s}l, \\ (m + \frac{1}{L}) - l < & y, \end{aligned}$$

tzn. $(0, l, m + \frac{1}{L}) \in H(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ oraz $(0, l, m + \frac{1}{L}) \xrightarrow{L \to \infty} (0, l, m)$.

Korzystając z przypadku 1^o, możemy znaleźć ciąg $(c_n, l_n, m_n)_n^{\infty}$ z $\mathbb{R}_+^3$ zbieżny do $(0, l, m)$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$. $\square$

Z Lematów 2.11, 2.12 i 2.13, otrzymujemy następujące

Stwierdzenie 2.2. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$, zaś $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem z $\mathbb{D}$ zbieżnym do $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Wówczas*

$$d(H(x, y, \underline{s}, \overline{s}), H(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{2.24}$$

Ze Stwierdzeń 2.1 i 2.2 otrzymujemy następujące

Twierdzenie 2.1. *Odwzorowanie H zdefiniowane w (2.16) jest ciągłe w metryce Hausdorffa.*

Rozdział 3

Równania Bellmana dla skończonego horyzontu czasowego i ich własności

3.1 Wyprowadzenie równań Bellmana

Równania Bellmana są jednym z najważniejszych narzędzi używanych w optymalizacji stochastycznej. W niniejszym rozdziale wprowadzimy je, aby rozwiązać problem (1.6) wprowadzimy tzw. układ równań Bellmana.

Niech funkcja losowa $w_N : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ będzie zdefiniowana dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ przez

$$w_N(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := g(x + \underline{s}y). \tag{3.1}$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli w chwili końcowej pozycja inwestora to (x, y), zaś ceny sprzedaży i kupna to $\underline{s}$ i $\overline{s}$ odpowiednio, więc inwestor sprzedaje wszystkie swoje akcje. W szczególności wartość jego użyteczności zmieni się o $g(x + \underline{s}y)$.

Funkcja w_N jest oczywiście ciągła i wklęsła.

Dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ i każdego $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ niech

$$V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) := g(c) + \gamma w_N(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_N, \overline{S}_N). \tag{3.2}$$

Jeżeli w chwili $N - 1$ pozycja inwestora to (x, y), zaś ceny sprzedaży i kupna to $\underline{s}$ i $\overline{s}$ odpowiednio, więc wartość $V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)$ mówi nam, jak zmieni się użyteczność inwestora, gdy na konsumpcję przeznaczy on c oraz sprzeda i kupi m i l akcji odpowiednio.

Oczywiście, funkcja losowa V_{N-1} jest $\mathcal{F}_N$-mierzalna i ciągła.

Na mocy [16] istnieje regularne warunkowe prawdopodobieństwo $\{p_{N-1}(\omega, A)\}_{\omega\in\Omega, A\in\mathcal{F}_{N-1}}$ pod warunkiem $\mathcal{F}_{N-1}$ takie, że odwzorowanie

$$\omega \longmapsto \int_\Omega V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)(\omega')p_{N-1}(\omega, d\omega') \tag{3.3}$$

jest dobrze zdefiniowanie dla każdego $\omega \in \Omega$ oraz

$$\int_\Omega V_{N-1}(x,y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)(\omega')p_{N-1}(\omega, d\omega') = \mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-1}](\omega) \tag{3.4}$$

dla $\mathbb{P}$-prawie każdego $\omega \in \Omega$.

Innymi słowy, odwzorowanie zdefiniowane na całym Ω za pomocą (3.3) jest jedną z wersji warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej $V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)$ pod warunkiem $\mathcal{F}_{N-1}$.

Do wprowadzenia równań Bellmana bardzo ważna jest warunkowa wartość oczekiwana funkcji losowych V_{N-1} pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{F}_{N-1}$.

Przypomnijmy założenie (1.9):

$$\forall_{n\in\{0,1,2,\dots,N\}}\ \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}}\ \ \mathbb{E}g(x + \underline{S}_n y)^- < \infty. \tag{3.5}$$

Stwierdzenie 3.1. *Niech* $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ *będą takie, że* $\overline{s} > \underline{s} > 0$. *Wówczas funkcja losowa*

$$(x, y, c, l, m) \longmapsto \mathbb{E}[V_{N-1}(\cdot, \cdot, \underline{s}, \overline{s}, \cdot, \cdot, \cdot)|\mathcal{F}_{N-1}] \tag{3.6}$$

odwzorowująca zbiór $\{(x, y, c, l, m) \in \mathbb{R}^5_+ : (c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})\}$ *w* $\overline{\mathbb{R}}$ *jest ciągła.*

Dowód. Ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ i $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Załóżmy, że ciąg $(x_n, y_n, c_n, l_n, m_n)_{n=1}^\infty$ jest taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x_n, y_n, c_n, l_n, m_n) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}, \overline{s})$. Załóżmy, że ciąg ten zbiega do (x, y, c, l, m). Rozważmy następujące sytuacje

1^o. $x - c + m\underline{s} - l\overline{s} > 0$ lub $y - m + l > 0$

Dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s} > 0$ lub $y_n - m_n + l_n > 0$. Zatem ze zbieżności ciągu $(x_n, y_n, c_n, l_n, m_n)_{n=1}^\infty$ otrzymujemy, że istnieją $\varepsilon_1 \geq 0$ i $\varepsilon_2 \geq 0$ takie, że $\varepsilon_1+\varepsilon_2 > 0$ i dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s} \geq \varepsilon_1 \geq 0$ oraz $y_n - m_n + l_n \geq \varepsilon_2 \geq 0$.

Niech $\delta_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}}(x_n-c_n+m_n\underline{s}-l_n\overline{s})$ i $\delta_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}}(y_n-m_n+l_n)$. Oczywiście, $0 \leq \delta_1, \delta_2 < \infty$ oraz $\delta_1 + \delta_2 > 0$.

W efekcie, dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} &w_N(\varepsilon_1,\varepsilon_2, \underline{S}_N, \overline{S}_N) \leq \\ &\qquad \leq w_N(x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s}, y_n - m_n + l_n, \underline{S}_N, \overline{S}_N) \leq w_N(\delta_1, \delta_2, \underline{S}_N, \overline{S}_N), \end{aligned}$$

gdyż funkcja losowa $w_N(\cdot, \cdot, \underline{S}_N, \overline{S}_N)$ jest ściśle rosnąca ze względu na każdą z dwóch zmiennych.

Niech $M_N := \max\{|w_N(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \underline{S}_N, \overline{S}_N)|, |w_N(\delta_1, \delta_2, \underline{S}_N, \overline{S}_N)|\}$. Z (1.8) i z (3.5) otrzymujemy całkowalność zmiennych losowych $w_N(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \underline{S}_N, \overline{S}_N)$ i $w_N(\delta_1, \delta_2, \underline{S}_N, \overline{S}_N)$, z której wynika całkowalność zmiennej losowej M_N, gdyż dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi następująca nierówność

$$\max\{|a|, |b|\} \leq |a| + |b|. \tag{3.7}$$

Zatem dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$|w_N(x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s}, y_n - m_n + l_n, \underline{S}_N, \overline{S}_N)| \leq M_N. \tag{3.8}$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[w_N(x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s}, y_n - m_n + l_n, \underline{S}_N, \overline{S}_N)|\mathcal{F}_{N-1}] =$$
$$= \mathbb{E}[w_N(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_N, \overline{S}_N)|\mathcal{F}_{N-1}].$$

Z ciągłości funkcji g na przedziale domkniętym $[0, x+\underline{s}y]$ oraz z tego, że w tym przypadku zmienna losowa

$$\mathbb{E}[w_N(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_N, \overline{S}_N)|\mathcal{F}_{N-1}]$$

jest skończona, otrzymujemy, że w tym przypadku

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-1}(x_n, y_n, \underline{s}, \overline{s}, c_n, l_n, m_n)|\mathcal{F}_{N-1}] = \mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-1}].$$

2^o. $x - c + m\underline{s} - l\overline{s} = 0$ i $y - m + l = 0$.

Wystarczy rozważyć przypadek funkcji użyteczności takiej, że

$$w_N(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_N, \overline{S}_N) = w_N(0, 0, \underline{S}_N, \overline{S}_N) = -\infty.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-1}(x_n, y_n, \underline{s}, \overline{s}, c_n, l_n, m_n)|\mathcal{F}_{N-1}] = \mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m,)|\mathcal{F}_{N-1}] = -\infty.$$

Skoro ciąg $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony z góry, więc $-\infty \leq g(c) < \infty$. Zatem $V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) = -\infty$. Wynika stąd, że na mocy Konwencji 1.2 mamy

$$\mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-1}] = -\infty. \tag{3.9}$$

Pozostaje pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-1}(x_n, y_n, \underline{s}, \overline{s}, c_n, l_n, m_n)|\mathcal{F}_{N-1}] = -\infty. \tag{3.10}$$

Załóżmy, że (3.10) nie jest prawdą.

Wówczas istnieje zdarzenie $A \in \mathcal{F}_{N-1}$ o ściśle dodatnim prawdopodobieństwie, stała skończona $\eta \in \mathbb{R}$ oraz podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ liczb naturalnych takie, że

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-1}(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_k}, l_{n_k}, m_{n_k})\mathbb{I}(A)] = \eta. \tag{3.11}$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$ musi być $x_{n_k} - c_{n_k} + m_{n_k}\underline{s} - l_{n_k}\overline{s} > 0$ lub $y_{n_k} - m_{n_k} + l_{n_k} > 0$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy $V_{N-1}(x_{n_k}, y_{n_k}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_k}, l_{n_k}, m_{n_k}) = -\infty$ dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$ i tym samym (3.11) nie byłoby spełnione.

Skoro ciągi $(x_{n_k} - c_{n_k} + m_{n_k}\underline{s} - l_{n_k}\overline{s})_{k=1}^{\infty}$ i $(y_{n_k} - m_{n_k} + l_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbiegają do $x - c + m\underline{s} - l\overline{s} = 0$ i $y - m + l = 0$ odpowiednio, to istnieje podciąg $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ taki, że ciągi $(x_{n_{k_j}} - c_{n_{k_j}} + m_{n_{k_j}}\underline{s} - l_{n_{k_j}}\overline{s})_{j=1}^{\infty}$ i $(y_{n_{k_j}} - m_{n_{k_j}} + l_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ są ściśle malejące.

Zatem ciąg $(V_{N-1}(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący. Z (3.11) oraz z lematu Fatou dla niedodatnich zmiennych losowych dostajemy, że

$$\begin{aligned}\eta = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-1}(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}})\mathbb{I}(A)] \leq \\ \leq \limsup_{j\longrightarrow\infty} \mathbb{E}[V_{N-1}(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}})\mathbb{I}(A)] \leq \\ \mathbb{E}[\limsup_{j\longrightarrow\infty}[V_{N-1}(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{k_j}}, l_{n_{k_j}}, m_{n_{k_j}})\mathbb{I}(A)] = \\ \mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m,)\mathbb{I}(A)] = -\infty.\end{aligned}$$

To jest sprzeczność, gdyż $\eta \in \mathbb{R}$. Zatem, rzeczywiście, (3.10) zachodzi. □

Wniosek 3.1. *Skoro zbiór $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest zwarty, więc istnieje $\mathcal{F}_{N-1}$-mierzalna zmienna losowa $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m})$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ taka, że*

$$\sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-1}] = \mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, \hat{c}, \hat{l}, \hat{m})|\mathcal{F}_{N-1}]. \tag{3.12}$$

Dla $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ niech

$$w_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[V_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-1}]. \tag{3.13}$$

Otrzymujemy następujący

Wniosek 3.2. *Funkcja losowa w_{N-1} zdefiniowana w (3.13) jest ciągła.*

Dowód. Zbiór $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \cap \mathbb{Q}^3$ jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, więc supremum po prawej stronie (3.13) można zastąpić spupremum po przeliczalnym zbiorze zmiennych losowych. Tym samym $w_{N-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest dobrze zdefiniowaną zmienną losową.

Ciągłość wynika bezpośrednio z Twierdzenia 7.1 z Rozdziału 7. □

Innymi słowy w każdym momencie czasowym optymalna konsumpcja jest jednoznacznie określona przez $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$, tzn. przez pozycję oraz cenę sprzedaży i kupna.

Za pomocą (3.14) w poniższym Twierdzeniu definiujemy indukcyjnie równania Bellmana, tzn. funkcje losowe w_{N-k}. Znaczenie wartości $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest bardzo ważne. Jeżeli w chwili $N - k$

inwestor ma x pieniędzy oraz y akcji, zaś ceny sprzedaży i kupna wynoszą $\underline{s}$ i $\overline{s}$ odpowiednio, to inwestor chce wybrać takie $(c, l, m) \in \mathbb{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, aby wartość $\mathbb{E}[V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-k}]$ była jak największa.

Dla $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ zdefiniujmy

$$
\begin{aligned}
w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) &:= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-k}] := \\
&:= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, \\
&\qquad y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

dla $k = 1, 2, \ldots, N$.

Lemat 3.1. *Załóżmy, że dla każdego $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ i dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$ mamy*

$$\mathbb{E}g(x + \underline{S}_n y)^- < \infty. \tag{3.15}$$

Wówczas dla każdego $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ i dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ takiego, że $(x, y) \neq (0, 0)$ mamy

$$\mathbb{E}w_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}) > -\infty \tag{3.16}$$

oraz

$$\mathbb{E}w_n(x, y, \underline{S}_n, \overline{S}_n) > -\infty. \tag{3.17}$$

Dowód. Będziemy korzystać z indukcji wstecznej względem n.

Jest jasne, że dla $n = N$ i dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ takiego, że $(x, y) \neq (0, 0)$ zachodzi (3.16) i (3.17).

Załóżmy, że (3.16) i (3.17) zachodzą dla pewnego $n \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ i dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ takiego, że $(x, y) \neq (0, 0)$.

Ustalmy $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ takie, że $(x, y) \neq (0, 0)$.

Na mocy założenia, że (3.15) i (3.16) i (3.17) zachodzą dla n dostajemy, że

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}w_{n-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \\
&\quad = \mathbb{E} \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_n(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_n, \overline{S}_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}(\mathbb{E}[g(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\underline{s}y) + \gamma w_n(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \underline{S}_n, \overline{S}_n)|\mathcal{F}_n]) > -\infty
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}w_{n-1}(x, y, \underline{S}_{n-1}, \overline{S}_{n-1}) = \\
&\quad = \mathbb{E} \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{S}_{n-1},\overline{S}_{n-1})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_n(x - c + \underline{S}_{n-1}m - \overline{S}_{n-1}l, y - m + l, \underline{S}_n, \overline{S}_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}(\mathbb{E}[g(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\underline{S}_{n-1}y) + \gamma w_n(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \underline{S}_n, \overline{S}_n)|\mathcal{F}_n]) > -\infty.
\end{aligned}
$$

To kończy dowód. □

W dalszym ciągu zakładać będziemy, że założenie (3.15) jest spełnione dla każdego $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ i dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$.

Na potrzebę najbliższych twierdzeń zakładać będziemy, że

$$\forall_{n \in \{0,1,2,\ldots,N\}} \ \forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}} \ \mathbb{E} w_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}) < \infty. \tag{3.18}$$

Założenie (3.18) jest założeniem technicznym. Dzięki temu założeniu równania Bellmana posiadają bardzo ważne własności.

Później w (3.30) okaże się, że założenie to wynika z założenia (1.7).

Mamy następujące

Twierdzenie 3.1. *Funkcje losowe $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \longmapsto w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ są dobrze zdefiniowanymi ciągłymi funkcjami losowymi. Co więcej, dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ zmienna losowa $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalna dla $k = 1, 2, ..., N$.*

Dowód. Będziemy korzystać z indukcji wstecznej względem k.

Ze Stwierdzenia 3.1 oraz Twierdzeń 2.1 i 7.1 otrzymujemy, że dla $k = 1$ jest to prawda, gdyż

$$\begin{aligned}
&w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \\
&\quad := \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}] = \\
&\quad = \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s}) \cap \mathbb{Q}^3} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}],
\end{aligned}$$

tzn. $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest supremum przeliczalnej liczbu $\mathcal{F}_{N-1}$-mierzalnych zmiennych losowych, więc jest $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalną zmienną losową.

Załóżmy, że jest to prawda dla $k - 1$. Pokażemy, że jest to prawda także dla k.

Z tego założenia wynika, że odwzorowanie losowe

$$(x, y, c, l, m) \longmapsto g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})$$

jest dobrze zdefiniowane dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ i $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Co więcej, jest ono ciągłe w swojej dziedzinie.

Zauważmy, że dla każdych $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ mamy

$$\infty > g(x + \underline{s}y) + \gamma w_{N-k+1}(x - (x + \underline{s}y) + \underline{s}y, y - y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) \geq -\infty.$$

Oczywiście, $(x + \underline{s}y, 0, y) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Na mocy założenia (1.7) skończoności funkcjonału $\mathbf{J}^N$ oraz ze zwartości zbioru $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ otrzymujemy, że dla każdego $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ mamy wobec założenia (3.18), że

$$g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) < \infty.$$

Z faktu, że funkcja g jest ograniczona z góry na przedziale $[0, x + \underline{s}y]$ oraz z założenia (1.7) otrzymujemy, że dla każdego $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ zmienna losowa

$$g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})$$

jest całkowalna na mocy Konwencji 1.2.

Na mocy Twierdzeń 2.1 i 7.1 należy pokazać, że odwzorowanie losowe

$$(x, y, c, l, m) \longmapsto \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]$$

jest ciągłe w swojej dziedzinie.

Ustalmy $(x, y, c, l, m) \in \mathbb{R}^5_+$ takie, że $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Niech $(x_n, y_n, c_n, l_n, m_n)_n^\infty$ będzie ciągiem z $\mathbb{R}^5_+$ takim, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, l_n, m_n) \in \mathbb{A}(x_n, y_n, \underline{s}, \overline{s})$. Załóżmy, że ciąg ten zbiega do (x, y, c, l, m).

Pokażemy, że

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}, \overline{s}, c_n, l_n, m_n)|\mathcal{F}_{N-k}] = \mathbb{E}[V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-k}], \tag{3.19}$$

gdzie

$$V_{N-k}(x, y, c, l, m) := g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}). \tag{3.20}$$

Rozważmy następujące przypadki.

1^o. $x - c + m\underline{s} - l\overline{s} > 0$ lub $y - m + l > 0$

Dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s} > 0$ lub $y_n - m_n + l_n > 0$. Zatem ze zbieżności ciągu $(x_n, y_n, c_n, l_n, m_n)_{n=1}^\infty$ otrzymujemy, że istnieją $\varepsilon_1 \geq 0$ i $\varepsilon_2 \geq 0$ takie, że $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ i dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s} \geq \varepsilon_1 \geq 0$ i $y_n - m_n + l_n \geq \varepsilon_2 \geq 0$.

Niech $\delta_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}}(x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s})$ i $\delta_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}}(y_n - m_n + l_n)$. Oczywiście, $0 \leq \delta_1, \delta_2 < \infty$ oraz $\delta_1 + \delta_2 > 0$.

Zatem dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} &w_{N-k+1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) \leq \\ &\qquad \leq w_{N-k+1}(x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s}, y_n - m_n + l_n, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) \leq \\ &\qquad \leq w_{N-k+1}(\delta_1, \delta_2, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}), \end{aligned}$$

gdyż funkcja losowa $w_{N-k+1}(\cdot, \cdot, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})$ jest ściśle rosnąca ze względu na obie zmienne.

Niech $M_{N-k+1} := \max\{|w_{N-k+1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|, |w_{N-k+1}(\delta_1, \delta_2, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\}$. Z całkowalności $w_{N-k+1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})$ i $w_{N-k+1}(\delta_1, \delta_2, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})$ otrzymujemy całkowalność M_{N-k+1}, gdyż dla każdych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność (3.7).

Zatem dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$|w_{N-k+1}(x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s}, y_n - m_n + l_n, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})| \leq M_{N-k+1}. \tag{3.21}$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[w_{N-k+1}(x_n - c_n + m_n\underline{s} - l_n\overline{s}, y_n - m_n + l_n, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] =$$
$$= \mathbb{E}[w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Z ciągłości funkcji g na przedziale $[0, x + \underline{s}y]$ oraz z faktu, że w tym szczególnym przypadku

$$\mathbb{E}[w_{N-k+1}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]$$

jest skończone, otrzymujemy, że w tym przypadku

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x_n, \underline{s}, \overline{s}, y_n, c_n, l_n, m_n)|\mathcal{F}_{N-k}] = \mathbb{E}[V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-k}].$$

2^o. $x - c + m\underline{s} - l\overline{s} = 0$ i $y - m + l = 0$.

W tym przypadku

$$w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s} - l\overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) = w_{N-k+1}(0, 0, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) = -\infty.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x_n, y_n, c_n, \underline{s}, \overline{s}, l_n, m_n)|\mathcal{F}_{N-k}] = \mathbb{E}[V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-k}] = -\infty.$$

Skoro ciąg $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony z góry, więc musi być $-\infty \leq g(c) < \infty$. Zatem $V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) = -\infty$. Tym samym, na mocy Konwencji 1.2, mamy

$$\mathbb{E}[V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)|\mathcal{F}_{N-k}] = -\infty. \tag{3.22}$$

Pozostaje pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x_n, y_n, c_n, \underline{s}, \overline{s}, l_n, m_n)|\mathcal{F}_{N-k}] = -\infty. \tag{3.23}$$

Załóżmy, że (3.23) nie jest prawdą.

Wówczas istnieją zdarzenie $A \in \mathcal{F}_{N-k}$ o ściśle dodatnim prawdopodobieństwie, stała $\eta_k \in \mathbb{R}$ oraz podciąg $(n_r)_{r=1}^{\infty}$ liczb naturalnych takie, że

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x_{n_r}, y_{n_r}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_r}, l_{n_r}, m_{n_r})\mathbb{I}(A)] = \eta_k. \tag{3.24}$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych $r \in \mathbb{N}$ musi być $x_{n_r} - c_{n_r} + m_{n_r}\underline{s} - l_{n_r}\overline{s} > 0$ lub $y_{n_r} - m_{n_r} + l_{n_r} > 0$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy dla nieskończenie wielu $r \in \mathbb{N}$, że $V_{N-k}(x_{n_r}, y_{n_r}, c_{n_r}, l_{n_r}, m_{n_r}, \underline{s}, \overline{s}) = -\infty$ a wtedy (3.24) nie byłoby spełnione.

Skoro ciągi $(x_{n_r} - c_{n_r} + m_{n_r}\underline{s} - l_{n_r}\overline{s})_{r=1}^{\infty}$ i $(y_{n_r} - m_{n_r} + l_{n_r})_{r=1}^{\infty}$ zbiegają do $x - c + m\underline{s} - l\overline{s} = 0$ i $y - m + l = 0$ odpowiednio, więc istnieje podciąg $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ liczb naturalnych taki, że ciągi $(x_{n_{r_j}} - c_{n_{r_j}} + m_{n_{r_j}}\underline{s} - l_{n_{r_j}}\overline{s})_{j=1}^{\infty}$ i $(y_{n_{r_j}} - m_{n_{r_j}} + l_{n_{r_j}})_{j=1}^{\infty}$ są ściśle malejące.

Zatem ciąg $(V_{N-k}(x_{n_{r_j}}, y_{n_{r_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{r_j}}, l_{n_{r_j}}, m_{n_{r_j}}))_{j=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący. Na mocy (3.24) oraz z lematou Fatou dla niedodatnich zmiennych losowychotrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\eta_k &= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x_{n_{r_j}}, y_{n_{r_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{r_j}}, l_{n_{r_j}}, m_{n_{r_j}})\mathbb{I}(A)] = \\ &= \limsup_{j\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x_{n_{r_j}}, y_{n_{r_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{r_j}}, l_{n_{r_j}}, m_{n_{r_j}})\mathbb{I}(A)] \leq \\ &\leq \mathbb{E}[\limsup_{j\to\infty} V_{N-k}(x_{n_{r_j}}, y_{n_{r_j}}, \underline{s}, \overline{s}, c_{n_{r_j}}, l_{n_{r_j}}, m_{n_{r_j}})\mathbb{I}(A)]\mathbb{E}[V_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m)\mathbb{I}(A)] = -\infty.\end{aligned}$$

To jest sprzeczność, gdyż $\eta_k \in \mathbb{R}$.

Zatem (3.23) zachodzi. □

Konwencja 3.1. *Przyjmujemy, że jeśli $x < 0$ i $y < 0$ to dla każdych $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ takich, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$ mamy*

$$w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = -\infty$$

dla każdych $k = 0, 1, 2, ..., N$.

Lemat 3.2. *Funkcje losowe $w_{N-k}(\cdot, \cdot, \underline{s}, \overline{s})$ są wklęsłe dla $k = 0, 1, 2, ..., N$.*

Dowód. Dla $k = 0$ jest to prawda, ponieważ funkcja g jest funkcją wklęsłą, zaś złożenie funkcji wklęsłej z przekształceniem liniowym jest funkcją wklęsłą.

Załóżmy, że jest to prawda dla k. Pokażemy, że jest to prawda dla $k + 1$.

Niech $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i $t \in [0, 1]$. Skoro zachodzi inkluzja (2.7), więc

$$\begin{aligned}&w_{N-k-1}(t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2), \underline{s}, \overline{s}) = \\ &\quad= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(t(x_1,y_1)+(1-t)(x_2,y_2),\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \\ &\qquad+ \gamma w_{N-k}(tx_1 + (1-t)x_2 - c + \underline{s}m - \overline{s}l, ty_1 + (1-t)y_2 - m + l, \underline{S}_{N-k}, \overline{S}_{N-k})|\mathcal{F}_{N-k-1}] \geq \\ &\quad\geq \sup_{(c,l,m)\in t\mathbb{A}(x_1,y_1,\underline{s},\overline{s})+(1-t)\mathbb{A}(x_2,y_2,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \\ &\qquad+ \gamma w_{N-k}(tx_1 + (1-t)x_2 - c + \underline{s}m - \overline{s}l, ty_1 + (1-t)y_2 - m + l, \underline{S}_{N-k}, \overline{S}_{N-k})|\mathcal{F}_{N-k-1}] =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=& \sup_{(c_1,l_1,m_1)\in\mathbb{A}(x_1,y_1,\underline{s},\overline{s}),(c_2,l_2,m_2)\in\mathbb{A}(x_2,y_2,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(tc_1+(1-t)c_2)+\\
&+\gamma w_{N-k}(tx_1+(1-t)x_2-(tc_1+(1-t)c_2)+\\
&\quad \underline{s}(tm_1+(1-t)m_2)-\overline{s}(tl_1+(1-t)l_2),\\
&\quad ty_1+(1-t)y_2-(tm_1+(1-t)m_2)+(tl_1+(1-t)l_2),\underline{S}_{N-k},\overline{S}_{N-k})|\mathcal{F}_{N-k-1}]=\\
=& \sup_{(c_1,l_1,m_1)\in\mathbb{A}(x_1,y_1,\underline{s},\overline{s}),(c_2,l_2,m_2)\in\mathbb{A}(x_2,y_2,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(tc_1+(1-t)c_2)+\\
&+\gamma w_{N-k}(t(x_1-c_1+\underline{s}m_1-\overline{s}l_1,y_1-m_1+l_1)+\\
&\quad +(1-t)(x_2-c_2+\underline{s}m_2-\overline{s}l_2,y_2-m_2+l_2),\underline{S}_{N-k},\overline{S}_{N-k})|\mathcal{F}_{N-k-1}]\geq\\
\geq& \sup_{(c_1,l_1,m_1)\in\mathbb{A}(x_1,y_1,\underline{s},\overline{s}),(c_2,l_2,m_2)\in\mathbb{A}(x_2,y_2,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[tg(c_1)+\\
&+(1-t)g(c_2)+\\
&+t\gamma w_{N-k}(x_1-c_1+\underline{s}m_1-\overline{s}l_1,y_1-m_1+l_1,\underline{S}_{N-k},\overline{S}_{N-k})+\\
&+(1-t)\gamma w_{N-k}(x_2-c_2+\underline{s}m_2-\overline{s}l_2,y_2-m_2+l_2,\underline{S}_{N-k},\overline{S}_{N-k})|\mathcal{F}_{N-k}]\geq\\
\geq& tw_{N-k-1}(x_1,y_1,\underline{s},\overline{s})+(1-t)w_{N-k-1}(x_2,y_2,\underline{s},\overline{s}).
\end{aligned}
$$

Oznacza to, że funkcja losowa $w_{N-k-1}(\cdot,\cdot,\underline{s},\overline{s})$ jest wklęsła. □

Poniższy Lemat orzeka, że istnieje strategia jednokrokowa, przy której realizowana jest wartość w_{N-l}.

Lemat 3.3. *Niech* $(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}$. *Wówczas istnieje zmienna losowa* $(\hat{c},\hat{l},\hat{m})\in\mathcal{A}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ *taka, że mamy, że*

$$
w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})=\mathbb{E}[g(\hat{c})+\gamma w_{N-k}(x-\hat{c}+\underline{s}\hat{m}-\overline{s}\hat{l},y-\hat{m}+\hat{l},\underline{S}_{N-k+1},\overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]. \quad (3.25)
$$

Dowód. Z ciągłości funkcji losowej $\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\cdot,\cdot,\cdot)|\mathcal{F}_{N-k}]$ otrzymujemy, że dla każdego $\omega\in\Omega$ mamy

$$
\begin{aligned}
&w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega)=\\
&\sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\underline{s},\overline{s})\cap\mathbb{Q}^3}\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,l,m)|\mathcal{F}_{N-k}](\omega)
\end{aligned}
$$

gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych. Niech $(c_n,l_n,m_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem wszystkich elementów $\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})\cap\mathbb{Q}^3$. Zdefiniujmy indukcyjnie ciąg $(\hat{c}_n,\hat{l}_n,\hat{m}_n)_{n=0}^{\infty}$ zmiennych losowych $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalnych przyjmujących wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})\cap\mathbb{Q}^3$ w następujący sposób. Niech $(\hat{c}_0,\hat{l}_0,\hat{m}_0):=(c_0,l_0,m_0)$,

$$
A_1:=\{\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},c_1,l_1,m_1)|\mathcal{F}_{N-k}]\geq\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c}_0,\hat{l}_0,\hat{m}_0)|\mathcal{F}_{N-k}]\}
$$

i

$$
(\hat{c}_1,\hat{l}_1,\hat{m}_1):=(c_1,l_1,m_1)\mathbb{I}(A_1)+(\hat{c}_0,\hat{l}_0,\hat{m}_0)\mathbb{I}(\Omega\setminus A_1)
$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ niech

$$A_{n+1} := \{\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},c_{n+1},l_{n+1},m_{n+1})|\mathcal{F}_{N-k}] \geq \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c}_n,\hat{l}_n,\hat{m}_n)|\mathcal{F}_{N-k}]\}$$

i

$$(\hat{c}_{n+1},\hat{l}_{n+1},\hat{m}_{n+1}) := (c_{n+1},l_{n+1},m_{n+1})\mathbb{I}(A_{n+1}) + (\hat{c}_n,\hat{l}_n,\hat{m}_n)\mathbb{I}(\Omega \setminus A_{n+1})$$

Bezpośrednio z konstrukcji otrzymujemy, że

$$\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c}_{n+1},\hat{l}_{n+1},\hat{m}_{n+1})|\mathcal{F}_{N-k}] \geq \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c}_n,\hat{l}_n,\hat{m}_n)|\mathcal{F}_{N-k}] \tag{3.26}$$

oraz

$$\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c}_{n+1},\hat{l}_{n+1},\hat{m}_{n+1})|\mathcal{F}_{N-k}] \geq \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},c_n,l_n,m_n)|\mathcal{F}_{N-k}]$$

dla $n = 0, 1 \ldots$. Zatem dla każdego $\omega \in \Omega$ mamy

$$w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c}_{n+1},\hat{l}_{n+1},\hat{m}_{n+1})|\mathcal{F}_{N-k}](\omega). \tag{3.27}$$

Z Lematu 2 z [18] (zob. Lemat 7.4) istnieje $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalny podciąg $(n_k)_{n=1}^{\infty}$ ciągu liczb naturalnych $\mathbb{N}$ oraz $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalna zmienna losowa $(\hat{c},\hat{l},\hat{m})$ przyjmująca wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ takie, że dla każdego $\omega \in \Omega$ mamy

$$\lim_{k\to\infty}(\hat{c}_{1+n_k(\omega)}(\omega),\hat{l}_{1+n_k(\omega)}(\omega),\hat{m}_{1+n_k(\omega)}(\omega)) = (\hat{c}(\omega),\hat{l}(\omega),\hat{m}(\omega)).$$

Biorąc $k \longrightarrow \infty$ in (3.27) oraz biorąc pod uwagę (3.26) i założenie (3.18) z ciągłości odwzorowania

$$(c,l,m) \mapsto \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,c,l,m,\underline{s},\overline{s})|\mathcal{F}_{N-k}]$$

otrzymujemy (3.25), co kończy dowód. □

Poniższy Wniosek mówi, że równanie Bellmana w_{N-k} zdefiniowane za pomocą (3.14) może być zdefiniowane analogicznie za pomocą brania supremum po zbiorach $\mathbb{A}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$. Jeżeli wiec w chwili $N-k$ inwestor ma x pieniędzy oraz y akcji, zaś ceny sprzedaży i kupna wynoszą $\underline{s}$ i $\overline{s}$ odpowiednio, to inwestor chce wybrać taką strategię jednokrokową, tzn. taki $(c,l,m) \in \mathcal{A}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$, aby wartość $\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,l,m)|\mathcal{F}_{N-k}]$ była jak największa.

Wniosek 3.3. *Niech $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$. Wówczas*

$$w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \sup_{(c^*,l^*,m^*)\in\mathcal{A}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},c^*,l^*,m^*)|\mathcal{F}_{N-k}]. \tag{3.28}$$

Wniosek 3.4. *Niech $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$, zaś $(\hat{c},\hat{l},\hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ niech będzie takie, że*

$$w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c},\hat{l},\hat{m})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Wówczas dla każdej zmiennej losowej $(\tilde{c},\tilde{l},\tilde{m})$ z $\mathcal{A}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ mamy

$$\mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\hat{c},\hat{l},\hat{m})|\mathcal{F}_{N-k}] \geq \mathbb{E}[V_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s},\tilde{c},\tilde{l},\tilde{m})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Poniższe Stwierdzenie orzeka, że układ równań Bellmana wprowadzonych w (3.14) rzeczywiście rozwiązuje problem (1.7).

Stwierdzenie 3.2. *Niech* $\hat{u} = (\hat{c}_n, \hat{l}_n, \hat{m}_n)_{n=0}^N \in \mathcal{U}_{(x,y)}^N(\underline{S}, \overline{S})$ *będzie taką strategią, że*

$$\begin{aligned} w_{N-k}(\hat{x}_{N-k-1}, \hat{y}_{N-k-1}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) = \\ = \mathbb{E}[V_{N-k}(\hat{x}_{N-k-1}, \hat{y}_{N-k-1}, \underline{S}_{N-k}, \overline{S}_{N-k}, \hat{c}_{N-k}, \hat{l}_{N-k}, \hat{m}_{N-k}) | \mathcal{F}_{N-k}], \end{aligned} \tag{3.29}$$

gdzie ciąg $(\hat{x}_n, \hat{y}_n)_{n=0}^N$ *jest zdefiniowany dla* $\hat{u}$ *analogicznie jak w (1.5). Wówczas*

$$\mathbb{E}[w_0(x, y, \underline{s}, \overline{s})] = \sup_{u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^N(\underline{S}, \overline{S})} \mathbf{J}^N(u). \tag{3.30}$$

Dowód. Oczywiście, w (3.30) musi być '$\leq$', gdyż $(\hat{c}_n, \hat{l}_n, \hat{m}_n)_{n=0}^N$ jest strategią dopuszczalną a tym samym musi być

$$\mathbb{E}[\sum_{n=0}^N g(\hat{c}_n)] \leq \mathbf{J}^N(u).$$

Ale strategia $\hat{u}$ jest dopuszczalna zaś z (3.29) otrzymujemy, że dla każdej strategii $u^* = (c_n^*, l_n^*, m_n^*)_{n=0}^N \in \mathcal{U}_{(x,y)}^N(\underline{S}, \overline{S})$ mamy

$$\begin{aligned} w_0(x_0, y_0, \underline{S}_0, \overline{S}_0) = & \mathbb{E}[V_1(x_0, y_0, \underline{S}_1, \overline{S}_1, \hat{c}_0, \hat{l}_0, \hat{l}_0) | \mathcal{F}_0] \geq \\ \geq & \mathbb{E}[V_1(x_0, y_0, \underline{S}_1, \overline{S}_1, c_0^*, l_0^*, m_0^*) | \mathcal{F}_0]. \end{aligned}$$

Zatem w (3.30) mamy również '$\geq$'. □

Uwaga 3.1. *Zauważmy, że na mocy (3.30) założenie (1.7) implikuje, że założenie (3.18) jest spełnione. Weźmy bowiem pod uwagę pozycję* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *i* $\varepsilon > 0$. *Załóżmy, że naszą pozycją początkową jest* $(x + \varepsilon, y)$. *Do momentu* $N - k - 1$ *możemy na konsupcję przeznaczać* $\frac{1}{N-k-1} \cdot \varepsilon$ *i nic nie inwestować. W efekcie, w chwili* $N - k$ *będziemy w pozycji* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$. *Strategia ta nie jest optymalna, więc założenie (3.18) jest spełnione.*

3.2 Konsekwencje założenia pełnego warunkowego nośnika dla ściśle wklęsłej funkcji użyteczności

W tym podrozdziale zajmiemy się konsekwencją założenia (1.4) dla ściśle wklęsłej funkcji g. W szczególności te dwie rzeczy implikują jednoznaczność optymalnej strategii.

Twierdzenie 3.2. *Załóżmy (3.18) i że funkcja g jest ściśle wklęsła. Wówczas funkcja losowa*

$$(x, y) \longmapsto \mathbb{E}[w_{N-k+1}(x, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}]$$

jest ściśle wklęsła dla $k = 1, 2, \ldots, N$.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na $k = 1, 2, \ldots, N$.

Przypadek $k = 1$ wynika bezpośrednio ze ścisłej wklęsłości funkcji g.

Załóżmy, że funkcja losowa $(x, y) \longmapsto \mathbb{E}[w_{N-k+2}(x, y, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k+1}]$ jest ściśle wklęsła.

Niech $F(x, y) := \mathbb{E}[w_{N-k+1}(x, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]$. Z Lematu 3.2 odwzorowanie losowe $(x, y) \mapsto F(x, y)$ jest wklęsłe.

Załóżmy, że nie jest ono ściśle wklęsłe.

Wówczas istnieją dwie różne pozycje $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2_+$ oraz $t \in (0, 1)$ takie, że

$$F(t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2)) = tF(x_1, y_1) + (1-t)F(x_2, y_2) \tag{3.31}$$

Oznaczmy $(x_3, y_3) := t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2)$ i niech $(\hat{c}_i, \hat{l}_i, \hat{m}_i)$ będzie optymalną strategią jednookresową w w_{N-k+1} dla (x_i, y_i), $i = 1, 2$. Jej istnienie wynika z Wniosku 3.3. Z wklęsłości g i w_{N-k+1} otrzymujemy, że $(\hat{c}_3, \hat{l}_3, \hat{m}_3) := t(\hat{c}_1, \hat{l}_1, \hat{m}_1) + (1-t)(\hat{c}_2, \hat{l}_2, \hat{m}_2)$ jest optymalną strategią jednookresową dla (x_3, y_3). Co więcej, ze ścisłej wklęsłości funkcji g mamy, że $\hat{c}_3 = \hat{c}_1 = \hat{c}_2$. Zatem z (3.31) i (3.25) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(w_{N-k+2}(x_3 - \hat{c}_3 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_3 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_3, y_3 - \hat{m}_3 + \hat{l}_3, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k}] = \\
&= t\mathbb{E}[(w_{N-k+2}(x_1 - \hat{c}_1 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_1 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_1, y_1 - \hat{m}_1 + \hat{l}_1, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k}] + \\
&\quad + (1-t)\mathbb{E}[(w_{N-k+2}(x_2 - \hat{c}_2 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_2 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_2, y_2 - \hat{m}_2 + \hat{l}_2, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k}].
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ze względu na wklęsłość mamy, że

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(w_{N-k+2}(x_3 - \hat{c}_3 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_3 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_3, y_3 - \hat{m}_3 + \hat{l}_3, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k+1}] \geq \\
&\geq t\mathbb{E}[(w_{N-k+2}(x_1 - \hat{c}_1 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_1 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_1, y_1 - \hat{m}_1 + \hat{l}_1, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k+1}] + \\
&\quad + (1-t)\mathbb{E}[(w_{N-k+1}(x_2 - \hat{c}_2 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_2 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_2, y_2 - \hat{m}_2 + \hat{l}_2, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k+1}],
\end{aligned} \tag{3.33}$$

co oznacza, że równość (3.32) mamy tylko wtedy, gdy równość w (3.33) zachodzi.

Z założenia indukcyjnego funkcja losowa

$$(x, y) \longmapsto \mathbb{E}[w_{N-k+2}(x, y, \underline{S}_{N-k+2}, \overline{S}_{N-k+2})|\mathcal{F}_{N-k+1}]$$

jest ściśle wklęsła. Skoro więc w (3.33) mamy równość, to, biorąc pod uwagę, że $\hat{c}_3 = \hat{c}_2 = \hat{c}_1$, mamy, że

$$\begin{cases} x_1 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_1 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_1 = x_2 + \underline{S}_{N-k+1}\hat{m}_2 - \overline{S}_{N-k+1}\hat{l}_2 \\ y_1 - \hat{m}_1 + \hat{l}_1 = y_2 - \hat{m}_2 + \hat{l}_2 \end{cases}. \tag{3.34}$$

Wobec optymalności strategii mamy, że $\hat{m}_1\hat{l}_1 = 0 = \hat{m}_2\hat{l}_2$. Zatem nie może być ani $x_1 \geq x_2$ i $y_1 > y_2$ ani $x_2 > x_1$ i $y_2 \geq y_1$.

Załóżmy, że $x_1 < x_2$ i $y_1 \geq y_2$. Wówczas $\hat{m}_2 = 0 = \hat{l}_1$. Rozwiązując (3.34), otrzymujemy, że z prawdopodobieństwem 1 mamy, że

$$\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\overline{S}_{N-k+1}} + \frac{\hat{m}_1}{x_2 - x_1}\left(1 - \frac{\underline{S}_{N-k+1}}{\overline{S}_{N-k+1}}\right) =: a + b. \tag{3.35}$$

Zauważmy, że $0 \leq \hat{m}_1 \leq y_1$ zaś $\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$ jest stałą deterministyczną, więc $b \geq 0$ jest ograniczone. Skoro $\overline{S}_{N-k+1}$ spełnia warunek (1.4), więc $a = \frac{1}{\overline{S}_{N-k+1}}$ może być dowolnie duże z niezerowym prawdopodobieństwem, co przeczy temu, że (3.35) zachodzi z prawdopodobieństwem 1, tzn. przeczy temu, że $\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$ jest stałą deterministyczną.

Rozważmy przypadek $x_1 \geq x_2$ i $y_1 < y_2$. Tutaj $\hat{m}_1 = 0 = \hat{l}_2$. Zauważmy, że nie może być $x_1 = x_2$, gdyż wtedy z (3.34) otrzymalibyśmy, że $\hat{l}_1 = 0 = \hat{m}_2$ i tym samym $y_1 = y_2$, co przeczyłoby temu, że $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

Korzystając z (3.34), otrzymujemy

$$\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\overline{S}_{N-k+1}} + \frac{\hat{m}_2}{x_2 - x_1}\left(1 - \frac{\underline{S}_{N-k+1}}{\overline{S}_{N-k+1}}\right) =: c + d, \tag{3.36}$$

co możemy odrzucić na mocy analogicznego rozumowania, co poprzednio.

Oznacza to, że (3.31) nie zachodzi. Innymi słowy funkcja losowa F jest ściśle wklęsła. □

Wniosek 3.5. *Dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *istnieje dokładnie jedna zmienna losowa* $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *taka, że*

$$w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \hat{c} + \underline{s}\hat{m} - \overline{s}\hat{l}, y - \hat{m} + \hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Co więcej, odwzorowanie

$$(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \mapsto (\hat{c}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \hat{l}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \hat{m}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}))$$

jest ciągłe na $\mathbb{D}$.

Dowód. Wynika to z Twierdzenia 7.2 z Rozdziału 7 . □

Powyższy Wniosek ma następującą konsekwencję.

Wniosek 3.6. *Dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *istnieje dokładnie jedna strategia optymalna, tzn. istnieje dokładnie jedno* $\hat{u} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ *takie, że*

$$\mathbf{J}^N(\hat{u}) = \sup_{u \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})} \mathbf{J}^N(u). \tag{3.37}$$

Dowód. Wynika to z Twierdzenia 7.2 z Rozdziału 7. □

3.3 Właściwości strategii optymalnych

Bardzo ważną kwestią są optymalne strategie. Poniżej definiujemy zbiory losowe, które mówią, kiedy optymalna decyzją inwestora jest brak zmiany pozycji, sprzedaż jakiejś ilości akcji bądź kupno jakiejś ilości akcji.

Niech $\overline{s} > \underline{s} > 0$. Dla $k = 1, 2, ..., N$ zdefiniujmy następujące losowe zbiory:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \\
&= \sup_{c \in [0,x]} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}]\},\\
\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \\
&= \sup_{(c,0,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s},\\
&\quad y - m, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}]\} \setminus \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \\
&= \sup_{(c,l,0) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c - l\overline{s},\\
&\quad y + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}]\} \setminus \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}).
\end{aligned}
$$

Zwróćmy uwagę na sposób zdefiniowania powyższych zbiorów losowych. Zbiór losowy

$$\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})$$

zawiera te pozycje, przy których optymalnym działanie dla inwestora jest brak transakcji po optymalnej konsumpcji. Nie orzekamy, czy jeżeli pozycja inwestora jest w tym zbiorze, to nie ma innej strategii optymalnej. Oczywiście, w przypadku, gdy funkcja g jest ściśle wklęsła, to na mocy Twierdzenia 3.2 dostajemy, że jeżeli pozycja inwestora jest w tym zbiorze, to nie ma innej optymalnej strategii.

Z powodów technicznych zbiory losowe $\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})$ i $\mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})$ zdefiniowaliśmy poprzez usunięcie z nich wszystkich ewentualnych elementów zbioru losowego $\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})$.

Wniosek 3.7. *Dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *mamy*

(i) $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}$,

(ii) $\{(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}$,

(iii) $\{(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}$.

Dowód. Jest to konsekwencja tego, że dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ następujące zmienne losowe są $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalne

$$\begin{aligned}
&w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}),\\
&\sup_{c\in[0,x]} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}],\\
&\sup_{(c,0,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + m\underline{s}, y - m, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}],\\
&\sup_{(c,l,0)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c - l\overline{s}, y + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].
\end{aligned}$$

□

Lemat 3.4. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. Wówczas dla każdych $c, d \geq 0$ zachodzą następujące inkluzje*

$$(c, d, d) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \Longrightarrow (c, 0, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{3.38}$$

Dowód. Załóżmy, że $(c, d, d) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Wówczas

$$\begin{aligned}
0 \leq & c \leq x + \underline{s}y\\
0 \leq & x - c + \underline{s}d - \overline{s}d = x - c + (\underline{s} - \overline{s})d \leq x - c = x - c + \underline{s} \cdot 0 - \overline{s} \cdot 0,\\
0 \leq & y - d + d = y = y - 0 + 0,
\end{aligned}$$

tzn. $(c, 0, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. □

Lemat 3.5. *Niech $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ i niech $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ będzie optymalną strategią jednookresową dla $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, tzn.*

$$w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \hat{c} + \underline{s}\hat{m} - \overline{s}\hat{l}, y - \hat{m} + \hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Wówczas zdarzenie $\{\hat{l} \cdot \hat{m} > 0\} = \emptyset$.

Dowód. Załóżmy, że jest to nieprawda, tzn., że $A := \{\hat{l} \cdot \hat{m} > 0\} \neq \emptyset$.

Rozważmy cztery następujące zdarzenia:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= A \cap \{\underline{s}\hat{m} - \overline{s}\hat{l} \geq 0, -\hat{m} + \hat{l} \geq 0\},\\
A_2 &:= A \cap \{\underline{s}\hat{m} - \overline{s}\hat{l} \geq 0, -\hat{m} + \hat{l} < 0\},\\
A_3 &:= A \cap \{\underline{s}\hat{m} - \overline{s}\hat{l} < 0, -\hat{m} + \hat{l} \geq 0\},\\
A_4 &:= A \cap \{\underline{s}\hat{m} - \overline{s}\hat{l} < 0, -\hat{m} + \hat{l} < 0\}.
\end{aligned}$$

Oczywiście, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Zauważmy, że wobec faktu, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$ i tego, że $A = \{\hat{l} \cdot \hat{m} > 0\}$ dostajemy, że $A_1 = \emptyset$, gdyż na zdarzeniu A_1 musi być $\hat{m} > \hat{l}$, co przeczy temu, że na zdarzeniu A_1 mamy $-\hat{m} + \hat{l} \geq 0$.

Na zdarzeniu A_2 mamy

$$w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}+\underline{s}\hat{m}-\overline{s}\hat{l}, y-\hat{m}+\hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] =$$
$$= \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}+\underline{s}(\hat{m}-\hat{l})-(\overline{s}-\underline{s})\hat{l}, y-(\hat{m}-\hat{l}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] <$$
$$< \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}+\underline{s}(\hat{m}-\hat{l}), y-(\hat{m}-\hat{l}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Jest przy tym jasne, że na zdarzeniu A_2 mamy, że zmienna losowa $(\hat{c},0,\hat{m}-\hat{l})$ przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$. Wynika stąd w szczególności, że strategia jednookresowa $(\hat{c},\hat{l},\hat{m})$ nie jest optymalna na zdarzeniu A_2. Zatem $A_2=\emptyset$.

Na zdarzeniu A_3 mamy

$$w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}+\underline{s}\hat{m}-\overline{s}\hat{l}, y-\hat{m}+\hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] =$$
$$= \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}-\overline{s}(\hat{l}-\hat{m})-(\overline{s}-\underline{s})\hat{m}, y-(\hat{l}-\hat{m}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] <$$
$$< \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}-\overline{s}(\hat{l}-\hat{m}), y-(\hat{l}-\hat{m}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Jest przy tym jasne, że na zdarzeniu A_3 mamy, że zmienna losowa $(\hat{c},0,\hat{l}-\hat{m})$ przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$. Wynika stąd w szczególności, że strategia jednookresowa $(\hat{c},\hat{l},\hat{m})$ nie jest optymalna na zdarzeniu A_3. Zatem $A_3=\emptyset$.

Na zdarzeniu A_4 mamy

$$w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}+\underline{s}\hat{m}-\overline{s}\hat{l}, y-\hat{m}+\hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] =$$
$$< \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{n-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Jest przy tym jasne, że na zdarzeniu A_4 zmienna losowa $(\hat{c},0,0)$ przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$, gdyż na zdarzeniu A_4 mamy $\underline{s}\hat{m}-\overline{s}\hat{l}<0$ i tym samym na zdarzeniu A_4 musi być $\hat{c}\le x$. Wynika stąd w szczególności, że strategia jednookresowa $(\hat{c},\hat{l},\hat{m})$ nie jest optymalna na zdarzeniu A_4. Zatem $A_4=\emptyset$.

Otrzymujemy zatem, że $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=\emptyset$, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

To kończy dowód. □

Dzięki powyższemu Lematowi możemy udowodnić następujący

Lemat 3.6. *Niech $\overline{s}>\underline{s}>0$. Wówczas zbiory losowe $\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})$, $\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})$, $\mathbf{B}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})$ są parami rozłączne.*

Dowód. Oczywiście, wystarczy pokazać, że

$$\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})\cap\mathbf{B}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})=\emptyset.$$

Załóżmy, że jest to nieprawda.

Wówczas istnieje $(x,y)\in\mathbb{R}^2_+$ takie, zdarzenie $A:=\{(x,y)\in\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})\cap\mathbf{B}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})\}\neq\emptyset$.

Z naszego założenia wynika, że istnieje optymalna strategia jednookresowa

$$(\hat{c},\hat{l},\hat{m})\in\mathcal{A}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$$

taka, że na zdarzeniu A mamy $\hat{l},\hat{m}>0$, co zgodnie z Lematem 3.5 jest sprzecznością. □

Rozdział 4

Własności modeli z chwilowym brakiem kosztów za transakcje

W niniejszym rozdziale wprowadzamy pojęcie ceny kalkulacyjnej. Podstawową metodą, jaką tutaj wprowadzamy jest pewne oryginalne podejście do naszego problemu optymalizacyjnego. Chodzi mianowicie o rozważenie sytuacji, co by było, gdyby tylko w chwili $N-k$ zamiast dwóch cen akcji inwestor miał tylko jedną ceną. Innymi słowy rozważamy, co by było gdyby w chwili obecnej zniknęły na moment koszty za transakcje, zaś przyszłość pozostałaby bez zmian.

Tak więc w ustalonej chwili czasowej $N-k$ mamy dwa modele: jeden z kosztami za transakcje a drugi z chwilowym ich brakiem. Okazuje się, że te dwa modele są ze sobą ściśle związane. Główny wynik opiera się na Twierdzeniach 4.1 i 4.2, które pokazują związek między tymi modelami. Na tych dwóch Twierdzeniach opiera się cała konstrukcja ceny kalkulacyjnej.

Podkreślmy przy tym jeszcze raz bardzo wyraźnie, że obu tych modelach przyszłość jest identyczna, zaś zmiana ma miejsce tylko w ustalonej chwili $N-k$.

Oznaczmy

$$\hat{\mathbb{D}} := \{(x, y, \hat{s}) \in \mathbb{R}^3_+ : \hat{s} > 0\}. \tag{4.1}$$

Każdy element $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ ma następującą intepretację: x oznacza ilość pieniędzy w banku, y oznacza ilość akcji, zaś $\hat{s}$ cenę jednostki akcji.

Poniżej wprowadzamy równanie Bellmana dla modelu z chwilowym brakiem kosztów za transakcje.

Dla $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ niech

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-k}(x, y, \hat{s}) := \\ &:= \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + (m-l)\hat{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}], \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie

$$\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s}) := \{(c,l,m) \in [0, x+\hat{s}y] \times \mathbb{R}^2_+ : \forall_{s\in[0,\infty)}\ x-c+(m-l)\hat{s}+s(y-m+l) \geq 0\}. \quad (4.3)$$

Znaczenie zbiorów $\hat{\mathbb{A}}$ jest analogiczne do znaczenia zbiorów $\mathbb{A}$.

Oczywiście, mamy następujący

Lemat 4.1. *Niech* $(x,y,\hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$. *Wówczas*

$$\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s}) = \{(c,l,m) \in [0, x+\hat{s}y] \times \mathbb{R}^2_+ : x-c+(m-l)\hat{s} \geq 0, y-m+l \geq 0\}. \quad (4.4)$$

Podobnie jak poprzednio definiujemy zbiory, które informują nas o optymalnych strategiach inwestora.

Dla $\hat{s} > 0$ i $k = 1,2,3,\ldots,N$ zdefiniujmy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : \hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) = \\ &= \sup_{c\in[0,x]} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x-c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\}, \\ \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s}) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : \hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) = \\ &= \sup_{(c,0,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x-c+m\hat{s}, \\ &\quad y-m, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\} \setminus \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s}) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : \hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) = \\ &= \sup_{(c,l,0)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x-c-l\hat{s}, y+l, \\ &\quad \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\} \setminus \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}). \end{aligned}$$

Wniosek 4.1. *Dla każdego* $(x,y,\hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ *mamy*

(i) $\{(x,y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}$,

(ii) $\{(x,y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}$,

(iii) $\{(x,y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}$.

Dowód. Wynika to z analogicznego rozumowania, co w dowodzie Wniosku 3.7 □

4.1 Właściwości zbioru parametrów sterujących w modelu z chwilowym brakiem kosztów za transakcje

W tym podrozdziale omówimy własności zbiorów $\hat{\mathbb{A}}$. Zwróćmy uwagę na analogię z własnościami zbiorów $\mathbb{A}$, które opisaliśmy z rozdziale 2.

Lemat 4.2. *Niech funkcja $K : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem*

$$K(l, m) := m - l \tag{4.5}$$

dla wszystkich $(l, m) \in \mathbb{R}^2_+$. Niech $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$, $c \in [0, x + \hat{s}y]$ oraz $(l, m) \in \mathbb{R}^2_+$. Wówczas zachodzi następująca równoważność

$$(c, l, m) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s}) \Longleftrightarrow \frac{c - x}{\hat{s}} \leq K(l, m) \leq y. \tag{4.6}$$

Dowód. Skoro $c \in [0, x + \hat{s}y]$ i $(l, m) \in \mathbb{R}^2_+$, więc prawdziwy jest następujący ciąg równoważności

$$(c, l, m) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x - c + K(l, m)\hat{s} \\ 0 \leq y - K(l, m) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K(l, m) \geq \frac{c-x}{\hat{s}} \\ y \geq K(l, m) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{c - x}{\hat{s}} \leq K(l, m) \leq y.$$

□

Aby uniknąć problemów związanych z nieograniczonością zbiorów $\hat{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$ zdefiniujmy

$$\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s}) := \{(c, K) :\in [0, x + \hat{s}y] \times \mathbb{R} : x - c + K\hat{s} \geq 0, y - K \geq 0\} \tag{4.7}$$

dla wszystkich $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$.

Lemat 4.3 (zwartość zbioru $\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$)**.** *Dla $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ zbiór $\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$ jest zwarty.*

Dowód. Jest jasne, że zbiór $\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$ jest domknięty. Ponadto dla każdego $(c, K) \in \overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq & c \leq x + \hat{s}y, \\ \frac{c - x}{\hat{s}} \leq & K \leq y, \end{aligned}$$

skąd widać, że zbiór ten jest również ograniczony. □

Lemat 4.4. *Dla wszystkich $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ zbiór $\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$ jest wypukły.*

Dowód. Ustalmy $(c_1, K_1), (c_2, K_2) \in \overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$ i $t \in [0, 1]$. Wówczas

$$x - (tc_1 + (1-t)c_2) + (tK_1 + (1-t)K_2)\hat{s} = t(x - c_1 + K_1\hat{s}) + (1-t)(x - c_2 + K_2\hat{s}) \geq 0$$

oraz

$$y - [tK_1 + (1-t)K_2] = t(y - K_1) + (1-t)(y - K_2) \geq 0.$$

Oznacza to, że, rzeczywiście, zbiór $\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$ jest wypukły. □

Lemat 4.5. *Niech $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$, zaś $(x_n, y_n, \hat{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem z $\hat{\mathbb{D}}$ zbieżnym do $(x, y, \hat{s})$. Wówczas*

$$\forall_{(c,K)\in\overline{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \; dist((c, K), \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{4.8}$$

Dowód. Ustalmy $(c, K) \in \overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$.

Oznaczmy

$$\rho := \frac{c}{x + \hat{s}y}. \tag{4.9}$$

Oczywiście, $\rho \in [0, 1]$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $c_n := \rho \cdot (x_n + \hat{s}_n y_n)$. Oczywiście, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $c_n \in [0, x_n + \hat{s}_n y_n]$.

Zauważmy, że jeśli $c = x + \hat{s}y$, to $K = y$ i ciąg $(c_n, K_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $K_n := y_n$ zbiega do (c, K). Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, K_n) \in \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n)$.

Rozważmy przypadek, gdy $0 \leq c < x + \hat{s}y$.

W tej sytuacji $\rho \in [0, 1)$.

Oznaczmy

$$\eta := \frac{\hat{s}(y - K)}{x + \hat{s}y - c}. \tag{4.10}$$

Oczywiście, w tej sytuacji η jest dobrze zdefiniowane.

Skoro $c \in [0, x + \hat{s}y)$ i $(c, K) \in \overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$, więc prawdziwy jest następujący ciąg równoważności

$$\begin{gathered} \frac{c - x}{\hat{s}} \leq K \leq y \Leftrightarrow c - x \leq \hat{s}K \leq \hat{s}y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c - x - \hat{s}y \leq \hat{s}K - \hat{s}y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \hat{s}(y - K) \leq x + \hat{s}y - c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\hat{s}(y - K)}{x + \hat{s}y - c} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \eta \leq 1. \end{gathered}$$

Skoro $\frac{c-x}{\hat{s}} \leq K \leq y$ zachodzi, więc $\eta \in [0, 1]$.

Z (4.10) mamy $K = y - \frac{\eta}{\hat{s}}(x + \hat{s}y - c)$.

Dla $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy

$$K_n := y_n - \frac{\eta}{\hat{s}_n}(x_n + \hat{s}_n y_n - c_n). \tag{4.11}$$

Oczywiście, ciąg $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do K.

Pokażemy, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, K_n) \in \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n)$.

Skoro $0 \leq c_n \leq x_n + \hat{s}_n y_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc pozostaje pokazać, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{c_n - x_n}{\hat{s}_n} \leq K_n \leq y_n$.

Prawdziwy jest następujący ciąg równoważności

$$\frac{c_n - x_n}{\hat{s}_n} \leq K_n \leq y_n \Leftrightarrow c_n - x_n \leq \hat{s}_n K_n \leq \hat{s}_n y_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c_n - x_n \leq \hat{s}_n y_n - \eta(x_n + \hat{s}_n y_n - c_n) \leq \hat{s}_n y_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c_n - x_n - \hat{s}_n y_n \leq -\eta(x_n + \hat{s}_n y_n - c_n) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \eta(x_n + \hat{s}_n y_n - c_n) \leq x_n + \hat{s}_n y_n - c_n.$$

Ostatni układ nierówności zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdyż $\eta \in [0,1]$. Oznacza to, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{c_n - x_n}{\hat{s}_n} \leq K_n \leq y_n$.

Wynika stąd, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $(c_n, K_n) \in \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n)$.

Ostatecznie mamy

$$0 \leq dist((c, K), \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n) \leq d((c, K), (c_n, K_n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Innymi słowy (4.8) zachodzi. □

Lemat 4.6. *Niech $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$, zaś $(x_n, y_n, \hat{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem z $\hat{\mathbb{D}}$ zbieżnym do $(x, y, \hat{s})$. Wówczas dla każdego ciągu $(c_n, K_n)_{n=1}^{\infty}$ takiego, że dla każdegego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $(c_n, K_n) \in \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n)$ mamy*

$$dist((c_n, K_n), \overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{4.12}$$

Dowód. Załóżmy, że nie jest to prawda.

Wówczas istnieje pewne $\varepsilon > 0$ oraz pewien podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ liczb naturalnych taki, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$dist((c_{n_k}, K_{n_k}), \overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})) > \varepsilon. \tag{4.13}$$

Skoro ciąg $(x_n, y_n, \hat{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, więc zbiór

$$cl(\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s}) \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n))$$

jest zwarty. Tym samym istnieje podciąg $(k_l)_{l=1}^{\infty}$ liczb naturalnych taki, że ciąg $(c_{n_{k_l}}, K_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$zbiega do pewnego

$$(c^*, K^*) \in cl(\overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s}) \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \hat{s}_n)).$$

Oczywiście, dla każdego $l \in \mathbb{N}$ mamy $0 \leq c_{n_{k_l}} \leq x_{n_{k_l}} + \hat{s}_{n_{k_l}} y_{n_{k_l}}$. Biorąc $l \to \infty$, otrzymujemy, że $0 \leq c^* \leq x + \hat{s}y$.

Co więcej, dla wszystkich $l \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{c_{n_{k_l}} - x_{n_{k_l}}}{\hat{s}_{n_{k_l}}} \leq K_{n_{k_l}} \leq y_{n_{k_l}}$. Biorąc $l \to \infty$, otrzymujemy, że $\frac{c^*-x}{\hat{s}} \leq K^* \leq y$.

Oznacza to, że $(c^*, K^*) \in \overline{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność z (4.13). Zatem zachodzi (4.12). □

Stwierdzenie 4.1. *Funkcja*

$$\overline{\mathbb{A}} : \hat{\mathbb{D}} \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \tag{4.14}$$

jest ciągła w metryce Hausdorffa.

Dowód. Wynika to z Lematów 4.5 i 4.6. □

4.2 Równania Bellmana dla modelu z chwilowym brakiem kosztów za transakcje

Dla $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ niech $\hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \hat{s})$ oznacza zbiór wszystkich $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalnych zmiennych losowych przyjmujących wartości w zbiorze $\hat{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s})$.

Stwierdzenie 4.2. *Dla* $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ *mamy*

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{N-k}(x, y, \hat{s}) = \\
&\quad = \sup_{(c,K)\in\overline{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + K\hat{s}, y - K, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dowód. Niech $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \hat{s})$ będzie optymalną strategią jednookresową, tzn.

$$\hat{v}_{N-k}(x, y, \hat{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + w_{N-k+1}(x - \hat{c} + \hat{s} \cdot (\hat{m} - \hat{l}), y - \hat{m} + \hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}]. \tag{4.16}$$

Na mocy (4.6) mamy $(\hat{c}, K(\hat{l}, \hat{m})) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \hat{s})$. Oczywiście,

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{N-k}(x, y, \hat{s}) := \\
&\quad = \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + (m - l)\hat{s}, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}] = \\
&\quad = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \hat{c} + (\hat{m} - \hat{l})\hat{s}, y - \hat{m} + \hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}] = \\
&\quad = \mathbb{E}[g(\hat{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \hat{c} + K(\hat{l}, \hat{m})\hat{s}, y - K(\hat{l}, \hat{m}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}] = \\
&\quad = \sup_{(c,K)\in\overline{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + K\hat{s}, y - K, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}],
\end{aligned}$$

gdyż musi być

$$
\begin{aligned}
&\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) \geq \\
&\quad \geq \sup_{(c,K)\in\overline{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c)+\gamma w_{N-k+1}(x-c+K\hat{s}, y-K, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}[g(\hat{c})+\gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}+K(\hat{l},\hat{m})\hat{s}, y-K(\hat{l},\hat{m}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].
\end{aligned}
$$

□

Lemat 4.7. *Niech* $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$. *Wówczas*

$$(c,0,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s}) \Leftrightarrow (c,m) \in \overline{\mathbb{A}}(x,y,\underline{s}) \tag{4.17}$$

oraz

$$(c,l,0) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s}) \Leftrightarrow (c,-l) \in \overline{\mathbb{A}}(x,y,\overline{s}). \tag{4.18}$$

Dowód. Pokażemy jedynie pierwszą równoważność. Druga może być pokazana w ten sam sposób.

'$\Longrightarrow$' Załóżmy, że $(c,0,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ i $\hat{s} = \underline{s}$.

Skoro $(c,0,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$, więc $x-c+m\underline{s} \geq 0$ i $y-m \geq 0$. Tym samym $\frac{c-x}{\underline{s}} \leq m \leq y$. Zatem $(c,m) \in \overline{\mathbb{A}}(x,y,\underline{s})$.

'$\Longleftarrow$' Załóżmy teraz, że $(c,m) \in \overline{\mathbb{A}}(x,y,\underline{s})$. Wówczas $\frac{c-x}{\underline{s}} \leq m \leq y$ a tym samym mamy $x-c+m\underline{s} \geq 0$ i $y-m \geq 0$. Zatem $(c,0,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})$. □

Na mocy Twierdzenia 3.2 mamy następujący

Wniosek 4.2. *Jeżeli funkcja g jest ściśle wklęsła, to funkcja losowa*

$$(c,K) \longmapsto \mathbb{E}[g(c)+\gamma w_{N-k+1}(x-c+\hat{s}K, y-K, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] \tag{4.19}$$

jest ściśle wklęsła na zbiorze $\overline{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})$.

Z Twierdzenia 7.2 otrzymujemy następujący

Wniosek 4.3. *Jeżeli funkcja g jest ściśle wklęsła, to dla każdego* $(x,y,\hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ *istnieje dokładnie jedna zmienna losowa* $(\hat{c}_{N-k}(x,y,\hat{s}), \hat{K}_{N-k}(x,y,\hat{s})) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x,y,\hat{s})$, *która jest jednookresową optymalną strategią, tzn.*

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}_{N-k}(x,y,\hat{s}))+&\\
+\gamma w_{N-k+1}(x-\hat{c}_{N-k}(x,y,\hat{s})+\hat{s}\hat{K}_{N-k}(x,y,\hat{s}),&\\
y-\hat{K}_{N-k}(x,y,\hat{s}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].&
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Co więcej, losowe odwzorowanie $(x,y,\hat{s}) \longmapsto (\hat{c}_{N-k}(x,y,\hat{s}), \hat{K}_{N-k}(x,y,\hat{s}))$ *jest ciągłe.*

Lemat 4.8. *Zbiory losowe* $\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})$, $\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s})$, $\hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s})$ *są parami rozłączne.*

Dowód jest analogiczny do dowodu Lematu 3.6.

Stwierdzenie 4.3. *Istnieje ciągła funkcja losowa* $f_{N-k} : \mathbb{R}^2_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2_+$ *taka, że dla każdego* $\omega \in \Omega$

$$\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})(\omega) = \{(f_{N-k}(t,\hat{s})(\omega)) \in \mathbb{R}^2_+ : t \in \mathbb{R}_+\}. \tag{4.21}$$

Co więcej, jeśli odwzorowanie losowe $(x,y) \mapsto \hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s})$ *jest różniczkowalne dla każdego* $\hat{s} > 0$, *to dla* $\hat{s} \neq \hat{s}'$ *i dla* $\omega \in \Omega$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})(\omega) \cap \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}')(\omega) = \{(0,0)\}. \tag{4.22}$$

Dowód. Ze Stwierdzenia 4.3 oraz z Twierdzenia 3.2 otrzymujemy, że istnieje dokładnie jedna $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalna ciągła funkcja losowa $(\hat{c},\hat{K}) : \hat{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ taka, że dla każdego $(x,y,\hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ zmienna losowa $(\hat{c}(x,y,\hat{s}),\hat{K}(x,y,\hat{s}))$ przyjmuje wartości w zbiorze $\overline{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})$ i dla każdego $(x,y,\hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ mamy, że

$$\begin{aligned}\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) = \mathbb{E}[g(\hat{c}(x,y,\hat{s})) + \gamma w_{N-k+1}(x - \hat{c}(x,y,\hat{s}) + \hat{s}\hat{K}(x,y,\hat{s}),\\ y - \hat{K}(x,y,\hat{s}), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].\end{aligned}$$

Skoro na linii $x + y\hat{s} = t$ istnieje dokładnie jeden punkt należący do $\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})$, więc mamy, że odwzorowanie losowe

$$f_{N-k}(t,\hat{s}) := (t + \hat{s}\hat{K}(t,0,\hat{s}), -\hat{K}(t,0,\hat{s})) \tag{4.23}$$

i dla tej funkcji zachodzi (4.21).

Załóżmy teraz, że $(\bar{x},\bar{y}) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})(\omega) \cap \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}')(\omega)$ dla $\hat{s} < \hat{s}'$. Skoro dla $s = \hat{s}$ lub $s = \hat{s}'$ mamy

$$\hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},s) = \sup_{c\in[0,\bar{x}]} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(\bar{x} - c, \bar{y}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}], \tag{4.24}$$

więc $\hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},\hat{s}) = \hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},\hat{s}') = \hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y})$. Co więcej, dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ takiego, że $x + y\hat{s} = \bar{x} + \bar{y}\hat{s}$ lub $x + y\hat{s}' = \bar{x} + \bar{y}\hat{s}'$ mamy $\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) = \hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},\hat{s})$ lub $\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}') = \hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},\hat{s})$ odpowiednio.

Co więcej, można łatwo pokazać, że dla każdego $\tilde{s} \in [\hat{s},\hat{s}']$, gdy $x + y\tilde{s} = \bar{x} + \bar{y}\tilde{s}$ mamy także $\hat{v}_{N-k}(x,y,\tilde{s}) = \hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},\tilde{s}) = \hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},\hat{s})$. Zatem każda pochodna kierunkowa $\hat{v}_{N-k}(\bar{x},\bar{y},\hat{s})$ w kierunku prostej $x + y\tilde{s} = \bar{x} + \bar{y}\tilde{s}$ powinna być równa 0 jako pochodna kierunkowa funkcji stałej. W szczególności w punkcie $(\bar{x},\bar{y})$ mamy

$$\hat{v}'_{N-k,x}(\bar{x},\bar{y},\hat{s})(-\tilde{s}) + \hat{v}'_{N-k,y}(\bar{x},\bar{y},\hat{s}) = 0 \tag{4.25}$$

dla każdego $\tilde{s} \in (\hat{s},\hat{s}')$. Oznacza to, że $\hat{v}'_{N-k,x}(\bar{x},\bar{y},\hat{s}) = 0 = \hat{v}'_{N-k,y}(\bar{x},\bar{y},\hat{s})$.

Na mocy faktu, że odwzorowanie $x \mapsto \hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s})$ jest ściśle rosnące i wklęsłe dostajemy, że nie może być $\hat{v}'_{N-k,x}(\bar{x},\bar{y},\hat{s}) = 0$, co jest sprzecznością. Tym samym dostajemy (4.22). □

Biorąc pod uwagę fakt, że $\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})$ jest obrazem ciągłej funkcji losowej f, który ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą z prostych $x + \hat{s}y = t$ dla $t \geq 0$, dostajemy następujący

Wniosek 4.4. *Zbiory losowe* $\hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s})$ *są* $\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s})$ *spójne dla* $\hat{s} > 0$.

Uwaga 4.1. *Skoro dla* $g(u) = \ln u$ *i dla* $g(u) = u^\alpha$, *zbiory losowe* $\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})$, $\hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s})$ *i* $\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s})$ *są stożkami, więc na mocy Stwierdzenia 4.3 dostajemy, że zbiór losowy* $\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s})$ *jest półprostą o początku w punkcie* $(0,0)$.

4.3 Optymalna konsumpcja na rynku bez kosztów transakcyjnych

W przypadku logarytmicznej lub potęgowej funkcji użyteczności w modelu z chwilowym brakiem kosztów za transakcje łatwo wyznaczyć optymalną konsumpcję w chwili $N-k$.

Ustalmy $(x, y, \hat{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$. Mamy

$$\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) := \sup_{(c,K)\in\overline{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x-c+K\hat{s}, y-K, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] =$$

$$= \sup_{(c,b)\in[0,x+\hat{s}y]\times[0,1]} \mathbb{E}[g(c)+$$

$$+ \gamma w_{N-k+1}((1-b)(x+\hat{s}y-c), \frac{b(x+\hat{s}y-c)}{\hat{s}}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]$$

Ponieważ prawa strona jest ciągłą funkcją losową zmiennych (c, b), więc istnieje optymalna strategia $(\hat{c}, \hat{b})$ przyjmująca wartości w zbiorze $[0, x + \hat{s}y] \times [0, 1]$ i analogicznie $\hat{K} = y - \frac{\hat{b}\cdot(x+\hat{s}y-\hat{c})}{\hat{s}}$.

Zauważmy, że zmienna b oznacza część kapitału po konsumpcji, tzn. część kwoty $x + \hat{s}y - c$, zainwestowaną w akcje.

Jeśli $g(u) = \ln u$, to

$$\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) :=$$

$$= \sup_{c\in[0,x+\hat{s}y]} [\ln c + \gamma(1+\gamma+...+\gamma^k)\ln(x-c+\hat{s}y)]+$$

$$+ \sup_{b\in[0,1]} \mathbb{E}[w_{N-k+1}(1-b, \frac{b}{\hat{s}}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Na mocy Lematu 7.1 pierwsze supremum jest w tym przypadku osiągane dla $c = \hat{c}_{N-k}(x, y, \hat{s})$, gdzie

$$\hat{c}_{N-k}(x,y,\hat{s}) = \frac{x+\hat{s}y}{1+\gamma+...+\gamma^k}. \tag{4.26}$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że w przypadku logarytmicznej funkcji użyteczności optymalna konsumpcja jest proporcjonalna do bogactwa i nie zależy od optymalnej decyzji inwestycyjnej.

Rozważmy przypadek, gdy $g(u) = u^\alpha$. Wtedy

$$\hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{s}) =$$

$$= \sup_{c\in[0,x+\hat{s}y]} [c^\alpha + \gamma(x-c+\hat{s}y)^\alpha \cdot \sup_{b\in[0,1]} \mathbb{E}[w_{N-k+1}(1-b, \frac{b}{\hat{s}}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] =$$

$$= \sup_{c\in[0,x+\hat{s}y]} [c^\alpha + \hat{A}_{N-k}(\hat{s})\cdot(x-c+\hat{s}y)^\alpha],$$

gdzie $\hat{A}_{N-k}(\hat{s}) := \gamma \sup_{b\in[0,1]} \mathbb{E}[w_{N-k+1}(1-b, \frac{b}{\hat{s}}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]$.

Oczywiście, na mocy Lematu 7.2 supremum

$$\sup_{c\in[0,x+\hat{s}y]} [c^\alpha + \hat{A}_{N-k}(\hat{s}) \cdot (x - c + \hat{s}y)^\alpha] \tag{4.27}$$

jest osiągane dla $c = \hat{c}_{N-k}(x, y, \hat{s})$, gdzie

$$\hat{c}_{N-k}(x, y, \hat{s}) = \frac{x + \hat{s}y}{1 + [\hat{A}_{N-k}(\hat{s})]^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \tag{4.28}$$

Zwróćmy uwagę, że w przypadku potęgowej funkcji użyteczności optymalna konsumpcja także jest proporcjonalna do bogactwa.

4.4 Związek między modelem z kosztami za transakcje a modelem z chwilowym brakiem kosztów za transakcje

W poniższym podrozdziale badamy związek między modelem z kosztami za transakcje o modelem bez kosztów za transakcje. Kluczowym wynikiem są równości (4.38) i (4.39).

Jeżeli cena na rynku bez kosztów za transakcje leży pomiędzy ceną sprzedaży i kupna z rynku z kosztami za transakcje, to inwestor z rynku bez kosztów za transakcje może podjąć takie same decyzje co inwestor z rynku z kosztami za transakcje. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. O tym orzeka poniższy

Lemat 4.9. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. *Wówczas dla każdego* $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$ *mamy*

$$\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \subseteq \hat{\mathbb{A}}(x, y, \hat{s}). \tag{4.29}$$

Dowód. Ustalmy $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$.

Niech $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq& c \leq x + \underline{s}y \leq x + \hat{s}y, \\ 0 \leq& x - c + \underline{s}m - \overline{s}l \leq x - c + \hat{s}(m - l), \\ 0 \leq& y - m + l, \end{aligned}$$

tzn. inkluzja (4.29) zachodzi. □

Wniosek 4.5. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. *Wówczas dla każdego* $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$ *mamy*

$$\mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \subseteq \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \hat{s}). \tag{4.30}$$

Jeżeli cena na rynku bez kosztów za transakcje leży pomiędzy ceną sprzedaży i kupna na rynku z kosztami za transakcje, to oczekiwana użyteczność inwestora z rynku bez kosztów za transakcje jest nie mniejsza niż inwestora na rynku z kosztami za transakcje o ile oczywiście mają oni taką samą pozycję. Tego intuicyjnego faktu dowodzi poniższe

Stwierdzenie 4.4. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$, *zaś* $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$. *Wówczas*

$$\hat{v}_{N-k}(x, y, \hat{s}) \geq w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{4.31}$$

Dowód. Na mocy inkluzji (4.29) oraz tego, że funkcja losowa $w_{N-k+1}(\cdot, \cdot, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})$ jest rosnąca ze względu na każdą zmienną mamy

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{N-k}(x, y, \hat{s}) := \\
&:= \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + \hat{s}(m - l), y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] \geq \\
&\geq \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + \hat{s}(m - l), y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] \geq \\
&\geq \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] = \\
&= w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}).
\end{aligned}$$

□

Kluczową kwestią przy konstrukcji ceny kalkulacyjnej jest zależność optymalnych strategii na rynku z kosztami za transakcje i na rynku bez kosztów za transakcje. Będziemy badać, jak na rynku bez kosztów za transakcje wygląda zbiór tych pozycji, przy których optymalne jest kupno akcji. Okazuje się, że jeżeli cena jest równa cenie sprzedaży z rynku z kosztami za transakcje, to zbiór pozycji, przy których optymalne jest kupno, na obu rynkach jest identyczny.

Najpierw dowodzimy ten fakt w przypadku, gdy zachodzi (4.32). W Stwierdzeniu 4.6 udowodnimy, że (4.32) zachodzi zawsze.

Stwierdzenie 4.5. *Niech* $\overline{s} > \underline{s} > 0$. *Załóżmy, że dla pewnego* $\omega \in \Omega$

$$\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\overline{s})(\omega) \cap \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega) = \emptyset. \tag{4.32}$$

Wówczas

$$\hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s})(\omega) = \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega). \tag{4.33}$$

Dowód. '$\subseteq$'

Ustalmy $\omega \in \Omega$, dla którego zachodzi (4.32). Niech $(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$.

Pokażemy, że $(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

Niech $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ i $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ będą optymalnymi strategiami dla $\hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ i $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ odpowiednio. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $\tilde{l} \cdot \tilde{m} = 0 = \hat{l} \cdot \hat{m}$.

Skoro $(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$, więc $\tilde{m}(\omega) = 0 < \tilde{l}(\omega)$.

Na mocy (4.18) mamy ponadto, że $(\tilde{c}(\omega), \tilde{l}(\omega), 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Zatem korzystając z (4.31), mamy

$$\begin{aligned}
&w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} - \overline{s}\tilde{l}, y + \tilde{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
&\quad = \hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})(\omega) \geq w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega).
\end{aligned}$$

Wobec jednoznaczności optymalnej strategii dla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ oznacza to, że $(\tilde{c}(\omega), \tilde{l}(\omega), 0)$ pokrywa się s optymalną strategią dla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$. W szczególności oznacza to, że $(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

'$\supseteq$'

Ustalmy $\omega \in \Omega$, dla którego zachodzi (4.32).

Niech $(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

Pokażemy, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$.

Niech $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \overline{\ })$ i $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ będą optymalnymi strategiami dla $\hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ i $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ odpowiednio. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $\tilde{l} \cdot \tilde{m} = 0 = \hat{l} \cdot \hat{m}$.

Z założenia (4.32) wiemy, że $(x, y) \notin \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$.

Wystarczy pokazać, że również $(x, y) \notin \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$.

Załóżmy, że tak nie jest, tzn., że $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$.

Wtedy optymalną strategią jest $(\tilde{c}(\omega), 0, 0)$ przy czym $0 \leq \tilde{c}(\omega) \leq x$. Zatem $(\tilde{c}(\omega), 0, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Korzystając ponownie z (4.18) i (4.31) mamy

$$\begin{aligned}
&w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c}, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}](\omega) \geq \\
&\quad \geq \hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})(\omega) \geq w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega).
\end{aligned}$$

Wobec jednoznaczności optymalnej strategii dla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$ oznacza to, że $(\tilde{c}(\omega), 0, 0)$ pokrywa się z optymalną strategią dla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$. Oznacza to, że $(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$, co przeczy temu, że $(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

Tym samym inkluzja '$\supseteq$' zachodzi. $\square$

Lemat 4.10. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$*. Załóżmy, że* $(\hat{c}, \hat{l}, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *i* $(\tilde{c}, 0, \tilde{m}) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \overline{s})$ *są takie, że* $\hat{l}, \tilde{m} > 0$*. Niech*

$$\lambda^* := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\max\{\frac{\tilde{m}}{\hat{l} + \tilde{m}}, \frac{\overline{s}y}{x - \hat{c} + \overline{s}y}\}. \tag{4.34}$$

Wówczas $\lambda^* \in (0, 1)$ *oraz*

$$(\lambda^* \hat{c} + (1 - \lambda^*)\tilde{c}, \lambda^* \hat{l} - (1 - \lambda^*)\tilde{m}, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{4.35}$$

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że skoro $\hat{l} > 0$ oraz $(\hat{c}, \hat{l}, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, więc $0 \leq \hat{c} \leq x - \overline{s}\hat{l} < x$. Wynika stąd, że iloraz $\frac{\overline{s}y}{x - \hat{c} + \overline{s}y}$ jest dobrze zdefiniowany i należy do przedziału otwartego $(0, 1)$.

Po drugie zauważmy, że skoro $\hat{l}, \tilde{m} > 0$ i $0 \leq \hat{c} < x$, więc również $\frac{\tilde{m}}{\hat{l} + \tilde{m}} \in (0, 1)$.

Tym samym $\lambda^* \in (0, 1)$.

Pozostaje pokazać (4.35).

Skoro $0 \leq \hat{c} < x$ i $0 \leq \tilde{c} \leq x + \overline{s}y$, więc dla każdego $\lambda \in (0, 1)$ prawdziwy jest następujący ciąg równoważności

$$\begin{aligned}
&\lambda\hat{c} + (1 - \lambda)(x + \overline{s}y) \leq x \iff \lambda\hat{c} + x + \overline{s}y - \lambda(x + \overline{s}y) \leq x \iff \\
&\iff -\lambda(x - \hat{c} + \overline{s}y) \leq -\overline{s}y \iff \lambda(x - \hat{c} + \overline{s}y) \geq \overline{s}y \iff \\
&\iff \lambda \geq \frac{\overline{s}y}{x - \hat{c} + \overline{s}y}.
\end{aligned}$$

Oczywiście, $\frac{\overline{s}y}{x - \hat{c} + \overline{s}y} \in (0, 1)$. Zauważmy przy tym, że dla $\lambda > \frac{\overline{s}y}{x - \hat{c} + \overline{s}y}$ mamy

$$0 \leq \lambda\hat{c} + (1 - \lambda)\tilde{c} \leq \lambda\hat{c} + (1 - \lambda)(x + \overline{s}y) < x.$$

Skoro $\hat{l}, \tilde{m} > 0$, więc dla każdego $\lambda \in (0, 1)$ prawdziwy jest następujący ciąg równoważności

$$\lambda\hat{l} - (1 - \lambda)\tilde{m} \geq 0 \iff \lambda\hat{l} - \tilde{m} + \lambda\tilde{m} \geq 0 \iff \lambda \geq \frac{\tilde{m}}{\hat{l} + \tilde{m}}.$$

Przypomnijmy, że $\frac{\tilde{m}}{\hat{l} + \tilde{m}} \in (0, 1)$. Zauważmy, też, że dla $\lambda > \frac{\tilde{m}}{\hat{l} + \tilde{m}}$ mamy $\lambda\hat{l} - (1 - \lambda)\tilde{m} > 0$.

Wynika stąd, że zachodzi (4.35). □

Wniosek 4.6. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *będzie takie, że* $x, y > 0$*. Załóżmy, że* $(\hat{c}, \hat{l}, 0) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *i* $(\tilde{c}, 0, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ *są takie, że* $\hat{l} \cdot \tilde{m} > 0$*. Wówczas* λ^* *zdefiniowane w (4.34) jest dobrze zdefiniowaną* $\mathcal{F}_{N-k}$*-mierzalną zmienną losową spełniającą*

$$(\lambda^* \hat{c} + (1 - \lambda^*)\tilde{c}, \lambda^* \hat{l} - (1 - \lambda^*)\tilde{m}, 0) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{4.36}$$

Stwierdzenie 4.6. *Niech* $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ *będą takie, że* $\overline{s} > \underline{s} > 0$*. Wówczas dla każdego* $\omega \in \Omega$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\overline{s})(\omega) \cap \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega) = \emptyset. \tag{4.37}$$

Dowód. W dowodzie korzystać będziemy z Wniosku 4.6.

Załóżmy, że nie jest prawdą, że (4.37) zachodzi.

Wówczas istnieją $\omega \in \Omega$ i $(x, y) \in (\mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\})$ takie, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\overline{s})(\omega) \cap \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

Niech $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ i $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ będą optymalnymi strategiami dla $\hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ i $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ odpowiednio. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $\tilde{l} \cdot \tilde{m} = 0 = \hat{l} \cdot \hat{m}$.

Optymalne strategie jednokrokowe dane są przez $(\tilde{c}(\omega), 0, \tilde{m}(\omega)) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \overline{s})$ i $(\hat{c}(\omega), \hat{l}(\omega), 0) \in \hat{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, przy czym $\tilde{m}(\omega) > 0$ i $\hat{l}(\omega) > 0$.

Dla λ^* wyznaczonego wzorem (4.34) mamy

$$(\lambda^*(\omega)\hat{c}(\omega) + (1 - \lambda^*(\omega)\tilde{c}, \lambda^*(\omega)\hat{l}(\omega) - (1 - \lambda^*(\omega))\tilde{m}(\omega), 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}).$$

Stąd korzystając z (4.31), wklęsłości odwzorowania losowego

$$(x, y) \longmapsto \mathbb{E}[w_{N-k+1}(x, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}]$$

dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}[g(\lambda^*\hat{c} + (1 - \lambda^*)\tilde{c}) + \\
&\qquad \gamma w_{N-k+1}(x - \lambda^*\hat{c} - (1 - \lambda^*)\tilde{c} - \overline{s}[\lambda^*\hat{l} - (1 - \lambda^*)\tilde{m}], \\
&\qquad\quad y + \lambda^*\hat{l} - (1 - \lambda^*)\tilde{m}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega) \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}[\lambda^* g(\hat{c}) + (1 - \lambda^*)\tilde{c} + \\
&\qquad \lambda^*\gamma w_{N-k+1}(x - \hat{c} - \overline{s}\hat{l}, y + \hat{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) + \\
&\qquad (1 - \lambda^*)\gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} + \overline{s}\tilde{m}, y - \tilde{m}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
&\quad = \lambda^*(\omega) w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) + (1 - \lambda^*(\omega))\hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})(\omega) \geq w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}).
\end{aligned}$$

Wynika stąd w szczególności, że

$$\begin{aligned}
&w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) = \hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})(\omega) = \\
&\quad = \mathbb{E}[g(\lambda^*\hat{c} + (1 - \lambda^*)\tilde{c}) + \\
&\qquad + \gamma w_{N-k+1}(x - \lambda^*\hat{c} - (1 - \lambda^*)\tilde{c} - \overline{s}[\lambda^*\hat{l} - (1 - \lambda^*)\tilde{m}], \\
&\qquad\quad y + [\lambda^*\hat{l} - (1 - \lambda^*)\tilde{m}], \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega)
\end{aligned}$$

Zatem

$$(\lambda^*(\omega)\hat{c}(\omega) + (1 - \lambda^*(\omega))\tilde{c}(\omega), \lambda^*(\omega)\hat{l}(\omega) - (1 - \lambda^*(\omega))\tilde{m}(\omega), 0)$$

jest optymalną strategią jednokrokową na rynku z chwilowym brakiem kosztów za transakcje.

Oznacza to jednak, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s})(\omega) \cup \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$, co w oczywisty sposób przeczy temu, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\overline{s})(\omega)$.

Otrzymaliśmy sprzeczność.

To kończy dowód. $\square$

Podsumowując Stwierdzenia 4.33 i 4.6, dostajemy

Twierdzenie 4.1. *Dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *i dla każdego* $\omega \in \Omega$ *zachodzi*

$$\hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s})(\omega) = \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega). \tag{4.38}$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że inkluzja '$\subseteq$' w Twierdzeniu 4.1 jest oczywista. Wynika to bowiem z następującego faktu. Jeżeli na rynku bez kosztów za transakcje cena kupna równa jest cenie kupna z rynku z kosztami na transakcje, to inwestor z rynku z kosztami za transakcje może zawsze dokonać takiego zakupu jak inwestor z rynku bez kosztów za transakcje.

Analogiczna sytuacja ma miejsce w przypadku zbiorów pozycji, przy których optymalna jest sprzedaż akcji. Tutaj sytuacja jest jednak nieco łatwiejsza.

Twierdzenie 4.2. *Niech* $\overline{s} > \underline{s} > 0$*. Wówczas dla każdego* $\omega \in \Omega$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\underline{s})(\omega) = \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega). \tag{4.39}$$

Dowód. Ustalmy $\omega \in \Omega$.

'$\subseteq$'

Niech $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ będzie takie, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$. Pokażemy, że $(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

Przez $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \underline{s})$ i $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ oznaczmy optymalne strategie jednokrokowe na zmienionym i pierwotnym rynku odpowiednio. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $\tilde{l} \cdot \tilde{m} = 0 = \hat{l} \cdot \hat{m}$.

Skoro $(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$, więc $\tilde{m}(\omega) > 0 = \tilde{l}(\omega)$. Skoro $(\tilde{c}(\omega), 0, \tilde{m}(\omega)) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \underline{s})$, więc na mocy (4.17) mamy $(\tilde{c}(\omega), 0, \tilde{m}(\omega)) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Zatem korzystając z (4.31), mamy

$$\begin{aligned}
&w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \geq \\
&\quad \geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} + \underline{s}\tilde{m}, y - \tilde{m}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
&\quad = \hat{v}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \geq w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega).
\end{aligned}$$

Wobec jednoznaczności optymalnej strategii dla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$ mamy, że $(\tilde{c}(\omega), 0, \tilde{m}(\omega))$ pokrywa się z optymalną strategią dla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$. Innymi słowy,

$$(\tilde{c}(\omega), 0, \tilde{m}(\omega)) = (\hat{c}(\omega), \hat{l}(\omega), \hat{m}(\omega)).$$

Oznacza to, że $(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

'$\supseteq$'

Niech $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ będzie takie, że $(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$. Pokażemy, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$.

Niech $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ i $(\hat{c}, \hat{l}, \hat{m}) \in \mathcal{A}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ będą optymalnymi strategiami dla $\hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s})$ i $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ odpowiednio. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $\tilde{l} \cdot \tilde{m} = 0 = \hat{l} \cdot \hat{m}$.

Najpierw pokażemy, że $(x, y) \notin \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$.

Załóżmy, że tak nie jest. Wówczas $\tilde{l}(\omega) = \tilde{m}(\omega) = 0$, zaś $\tilde{c}(\omega) \in [0, x] \subseteq [0, x + \underline{s}y]$. W szczególności oznacza to, że

$$(\tilde{c}(\omega), \tilde{l}(\omega), \tilde{m}(\omega)) = (\tilde{c}(\omega), 0, 0) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}).$$

Zatem korzystając z (4.31), mamy

$$\begin{aligned} w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) &\geq \\ &\geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c}, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\ &= \hat{v}_{N-k}(x, y, \underline{s})(\omega) \geq w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega). \end{aligned}$$

Wobec jednoznaczności optymalnej strategii sla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$ mamy, że $(\tilde{c}(\omega), 0, 0)$ pokrywa się z optymalną straegią dla $w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$. Innymi słowy,

$$(\tilde{c}(\omega), 0, 0) = (\hat{c}(\omega), \hat{l}(\omega), \hat{m}(\omega)).$$

Oznacza to, że $(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$, co przeczy temu, że $(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$.

Zatem rzeczywiście $(x, y) \notin \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$.

Pozostaje pokazać, że $(x, y) \notin \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$.

Załóżmy, że tak nie jest. Wówczas $\tilde{l}(\omega) > 0 = \tilde{m}(\omega)$.

Z faktu, że $(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$ mamy, że $\hat{m}(\omega) > 0 = \hat{l}(\omega)$.

Weźmy pod uwagę funkcję deterministyczną $F : \hat{\mathbb{A}}(x, y, \underline{s}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ zdefiniowaną dla każdego $(c, l, m) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \underline{s})$ w następujący sposób

$$F(c, l, m) := \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c + \underline{s}(m - l), y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega). \quad (4.40)$$

Oczywiście, funkcja F jest wklęsła. W szczególności na mocy (4.31) mamy dla każdego $\lambda \in [0, 1]$, że

$$\begin{aligned} &F(\lambda(\tilde{c}(\omega), \tilde{l}(\omega), \tilde{m}(\omega)) + (1 - \lambda)(\hat{c}(\omega), \hat{l}(\omega), \hat{m}(\omega))) = F(\lambda(\tilde{c}(\omega), \tilde{l}(\omega), 0) + (1 - \lambda)(\hat{c}(\omega), 0, \hat{m}(\omega))) \geq \\ &\quad \geq \lambda F(\tilde{c}(\omega), \tilde{l}(\omega), 0) + (1 - \lambda) F(\hat{c}(\omega), 0, \hat{m}(\omega)) = \lambda \hat{v}_{N-k}(x, y, \underline{s})(\omega) + (1 - \lambda) w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \geq \\ &\quad \geq \lambda w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) + (1 - \lambda) w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) = w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) = F(\hat{c}(\omega), 0, \hat{m}(\omega)). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Weźmy

$$\lambda := \frac{\hat{m}(\omega)}{\tilde{l}(\omega) + \hat{m}(\omega)} \in (0, 1). \quad (4.42)$$

Korzystając z (4.41) i z (4.31), dostajemy, że

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_{N-k}(x,y,\underline{s})(\omega) \geq\ & F(\lambda(\tilde{c}(\omega),\tilde{l}(\omega),0) + (1-\lambda)(\hat{c}(\omega),0,\hat{m}(\omega))) = \\
=& \mathbb{E}[g(\lambda\tilde{c} + (1-\lambda\hat{c})) + \\
& \quad + \gamma w_{N-k+1}(x - [\lambda\tilde{c} + (1-\lambda)\hat{c}] + \underline{s}[(1-\lambda)\hat{m} - \lambda\tilde{l}], \\
& \qquad y - [(1-\lambda)\hat{m} + \lambda\hat{l}], \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
=& \mathbb{E}[g(\lambda\tilde{c} + (1-\lambda\hat{c})) + \\
& \quad + \gamma w_{N-k+1}(x - [\lambda\tilde{c} + (1-\lambda)\hat{c}] + \underline{s}[\frac{\tilde{l}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \hat{m} - \frac{\hat{m}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \tilde{l}], \\
& \qquad y - \frac{\tilde{l}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \hat{m} + \frac{\hat{m}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \tilde{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
=& \mathbb{E}[g(\lambda\tilde{c} + (1-\lambda\hat{c})) + \\
& \quad + \gamma w_{N-k+1}(x - [\lambda\tilde{c} + (1-\lambda)\hat{c}] + \underline{s}[\frac{\tilde{l}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \hat{m}(\omega) - \frac{\hat{m}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \tilde{l}(\omega)], \\
& \qquad y - \frac{\tilde{l}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \hat{m}(\omega) + \frac{\hat{m}(\omega)}{\tilde{l}(\omega)+\hat{m}(\omega)} \cdot \tilde{l}(\omega), \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
=& \mathbb{E}[g(\lambda\tilde{c} + (1-\lambda\hat{c})) + \gamma w_{N-k+1}(x - \lambda\tilde{c} + (1-\lambda\hat{c}), y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
=& F(\lambda\tilde{c}(\omega) + (1-\lambda)\hat{c}(\omega),0,0) \geq \lambda\hat{v}_{N-k}(x,y,\underline{s})(\omega) + (1-\lambda)w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega) \geq \\
\geq& w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega).
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Zwróćmy uwagę, że skoro wektor $(\lambda\tilde{c}(\omega) + (1-\lambda)\hat{c}(\omega),0,0) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,\underline{s})$ ma dwie ostatnie współrzędne zerowe, więc musi być $0 \leq \lambda\tilde{c}(\omega) + (1-\lambda)\hat{c}(\omega) \leq x + \underline{s}y$. Oznacza to, że

$$(\lambda\tilde{c}(\omega) + (1-\lambda)\hat{c}(\omega),0,0) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s}).$$

Zatem wobec jednoznaczności optymalnej strategii dla $w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega)$ dostajemy z (4.43), że $(\lambda\tilde{c}(\omega) + (1-\lambda)\hat{c}(\omega),0,0)$ pokrywa się z optymalną strategią dla $w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega)$.

Oznacza to jednak, że $(x,y) \in \mathbf{NT}(\underline{s},\overline{s})(\omega)$, co przeczy temu, że $(x,y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})(\omega)$.

Musi więc być $(x,y) \notin \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$.

Na mocy powyższego rozumowania mamy, że $(x,y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$. $\square$

Uwaga 4.2. *Na mocy Wniosku 4.4 dostajemy z (4.38) i z Twierdzenia 4.2, że zbiory* $\mathbf{B}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})(\omega)$ *i* $\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})(\omega)$ *są spójne dla każdego* $\omega \in \Omega$.

Rozdział 5

Konstrukcja lokalnych i globalnych cen kalkulacyjnych

W niniejszym rozdziale zajmiemy się konstrukcją cen kalkulacyjnych. Konstrukcja ta korzystać będzie z równości (4.38) i (4.39). Cenę kalkulacyjną zdefiniujemy najpierw lokalnie. Będzie to cena, na rynku z chwilowym brakiem kosztów za transakcje, która zależy od pozycji inwestora. Jej dobór będzie jednak bardzo szczególny. Jeżeli dana pozycja będzie w zbiorze pozycji, przy których na rynku bez kosztów za transakcje optymalna jest sprzedaż, to cena ta równa będzie cenie sprzedaży z rynku z kosztami za transakcje. Jeżeli dana pozycja będzie w zbiorze kupna na rynku z kosztami za transakcje, to cena równa będzie cenie kupna z tego rynku.

Kluczową kwestią będzie tutaj zbiór tych pozycji z tynku z kosztami za transakcje, przy których po optymalnej konsumpcji optymalny jest brak handlu akcjami. Dzięki równości (5.9) cenę kalkulacyjną możemy zdefiniować również i dla tych pozycji.

W drugim podrozdziale uogólniamy lokalną cenę kalkulacyjną na cały horyzont czasowy za pomocą indukcji.

Wprowadzamy dwa pojęcia: słabą i silną cenę kalkulacyjną. Słaba cena kalkulacyjna jest układem cen na rynku bez kosztów za transakcje, w którym aktualna cena zależy od aktualnej pozycji inwestora zaś optymalna strategia dla tego rynku jest taka sama jak dla rynku z kosztami za transakcje. Natomiast silna cena kalkulacyjna jest procesem ceny, przy którym optymalna strategia jest taka sama co na rynku z kosztami za transakcje przy czym należy podkreślić, że zależy ona od początkowej pozycji w chwili $N = 0$.

5.1 Lokalna cena kalkulacyjna

Zacznijmy od definicji lokalnej ceny kalkulacyjnej.

Definicja 5.1. *Rodzinę* $\{\hat{S}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}) : (x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}\}$ *zmiennych losowych nazywamy lokalną słabą ceną kalkulacyjną w chwili* $N-k$*, jeśli*

(i) dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ *zmienna losowa* $\hat{S}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ *jest* $\mathcal{F}_{N-k}$*-mierzalna,*

(ii) $\forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}}\ \underline{s} \le \hat{S}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}) \le \overline{s}$,

(iii) $\forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}}\ \hat{v}_{N-k}(x,y,\hat{S}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})) = w_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s})$.

Lokalna słaba cena kalkulacyjna w chwili $N-k$ generuje nam taki rynek, którym chwili $N-k$ cena zależy od pozycji inwestora, zaś przyszłość jest taka sam jak w modelu z kosztami za transakcje. Warunek (iii) gwarantuje nam przy tym, że na tym nowym rynku oczekiwana użyteczność jest taka sama jak na rynku z kosztami za transakcje.

Jeśli możemy coś skonsumować i coś sprzedać po niższej cenie, to możemy to samo zrobić po wyższej. Jeżeli możemy coś skonsumować i coś kupić po wyższej cenie, to możemy to samo zrobić po niższej cenie. Tego intuicyjnego faktu dowodzi poniższy trywialny

Lemat 5.1. *Niech* $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ *i* $0 < s_1 \le s_2$*. Załóżmy, że* $l > 0$*. Wówczas zachodzą następujące implikacje*

$$(c,0,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_1) \Longrightarrow (c,0,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_2) \tag{5.1}$$

i

$$(c,l,0) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_2) \Longrightarrow (c,l,0) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_1). \tag{5.2}$$

Dowód. Najpierw pokażemy (5.1).

Niech $(c,0,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_1)$. Wówczas

$$\begin{aligned} 0 \le& c \le x + s_1 y \le x + s_2 y, \\ 0 \le& x - c + s_1 m \le x - c + s_2 m, \\ 0 \le& y - m, \end{aligned}$$

tj. $(c,0,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_2)$.

Teraz pokażemy (5.2).

Niech $l > 0$ i $(c,l,0) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_2)$. Wówczas $0 \le c$ i $0 \le x - c - s_2 l$. Oznacza to, że

$$0 \le c \le x - s_2 l \le x - s_1 l \le x + s_1 y.$$

Innymi słowy mamy

$$\begin{aligned} 0 \le& x + s_1 y, \\ 0 \le& x - c - s_1 l, \\ 0 \le& y + l. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $(c,l,0) \in \hat{\mathbb{A}}(x,y,s_1)$. $\square$

Jeżeli optymalną decyzją przy danej cenie jest sprzedaż jakiejś ilości akcji, to przy wyższej cenie też optymalna jest sprzedaż jakiejś ilości akcji. Podkreślamy przy tym założenie, że w obu przypadkach przyszłość jest taka sama. Tego intuicyjnego faktu dowodzi poniższy

Lemat 5.2. *Niech $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $0 < s_1 \leq s_2$. Wówczas*

$$\forall_{\omega\in\Omega} \quad \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_1)(\omega) \subseteq \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_2)(\omega). \tag{5.3}$$

Dowód. Ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$.

Niech $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, s_1)$ będzie optymalną strategią jednookresową, tzn.

$$\hat{v}_{N-k}(x, y, s_1) = \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} + s_1(\tilde{m} - \tilde{l}), y - \tilde{m} + \tilde{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Niech $A := \{(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_1)\} \in \mathcal{F}_{N-k}$.

Oczywiście, $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m})\mathbb{I}(A) = (\tilde{c}, 0, \tilde{m})\mathbb{I}(A)$. Z (5.1) dostajemy, że $(\tilde{c}, 0, \tilde{m})\mathbb{I}(A) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, s_2)$, gdyż $(0, 0, 0) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, s_2)$.

Dla każdej zmiennej losowej $(c^*, l^*, 0) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, s_2)$ mamy

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{N-k}(x, y, s_2)\mathbb{I}(A) \geq \\
&\qquad \geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} + s_2\tilde{m}, y - \tilde{m}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) = \\
&\qquad \geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} + s_1\tilde{m}, y - \tilde{m}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) = \\
&\qquad = \hat{v}_{N-k}(x, y, s_1)\mathbb{I}(A) \geq \\
&\qquad \geq \mathbb{E}[g(c^*) + \gamma w_{N-k+1}(x - c^* - s_1 l^*, y + l^*, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) = \\
&\qquad \geq \mathbb{E}[g(c^*) + \gamma w_{N-k+1}(x - c^* - s_2 l^*, y + l^*, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) \geq -\infty,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

gdyż na mocy Konwencji 3.1 mamy $w_{N-k+1}(u, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) = -\infty$ dla każdego $u < 0$. Zauważmy, że dla każdego $\omega \in A$ mamy '>' w trzeciej nierówności w (5.4). Zauważmy także, że z (5.2) otrzymujemy, że zmienna losowa $(c^*, l^*, 0)$ przyjmuje wartości w zbiorze $\hat{\mathbb{A}}(x, y, s_1)$.

Oznacza to, że $A \cap (\{(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_2)\} \cup \{(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s_2)\}) = \emptyset$. Innymi słowy musi być $A \subseteq \{(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_2)\}$, tzn. zachodzi inkluzja (5.3). □

Analogiczna sytuacja jest prawdziwa dla kupna.

Lemat 5.3. *Niech $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $0 < s_1 \leq s_2$. Wówczas*

$$\forall_{\omega\in\Omega} \quad \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_2)(\omega) \subseteq \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_1)(\omega). \tag{5.5}$$

Dowód. Ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$. Niech $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x, y, s_2)$ będzie optymalną strategią jednookresową taką, że $\tilde{l}\tilde{m} = 0$, tzn.

$$\hat{v}_{N-k}(x, y, s_2) = \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} + s_2(\tilde{m} - \tilde{l}), y - \tilde{m} + \tilde{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}].$$

Niech $A := \{(x,y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_2)\}$.

Oczywiście, $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m})\mathbb{I}(A) = (\tilde{c}, \tilde{l}, 0)\mathbb{I}(A)$.

Dla każdej zmiennej losowej $(c^*, 0, m^*) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x,y,s_1)$ mamy

$$\begin{aligned} \hat{v}_{N-k}&(x,y,s_1) \geq \\ &\geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} - s_1\tilde{l}, y + \tilde{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) \geq \\ &\geq \mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma w_{N-k+1}(x - \tilde{c} - s_2\tilde{l}, y + \tilde{l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) = \\ &= \hat{v}_{N-k}(x,y,s_2)\mathbb{I}(A) \geq \\ &\geq \mathbb{E}[g(c^*) + \gamma w_{N-k+1}(x - c^* + s_2 m^*, y - m^*, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) \geq \\ &\geq \mathbb{E}[g(c^*) + \gamma w_{N-k+1}(x - c^* + s_1 m^*, y - m^*, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]\mathbb{I}(A) \geq -\infty \end{aligned} \tag{5.6}$$

Oczywiście, dla każdego $\omega \in A$ w trzeciej nierówności w (5.6) mamy '>'. Z (5.1) otrzymujemy, że $(c^*, 0, m^*) \in \hat{\mathcal{A}}_{N-k}(x,y,s_2)$.

Z dowolności wyboru $(c^*, 0, m^*)$ dostajemy, że

$$A \cap (\{(x,y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_1)\} \cup \{(x,y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s_1)\}) = \emptyset.$$

Zatem, $A \subseteq \{(x,y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_1)\}$, tj. (5.5) zachodzi. $\square$

Jeżeli przy mniejszej rozpiętości cen sprzedaży i kupna optymalne jest dla nas nie handlować akcjami po optymalnej konsumpcji, to przy większej rozpiętości tych cen także optymalne jest nie handlować akcjami po optymalnej konsumpcji. Takie jest znaczenie inkluzji (5.7) w poniższym Lemacie.

Lemat 5.4. *Niech $\underline{s}_1, \overline{s}_1, \underline{s}_2, \overline{s}_2 \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $\overline{s}_2 \geq \overline{s}_1 > \underline{s}_1 \geq \underline{s}_2 > 0$. Wówczas*

$$\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}_1, \overline{s}_1) \subseteq \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}_2, \overline{s}_2). \tag{5.7}$$

Dowód. Skoro $0 < \underline{s}_2 \leq \underline{s}_1$, więc z (4.39) i (5.3) otrzymujemy, że

$$\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_2, \overline{s}_2) = \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\underline{s}_2) \subseteq \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\underline{s}_1) = \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_1, \overline{s}_1).$$

Skoro $\overline{s}_1 \leq \overline{s}_2$, więc z (4.38) i (5.5) dostajemy, że

$$\mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}_2, \overline{s}_2) = \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s}_2) \subseteq \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s}_1) = \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}_1, \overline{s}_1).$$

Tym samym,

$$\begin{aligned} \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}_1, \overline{s}_1) =& \mathbb{R}^2_+ \setminus (\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_1, \overline{s}_1) \cup \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}_1, \overline{s}_1)) \subseteq \\ &\subseteq \mathbb{R}^2_+ \setminus (\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_2, \overline{s}_2) \cup \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}_2, \overline{s}_2)) = \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}_2, \overline{s}_2). \end{aligned}$$

$\square$

Lemat 5.5. *Niech $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$. Wówczas zbiór losowy $\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})$ jest domknięty.*

Dowód. Jest to konsekwencją tego, że odwzorowanie losowe

$$(x, y) \longmapsto w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) - \sup_{c \in [0,x]} \mathbb{E}[w_{N-k+1}(x - c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}].$$

jest ciągłe. □

Poniższy Lemat orzeka, że jeżeli na rynku z chwilowym brakiem kosztów za transakcje cena jest pomiędzy ceną sprzedaży a kupna z rynku z kosztami za transakcje, to zbiór tych pozycji, przy których optymalny jest brak handlu po optymalnej konsumpcji na rynku z chwilowym brakiem kosztów za transakcje jest podzbiorem zbioru pozycji przy których optymalny jest brak handlu po optymalnej konsumpcji na rynku z kosztami za transakcje.

Lemat 5.6. *Niech $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$. Wówczas dla każdego $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$ mamy*

$$\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}) \subseteq \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}). \tag{5.8}$$

Dowód. Ustalmy $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$.

Z (5.3) i (5.5) oraz z (4.39) i (4.38) dostajemy, że

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}) &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s})) \subseteq \\ &\subseteq \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\underline{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\overline{s})) = \\ &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}) \cup \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})) = \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}). \end{aligned}$$

□

Okazuje się, że zbiory pozycji, dla których optymalny jest brak handlowania akcjami na rynku z chwilowym brakiem kosztów za transakcje 'rozpinają' zbiór analogicznych pozycji dla rynku z kosztami za transakcje. Dokładniej, mamy następujący

Lemat 5.7. *Niech $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$. Wówczas*

$$\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}) = \bigcup_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}). \tag{5.9}$$

Dowód. Z (5.3) i (5.5) oraz z (4.39) i (4.38) mamy, że

$$\begin{aligned} \bigcup_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}) &= \bigcup_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s})) = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bigcap_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s})) = \\ &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\overline{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\underline{s})) = \mathbb{R}_+^2 \setminus (\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}) \cup \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})) = \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s}). \end{aligned}$$

□

Lemat 5.8. *Niech $s_1, s_2, \hat{s} \in \mathbb{R}_+$ bedą takie, że $0 < s_1 \le \hat{s} \le s_2$. Wówczas*

$$\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s_1) \cap \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s_2) \subseteq \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}). \tag{5.10}$$

Dowód. Z (5.3) i (5.5) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s_1)\cap\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s_2) &= [\mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_1) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_1))] \cap [\mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_2) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_2))] = \\ &= \mathbb{R}_+^2 \setminus [(\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_1) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_1)) \cup (\hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_2) \cup \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_2))] = \\ &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s_1) \cup \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s_2)) \subseteq \\ &\subseteq \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{B}}_{N-k}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(\hat{s})) = \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}).\end{aligned}$$

□

Celem naszym jest zbadanie, jak zachowują się zbiory losowe $\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s)$ w zależności od $s > 0$. Zależność ta opisana jest przez (5.3) i (5.5). Tak więc zbiory losowe $\hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s)$ są zależne 'monotonicznie' od $s > 0$. Powstaje tutaj podstawowe pytanie, czy dla każdego $(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})$ znaleźć możemy taką zmienną losową $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalną $\hat{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, która przyjmuje wartości w przedziale $[\underline{s}, \overline{s}]$, dla której mielibyśmy $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}))$. Odpowiedź pozytywną na to pytanie daje następujące

Stwierdzenie 5.1. *Dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ niech*

$$\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \begin{cases} \underline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \inf\{s \in [\underline{s}, \overline{s}] : (x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s)\} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \overline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \end{cases} \tag{5.11}$$

i

$$\underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \begin{cases} \underline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \sup\{s \in [\underline{s}, \overline{s}] : (x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s)\} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \overline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \end{cases}. \tag{5.12}$$

Wówczas $\overline{s}^*_{N-k}$ i $\underline{s}^*_{N-k}$ są dobrze zdefiniowanymi $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalnymi funkcjami losowymi z $\mathbb{D}$ do $(0, \infty)$. Co więcej, dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ na zdarzeniu $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}$ mamy

$$(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \cap \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})). \tag{5.13}$$

Dowód. Ustalmy $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Najpierw pokażemy, że $\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $\underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ są dobrze zdefiniowanymi $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalnymi zmiennymi losowym.

Jest jasne, że dla każdego $\omega \in \Omega$ mamy $\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega), \underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \in [\underline{s}, \overline{s}]$.

Zauważmy też, że na mocy (5.9) mamy, że dla każdego $\omega \in \Omega$ i dla każdego $(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$ istnieje $s_{N-k}(x, y, \omega) \in [\underline{s}, \overline{s}]$ takie, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(s_{N-k}(x, y, \omega))(\omega)$.

Jest jasne, że

$$\{\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \underline{s}\} = \{(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \{(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\underline{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}$$

oraz

$$\{\underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \overline{s}\} = \{(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \{(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\overline{s})\} \in \mathcal{F}_{N-k}.$$

Ponadto z (5.3) i z (5.5) dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&\{\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \overline{s}\} = \\
&\quad = \{(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \bigcup_{s \in [\underline{s}, \overline{s})} \{(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s)\} = \\
&\quad = \{(x, y) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \bigcup_{s \in [\underline{s}, \overline{s}) \cap \mathbb{Q}} \{(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s)\} \in \mathcal{F}_{N-k}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\{\underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \underline{s}\} = \\
&\quad = \{(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \bigcup_{s \in (\underline{s}, \overline{s}]} \{(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s)\} = \\
&\quad = \{(x, y) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \bigcup_{s \in (\underline{s}, \overline{s}] \cap \mathbb{Q}} \{(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s)\} \in \mathcal{F}_{N-k}.
\end{aligned}$$

Niech teraz $t \in (\underline{s}, \overline{s})$ będzie dowolne. Mamy

$$\begin{aligned}
\{\overline{s} > \overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) > t\} &= \bigcup_{s \in (t, \overline{s}) \cap \mathbb{Q}} \{\overline{s} > \overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) > s\} = \\
&= \bigcup_{s \in (t, \overline{s}) \cap \mathbb{Q}} \{(x, y) \in \hat{\mathbf{B}}_{N-k}(s)\} \in \mathcal{F}_{N-k}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\{t > \underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) > \underline{s}\} &= \bigcup_{s \in (\underline{s}, t) \cap \mathbb{Q}} \{s > \underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) > \underline{s}\} = \\
&= \bigcup_{s \in (\underline{s}, t) \cap \mathbb{Q}} \{(x, y) \in \hat{\mathbf{S}}_{N-k}(s)\} \in \mathcal{F}_{N-k}.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że, rzeczywiście, $\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $\underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ są dobrze zdefiniowanymi $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalnymi zmiennymi losowym.

Teraz pokażemy, że na zdarzeniu $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}$ zachodzi (5.13).

Ustalmy $\omega \in \{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}$.

Niech $(\overline{s}_\omega^n)_{n=1}^\infty$ i $(\underline{s}_\omega^n)_{n=1}^\infty$ będą dowolnymi ciągami z przedziału $[\underline{s}, \overline{s}]$ zbieżnymi do $\overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $\underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ odpowiednio i takimi, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\overline{s}_\omega^n)(\omega) \cap \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\underline{s}_\omega^n)(\omega)$.

Oznacza to w szczególności, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s}_\omega^n)(\omega) = \hat{v}_{N-k}(x, y, \underline{s}_\omega^n)(\omega) = \\ &\quad = \sup_{c \in [0,x]} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega). \end{aligned}$$

Na mocy ciągłości funkcji losowej $\hat{v}_{N-k}(x, y, \cdot)$ dostajemy po wzięciu $n \longrightarrow \infty$, że

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-k}(x, y, \overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega))(\omega) = \hat{v}_{N-k}(x, y, \underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega))(\omega) = \\ &\quad = \sup_{c \in [0,x]} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega). \end{aligned}$$

Zatem, rzeczywiście, na zdarzeniu $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}$ zachodzi (5.13).

To kończy dowód. □

Wniosek 5.1. *Dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *niech* $\overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *i* $\underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *będą dane przez (5.11) i (5.12) odpowiednio. Zdefiniujmy funkcję losową* $\hat{s}_{N-k}^* : \mathbb{D} \longrightarrow (0, \infty)$ *dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *za pomocą*

$$\hat{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \frac{1}{2}\overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + \frac{1}{2}\underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{5.14}$$

Wówczas na zdarzeniu $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}$ *mamy*

$$(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\hat{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})). \tag{5.15}$$

Dowód. Jest to konsekwencja (5.10) i (5.13). □

Przyjrzyjmy się, czym są zmienne losowe $\overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, $\underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ na zdarzeniu A. Te zmienne losowe oznaczają najmniejszą i największą odpowiednio cenę, przy której pozycja (x, y) leży w zbiorze losowym, w którym na rynku z chwilowym brakiem kosztów za transakcje optymalny jest brak handlu po optymalnej konsumpcji. Podkreślmy, że na mocy (5.9) taka cena istnieje. Powyższe Stwierdzenie orzeka także, że jest to dobrze zdefiniowana $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalna zmienna losowa.

Dodajmy tutaj, że za $\hat{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ możemy przyjąć dowolną $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalną zmienną losową przyjmującą wartości pomiędzy $\overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $\underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. Dokładniej, teza Stwierdzenia 5.1 pozostanie prawdziwa, jeśli za $\hat{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ w (5.14) weźmiemy zmienną losową

$$\lambda_{N-k}\overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + (1 - \lambda_{N-k})\underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \tag{5.16}$$

gdzie λ_{N-k} jest dowolną $\mathcal{F}_{N-k}$-mierzalną zmienną losową przyjmującą wartości wewnątrz przedziału $(0, 1)$.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w sytuacji, gdy dla jakiegoś $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy $\overline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \underline{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, to wówczas $\hat{s}_{N-k}^*(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest jednoznacznie zdefiniowane. W szczególności na mocy Stwierdzenia 4.3 taka sytuacja ma miejsce, gdy dla każdego $\hat{s} > 0$ funkcja losowa $\hat{v}_{N-k}(\cdot, \cdot, \hat{s})$ jest różniczkowalna.

Nim przejdziemy do sformułowania jednego z głównych wyników, udowodnimy następujące

Stwierdzenie 5.2. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$*. Funkcje losowe* $\overline{s}^*_{N-k}, \underline{s}^*_{N-k} : \mathbb{D} \longrightarrow (0, \infty)$ *zdefiniowane przez (5.11) i (5.12) odpowiednio są półciągłe z dołu i z góry odpowiednio na zdarzeniu*

$$\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}.$$

Dowód. Ustalmy $\omega \in \{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}$.

Niech $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem z $\mathbb{D}$ zbieżnym do $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Należy pokazać, że

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) \geq \overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$$

i że

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) \leq \overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega)$$

Pokażemy jedynie pierwszą nierówność, gdyż druga może być udowodniona analogicznie.

Rozważymy trzy przypadki.

1^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x_n, y_n) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$.

Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy bez straty ogólności założyć, że $(x_n, y_n) \in \mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\underline{s}_n = \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ i tym samym

$$\overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) = \underline{s}_n \xrightarrow{n \to \infty} \underline{s}.$$

Na mocy (5.13) mamy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, że

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{N-k}(x_n, y_n, \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega) = \\
&= \sup_{(c,l,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))} \mathbb{E}[g(c) + \\
&\quad \gamma w_{N-k+1}(x_n - c + \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) \cdot (m - l), y_n - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega) = \\
&= \sup_{(c,l,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x_n, y_n, \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x_n - c, y_n, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega).
\end{aligned}$$

Na mocy ciągłości funkcji losowej $\hat{v}_{N-k}$ oraz na mocy Twierdzenia 7.1 mamy po wzięciu $n \longrightarrow \infty$, że

$$\hat{v}_{N-k}(x, y, \underline{s})(\omega) = \sup_{(c,l,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \underline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega).$$

Oznacza to, że w tym przypadku $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\underline{s})(\omega)$. Innymi słowy w tym przypadku mamy, że $\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) = \underline{s}$.

2^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x_n, y_n) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$.

Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy bez straty ogólności założyć, że $(x_n, y_n) \in \mathbf{B}_{N-k}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Oczywiście, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\overline{s}_n = \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ i tym samym

$$\overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) = \overline{s}_n \xrightarrow{n\to\infty} \overline{s} \geq \overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega),$$

gdyż zmienna losowa $\overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ przyjmuje wartości w przedziale $[\underline{s}, \overline{s}]$.

3^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x_n, y_n) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$.

Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy bez straty ogólności założyć, że $(x_n, y_n) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Oczywiście na mocy (5.13) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$(x_n, y_n) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega).$$

Niech $(n_l)_{l=1}^{\infty}$ będzie takim podciągiem liczb naturalnych, że

$$\overline{s}^*_{N-k}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega) \xrightarrow{l\to\infty} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega).$$

Na mocy ciągłości funkcji losowej $\hat{v}_{N-k}$ oraz na mocy Twierdzenia 7.1 mamy

$$\hat{v}_{N-k}(x_{n_l}, y_{n_l}, \overline{s}^*_{N-k}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega))(\omega) \xrightarrow{l\to\infty} \hat{v}_{N-k}(x, y, \liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega)$$

oraz

$$\hat{v}_{N-k}(x_{n_l}, y_{n_l}, \overline{s}^*_{N-k}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega))(\omega) =$$
$$= \sup_{(c,0,0)\in\hat{\mathbb{A}}(x_{n_l}, y_{n_l}, \overline{s}^*_{N-k}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega))} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x_{n_l} - c, y_{n_l}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega) \xrightarrow{l\to\infty}$$
$$\xrightarrow{l\to\infty} \sup_{(c,0,0)\in\hat{\mathbb{A}}(x, y, \liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))} \mathbb{E}[g(c) + \gamma w_{N-k+1}(x - c, y, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) | \mathcal{F}_{N-k}](\omega).$$

Oznacza to, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{N-k}(\liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega)$.

Tym samym

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) \geq \overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega).$$

Oznacza to, że funkcja losowa $\overline{s}^*_{N-k}$ jest półciągła z dołu na zdarzeniu $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s}, \overline{s})\}$.

To kończy dowód. $\square$

Wniosek 5.2. *Niech funkcje losowe* $\overline{s}^*_{N-k}, \underline{s}^*_{N-k} : \mathbb{D} \longrightarrow (0,\infty)$ *zdefiniowane przez (5.11) i (5.12) odpowiednio. Niech* $(x_{N-k}, y_{N-k}, \underline{s}_{N-k}, \overline{s}_{N-k})$ *będzie dowolną* $\mathcal{F}_{N-k}$*-mierzalną zmienną losową przyjmujacą wartości w* $\mathbb{D}$*. Wówczas* $\overline{s}^*_{N-k}(x_{N-k}, y_{N-k}, \underline{s}_{N-k}, \overline{s}_{N-k})$ *i* $\underline{s}^*_{N-k}(x_{N-k}, y_{N-k}, \underline{s}_{N-k}, \overline{s}_{N-k})$ *są dobrze zdefiniowanymi* $\mathcal{F}_{N-k}$*-mierzalnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości w* $(0,\infty)$*.*

Dowód. Jest to konsekwencja tego, że każda funkcja pólciągła z dołu lub z góry jest mierzalna. □

Twierdzenie 5.1. *Niech* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *oraz*

$$\hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \hat{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \tag{5.17}$$

gdzie funkcja losowa $\hat{s}^*_{N-k}$ *jest zdefiniowana za pomocą (5.14). Wówczas odwzorowanie losowe* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \mapsto \hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *jest* $\mathcal{F}_{N-k}$*-mierzalne i jest lokalną słabą ceną kalkulacyjną w chwili* $N-k$*. Co więcej,*

$$\begin{aligned} &v_{N-k}(x, y, \hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) = \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{S}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}))} \mathbb{E}[g(c)+ \\ &\gamma w_{N-k+1}(x - c + \hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \cdot (m-l), y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}] = \\ &w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \end{aligned} \tag{5.18}$$

zaś optymalne strategie na obu rynkach są takie same.

Dowód. Jest to konsekwencja tego, że dla każdego $\omega \in \Omega$ zachodzi (4.38) i (4.39) oraz konsekwencja (5.15). Zwróćmy przy tym uwagę, że na mocy (5.3) i (5.5) oraz (4.38) i (4.39) dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że $\underline{s} \le \hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \le \overline{s}$. □

Uwaga 5.1. *Załóżmy, że dla każdego* $\hat{s} > 0$ *odwzorowanie losowe* $\hat{v}_{N-k}(\cdot, \cdot, \hat{s})$ *jest różniczkowalne. Wówczas ze Stwierdzenia 4.3 dostajemy, że dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *mamy* $\underline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \overline{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *i w konsekwencji dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *zmienna losowa* $\hat{s}^*_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ *jest jednoznaczna zdefiniowana.*

5.2 Słaba i silna cena kalkulacyjna

W tym podrozdziale podajemy główny rezultat dla skończonego horyzontu czasowego. Zacznijmy od pewnego ogólnego oczywistego faktu.

Poniższe Twierdzenie jest jednym z głównych wyników całej pracy. Orzeka ono, że dla naszego rodzina zadana przez (5.17) jest słabą ceną kalkulacyjną.

Twierdzenie 5.2. *Niech rodzina* $\hat{S}$ *będzie zdefiniowana za pomocą (5.17). Wówczas* $\hat{S}$ *jest słabą ceną kalkulacyjną. Co więcej, optymalna strategia na rynku bez kosztów za transakcje i z systemem cen* $\hat{S}$ *jest optymalna na rynku z kosztami za transakcje.*

Dowód. Będziemy korzystali z indukcji wstecznej. Hipotezą indukcyjną I_k jest równość

$$\hat{v}_t(x, y, \hat{S}_t(x, y, \underline{S}_t, \overline{S}_t)) = w_t(x, y, \underline{S}_t, \overline{S}_t)$$

dla $t \in \{N-k, N-k+1, \ldots, N\}$ i $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ oraz to, że optymalne strategie na obu rynkach na horyzoncie czasowym $\{N-k, N-k+1, \ldots, N\}$ są takie same.

Rozważmy przypadek $k = 0$.

Niech $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ będzie naszą pozycją. Oczywiście, musi być $\hat{S}_N(x, y, \underline{S}_N, \overline{S}_N) = \underline{S}_N$, gdyż w chwili N optymalną decyzją jest sprzedaż wszystkich akcji. Dla $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ mamy

$$\begin{aligned} &\hat{v}_N(x, y, \hat{S}_N(x, y, \underline{S}_N, \overline{S}_N)) = g(x + \hat{S}_N(x, y, \underline{S}_N, \overline{S}_N)y) = \\ &\quad g(x + \underline{S}_N y) = w_N(x, y, \underline{S}_N, \overline{S}_N). \end{aligned}$$

Zatem dla $k = 0$ zdanie I_0 jest prawdziwe.

Załóżmy, że zdanie I_k jest prawdziwe dla $k \leq n-1$.

Wówczas dla $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ mamy

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-n+1}(x, y, \hat{S}_{N-n+1}(x, y, \underline{S}_{N-n+1}, \overline{S}_{N-n+1})) = \\ &\qquad w_{N-n+1}(x, y, \underline{S}_{N-n+1}, \overline{S}_{N-n+1}). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Z równania Bellmana mamy

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-n}(x, y, \hat{S}_{N-n}(x, y, \underline{S}_{N-n}, \overline{S}_{N-n})) = \\ &\sup_{(c,l,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \hat{S}_{N-n}(x, y, \underline{S}_{N-n}, \overline{S}_{N-n}))} \mathbb{E}[g(c) + \\ &\qquad \gamma w_{N-n+1}(x - c + \hat{S}_{N-n}(x, y, \underline{S}_{N-n}, \overline{S}_{N-n})(m-l), y - m + l, \\ &\qquad\quad \hat{S}_{N-n+1}(x - c + \hat{S}_{N-n}(x, y, \underline{S}_{N-n}, \overline{S}_{N-n})(m-l), \\ &\qquad\quad y - m + l, \underline{S}_{N-n+1}, \overline{S}_{N-n+1})) | \mathcal{F}_{N-n}], \end{aligned}$$

więc korzystając z (5.19), dostajemy

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-n}(x, y, \hat{S}_{N-n}(x, y, \underline{S}_{N-n}, \overline{S}_{N-n})) = \\ &= \sup_{(c,l,m) \in \hat{\mathbb{A}}(x, y, \hat{S}_{N-n}(x, y, \underline{S}_{N-n}, \overline{S}_{N-n}))} \mathbb{E}[g(c) + \\ &\quad \gamma w_{N-n+1}(x - c + \hat{S}_{N-n}(x, y, \underline{S}_{N-n}, \overline{S}_{N-n}) \cdot (m-l), \\ &\qquad y - m + l, \underline{S}_{N-n+1}, \overline{S}_{N-n+1}) | \mathcal{F}_{N-n}] \end{aligned}$$

Na mocy Twierdzenia 5.1 dostajemy, że zdanie I_n jest prawdziwe. $\square$

Wniosek 5.3. *Niech $\hat{S}$ będzie zdefiniowane przez* (5.17)*. Dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *i dla każdego* $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ *mamy*

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-k}(x, y, \hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) = \\ &\qquad \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{S}_{N-k}(x,y,\underline{s},\overline{s}))} \mathbb{E}[g(c)+ \\ &\qquad \gamma\hat{v}_{N-k+1}(x - c + \hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \cdot (m - l), y - m + l, \\ &\qquad\quad \hat{S}_{N-k+1}(x - c + \hat{S}_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \cdot (m - l), \\ &\qquad\quad y - m + l, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}))|\mathcal{F}_{N-k}] = \\ &\qquad w_{N-k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Poniższe Twierdzenie jest również jednym z głównych wyników pracy. Orzeka ono, że istnieje silna cena kalkulacyjna, która jest w sposób szczególny związana ze słabą ceną kalkulacyjną.

Twierdzenie 5.3. *Jeśli* $\hat{u} \in \mathcal{U}^N_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ *jest optymalną strategią na rynku z kosztami za transakcje z pozycją początkową* (x, y)*, zaś* $(\hat{x}_n, \hat{y}_n)_{n=0}^N$ *są pozycjami w kolejnych momentach czasowych, to istnieje silna cena kalkulacyjna* $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{n=0}^N$ *przy czym*

$$\hat{S}_n(\hat{x}_n, \hat{y}_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) = \tilde{S}_n. \tag{5.21}$$

dla $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$*, gdzie* $\hat{S}$ *jest pewną słabą ceną kalkulacyjną.*

Dowód. Zauważmy, że dla $n \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ mamy

$$w_n(\hat{x}_n, \hat{y}_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) = \mathbb{E}[g(\hat{c}_n) + w_{n+1}(\hat{x}_{n+1}, \hat{y}_{n+1}, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n], \tag{5.22}$$

gdzie $\hat{c}_n$ optymalną konsumpcją odpowiadającą strategii $\hat{u}$.

Dla $(x, y, \tilde{s}) \in \hat{\mathbb{D}}$ niech

$$\tilde{v}_N(x, y, \tilde{s}) := g(x + \tilde{s}y),$$

zaś dla $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ niech

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{N-k}(x, y, \tilde{s}) := &\sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\tilde{s})} \mathbb{E}[g(c)+ \\ &\gamma\tilde{v}_{N-k+1}(x - c + \tilde{s} \cdot (m - l), y - m + l, \tilde{S}_{N-k+1})|\mathcal{F}_{N-k}]. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Oczywiście,

$$w_N(\hat{x}_N, \hat{y}_N, \underline{S}_N, \overline{S}_N) = \tilde{v}_N(\hat{x}_N, \hat{y}_N, \tilde{S}_N) = \hat{v}_N(\hat{x}_N, \hat{y}_N, \hat{S}_N(\hat{x}_N, \hat{y}_N, \underline{S}_N, \overline{S}_N)). \tag{5.24}$$

Na mocy Twierdzenia 5.1 i na mocy (5.18) mamy, że

$$\begin{aligned} &\hat{v}_{N-1}(\hat{x}_{N-1}, \hat{y}_{N-1}, \hat{S}_{N-1}(\hat{x}_{N-1}, \hat{y}_{N-1}, \underline{S}_{N-1}, \overline{S}_{N-1})) = \\ &\qquad w_{N-1}(\hat{x}_{N-1}, \hat{y}_{N-1}, \underline{S}_{N-1}, \overline{S}_{N-1}). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Tym samym z (5.23) dostajemy, że

$$w_{N-1}(\hat{x}_{N-1}, \hat{y}_{N-1}, \underline{S}_{N-1}, \overline{S}_{N-1}) = \tilde{v}_{N-1}(\hat{x}_{N-1}, \hat{y}_{N-1}, \tilde{S}_{N-1}). \tag{5.26}$$

Załóżmy teraz, że dla $k \in \{2, \ldots, N\}$ mamy

$$\begin{aligned} w_{N-k+1}(\hat{x}_{N-k+1}, &\hat{y}_{N-k+1}, \underline{S}_{N-k+1}, \overline{S}_{N-k+1}) = \\ &\tilde{v}_{N-k+1}(\hat{x}_{N-k+1}, \hat{y}_{N-k+1}, \tilde{S}_{N-k+1}). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Korzystając ponownie z (5.18), dostajemy, że

$$\begin{aligned} \hat{v}_{N-k}(\hat{x}_{N-k}, &\hat{y}_{N-k}, \hat{S}_{N-k}(\hat{x}_{N-k}, \hat{y}_{N-k}, \underline{S}_{N-k}, \overline{S}_{N-k})) = \\ &w_{N-k}(\hat{x}_{N-k}, \hat{y}_{N-k}, \underline{S}_{N-k}, \overline{S}_{N-k}) \end{aligned} \tag{5.28}$$

i tym samym z (5.27) i z (5.23) mamy, że

$$w_{N-k}(\hat{x}_{N-k}, \hat{y}_{N-k}, \underline{S}_{N-k}, \overline{S}_{N-k}) = \tilde{v}_{N-k}(\hat{x}_{N-k}, \hat{y}_{N-k}, \tilde{S}_{N-k}). \tag{5.29}$$

Tym samym $w_0(x, y, \underline{S}, \overline{S}) = \tilde{v}_0(x, y, \tilde{S}_0)$, co oznacza, że $(\tilde{S}_n)_{n=0}^N$ jest silną ceną kalkulacyjną. $\square$

Zwróćmy tutaj uwagę na sposób konstrukcji silnej ceny kalkulacyjnej $\tilde{S}$ w dowodzie powyższego Twierdzenia. Podobnie jak równania Bellmana konstruujemy ją za pomocą indukcji wstecznej.

Rozdział 6

Przypadek czasu nieskończonego

W tym rozdziale zajmujemy się analogicznym modelem jak poprzednio. Celem naszym również będzie znalezienie ceny kalkulacyjnej. Używać będziemy w tym celu podobnej metody jak dla modelu z czasem skończonym. Główna trudność polegać jednak będzie na wprowadzeniu równań Bellmana dla rynku z kosztami za transakcje. Z samej natury tego modelu nie możemy stosować indukcji wstecznej, gdyż nie ma tutaj chwili końcowej. Ponadto nawet w przypadku ściśle wklęsłej funkcji użyteczności nie wiadomo, czy w granicy otrzymamy funkcję ściśle wklęsłą.

6.1 Metoda iteracji

W tym podrozdziale zajmiemy się konstrukcją równań Bellmana dla czasu nieskończonego.

Dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ i dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ będziemy oznaczali przez $\mathcal{A}_n(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ zbiór wszystkich $\mathcal{F}_n$-mierzalnych zmiennych losowych przyjmujących wartości w zbiorze $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla każdej ciągłej funkcji losowej $f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ściśle rosnącej ze względu na dwie pierwsze zmienne i takiej, że spełniony jest następujący warunek

$$\begin{aligned} &\forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}} \quad \mathbb{E}|f_n(x, y, \underline{S}_n, \overline{S}_n)| < \infty, \\ &\forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D},(x,y)\neq(0,0)} \quad \mathbb{E}|f_n(x, y, \underline{s}, \overline{s})| < \infty \end{aligned} \tag{6.1}$$

zdefiniujmy funkcję losową $\varphi_n(f) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ za pomocą wzoru

$$\varphi_n(f)(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma f(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n] \tag{6.2}$$

dla $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Zauważmy, że dla każdej ciągłej funkcji losowej $f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ściśle rosnącej ze względu na dwie pierwsze zmienne i takiej, że spełniony jest warunek (6.1) mamy, że dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^2_+$ mamy

$$\sup_{(x,y)\in K} \mathbb{E}|f_n(x, y, \underline{s}, \overline{s})| < \infty. \tag{6.3}$$

Lemat 6.1. *Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$, zaś $f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ niech będzie ciągłą i ściśle rosnącą ze względu na dwie pierwsze zmienne funkcją losową spełniającą warunek (6.1). Wówczas*

$$(c, l, m) \longmapsto \mathbb{E}[g(c) + \gamma f_n(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]$$

jest ciągłym $\mathcal{F}_n$-mierzalnym odwzorowaniem losowym z $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ do $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Dowód. Ustalmy $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Niech $(c_k, l_k, m_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem z $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ zbieżnym do (c, l, m).

Na mocy (iii) dostajemy, że

$$\sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma f_n(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n] < \infty.$$

Jeżeli $c = 0$ i $g(0) = -\infty$, to oczywiście

$$\mathbb{E}[g(c_k)|\mathcal{F}_n] = g(c_k) \xrightarrow{k \to \infty} g(c) = g(0) = \mathbb{E}[g(c)|\mathcal{F}_n]$$

i tym samym

$$\mathbb{E}[g(c_k) + \gamma f_n(x - c_k + \underline{s}m_k - \overline{s}l_k, y - m_k + l_k, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{k \to \infty}$$
$$\xrightarrow{k \to \infty} \mathbb{E}[g(c) + \gamma f_n(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]$$

gdyż na mocy (6.1) mamy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zmienna losowa

$$f_n(x - c_k + \underline{s}m_k - \overline{s}l_k, y - m_k + l_k, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})$$

ma warunkową wartość oczekiwaną ściśle mniejszą od ∞. Rozważmy więc przypadek, gdy $c > 0$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $c_k > 0$.

Wystarczy oczywiście pokazać ciągłość odwzorowania

$$(c, l, m) \longmapsto \mathbb{E}[f_n(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n].$$

Weźmiemy pod uwagę trzy przypadki.

1^0. $x - c + \underline{s}m - \overline{s}l > 0$ lub $y - m + l > 0$

W tej sytuacji ze względu na ścisłą monotoniczność funkcji losowej f_n ze względu na dwie pierwsze zmienne dostajemy, że

$$f_n(\frac{1}{2} \cdot (x - c + \underline{s}m - \overline{s}l), \frac{1}{2} \cdot (y - m + l), \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1}) <$$
$$< f_n(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1}) <$$
$$f_n(x + \underline{s}y, y + \frac{x}{\overline{s}}, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1}).$$

Na mocy założenia (ii) zmienne losowe

$$|f_n(\frac{1}{2}\cdot(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l),\frac{1}{2}\cdot(y-m+l),\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})| \quad \text{i} \quad |f_n(x+\underline{s}y,y+\frac{x}{\overline{s}},\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|$$

są całkowalne. Tym samym zmienna losowa

$$M_n := \max\{|f_n(\frac{1}{2}\cdot(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l),\frac{1}{2}\cdot(y-m+l),\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|,|f_n(x+\underline{s}y,y+\frac{x}{\overline{s}},\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\}$$

ma skończoną wartość oczekiwaną.

Oczywiście, dla dostatecznie dużych $k\in\mathbb{N}$ mamy, że

$$|f_n(x-c_k+\underline{s}m_k-\overline{s}l_k,y-m_k+l_k,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\le M_n.$$

Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej oraz na mocy ciągłości funkcji losowej f_n, otrzymujemy, że w tym przypadku mamy

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[f_n(x-c_k+\underline{s}m_k-\overline{s}l_k,y-m_k+l_k,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]\xrightarrow{k\to\infty}\\ &\xrightarrow{k\to\infty}\mathbb{E}[f_n(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l,y-m+l,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n].\end{aligned}$$

2^0. $x-c+\underline{s}m-\overline{s}l=0=y-m+l$ i $\mathbb{E}f_n(0,0,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})=-\infty$

Na mocy ciągłości funkcji losowej f_n i na mocy lematu Fatou dla niedodatnich zmiennych losowych dostajemy, że

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\longrightarrow\infty}\mathbb{E}[f_n(x-c_k+\underline{s}m_k-\overline{s}l_k,y-m_k+l_k,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]\le\\ &\le\mathbb{E}[\limsup_{k\longrightarrow\infty}f_n(x-c_k+\underline{s}m_k-\overline{s}l_k,y-m_k+l_k,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]=\\ &=\mathbb{E}[f_n(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l,y-m+l,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]=\\ &=\mathbb{E}[f_n(0,0,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]=-\infty.\end{aligned}$$

3^0. $x-c+\underline{s}m-\overline{s}l=0=y-m+l$ i $\mathbb{E}f_n(0,0,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})>-\infty$

Jest jasne, że na mocy tego, że funkcja losowa f_n jest ściśle rosnąca ze względu na dwie pierwsze zmienne, dostajemy, że

$$\begin{aligned}&f_n(0,0,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})\le\\ &\le f_n(x-c_k+\underline{s}m_k-\overline{s}l_k,y-m_k+l_k,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})\le\\ &f_n(x+\underline{s}y,y+\frac{x}{\overline{s}},\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1}).\end{aligned}$$

i analogicznie jak poprzednio zmienna losowa

$$\hat{M}_n := \max\{|f_n(0,0,\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|,|f_n(x+\underline{s}y,y+\frac{x}{\overline{s}},\underline{S}_{n+1},\overline{S}_{n+1})|\}.$$

ma skończoną wartość oczekiwaną.

Tym samym dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$|f_n(x - c_k + \underline{s}m_k - \overline{s}l_k, y - m_k + l_k, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})| \leq \hat{M}_n,$$

gdzie $\hat{M}_n$ jest nieujemną zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej.

Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej oraz na mocy ciągłości funkcji losowej f_n, otrzymujemy, że w tym przypadku mamy

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[f_n(x - c_k + \underline{s}m_k - \overline{s}l_k, y - m_k + l_k, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{k\to\infty}\\ &\xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{E}[f_n(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n].\end{aligned}$$

To kończy dowód. □

Wniosek 6.1. *Dla każdej ciągłej funkcji losowej $f : \mathbb{D} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ściśle rosnącej ze względu na dwie pierwsze zmienne, która spełnia założenie (6.1) i dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ istnieje zmienna losowa $(c_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m_n(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \in \mathcal{A}_n(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ taka, że*

$$\begin{aligned}&\varphi_n(f)(x, y, \underline{s}, \overline{s}) =\\ &\quad= \mathbb{E}[g(c_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}))+\\ &\qquad+ \gamma f(x - c_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + \underline{s}m_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}) - \overline{s}l_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}),\\ &\qquad\quad y - m_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + l_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \underline{S}_{n+1}, \overline{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n]\end{aligned}$$

Co więcej, jeśli f jest ściśle wklęsła, to dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ zmienna losowa

$$(c_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}))$$

jest jednoznacznie określona a odwzorowanie losowe

$$(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \longmapsto (c_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m_n(x, y, \underline{s}, \overline{s}))$$

jest ciągłym $\mathcal{F}_n$-mierzalnym odwzorowaniem z $\mathbb{D}$ do $\mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Od tej pory zakładamy, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$ mamy

$$\mathbb{E}g(x + \underline{S}_n u)^- < \infty. \tag{6.4}$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zdefiniujmy ciąg $(\psi_{k,n})_{k=0}^n$ odwzorowań losowych z $\mathbb{D}$ do $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ w następujący sposób

$$\begin{aligned}\psi_{n,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) &:= \varphi_n(0)(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = g(x + \underline{s}y),\\ \psi_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) &:= \varphi_{k-1}(\psi_{k,n})(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \quad \text{dla } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Uwaga 6.1. *Na mocy założenia (6.4) i na Lematu 3.1 dostajemy, że dla każdego* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *dla każdego* $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ *i dla każdego* $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ *mamy, że*

$$\mathbb{E}\psi_{k,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) > -\infty \tag{6.6}$$

oraz

$$\mathbb{E}\psi_{k,n}(x, y, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1}) > -\infty. \tag{6.7}$$

Uwaga 6.2. *Na mocy Lematu 3.2 dla każdego* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i dla każdego* $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ *i dla każdych* $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ *takich, że* $\overline{s} > \underline{s} > 0$ *odwzorowanie losowe* $\psi_{k,n}(\cdot, \cdot, \underline{s}, \overline{s})$ *jest wklęsłe.*

Dla każdych $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ i $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ zdefiniujmy funkcję losową

$$V_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, \cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

za pomocą wzoru

$$V_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) := \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{k,n}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_k, \overline{S}_k)|\mathcal{F}_{k-1}] \tag{6.8}$$

dla wszystkich $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oznaczmy

$$\psi_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \liminf_{n\to\infty} \psi_{k,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{6.9}$$

Od tej pory będziemy zakładać, że dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ funkcja losowa $\psi_{k,\infty}$ jest ciągła, ściśle rosnąca ze względu na dwie pierwsze zmienne oraz, że spełnia założenie (6.1).

Założenie o ścisłej monotoniczności ze względu na dwie pierwsze zmienne funkcji losowej $\psi_{k,\infty}$ jest bardzo istotne. Wyraża ono fakt, że w każdej sytuacji dla inwestora jest ściśle lepiej, jeśli ma choć trochę więcej pieniędzy lub akcji.

Zakładamy także, że

$$\forall_{(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}} \quad \mathbb{E}\psi_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) < \infty. \tag{6.10}$$

Ponadto zakładamy, że dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0, 0)\}$ mamy

$$\mathbb{E}\psi_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) > -\infty \tag{6.11}$$

oraz

$$\mathbb{E}\psi_{k,\infty}(x, y, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1}) > -\infty. \tag{6.12}$$

Założenia (6.11) i (6.12) są techniczne i są podobne do założenia (1.9) dla modelu ze skończonym horyzontem czasowym. Warto dodać, że założenia te są automatycznie spełnione dla ograniczonych z góry funkcji użyteczności jak np. dla $g(u) := 1 - e^{-u}$, gdzie $u \in [0, \infty)$.

Możemy zdefiniować funkcję losową

$$V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, \cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

za pomocą wzoru

$$V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) := \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{k,\infty}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_k, \overline{S}_k)|\mathcal{F}_{k-1}]. \tag{6.13}$$

dla każdego $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$.

Stwierdzenie 6.1. *Załóżmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ i dla wszystkich $(c, l, m) \in \mathbb{A}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ mamy*

$$V_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m). \tag{6.14}$$

Załóżmy także, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ istnieje

$$(c^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \in \mathcal{A}_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$$

takie, że mamy, że

$$\begin{aligned} &\sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \longrightarrow \infty} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Wówczas dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że

$$\begin{aligned} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) = \\ = \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Dowód. Zauważmy, że na mocy Wniosku 6.1 z ciągłości odwzorowania losowego $\psi_{k,\infty}$ wynika, że dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ istnieje zmienna losowa

$$(c^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \in \mathcal{A}_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$$

taka, że

$$\begin{aligned} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) = \\ = \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Niech $(c^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \in \mathcal{A}_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ będzie takie, że (6.17) zachodzi.

Załóżmy, że nie jest prawdą, że równość (6.16) zachodzi dla każdego $\omega \in \Omega$, tzn., że zdarzenie

$$\begin{aligned} A := \{&V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) > \\ &> V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}))\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Oczywiście, dla każdego naturalnego $n > k - 1$ mamy, że

$$\begin{aligned} &\sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) \geq \\ &\qquad \geq V_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s})). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Ale na mocy (6.14) i (6.15) otrzymujemy z (6.18), że

$$\begin{aligned} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \geq \\ \geq V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^{*}(x, y, \underline{s}, \overline{s})), \end{aligned} \tag{6.19}$$

co przeczy temu, że $A \neq \emptyset$.

Oznacza to, że, rzeczywiście, (6.16) zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$. $\square$

Wniosek 6.2. *Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 7.3 wynika, że funkcja losowa $\psi_{k,\infty}$ jest ciągła na otwartym zbiorze int$\mathbb{D}$.*

Konsekwentnie, z (6.16) mamy następujące

Twierdzenie 6.1. *Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy prawie, że*

$$\psi_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \varphi_{k-1}(\psi_{k,\infty})(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{6.20}$$

Zgodnie z powyższym Twierdzeniem mamy iteracje w równaniach Bellmana dla czasu nieskończonego.

Z Wniosku 6.1 oraz z (6.20) otrzymujemy następujący

Wniosek 6.3. *Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ istnieje pewna $\mathcal{F}_{k-1}$-mierzalna zmienna losowa*

$$(c^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \in \mathcal{A}_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \tag{6.21}$$

taka, że mamy, że

$$\begin{aligned} &\psi_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \\ &\quad = \mathbb{E}[g(c^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) + \\ &\qquad + \gamma\psi_{k,\infty}(x - c^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + \underline{s}m^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) - \overline{s}l^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \\ &\qquad\qquad y - m^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + l^*_{k-1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \underline{S}_k, \overline{S}_k)|\mathcal{F}_{k-1}]. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Lematu 3.3. □

Zwróćmy uwagę, że w przypadku nieujemnej funkcji użyteczności ciąg funkcji losowych $(\psi_{k,n})_{n=k}^{\infty}$ jest niemalejący. Wynika to z faktu, że w tej sytuacji, mając więcej czasu, inwestor ma nie mniejszy wybór strategii. Poniższy Lemat dowodzi tego intuicyjnego faktu.

Lemat 6.2. *Załóżmy, że g jest nieujemna. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla każdego $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że*

$$\psi_{k,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \leq \psi_{k,n+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{6.23}$$

Dowód. Równoważnie wystarczy pokazać, że dla wszystkich $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że

$$\psi_{k,k+l}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \leq \psi_{k,k+l+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{6.24}$$

Aby pokazać, że (6.24) skorzystamy z indukcji względem l.

Z (6.5) otrzymujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że

$$\begin{aligned} \psi_{k,k+0+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) &= \psi_{k,k+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \varphi_k(\psi_{k+1,k+1})(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \\ &= \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{k+1,k+1}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k] \geq \\ &\geq g(x + \underline{s}y) = \varphi_k(0)(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \psi_{k,k}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \psi_{k,k+0}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \end{aligned}$$

Zatem dla $l = 0$ równość (6.24) zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Załóżmy, że dla każdego $l \in \{0, 1, 2, \ldots, M\}$ równość (6.24) zachodzi dla wszystkich $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Pokażemy, że równość (6.24) zachodzi również dla $l = M + 1$, dla wszystkich $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Z (6.5) otrzymujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że

$$\begin{aligned}
\psi_{k,k+M+2}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) &= \varphi_k(\psi_{k+1,k+M+2})(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \\
&= \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma \psi_{k+1,k+M+2}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1}) | \mathcal{F}_k] \geq \\
&\geq \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma \psi_{k+1,k+M+1}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}, y - m + l, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1}) | \mathcal{F}_k] = \\
&= \varphi_k(\psi_{k+1,k+M+1})(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \psi_{k,k+M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}),
\end{aligned}$$

gdyż z tego, że $(k + M + 2) - (k + 1) = M + 1 \leq (M + 1) + 1$ i z naszego założenia otrzymujemy, że dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że

$$\psi_{k+1,k+M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \leq \psi_{k+1,k+M+2}(x, y, \underline{s}, \overline{s}).$$

Oznacza to, że, rzeczywiście, równość (6.24) zachodzi również dla $l = M+1$, dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. □

Z (6.23) dostajemy następujący

Wniosek 6.4. *Załóżmy, że g jest nieujemna. Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ciąg $(\psi_{k,n})_{n=k}^{\infty}$ jest niemalejącym ciągiem $\mathcal{F}_k$-mierzalnych funkcji losowych z $\mathbb{D}$ do $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. W szczególności dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ istnieje pewna funkcja losowa $\psi_{k,\infty} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ zdefiniowana dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ za pomocą*

$$\psi_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \lim_{n \longrightarrow \infty} \psi_{k,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{6.25}$$

Co więcej, dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że

$$\begin{aligned}
\psi_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,n}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) \xrightarrow{n \to \infty} \\
\xrightarrow{n \to \infty} \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}, c, l, m) = \varphi_{k-1}(\psi_{k,\infty})(x, y, \underline{s}, \overline{s}).
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Dowód. Pokażemy tylko (6.26). Jest to konsekwencja (6.25), twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i (7.7) i następujących obliczeń

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k-1}(\psi_{k,\infty})(x,y,\underline{s},\overline{s}) &= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,l,m) = \\
&= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c)+\gamma\psi_{k,\infty}(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l, y-m+l, \underline{S}_k, \overline{S}_k)|\mathcal{F}_{k-1}] = \\
&= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c)+\gamma\lim_{n\to\infty}\psi_{k,n}(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l, y-m+l, \underline{S}_k, \overline{S}_k)|\mathcal{F}_{k-1}] = \\
&= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(c)+\gamma\psi_{k,n}(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l, y-m+l, \underline{S}_k, \overline{S}_k)|\mathcal{F}_{k-1}] = \\
&= \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \lim_{n\to\infty} V_{k-1,n}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,l,m) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k-1,n}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,l,m) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi_{k-1}(\psi_{k,n})(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \lim_{n\to\infty}\psi_{k-1,n}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \psi_{k-1,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}).
\end{aligned}
$$

□

Uwaga 6.3. *Zauważmy, że w przypadku, gdy funkcja g jest nieujemna, to warunek (6.14) jest spełniony.*

Od tego momentu zakładamy, że założenia Stwierdzenia 6.1 są spełnione.

6.2 Równania Bellmana a problem optymalizacyjny dla czasu nieskończonego

W tym podrozdziale zajmiemy się związkiem równań Bellmana wprowadzonych w (6.9) z problemem optymalizacyjnym (1.21)

Stwierdzenie 6.2. *Dla każdego $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i dla wszystkich $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy*

$$
\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N}\gamma^n g(c_n) + \gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(x_{N+1}, y_{N+1}, \underline{S}_{N+1}, \overline{S}_{N+1})]. \quad (6.27)
$$

Dowód. Będziemy korzystali z indukcji, z (6.20) i z Wniosku 6.1.

Dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) &= \mathbb{E}\varphi_0(\psi_{1,\infty})(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \\
&= \mathbb{E}\{\sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c)+\gamma\psi_{1,\infty}(x-c+\underline{s}m-\overline{s}l, y-m+l, \underline{S}_1, \overline{S}_1)|\mathcal{F}_0]\} = \\
&= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[g(\tilde{c})+\gamma\psi_{1,\infty}(x-\tilde{c}+\underline{s}\tilde{m}-\overline{s}\tilde{l}, y-\tilde{m}+\tilde{l}, \underline{S}_1, \overline{S}_1)|\mathcal{F}_0]\} = \\
&= \mathbb{E}[g(\tilde{c})+\gamma\psi_{1,\infty}(x-\tilde{c}+\underline{s}\tilde{m}-\overline{s}\tilde{l}, y-\tilde{m}+\tilde{l}, \underline{S}_1, \overline{S}_1)] = \\
&= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[g(c_0)+\gamma\psi_{1,\infty}(x-c_0+\underline{s}m_0-\overline{s}l_0, y-m_0+l_0, \underline{S}_1, \overline{S}_1)],
\end{aligned}
$$

gdzie $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m}) \in \mathcal{A}_0(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ jest takie, że

$$\begin{aligned}\sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} &\mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{1,\infty}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_1, \overline{S}_1)|\mathcal{F}_0] = \\ &=\mathbb{E}[g(\tilde{c}) + \gamma\psi_{1,\infty}(x - \tilde{c} + \underline{s}\tilde{m} - \overline{s}\tilde{l}, y - \tilde{m} + \tilde{l}, \underline{S}_1, \overline{S}_1)|\mathcal{F}_0].\end{aligned}$$

Istnienie takiej zmiennej losowej $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{m})$ jes konsekwencją Wniosku 6.1.

Oznacza to, że dla $N = 0$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ wzór (6.27) zachodzi.

Załóżmy, że wzór (6.27) zachodzi dla $N = M$ i dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Pokażemy, że wzór (6.27) zachodzi również dla $N = M + 1$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Z naszego założenia wynika, że dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) &= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(c_n) + \gamma^{M+1}\psi_{M+1,\infty}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1})] = \\
&= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(c_n) + \gamma^{M+1}\varphi_{M+1}(\psi_{M+2,\infty})(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1})] = \\
&= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}\{\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(c_n) + \\
&\quad + \gamma^{M+1} \sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(x_{M+1},y_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1})} \mathbb{E}[g(c) + \\
&\qquad + \gamma\psi_{M+2,\infty}(x_{M+1} - c + \underline{S}_{M+1}m - \overline{S}_{M+1}l, y_{M+1} - m + l, \underline{S}_{M+2}, \overline{S}_{M+2})|\mathcal{F}_{M+1}]\} = \\
&= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}\{\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(c_n) + \\
&\quad + \gamma^{M+1}\mathbb{E}[g(\tilde{c}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1})) + \\
&\qquad + \gamma\psi_{M+2,\infty}(x_{M+1} - \tilde{c}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}) + \\
&\qquad\quad + \underline{S}_{M+1}\tilde{m}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}) - \overline{S}_{M+1}\tilde{l}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}), \\
&\qquad\quad y_{M+1} - \tilde{m}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}) + \tilde{l}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}), \\
&\qquad\quad \underline{S}_{M+2}, \overline{S}_{M+2})|\mathcal{F}_{M+1}]\} = \\
&= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(c_n) + \gamma^{M+1}g(\tilde{c}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1})) + \\
&\qquad + \gamma^{M+2}\psi_{M+2,\infty}(x_{M+1} - \tilde{c}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}) + \\
&\qquad\quad + \underline{S}_{M+1}\tilde{m}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}) - \overline{S}_{M+1}\tilde{l}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}), \\
&\qquad\quad y_{M+1} - \tilde{m}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}) + \tilde{l}_{M+1}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}), \\
&\qquad\quad \underline{S}_{M+2}, \overline{S}_{M+2})] =
\end{aligned}$$

$$= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(c_n) + \gamma^{M+1} g(c_{M+1}) +$$

$$+ \gamma^{M+2}\psi_{M+2,\infty}(x_{M+1} - c_{M+1} + \underline{S}_{M+1} m_{M+1} - \overline{S}_{M+1} l_{M+1},$$

$$y_{M+1} - m_{M+1} + l_{M+1}, \underline{S}_{M+2}, \overline{S}_{M+2})] =$$

$$= \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M+1} \gamma^n g(c_n) + \gamma^{M+2}\psi_{M+2,\infty}(x_{M+2}, y_{M+2}, \underline{S}_{M+2}, \overline{S}_{M+2})],$$

gdzie dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ oznaczyliśmy przez

$$(\tilde{c}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \tilde{l}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \tilde{m}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}))$$

taką zmienną losową z $\mathcal{A}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, że

$$\sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{M+2,\infty}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_{M+2}, \overline{S}_{M+2})|\mathcal{F}_{M+1}] =$$

$$= \mathbb{E}[g(\tilde{c}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}))+$$

$$+ \gamma\psi_{M+2,\infty}(x - \tilde{c}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + \underline{s}\tilde{m}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) - \overline{s}\tilde{l}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}),$$

$$y - \tilde{m}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + \tilde{l}_{M+1}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \underline{S}_1, \overline{S}_1)|\mathcal{F}_{M+1}].$$

Istnienie takiej zmiennej losowej jest konsekwencją Wnisoku 6.1.

Oznacza to, że, rzeczywiście, wzór (6.27) zachodzi dla $N = M + 1$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$. □

Wniosek 6.5. *Skoro dla wszystkich $N \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ zmienna losowa $\psi_{N+1,\infty}$ jest ciągła, więc z Wniosku 6.1 otrzymujemy, że istnieje strategia $\hat{u} \in \mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ taka, że dla wszystkich $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy*

$$\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \sup_{u\in\mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})} \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N} \gamma^n g(c_n) + \gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(x_{N+1}, y_{N+1}, \underline{S}_{N+1}, \overline{S}_{N+1})] =$$

$$= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N} \gamma^n g(\hat{c}_n) + \gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(\hat{x}_{N+1}, \hat{y}_{N+1}, \underline{S}_{N+1}, \overline{S}_{N+1})]. \tag{6.28}$$

Dowód. Z (6.27) wynika, że pierwsza równość w (6.28) zachodzi dla wszystkich $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Pozostaje pokazać, że istnieje strategia $\hat{u} \in \mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ taka, że dla wszystkich $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ druga równość w (6.28) również zachodzi.

Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ niech $\mathcal{F}_{k-1}$-mierzalna funkcja losowa $(c^*_{k-1}, l^*_{k-1}, m^*_{k-1}) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3_+$ spełnia (6.21) i (6.22). Z Wniosku 6.3 wiemy, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ taka $\mathcal{F}_{k-1}$-mierzalna funkcja losowa istnieje.

Zdefiniujmy indukcyjnie ciąg $(\hat{c}_n, \hat{l}_n, \hat{m}_n, \hat{x}_n, \hat{y}_n)_{n=0}^{\infty}$ zmiennych losowych przyjmujących wartości w $\mathbb{R}^5_+$ w następujący sposób

$$\begin{aligned}
&(\hat{c}_0, \hat{l}_0, \hat{m}_0, \hat{x}_0, \hat{y}_0) := (c^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}), l^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}), m^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}), x, y),\\
&(\hat{x}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}) := (\hat{x}_k - \hat{c}_k + \underline{S}_k \hat{m}_k - \overline{S}_k \hat{l}_k, \hat{y}_k - \hat{m}_k + \hat{l}_k)\\
&(\hat{c}_{k+1}, \hat{l}_{k+1}, \hat{m}_{k+1}) :=\\
&\quad (c^*_{k+1}(\hat{x}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1}), l^*_{k+1}(\hat{x}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1}),\\
&\qquad m^*_{k+1}(\hat{x}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})).
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Oczywiście, $\hat{u} := (\hat{c}_n, \hat{l}_n, \hat{m}_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$.

Teraz pokażemy indukcyjnie, że dla wszystkich $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ druga równość w (6.28) zachodzi dla strategii $\hat{u}$ zdefiniowanej za pomocą (6.29).

Oczywiście, na mocy ciągłości funkcji losowej $\psi_{1,\infty}$ z Wniosku 6.1 wynika, że

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in \mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})} & \mathbb{E}[g(c_0) + \gamma \psi_{1,\infty}(x_1, y_1, \underline{S}_1, \overline{S}_1)] =\\
&= \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma \psi_{1,\infty}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_1, \overline{S}_1)] =\\
&= \sup_{(c,l,m) \in \mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} \mathbb{E}\{\mathbb{E}[g(c) + \gamma \psi_{1,\infty}(x - c + \underline{s}m - \overline{s}l, y - m + l, \underline{S}_1, \overline{S}_1) | \mathcal{F}_0]\} =\\
&= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[g(c^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s})) +\\
&\qquad + \gamma \psi_{1,\infty}(x - c^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + \underline{s} m^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}) - \overline{s} l^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}),\\
&\qquad\qquad y - m^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}) + l^*_0(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \underline{S}_1, \overline{S}_1) | \mathcal{F}_0]\} =\\
&= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[g(\hat{c}_0) + \gamma \psi_{1,\infty}(\hat{x}_1, y_1, \underline{S}_1, \overline{S}_1) | \mathcal{F}_0]\} = \mathbb{E}[g(\hat{c}_0) + \gamma \psi_{1,\infty}(\hat{x}_1, y_1, \underline{S}_1, \overline{S}_1)].
\end{aligned}$$

Oznacza to, że dla $N = 0$ druga równość w (6.28) zachodzi dla strategii $\hat{u}$ zdefiniowanej za pomocą (6.29).

Załóżmy, że druga równość w (6.28) zachodzi dla strategii $\hat{u}$ zdefiniowanej przez (6.29) dla $N = M$. Pokażemy, że zachodzi ona również dla $N = M + 1$.

Z tego założenia, z (6.20) i z Wniosku 6.1 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in \mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})} & \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(c_n) + \gamma^{M+1} \psi_{M+1,\infty}(x_{M+1}, y_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1})] =\\
&= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M} \gamma^n g(\hat{c}_n) + \gamma^{M+1} \psi_{M+1,\infty}(\hat{x}_{M+1}, \hat{y}_{M+1}, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1})] =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\mathbb{E}\{\sum_{n=0}^{M}\gamma^n g(\hat{c}_n)+\\
&+\gamma^{M+1}\sup_{(c,l,m)\in\mathbb{A}(\hat{x}_{M+1},\hat{y}_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1})}\mathbb{E}[g(c)+\gamma\psi_{M+2,\infty}(\hat{x}_{M+1}-c+\underline{S}_{M+1}m-\overline{S}_{M+1}l,\\
&\qquad\hat{y}_{M+1}-m+l,\underline{S}_{M+2},\overline{S}_{M+2})|\mathcal{F}_{M+1}]\}=\\
=&\mathbb{E}\{\sum_{n=0}^{M}\gamma^n g(\hat{c}_n)+\\
&+\gamma^{M+1}\mathbb{E}[g(c^*_{M+1}(\hat{x}_{M+1},\hat{y}_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1}))+\\
&\quad+\gamma\psi_{M+2,\infty}(x_{M+1}-c^*_{M+1}(\hat{x}_{M+1},\hat{y}_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1})+\\
&\qquad+\underline{S}_{M+1}m^*_{M+1}(\hat{x}_{M+1},\hat{y}_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1})-\\
&\qquad-\overline{S}_{M+1}l^*_{M+1}(\hat{x}_{M+1},\hat{y}_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1}),\\
&\qquad\hat{y}_{M+1}-m^*_{M+1}(\hat{x}_{M+1},\hat{y}_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1})+\\
&\qquad\quad l^*_{M+1}(\hat{x}_{M+1},\hat{y}_{M+1},\underline{S}_{M+1},\overline{S}_{M+1}),\underline{S}_{M+2},\overline{S}_{M+2})|\mathcal{F}_{M+1}]\}=\\
=&\mathbb{E}\{\sum_{n=0}^{M}\gamma^n g(\hat{c}_n)+\\
&+\gamma^{M+1}\mathbb{E}[g(\hat{c}_{M+1})+\gamma\psi_{M+2,\infty}(\hat{x}_{M+1}-\hat{c}_{M+1}+\underline{S}_{M+1}\hat{m}_{M+1}-\overline{S}_{M+1}\hat{l}_{M+1},\\
&\qquad\hat{y}_{M+1}-\hat{m}_{M+1}+\hat{l}_{M+1},\underline{S}_{M+2},\overline{S}_{M+2})|\mathcal{F}_{M+1}]\}=\\
=&\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{M+1}\gamma^n g(\hat{c}_n)+\gamma\psi_{M+2,\infty}(\hat{x}_{M+2},\hat{y}_{M+2},\underline{S}_{M+2},\overline{S}_{M+2})].
\end{aligned}
$$

Oznacza to, że dla $N = M+1$ druga równość w (6.28) również zachodzi dla $\hat{u}$ zdefiniowanego przez (6.29). □

Uwaga 6.4. *Skoro (6.27) zachodzi dla każdego $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i dla wszystkich $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$, więc dla strategii $\hat{u} \in \mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ spełniającej (6.28) mamy*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) &= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N}\gamma^n g(\hat{c}_n)+\gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(\hat{x}_{N+1},\hat{y}_{N+1},\underline{S}_{N+1},\overline{S}_{N+1})]\\
&=\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N}\gamma^n g(\hat{c}_n)+\gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(\hat{x}_{N+1},\hat{y}_{N+1},\underline{S}_{N+1},\overline{S}_{N+1})].
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Zwróćmy uwagę na założenie (6.31) w poniższym Wniosku.

Wniosek 6.6. *Jeśli istnieje strategia $\hat{u} \in \mathcal{U}^{\infty}_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ taka, że zachodzi*

$$
\gamma^{N+1}\mathbb{E}\psi_{N+1,\infty}(\hat{x}_{N+1},\hat{y}_{N+1},\underline{S}_{N+1},\overline{S}_{N+1}) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \tag{6.31}
$$

i dla wszystkich $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi (6.28), to

$$\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n g(\hat{c}_n)]. \tag{6.32}$$

Lemat 6.3. *Dla każdego $N \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ istnieje strategia*

$$u^{(N+1)} = (x_n^{(N+1)}, y_n^{(N+1)}, c_n^{(N+1)}, l_n^{(N+1)}, m_n^{(N+1)})_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$$

taka, że

$$c_{N+1}^{(N+1)} = x_{N+1}^{(N+1)} + \underline{S}_{N+1} y_{N+1}^{(N+1)}$$

i taka, że dla wszystkich $u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$ mamy

$$\gamma^{N+1}\mathbb{E}\psi_{N+1,\infty}(x_{N+1}, y_{N+1}, \underline{S}_{N+1}, \overline{S}_{N+1}) \leq \gamma^{N+1}\mathbb{E}g(c_N^{(N+1)}). \tag{6.33}$$

Dowód. Jest to konsekwencja Stwierdzenia 6.1. □

Wniosek 6.7. *Dla każdego $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ niech $u^{(N)} \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$ będzie strategią spełniającą (6.33). Jeśli*

$$\gamma^{N+1}\mathbb{E}g(c_N^{(N+1)}) \xrightarrow{N\to\infty} 0, \tag{6.34}$$

to z (6.33) otrzymujemy, że dla każdego $u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$ mamy

$$\limsup_{N\to\infty} \gamma^{N+1}\mathbb{E}\psi_{N+1,\infty}(x_{N+1}, y_{N+1}, \underline{S}_{N+1}, \overline{S}_{N+1}) \leq 0. \tag{6.35}$$

Wniosek 6.8. *Jeśli g jest nieujemna i zachodzi warunek (6.34), to dla każdej strategii $u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$ mamy, że*

$$\lim_{N\to\infty} \gamma^{N+1}\mathbb{E}\psi_{N+1,\infty}(x_{N+1}, y_{N+1}, \underline{S}_{N+1}, \overline{S}_{N+1}) = 0. \tag{6.36}$$

Poniższe Twierdzenie orzeka, że wprowadzone równania Bellmana, rzeczywiście, generują rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (1.21).

Twierdzenie 6.2. *Załóżmy, że*

$$\sup_{u\in\mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^{\infty}(u) < \infty \tag{6.37}$$

oraz że dla każdej strategii $u \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$ zachodzi (6.36). Niech $\hat{u} \in \mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S}, \overline{S})$ będzie taka, że (6.28) zachodzi dla wszystkich $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wówczas

$$\sup_{u\in\mathcal{U}_{(x,y)}^{\infty}(\underline{S},\overline{S})} \mathbf{J}^{\infty}(u) = \mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}). \tag{6.38}$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $u^\varepsilon \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})$ będzie ε-optymalną strategią dla problemu (1.18).

Z (6.28), (6.32) i z (6.36) otrzymujemy, że

$$\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \liminf_{N\to\infty}\mathbb{E}\sum_{n=0}^{N}\gamma^n g(\hat{c}_n) \le \sup_{u\in\mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})}\mathbf{J}^\infty(u) \le \mathbf{J}^\infty(u^\varepsilon)+\varepsilon =$$

$$= \liminf_{N\to\infty}\mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} g(c_n^\varepsilon)+\varepsilon = \liminf_{N\longrightarrow\infty}\mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} g(c_n^\varepsilon)+\varepsilon =$$

$$= \liminf_{N\longrightarrow\infty}\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N} g(c_n^\varepsilon)+\gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(x^\varepsilon_{N+1},y^\varepsilon_{N+1},\underline{S}_{N+1},\overline{S}_{N+1})]+\varepsilon \le$$

$$\le \liminf_{N\longrightarrow\infty}\sup_{u\in\mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})}\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N} g(c_n)+\gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(x_{N+1},y_{N+1},\underline{S}_{N+1},\overline{S}_{N+1})]+\varepsilon =$$

$$\le \lim_{N\longrightarrow\infty}\sup_{u\in\mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S},\overline{S})}\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{N} g(c_n)+\gamma^{N+1}\psi_{N+1,\infty}(x_{N+1},y_{N+1},\underline{S}_{N+1},\overline{S}_{N+1})]+\varepsilon =$$

$$= \lim_{N\longrightarrow\infty}\mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})+\varepsilon = \mathbb{E}\psi_{0,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})+\varepsilon.$$

Oznacza to, że, rzeczywiście, zachodzi (6.38). □

6.3 Czas nieskończony i cena kalkulacyjna

W tym podrozdziale zajmiemy się konstrukcją ceny kalkulacyjnej dla czasu nieskończonego. Zwróćmy uwagę na analogię do przypadku ze skończonym horyzontem czasowym.

Uwaga 6.5. *Jeśli $g(u) = \ln u$, to dla każdego $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i dla wszystkich $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że*

$$\forall_{\rho>0}\quad \psi_{k,\infty}(\rho x,\rho y,\underline{s},\overline{s}) = \frac{\ln\rho}{1-\gamma}+\psi_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}). \tag{6.39}$$

Jeśli $g(u) = u^\alpha$, gdzie $\alpha \in (0,1)$, to dla każdego $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i dla wszystkich $(x,y,\underline{s},\overline{s}) \in \mathbb{D}$ mamy, że

$$\forall_{\rho>0}\quad \psi_{k,\infty}(\rho x,\rho y,\underline{s},\overline{s}) = \rho^\alpha\psi_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}). \tag{6.40}$$

Dla wszystkich $\underline{s},\overline{s} \in \mathbb{R}_+$ takich, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ zdefiniujmy następujące zbiory losowe:

$$\begin{aligned}
\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}) &:= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : \psi_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \sup_{(c,0,0)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,0,0)\},\\
\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}) &:= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : \psi_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \sup_{(c,0,m)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,0,m)\}\setminus\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}),\\
\mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}) &:= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : \psi_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) = \sup_{(c,l,0)\in\mathbb{A}(x,y,\underline{s},\overline{s})} V_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s},c,l,0)\}\setminus\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}).
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Lemat 6.4. *Zbiory losowe* $\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})$, $\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})$, $\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})$ *są parami rozłączne.*

Dowód jest analogiczny do dowodu Lematu 3.6.

Dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zdefiniujmy funkcję losową $\hat{\psi}_{k,\infty} : \mathbb{R}^3_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ za pomocą wzoru

$$\hat{\psi}_{k,\infty}(x, y, \hat{s}) := \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\hat{s})} \mathbb{E}[g(c)+\gamma\psi_{k+1,\infty}(x-c+\hat{s}(m-l), y-m+l, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k]. \tag{6.42}$$

Analogicznie jak poprzednio możemy zdefiniować zbiory losowe $\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s})$, $\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\hat{s})$, $\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\hat{s})$.

Lemat 6.5. *Zbiory losowe* $\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s})$, $\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\hat{s})$, $\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\hat{s})$ *są parami rozłączne.*

Dowód jest analogiczny do dowodu Lematu 3.6.

Twierdzenie 6.3. *Załóżmy, że dla każdego* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i dla wszystkich* $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ *takich, że* $\overline{s} \geq \underline{s} > 0$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\overline{s}) \cap \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}) = \emptyset. \tag{6.43}$$

Wówczas dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i dla wszystkich* $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ *takich, że* $\overline{s} \geq \underline{s} > 0$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\overline{s}) = \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}). \tag{6.44}$$

Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.32.

Twierdzenie 6.4. *Dla każdego* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i dla wszystkich* $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ *takich, że* $\overline{s} \geq \underline{s} > 0$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\underline{s}) = \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}). \tag{6.45}$$

Twierdzenie 6.5. *Dla każdego* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i dla wszystkich* $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ *takich, że* $\overline{s} \geq \underline{s} > 0$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\underline{s}) = \mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s}). \tag{6.46}$$

Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.2.

Lemat 6.6. *Załóżmy, że* $0 < s_1 \leq s_2$. *Wówczas dla wszystkich* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *mamy*

$$\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s_1) \subseteq \hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s_2) \tag{6.47}$$

oraz

$$\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s_1) \supseteq \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s_2). \tag{6.48}$$

Dowód jest analogiczny do dowodów (5.3) i (5.5).

Lemat 6.7. *Niech* $\underline{s}_1, \overline{s}_1, \underline{s}_2, \overline{s}_2 \in \mathbb{R}_+$ *będą takie, że* $\overline{s}_2 \geq \overline{s}_1 > \underline{s}_1 \geq \underline{s}_2 > 0$. *Wówczas*

$$\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}_1, \overline{s}_1) \subseteq \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}_2, \overline{s}_2). \tag{6.49}$$

Dowód. Skoro $0 < \underline{s}_2 \leq \underline{s}_1$, więc na mocy (6.46) i (6.47) otrzymujemy, że

$$\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}_2, \overline{s}_2) = \hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\underline{s}_2) \subseteq \hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\underline{s}_1) = \mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}_1, \overline{s}_1).$$

Skoro $\overline{s}_1 \leq \overline{s}_2$, więc na mocy (6.45) i (6.48) dostajemy, że

$$\mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}_2, \overline{s}_2) = \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\overline{s}_2) \subseteq \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\overline{s}_1) = \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}_1, \overline{s}_1).$$

Tym samym,

$$\begin{aligned}\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}_1, \overline{s}_1) =& \mathbb{R}_+^2 \setminus (\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}_1, \overline{s}_1) \cup \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}_1, \overline{s}_1)) \subseteq \\ &\subseteq \mathbb{R}_+^2 \setminus (\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}_2, \overline{s}_2) \cup \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}_2, \overline{s}_2)) = \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}_2, \overline{s}_2).\end{aligned}$$

□

Lemat 6.8. *Niech $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$. Wówczas zbiór losowy $\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})$ jest domknięty.*

Dowód. Jest to konsekwencją tego, że odwzorowanie losowe

$$(x, y) \longmapsto \psi_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) - \sup_{c \in [0,x]} \mathbb{E}[\psi_{k+1,\infty}(x - c, y, \underline{S}_{M+1}, \overline{S}_{M+1}) | \mathcal{F}_{k,\infty}].$$

jest ciągłe. □

Lemat 6.9. *Niech $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$. Wówczas dla każdego $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$ mamy, że*

$$\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s}) \subseteq \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s}). \tag{6.50}$$

Dowód. Ustalmy $\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]$.

Z (6.47) i (6.48) oraz z (6.46) i (6.45) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s}) &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\hat{s})) \subseteq \\ &\subseteq \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\underline{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\overline{s})) = \\ &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s}) \cup \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})) = \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s}).\end{aligned}$$

□

Lemat 6.10. *Niech $\underline{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $\overline{s} > \underline{s} > 0$. Wówczas*

$$\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s}) = \bigcup_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s}). \tag{6.51}$$

Dowód. Na mocy (6.47) i (6.48) oraz na mocy (6.46) i (6.45) mamy, że

$$\begin{aligned}\bigcup_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s}) &= \bigcup_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\hat{s})) = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bigcap_{\hat{s} \in [\underline{s}, \overline{s}]} (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\hat{s})) = \\ &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\overline{s}) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\underline{s})) = \mathbb{R}_+^2 \setminus (\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s}) \cup \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})) = \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s}).\end{aligned}$$

□

Lemat 6.11. *Niech $s_1, s_2, \hat{s} \in \mathbb{R}_+$ będą takie, że $0 < s_1 \le \hat{s} \le s_2$. Wówczas*

$$\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(s_1) \cap \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(s_2) \subseteq \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s}). \tag{6.52}$$

Dowód. Z (6.47) i (6.48) mamy, że

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(s_1)\cap\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(s_2) &= [\mathbb{R}^2_+ \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s_1) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s_1))] \cap [\mathbb{R}^2_+ \setminus (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s_2) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s_2))] = \\ &= \mathbb{R}^2_+ \setminus [(\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s_1) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s_1)) \cup (\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s_2) \cup \hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s_2))] = \\ &= \mathbb{R}^2_+ \setminus (\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s_1) \cup \hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s_2)) \subseteq \\ &\subseteq \mathbb{R}^2_+ \setminus (\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(\hat{s}) \cup \hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(\hat{s})) = \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s}).\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 6.3. *Dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ niech*

$$\overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \begin{cases} \underline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \inf\{s \in [\underline{s}, \overline{s}] : (x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(s)\} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \overline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \end{cases} \tag{6.53}$$

i

$$\underline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \begin{cases} \underline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \sup\{s \in [\underline{s}, \overline{s}] : (x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(s)\} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \\ \overline{s} & na\ \{(x, y) \in \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \end{cases}. \tag{6.54}$$

Wówczas $\overline{s}^*_{k,\infty}$ i $\underline{s}^*_{k,\infty}$ są dobrze zdefiniowanymi $\mathcal{F}_k$-mierzalnymi funkcjami losowymi z $\mathbb{D}$ do $(0, \infty)$. Co więcej, dla każdego $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ na zdarzeniu $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\}$ mamy

$$(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) \cap \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\underline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})). \tag{6.55}$$

Dowód. Ustalmy $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$.

Najpierw pokażemy, że $\overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ i $\underline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ są dobrze zdefiniowanymi $\mathcal{F}_k$-mierzalnymi zmiennymi losowym.

Jest jasne, że dla każdego $\omega \in \Omega$ mamy $\overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega), \underline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) \in [\underline{s}, \overline{s}]$.

Zauważmy też, że na mocy (6.51) mamy, że dla każdego $\omega \in \Omega$ i dla każdego $(x, y) \in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})(\omega)$ istnieje $s_{k,\infty}(x, y, \omega) \in [\underline{s}, \overline{s}]$ takie, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(s_{k,\infty}(x, y, \omega))(\omega)$.

Jest jasne, że

$$\{\overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \underline{s}\} = \{(x, y) \in \mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \{(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\underline{s})\} \in \mathcal{F}_k$$

oraz

$$\{\underline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \overline{s}\} = \{(x, y) \in \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\} \cup \{(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\overline{s})\} \in \mathcal{F}_k.$$

Ponadto z (6.47) i z (6.48) dostajemy, że

$$
\begin{aligned}
&\{\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})=\overline{s}\}= \\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}\cup\bigcup_{s\in[\underline{s},\overline{s})}\{(x,y)\in\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s)\}= \\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}\cup\bigcup_{s\in[\underline{s},\overline{s})\cap\mathbb{Q}}\{(x,y)\in\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s)\}\in\mathcal{F}_k
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&\{\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})=\underline{s}\}= \\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}\cup\bigcup_{s\in(\underline{s},\overline{s}]}\{(x,y)\in\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s)\}= \\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbf{S}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}\cup\bigcup_{s\in(\underline{s},\overline{s}]\cap\mathbb{Q}}\{(x,y)\in\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s)\}\in\mathcal{F}_k.
\end{aligned}
$$

Niech teraz $t\in(\underline{s},\overline{s})$ będzie dowolne. Mamy

$$
\begin{aligned}
\{\overline{s}>\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})>t\}&=\bigcup_{s\in(t,\overline{s})\cap\mathbb{Q}}\{\overline{s}>\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})>s\}= \\
&=\bigcup_{s\in(t,\overline{s})\cap\mathbb{Q}}\{(x,y)\in\hat{\mathbf{B}}_{k,\infty}(s)\}\in\mathcal{F}_k
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
\{t>\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})>\underline{s}\}&=\bigcup_{s\in(\underline{s},t)\cap\mathbb{Q}}\{s>\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})>\underline{s}\}= \\
&=\bigcup_{s\in(\underline{s},t)\cap\mathbb{Q}}\{(x,y)\in\hat{\mathbf{S}}_{k,\infty}(s)\}\in\mathcal{F}_k.
\end{aligned}
$$

Oznacza to, że, rzeczywiście, $\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ i $\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ są dobrze zdefiniowanymi $\mathcal{F}_k$-mierzalnymi zmiennymi losowym.

Teraz pokażemy, że na zdarzeniu $\{(x,y)\in\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}$ zachodzi (6.55).

Ustalmy $\omega\in\{(x,y)\in\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}$.

Niech $(\overline{s}^n_\omega)_{n=1}^\infty$ i $(\underline{s}^n_\omega)_{n=1}^\infty$ będą dowolnymi ciągami z przedziału $[\underline{s},\overline{s}]$ zbieżnymi do $\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ i $\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ odpowiednio i takimi, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ mamy $(x,y)\in\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\overline{s}^n_\omega)(\omega)\cap\hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\underline{s}^n_\omega)(\omega)$.

Oznacza to w szczególności, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ mamy

$$
\begin{aligned}
&\hat{\psi}_{k,\infty}(x,y,\overline{s}^n_\omega)(\omega)=\hat{\psi}_{k,\infty}(x,y,\underline{s}^n_\omega)(\omega)= \\
&\quad=\sup_{c\in[0,x]}\mathbb{E}[g(c)+\gamma\psi_{k+,\infty}(x-c,y,\underline{S}_{k+1},\overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k](\omega).
\end{aligned}
$$

Na mocy ciągłości funkcji losowej $\hat{\psi}_{k,\infty}(x,y,\cdot)$ dostajemy po wzięciu $n \longrightarrow \infty$, że

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{k,\infty}(x,y,\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega))(\omega) &= \hat{\psi}_{k,\infty}(x,y,\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega))(\omega) = \\ &= \sup_{c\in[0,x]} \mathbb{E}[g(c)+\gamma\psi_{k+1,\infty}(x-c,y,\underline{S}_{k+1},\overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k](\omega).\end{aligned}$$

Zatem, rzeczywiście, na zdarzeniu $\{(x,y)\in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}$ zachodzi (6.55).

To kończy dowód. $\square$

Wniosek 6.9. *Dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}$ niech $\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ i $\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})$ będą dane przez (6.53) i (6.54) odpowiednio. Zdefiniujmy funkcję losową $\hat{s}^*_{k,\infty}:\mathbb{D}\longrightarrow(0,\infty)$ dla każdego $(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}$ za pomocą*

$$\hat{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) := \frac{1}{2}\overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}) + \frac{1}{2}\underline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s}). \tag{6.56}$$

Wówczas na zdarzeniu $\{(x,y)\in\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}$ mamy

$$(x,y)\in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\hat{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})). \tag{6.57}$$

Dowód. Jest to konsekwencja (6.52) i (6.55). $\square$

Stwierdzenie 6.4. *Niech $(x,y,\underline{s},\overline{s})\in\mathbb{D}$. Funkcje losowe $\overline{s}^*_{k,\infty},\underline{s}^*_{k,\infty}:\mathbb{D}\longrightarrow(0,\infty)$ zdefiniowane przez (6.53) i (6.54) odpowiednio są półciągłe z dołu i z góry odpowiednio na zdarzeniu*

$$\{(x,y)\in\mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s},\overline{s})\}.$$

Dowód. Ustalmy $\omega\in\{(x,y)\in\mathbf{NT}_{N-k}(\underline{s},\overline{s})\}$.

Niech $(x_n,y_n,\underline{s}_n,\overline{s}_n)_{n=1}^\infty$ będzie dowolnym ciągiem z $\mathbb{D}$ zbieżnym do $(x,y,\underline{s},\overline{s})$.

Należy pokazać, że

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\overline{s}^*_{k,\infty}(x_n,y_n,\underline{s}_n,\overline{s}_n)(\omega)\geq \overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega)$$

i że

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\overline{s}^*_{k,\infty}(x_n,y_n,\underline{s}_n,\overline{s}_n)(\omega)\leq \overline{s}^*_{k,\infty}(x,y,\underline{s},\overline{s})(\omega)$$

Pokażemy jedynie pierwszą nierówność, gdyż druga może być udowodniona analogicznie.

Rozważymy trzy przypadki.

1^o Dla nieskończenie wielu $n\in\mathbb{N}$ mamy $(x_n,y_n)\in\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_n,\overline{s}_n)(\omega)$.

Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy bez straty ogólności założyć, że $(x_n,y_n)\in\mathbf{S}_{N-k}(\underline{s}_n,\overline{s}_n)(\omega)$ dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$.

Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\underline{s}_n = \overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ i tym samym

$$\overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) = \underline{s}_n \xrightarrow{n\to\infty} \underline{s}.$$

Na mocy (6.55) mamy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, że

$$\begin{aligned}
&\hat{\psi}_{k,\infty}(x_n, y_n, \overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega) = \\
&= \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x_n,y_n,\overline{s}^*_{k,\infty}(x_n,y_n,\underline{s}_n,\overline{s}_n)(\omega))} \mathbb{E}[g(c)+ \\
&\qquad \gamma\psi_{k,\infty}(x_n - c + \overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)\cdot(m-l), y_n - m + l, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k](\omega) = \\
&= \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x_n,y_n,\overline{s}^*_{k,\infty}(x_n,y_n,\underline{s}_n,\overline{s}_n)(\omega))} \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{k,\infty}(x_n - c, y_n, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k](\omega).
\end{aligned}$$

Na mocy ciągłości funkcji losowej $\hat{v}_{N-k}$ oraz na mocy Twierdzenia 7.1 mamy po wzięciu $n \longrightarrow \infty$, że

$$\hat{\psi}_{k,\infty}(x, y, \underline{s})(\omega) = \sup_{(c,l,m)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\underline{s})} \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{k,\infty}(x - c, y, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k](\omega).$$

Oznacza to, że w tym przypadku $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\underline{s})(\omega)$. Innymi słowy w tym przypadku mamy, że $\overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega) = \underline{s}$.

2^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x_n, y_n) \in \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$.

Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy bez straty ogólności założyć, że $(x_n, y_n) \in \mathbf{B}_{k,\infty}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Oczywiście, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\overline{s}_n = \overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ i tym samym

$$\overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) = \overline{s}_n \xrightarrow{n\to\infty} \overline{s} \geq \overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega),$$

gdyż zmienna losowa $\overline{s}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})$ przyjmuje wartości w przedziale $[\underline{s}, \overline{s}]$.

3^o Dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x_n, y_n) \in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$.

Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy bez straty ogólności założyć, że $(x_n, y_n) \in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Oczywiście, na mocy (6.55) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$(x_n, y_n) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega).$$

Niech $(n_l)_{l=1}^{\infty}$ będzie takim podciągiem liczb naturalnych, że

$$\overline{s}^*_{k,\infty}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega) \xrightarrow{l\to\infty} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega).$$

Na mocy ciągłości funkcji losowej $\hat{\psi}_{k,\infty}$ oraz na mocy Twierdzenia 7.1 mamy

$$\hat{\psi}_{k,\infty}(x_{n_l}, y_{n_l}, \overline{s}^*_{k,\infty}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega))(\omega) \xrightarrow{l\to\infty} \hat{\psi}_{k,\infty}(x, y, \liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega)$$

oraz

$$\hat{\psi}_{k,\infty}(x_{n_l}, y_{n_l}, \overline{s}^*_{N-k}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega))(\omega) =$$

$$= \sup_{(c,0,0)\in\hat{\mathbb{A}}(x_{n_l}, y_{n_l}, \overline{s}^*_{k,\infty}(x_{n_l}, y_{n_l}, \underline{s}_{n_l}, \overline{s}_{n_l})(\omega))} \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{k,\infty}(x_{n_l} - c, y_{n_l}, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k](\omega) \xrightarrow{l\to\infty}$$

$$\xrightarrow{l\to\infty} \sup_{(c,0,0)\in\hat{\mathbb{A}}(x,y,\liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))} \mathbb{E}[g(c) + \gamma\psi_{k,\infty}(x - c, y, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k](\omega).$$

Oznacza to, że $(x, y) \in \hat{\mathbf{NT}}_{k,\infty}(\liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{N-k}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega))(\omega)$.

Tym samym
$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \overline{s}^*_{k,\infty}(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)(\omega) \geq \overline{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})(\omega).$$

Oznacza to, że funkcja losowa $\overline{s}^*_{k,\infty}$ jest półciągła z dołu na zdarzeniu $\{(x, y) \in \mathbf{NT}_{k,\infty}(\underline{s}, \overline{s})\}$.

To kończy dowód. □

Wniosek 6.10. *Niech funkcje losowe $\overline{s}^*_{k,\infty}, \underline{s}^*_{k,\infty} : \mathbb{D} \longrightarrow (0, \infty)$ będą zdefiniowane przez (6.53) i (6.54) odpowiednio. Niech $(x_k, y_k, \underline{s}_k, \overline{s}_k)$ będzie dowolną $\mathcal{F}_k$-mierzalną zmienną losową przyjmującą wartości w $\mathbb{D}$. Wówczas $\overline{s}^*_{k,\infty}(x_k, y_k, \underline{s}_k, \overline{s}_k)$ i $\underline{s}^*_{k,\infty}(x_k, y_k, \underline{s}_k, \overline{s}_k)$ są dobrze zdefiniowanymi $\mathcal{F}_k$-mierzalnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości w $(0, \infty)$.*

Dowód. Jest to konsekwencja tego, że każda funkcja pólciągła z dołu lub z góry jest mierzalna. □

Twierdzenie 6.6. *Dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $(x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}$ niech*

$$\hat{S}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) := \hat{s}^*_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}), \tag{6.58}$$

gdzie funkcja losowa $\hat{s}^*_{k,\infty}$ jest zdefiniowana za pomocą (6.56). Wówczas rodzina

$$\hat{S}^\infty := \{\hat{S}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (x, y, \underline{s}, \overline{s}) \in \mathbb{D}\} \tag{6.59}$$

jest słabą ceną kalkulacyjną.

Wniosek 6.11. *Niech $\hat{u} \in \mathcal{U}^\infty_{(x,y)}(\underline{S}, \overline{S})$ będzie optymalną strategią na rynku z kosztami za transakcje. Niech ciąg $(\hat{x}_n, \hat{y}_n)_{n=0}^\infty$ będzie zdefiniowany za pomocą (1.17) dla ciągu $u = \hat{u}$. Wówczas na rynku bez kosztów transakcyjnych, ale z procesem ceny zadanym przez $\hat{S} := (\hat{S}_n)_{n=0}^\infty$, gdzie dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy*

$$\hat{S}_n := \hat{S}_{n,\infty}(\hat{x}_n, \hat{y}_n, \underline{S}_n, \overline{S}_n) \tag{6.60}$$

optymalne strategie (a w konsekwencji również optymalna wartość funkcjonału (1.18)) jest taka sama, co na rynku z kosztami za transakcje. Proces $\hat{S}$ nazywamy silną ceną kalkulacyjną.

6.4 Optymalna konsumpcja w czasie nieskończonym

Tak jak poprzednio dla skończonego horyzontu czasowego tak i w dla nieskończonego horyzontu możemy podać jawne wzoru na optymalną konsumpcję dla logarytmicznej i potęgowej funkcji użyteczności.

Dzięki Uwadze 6.5 mamy następujący

Wniosek 6.12. *Optymalna konsumpcja w chwili k jest zadana wzorem*

$$c_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = (1-\gamma) \cdot (x + \hat{S}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})y), \tag{6.61}$$

jeśli $g(u) = \ln u$ *oraz*

$$c_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \frac{x + \hat{S}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})y}{1 + [\hat{D}_{k,\infty}(\hat{S}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s}))]^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \tag{6.62}$$

jeśli $g(u) = u^\alpha$, *gdzie*

$$D_{k,\infty}(\hat{S}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})) := \sup_{b \in [0,1]} \mathbb{E}[\psi_{k+1,\infty}(1-b, \frac{b}{\hat{S}_{k,\infty}(x, y, \underline{s}, \overline{s})}, \underline{S}_{k+1}, \overline{S}_{k+1})|\mathcal{F}_k]. \tag{6.63}$$

Dowód. Jest to konsekwencja Lematów 7.1 i 7.2. □

Rozdział 7

Podstawowe fakty

Niniejszy rozdział zawiera proste podstawowe fakty, które są wykorzystywane do dowodów w poprzednich rozdziałach. Większość wyników jest dowiedziona. Te zaś, do których mamy łatwe odsyłacze, są jedynie sformułowane.

Lemat 7.1. *Niech* $x, a > 0$*. Dla* $c \in [0, x]$ *niech*

$$G(c) := \ln c + a \ln(x - c).$$

Wówczas $\sup_{c \in [0,x]} G(c) = G(\hat{c})$*, gdzie* $\hat{c} = \frac{x}{1+a}$*.*

Dowód. Dla $c \in (0, x)$ mamy

$$G'(c) = \frac{1}{c} - a \cdot \frac{1}{x - c} = \frac{x - c - ac}{c(x - c)} = \frac{x - (1 + a)c}{c(x - c)}.$$

Zatem $G'(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \frac{x}{1+a}$. Zauważmy, że dla $c = \frac{x}{1+a}$ funkcja G' jest równa zero i zmienia znak z '+' na '−', czyli dla $c = \frac{x}{1+a}$ funkcja G osiąga swoje globalne maksimum, gdyż $\lim_{c \to 0+} G(c) = \lim_{c \to x-} G(c) = -\infty$. □

Lemat 7.2. *Niech* $x, a > 0$*. Dla* $c \in [0, x]$ *niech*

$$F(c) := c^\alpha + a(x - c)^\alpha,$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$*. Wówczas* $\sup_{c \in [0,x]} F(c) = F(\hat{c})$*, gdzie* $\hat{c} = \frac{x}{1+a^{\frac{1}{1-\alpha}}}$*.*

Dowód. Funkcja F jest ściśle wklęsła, więc na zwartym przedziale osiąga ona tylko jedno maksimum. Mamy

$$F'(c) = \frac{\alpha}{c^{1-\alpha}} - \frac{a\alpha}{(x - c)^{1-\alpha}}.$$

Oczywiście, $F(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \frac{x}{1+a^{\frac{1}{1-\alpha}}}$. □

Twierdzenie 7.1. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Dla każdego $x \in X$ niech $\hat{\mathcal{A}}(x) \subseteq X$ będzie zbiorem zwartym. Niech $\beta : X \times X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją ciągłą. Zdefiniujmy funkcję $\varphi : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dla każdego $x \in X$ za pomocą*

$$\varphi(x) := \sup_{y \in \hat{\mathcal{A}}(x)} \beta(x, y). \tag{7.1}$$

Jeśli odwzorowanie $x \longmapsto \hat{\mathcal{A}}(x)$ jest ciągłe w metryce Hausdorffa, to funkcja φ jest ciągła.

Dowód. Ustalmy $x \in X$.

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem z X zbieżnym do x. Pokażemy, że $\varphi(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(x)$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $y_n \in \hat{\mathcal{A}}(x_n)$ będzie takie, że

$$\varphi(x_n) = \sup_{y \in \hat{\mathcal{A}}(x_n)} \beta(x_n, y) = \beta(x_n, y_n).$$

Skoro ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to zbiór $cl(\cup_{n=1}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}(x_n) \cup \hat{\mathcal{A}}(x))$ jest zwarty. Zatem istnieje podciąg $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do jakiegoś $y^* \in cl(\cup_{n=1}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}(x_n) \cup \hat{\mathcal{A}}(x))$. Zauwważmy, że musi być $y^* \in \hat{\mathcal{A}}(x)$, gdyż $\hat{\mathcal{A}}(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \hat{\mathcal{A}}(x)$ w metryce Hausdorffa. Co więcej, każdy zbieżny podciąg $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do jakiegoś elementu $\hat{\mathcal{A}}(x)$. Zatem

$$\varphi(x_{n_k}) = \beta(x_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \beta(x, y^*) \leq \sup_{y \in \hat{\mathcal{A}}(x)} \beta(x, y) = \varphi(x).$$

Skoro to zachodzi dla dowolnego podciągu $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, to otrzymujemy, że

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(x). \tag{7.2}$$

Niech $\overline{y} \in \hat{\mathcal{A}}(x)$ będzie takie, że $\varphi(x) = \beta(x, \overline{y})$. Ze zbieżności $\hat{\mathcal{A}}(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{\mathcal{A}}(x)$ w metryce Hausdorffa istnieje ciąg $(\overline{y}_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do $\overline{y}$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\overline{y}_n \in \hat{\mathcal{A}}(x_n)$. Zatem

$$\varphi(x_n) = \sup_{y \in \hat{\mathcal{A}}(x_n)} \beta(x_n, y) \geq \beta(x_n, \overline{y}_n) \xrightarrow{n\to\infty} \beta(x, \overline{y}) = \varphi(x).$$

Oznacza to, że

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n). \tag{7.3}$$

Z (7.2) i (7.3) otrzymujemy, że

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(x),$$

tzn. $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$. Zatem funkcja φ jest ciągła. □

Twierdzenie 7.2. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Dla każdego $x \in X$ niech $\mathcal{C}(x) \subseteq X$ będzie zbiorem zwartym i wypukłym. Niech funkcja $\beta : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie ciągła i taka, że dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $\beta(x, \cdot) : \mathcal{C}(x) \to \overline{\mathbb{R}}$ jest ściśle wypukłe. Zdefiniujmy funkcję $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dla każdego $x \in X$ za pomocą*

$$\varphi(x) := \sup_{c \in \mathcal{C}(x)} \beta(x, c). \tag{7.4}$$

Jeżeli odwzorowanie $x \longmapsto \mathcal{C}(x)$ jest ciągłe w metryce Hausdorffa, to dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedno $\hat{c}(x) \in \mathcal{C}(x)$ takie, że

$$\varphi(x) := \sup_{c \in \mathcal{C}(x)} \beta(x, c) = \beta(x, \hat{c}(x)). \tag{7.5}$$

Co więcej, odwzorowanie $x \longmapsto \hat{c}(x)$ spełniające (7.5) jest ciągłe. W szczególności, odwzorowanie to jest mierzalne.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 7.1, z ciągłości odwzorowania β otrzymujemy ciągłość φ.

Najperw pokażemy, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedno $\hat{c}(x) \in \mathcal{C}(x)$ spełniające (7.5).

Załóżmy, że jest to nieprawda.

Wówczas istnieje pewne $x \in X$ oraz pewne $\hat{c}_1(x), \hat{c}_2(x) \in \mathcal{C}(x)$ takie, że $\hat{c}_1(x) \neq \hat{c}_2(x)$ oraz

$$\varphi(x) := \sup_{c \in \mathcal{C}(x)} \beta(x, c) = \beta(x, \hat{c}_1(x)) = \beta(x, \hat{c}_2(x)).$$

Skoro funkcja $\beta(x, \cdot) : \mathcal{C}(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle wklęsła, zaś zbiór $\mathcal{C}(x)$ jest wypukły, to dla każdego $t \in (0, 1)$ mamy $t\hat{c}_1(x) + (1-t)\hat{c}_2(x) \in \mathcal{C}(x)$ oraz

$$\varphi(x) = \sup_{c \in \mathcal{C}(x)} \beta(x, c) \geq \beta(x, t\hat{c}_1(x) + (1-t)\hat{c}_2(x)) > t\beta(x, \hat{c}_1(x)) + (1-t)\beta(x, \hat{c}_2(x)) = \varphi(x),$$

tzn. $\varphi(x) > \varphi(x)$ co jest sprzecznością.

Oznacza to, że, rzeczywiście, dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedno $\hat{c}(x) \in \mathcal{C}(x)$ spełniające (7.5).

Teraz pokażemy, że odwzorowanie $x \longmapsto \hat{c}(x)$ jest ciągłe.

Ustalmy $x \in X$ i ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ z X zbieżny do x.

Z tej zbieżności oraz z tego, że odwzorowanie $x \longmapsto \mathcal{C}(x)$ jest ciągłe w metryce Hausdorffa otrzymujemy, że $cl(\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}(x_n) \cup \mathcal{C}(x))$ jest zbiorem zwartym.

Zatem ciąg $(\hat{c}(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem elementów z tego zwartego zbioru. Zatem istnieje podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ liczb naturalnych taki, że ciąg $(\hat{c}(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ zbiega do pewnego $\tilde{c} \in \mathcal{C}(x)$. Wobec tego z ciągłości odwzorowań φ i β otrzymujemy, że

$$\varphi(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} \beta(x_{n_k}, \hat{c}(x_{n_k})) = \beta(x, \tilde{c}).$$

Skoro $\varphi(x) = \beta(x, \hat{c}(x))$ i $\hat{c}(x)$ jest jednoznacznie określone, to musi być $\tilde{c} = \hat{c}(x)$. Z dowolności wyboru podciągu $(\hat{c}(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ otrzymujemy, że $\lim_{n \to \infty} \hat{c}(x_n) = \hat{c}(x)$, tzn., że odwzorowanie $x \longmapsto \hat{c}(x)$ jest ciągłe. $\square$

Lemat 7.3. *Niech I będzie niepustym zbiorem. Dla każdego $i \in I$ niech $(a_n^i)_{n=1}^{\infty}$ będzie niemalejącym ciągiem liczb rzeczywistych. Załóżmy, że*

$$\sup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} |a_n^i| < \infty. \tag{7.6}$$

Wówczas

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{i \in I} a_n^i = \sup_{i \in I} \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n^i. \tag{7.7}$$

Dowód. Najpierw zauważmy, że z faktu, iż dla każdego $i \in I$ ciąg $(a_n^i)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejący, otrzymujemy, że dla każdego $i \in I$ i dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n^i \leq \lim_{n \to \infty} a_n^i$. Wynika stąd, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sup_{i \in I} a_n^i \leq \sup_{i \in I} \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n^i.$$

Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ciąg $(\sup_{i \in I} a_n^i)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejącym cięgiem liczb rzeczywistych. Stąd

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{i \in I} a_n^i \leq \sup_{i \in I} \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n^i.$$

Oznacza to, że mamy '$\leq$' w (7.7).

Następnie zauważmy, że dla każdego $i \in I$ i dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n^i \leq \sup_{i \in I} a_n^i$. Zatem z faktu, że dla każdego $i \in I$ ciąg $(a_n^i)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejący, otrzymujemy, że $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n^i \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{i \in I} a_n^i$. Stąd otrzymujemy, że

$$\sup_{i \in I} \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n^i \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{i \in I} a_n^i,$$

co oznacza, że mamy '$\geq$' w (7.7). □

Poniższy Lemat jest Lematem 2 z [18].

Lemat 7.4. *Niech $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w $(\overline{\mathbb{R}})^d$ takim, że $\liminf_{n \longrightarrow \infty} ||\eta_n|| < \infty$. Wówczas istnieją ciąg $(\tilde{\eta}_n)_{n=1}^{\infty}$ zmiennych losowych o wartościach w $(\overline{\mathbb{R}})^d$ oraz ciąg zmiennych losowych $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że dla każdego $\omega \in \Omega$ ciąg liczbowy $(n_k(\omega))_{k=1}^{\infty}$ jest podciągiem ciągu liczb naturalnych takie, że dla każdego $\omega \in \Omega$ ciąg $(\tilde{\eta}_{n_k}(\omega))_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżnym podciągiem ciągu $(\eta_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$.*

Definicja 7.1. *Niech $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Zbiór*

$$dom(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > -\infty\} \tag{7.8}$$

nazywać będziemy efektywną dziedziną funkcji f.

Treść poniższego Twierdzenia jest fragmentem Twierdzenia 2.35 ze strony 59 z [23].

Twierdzenie 7.3. *Funkcja wklęsła $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest ciągła na $int(dom(f))$.*

Poniższy Fakt jest Wnioskiem 7.18 ze strony 254 z [23].

Fakt 7.1. *Niech $O \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym i wypukłym zbiorem. Niech $f_\infty, f_1, f_2, f_3, ... : O \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami wklęsłymi. Załóżmy, że dla każdego $x \in O$ mamy $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f_\infty(x)$. Wówczas dla każdego zbioru zwartego $B \subset O$ mamy*

$$\sup_{x \in B} |f_n(x) - f_\infty(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{7.9}$$

Oznaczenia wprowadzanych zbiorów

Poniżej wypisujemy wprowadzone przez nas oznaczenia zbiorów wraz ze stronami, gdzie się po raz pierwszy pojawiają.

Bibliografia

[1] AKIAN, M., SULEM, A. and TAKSAR, M. (2013) Dynamic Optimization of Long-term Growth Rate for a Portfolio with Transaction Costs and Logarithmic Utility, Math. Fin., Vol. 11, No. 2 (April 2001), 153-188

[2] BARNSLEY, M. F. (1993). *Fractals Everywhere*, 2nd ed. Academic Press.

[3] BAYER, CH. and VELIYEV, B. (2012) Utility Maximization in a Binomial Model with transaction costs: a Duality Approach Based on the Shadow Price Process, preprint

[4] BENEDETTI, G., CAMPI, L., KALLSEN, J. and MUHLE-KARBE, J. (2013) On the existence of shadow price. Finance Stoch 17: 801–818

[5] BOBRYK, R. and STETTNER, L. (1999) Discrete Time Portfolio Selection with Proportional Transaction Costs. Prob. Math. Statistics 19: 135–248

[6] CASTAING, C., VALADIER, M. (1977) Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lect Notes in Math. no. 580, Springer, Berlin

[7] CHOI, J., H., SIRBU, M. and ZITKOVIC, G. (2013) Shadow prices and well-posedness in the problem of optimal investment and consumption with transaction costs. SIAM Journal of Control and Optimization 51: 4414–4449

[8] CZICHOWSKY, CH., MUHLE-KARBE, J. and SCHACHERMAYER, W. (2014) Transaction Costs and Shadow Prices in Discrete Time. SIAM J. Finan. Math., Vol. 5 (2014), No. 1, pp. 258–277.

[9] DAVIS, M.H.A. and NORMAN, A.R. (1990) Portfolio Selection with Transaction Costs. Math. Methods Oper. Res. 15: 675–713

[10] DYNKIN E.B, YUSHKEVICH A.A. Controlled Markov processes, Springer 1979

[11] EVSTIGNEEV, I.V. (1976) Measurable selection and dynamic programming. Math. Methods Oper. Res. 1: 52–55

[12] GERHOLD, S., MUHLE-KARBE, J. and SCHACHERMAYER, W. (2012) Asymptotics and Duality for the Davis and Norman Problem. Stochastics 84: 625–641

[13] GERHOLD, S., MUHLE-KARBE, J. and SCHACHERMAYER, W. (2013) The Dual Optimizer for the Growth-Optimal Portfolio under Transaction Costs, Finance Stoch 17: 325–354

[14] Goll, T. and Kallsen, J.. (2000) Optimal portfolios for logarithmic utility. Stochastic Process. Appl. 89: 31–48

[15] Guasoni, P., Rasonyi, M. and Schachermayer, W.. (2008) Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs. Ann. App. Probab. 18: 491–520

[16] Ikeda, N. and Watanabe, Sh. (1981) Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland publishing company, Amsterdam, Oxford, New York

[17] Herchegh, A. and Prokaj, V. Shadow price in the power utility case, preprint.

[18] Kabanov, Y. and Stricker, Ch. (2001) A teachers' note on no-arbitrage criteria. Seminaire de Probabilites XXXV, Springer Lecture Notes in Mathematics 1755: 149–152

[19] Kallsen, J. and Muhle-Karbe, J. (2010). On using shadow prices in portfolio optimization with transaction costs. Ann. App. Probab. 20: 1341–1358

[20] Kallsen, J. and Muhle-Karbe, J. (2011) Existence of shadow prices in finite probability spaces. Math. Methods Oper. Res. 79: 251–262

[21] Molchanov, I. (2005) Theory of Random Sets, Springer-Verlag London Ltd., London

[22] Rasonyi, M. and Stettner, L. (2005) On utility maximization in discrete-time financial market models. Ann. App. Probab. 15: 1367–1395

[23] Rockafellar, R.T. and Wets J-B. (1981) *Variational Analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1998.

[24] Rogala, T. and Stettner, L. (2014) Construction of discrete time shadow price, praca złożona

[25] Rokhlin, D. (2013) On the game interpretation of a shadow price process in utility maximization problems under transaction costs, Finance Stoch. 17:819-838

[26] Schachermayer, W. (2004) The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. Math. Finance 14: 19–48