Uniwersytet Śląski
w Katowicach
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

ŁAŃCUCHY W PRZESTRZENIACH TOPOLOGICZNYCH I KRATACH

Wojciech Bielas

Praca doktorska napisana
pod kierunkiem
prof. dr. hab. Aleksandra Błaszczyka

Katowice 2014

Spis treści

Wstęp

Celem niniejszej rozprawy jest przedstawienie konstrukcji sztywnej i κ-superuniwersalnej przestrzeni metrycznej oraz zbadanie podstawowych własności funktora Wallmana wraz z ich zastosowaniami.

Pierwsze konstrukcje przestrzeni metrycznych uniwersalnych spotykamy już u Frécheta, zobacz Hechler [8]. Przez uniwersalność przestrzeni metrycznej dla danej klasy $\mathcal{C}$ rozumiemy to, że przestrzeń ta zawiera izometryczne kopie wszystkich elementów klasy $\mathcal{C}$. Następne przykłady takich przestrzeni podali m.in. P. Urysohn [13], W. Sierpiński [12], S. Banach i S. Mazur [3]. Przykład Urysohna ma dodatkową własność ω-jednorodności, w odróżnieniu od przykładu Banacha i Mazura. ω-jednorodność danej przestrzeni X w połączeniu z uniwersalnością dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych pozwala uzyskać ω-superuniwersalność, tzn. każde zanurzenie izometryczne podzbioru skończonego przestrzeni metrycznej przeliczalnej Y w przestrzeń X można przedłużyć do zanurzenia całej przestrzeni Y. Wspomniane wyżej pojęcia można uogólnić na nieskończone liczby kardynalne. Charakteryzacja i istnienie odpowiednich dla tych pojęć przestrzeni metrycznych zostały zbadane w pracach Stephena H. Hechlera [8] oraz Miroslava Katětova [9]. Każda κ-superuniwersalna przestrzeń mocy κ jest także κ-jednorodna. Motywacją dla pierwszej części pracy było przypuszczenie Wiesława Kubisia dotyczące istnienia przestrzeni κ-superuniwersalnych, które nie są κ-jednorodne. Przypuszczenie to udało się potwierdzić w znacznie mocniejszej wersji: podaję konstrukcję przestrzeni κ-superuniwersalnej, która ma dokładnie jedną izometrię.

W drugiej części pracy omówiona jest konstrukcja przestrzeni Wallmana kraty. Konstrukcja ta prowadzi do funktora $\mathcal{W}$ z kategorii wszystkich krat normalnych w kategorię przestrzeni zwartych Hausdorffa. Jakkolwiek niektóre wyniki tej części są znane, to uzupełniam je przykładami obrazującymi różnice pomiędzy funktorem Wallmana, a jego zacieśnieniem do kategorii krat Boole'a.

W rozdziale pierwszym wprowadzone jest pojęcie grafu rodziny przestrzeni metrycznych. Pokazuję, że jeśli wszystkie cykle indukowane takiego grafu spełniają odpowiedni warunek, to dana rodzina przestrzeni metrycznych ma amalgamację (twierdzenie 1.5). Metoda amalgamacji przedstawiona w tym rozdziale zostanie wykorzystana do konstrukcji trzech różnych rozszerzeń przestrzeni metrycznej.

Rozdział drugi składa się z opisu własności rozszerzenia izometrycznego, które jest głównym narzędziem w uzyskiwaniu κ-superuniwersalności.

W rozdziale trzecim definiuję charakter dyskretny — geometryczną własność punktów przestrzeni metrycznej będącą jednocześnie niezmiennikiem izometrii. Własność ta posłuży później do udowodnienia sztywności konstruowanego przykładu. Wprowadzam również punkty środkowe, słabe punkty środkowe oraz dowodzę pewnej własności redukcji tych ostatnich w rozszerzeniu izometrycznym (lemat 3.3).

W rozdziale czwartym opisana jest metoda kontrolowania charakteru dyskretnego punktów poprzez dołączanie podprzestrzeni dyskretnych oraz punktów środkowych. Odpowiadają temu dwie konstrukcje rozszerzeń przestrzeni metrycznej otrzymane przy pomocy amalgamacji opisanej w rozdziale pierwszym.

W rozdziale piątym podaję konstrukcję przykładu sztywnej przestrzeni κ-uniwersalnej, przedtem dowodzę wielu twierdzeń i lematów opisujących łańcuchowe własności rozszerzeń zdefiniowanych w poprzednich rozdziałach.

W rozdziale szóstym przypominam konstrukcję przestrzeni Wallmana kraty. Sygnalizuję też różnice pomiędzy opisem przestrzeni zwartej Hausdorffa przy pomocy kraty zbiorów domkniętych, a algebrą zbiorów domknięto-otwartych.

Rozdział siódmy poświęcony jest reprezentacjom homomorfizmów krat. Dowodzę, że każdemu homomorfizmowi odpowiada funkcja ciągła w sposób funktorialny i podobny do przypadku algebr Boole'a i ich przestrzeni Stone'a. Dla pełności przytaczamy dowód funktorialności przestrzeni Wallmana, zobacz W. Kubiś [11]. Analogia nie jest jednak pełna, co pokazuję przy pomocy odpowiednich przykładów.

Rozdział ósmy zawiera zastosowania funktora Wallmana. Rozdział ten rozpoczyna się konstrukcją uzwarcenia Čecha–Stona'a βX przestrzeni całkowicie regularnej X przy pomocy kraty zero-zbiorów, zobacz również Gillman [7], a dokładniej pokazane jest w jaki sposób przedłużenie funkcji ciągłej $f : X \to Z$ na βX można otrzymać wykorzystując funktorialną reprezentację homomorfizmu wyznaczonego przez funkcję f (twierdzenie 8.1). Następnie przytaczam dowód twierdzenia Frinka, charakteryzującego przestrzenie całkowicie regularne, w wersji dla rodziny dyzjunktywnej i normalnej, będącej ponadto kratą. Przechodząc do twierdzenia Gelfanda–Kołmogorowa pokazuję, że poszukiwany homeomorfizm przestrzeni zwartych Hausdorffa, których pierścienie funkcji ciągłych są izomorficzne, można otrzymać jako funktorialną reprezentację izomorfizmu krat zero-zbiorów indukowanego przez izomorfizm pierścieni (twierdzenie 8.6). Rozdział ten kończy wprowadzenie funktora $(\cdot)^0$ z kategorii przestrzeni zwartych Hausdorffa w kategorię przestrzeni zwartych zerowymiarowych. Wiadomo, że każda przestrzeń zwarta Hausdorffa jest ciągłym obrazem przestrzeni zwartej zerowymiarowej. Pokazuję (wniosek 8.10), że dla każdej przestrzeni zwartej Hausdorffa surjekcję $p_X : X^0 \to X$ można wybrać w taki sposób, że $(p_X)_X : (\cdot)^0 \to 1_{\mathbf{CHaus}}$ jest transformacją naturalną funktora $(\cdot)^0$ oraz funktora identycznościowego kategorii **CHaus** wszystkich przestrzeni zwartych Hausdorffa.

Dziękuję swojemu promotorowi Profesorowi Aleksandrowi Błaszczykowi oraz uczestnikom Seminarium z topologii i teorii mnogości Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach za możliwość przedstawienia wyników tej rozprawy, a także za wszystkie komentarze i uwagi, które okazały się dla mnie dużą pomocą. Dziękuję również dr. hab. Wiesławowi Kubisiowi za cenne rozmowy i sugestie.

Część I

Przestrzenie metryczne

W tej części pracy interesować nas będą związki uniwersalności przestrzeni metrycznych z ich jednorodnością. Posłużymy się następującą definicją uniwersalności: powiemy, że przestrzeń metryczna X jest *uniwersalna dla klasy* $\mathcal{C}$ przestrzeni metrycznych, gdy każda przestrzeń $Y \in \mathcal{C}$ ma zanurzenie izometryczne w X. Stosunkowo łatwo można otrzymać przestrzeń metryczną uniwersalną dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych. Aby uzasadnić ten fakt, udowodnimy lemat o przedłużaniu zanurzeń izometrycznych. Uzupełnienie przestrzeni metrycznej X będziemy oznaczać symbolem $\overline{X}$.

Lemat. *Załóżmy, że X oraz Y są przestrzeniami metrycznymi. Niech D będzie podzbiorem gęstym przestrzeni X. Jeśli $f : D \to Y$ jest zanurzeniem izometrycznym, to istnieje dokładnie jedno takie zanurzenie izometryczne $\overline{f} : X \to \overline{Y}$, że $\overline{f} \restriction D = f$.*

Dowód. Ustalmy przestrzenie metryczne (X, d) oraz (Y, σ). Niech $\overline{\sigma}$ oznacza metrykę uzupełnienia $\overline{Y}$. Ustalmy punkt $x \in \overline{X}$ oraz ciąg $(x_n)_{n<\omega} \in {}^{\omega}D$ zbieżny do punktu x. Ciąg $(x_n)_{n<\omega}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a ponieważ funkcja f jest zanurzeniem izometrycznym, więc $(f(x_n))_{n<\omega}$ jest ciągiem w przestrzeni zupełnej $\overline{Y}$ spełniającym warunek Cauchy'ego, a więc jest to ciąg zbieżny. Jeśli $(y_n)_{n<\omega} \in {}^{\omega}D$ również jest ciągiem zbieżnym do punktu $x \in X$, to $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f(x_n), f(y_n)) = 0.$$

To pokazuje, że niezależnie od wyboru ciągu $(x_n)_{n<\omega} \in {}^{\omega}X$ zbieżnego do punktu $x \in X$ ciąg $(f(x_n))_{n<\omega}$ jest zbieżny zawsze do tego samego punktu, który oznaczę symbolem $\overline{f}(x)$. W ten sposób określona jest funkcja $\overline{f} : X \to \overline{Y}$. Funkcja $\overline{f}$ jest zanurzeniem izometrycznym, ponieważ jeśli $x, y \in X$, $(x_n)_{n<\omega}, (y_n)_{n<\omega} \in {}^{\omega}D$, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ oraz $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, to

$$\overline{\sigma}(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) = \overline{\sigma}(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f(x_n), f(y_n)) =$$
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = d(x, y).$$

Jeśli $x \in D$, to ciąg stały o wyrazie x jest ciągiem elementów podzbioru D zbieżnym do punktu x, zatem $\overline{f}(x) = f(x)$. □

Korzystając z powyższego lematu możemy udowodnić zapowiedziany fakt o istnieniu przestrzeni metrycznej uniwersalnej dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych.

Twierdzenie (Fréchet, 1910). *Istnieje przestrzeń metryczna mocy $\mathfrak{c}$ uniwersalna dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych.*

Dowód. Zauważmy, że zbiór ω można wyposażyć w metrykę na co najwyżej $\mathfrak{c}$ sposobów. Istotnie, każda taka metryka jest funkcją z $\omega \times \omega$ w $\mathbb{R}$, a takich funkcji jest $|{}^{\omega\times\omega}\mathbb{R}| = \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Zatem istnieje taka rodzina metryk $\{d_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, że dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$ metryka d_α jest określona na zbiorze $\omega \times \{\alpha\}$ oraz jeśli Y jest przestrzenią metryczną przeliczalną i nieskończoną, to istnieje takie $\alpha < \mathfrak{c}$, że przestrzeń Y jest izometryczna z $\omega \times \{\alpha\}$. Utożsamiając ze sobą wszystkie punkty podzbioru $\{0\} \times \mathfrak{c} \subseteq \omega \times \mathfrak{c}$ otrzymujemy metrykę d określoną na zbiorze $X = ((\omega \setminus \{0\}) \times \mathfrak{c}) \cup \{0\}$, gdzie dla $m, n > 0$ przyjmujemy

$$d((n,\alpha),(m,\beta)) = \begin{cases} d_\alpha((n,\alpha),(m,\alpha)), & \text{gdy } \alpha = \beta, \\ d_\alpha((n,\alpha),(0,\alpha)) + d_\beta((m,\beta),(0,\beta)), & \text{gdy } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

oraz $d(0,(n,\alpha)) = d_\alpha((0,\alpha),(n,\alpha))$ dla $n > 0$. Zauważmy, że funkcja d jest określona podobnie do metryki *jeża z* $\mathfrak{c}$ *kolcami*; zobacz Engelking [4], str. 292. Dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$ funkcja $f_\alpha : \omega \times \{\alpha\} \to X$, dana wzorem

$$f_\alpha(n,\alpha) = \begin{cases} (n,\alpha), & \text{gdy } n > 0, \\ 0, & \text{gdy } n = 0, \end{cases}$$

jest zanurzeniem izometrycznym.

Ustalmy nieskończoną przestrzeń metryczną ośrodkową Y. Niech D będzie podzbiorem gęstym i przeliczalnym przestrzeni Y. Istnieje $\alpha < \mathfrak{c}$ oraz izometria $f : D \to \omega \times \{\alpha\}$. Zatem złożenie $f_\alpha \circ f$ jest zanurzeniem izometrycznym podzbioru D w X. Z poprzedniego lematu wynika, że funkcja $\overline{f} : Y \to \overline{X}$ również jest zanurzeniem izometrycznym. $\square$

Przestrzeń opisana w dowodzie powyższego twierdzenia nie jest ośrodkowa. Istotnie, $\{1\} \times \mathfrak{c}$ jest podzbiorem dyskretnym przestrzeni X. Ośrodkowym przykładem przestrzeni uniwersalnej dla rozważanej klasy jest przestrzeń $\mathrm{C}([0,1])$ wszystkich funkcji ciągłych o wartościach w $\mathbb{R}$ i określonych na przedziale $[0,1]$; dowód tego faktu podali Banach i Mazur [3]. Inny przykład ośrodkowej przestrzeni metrycznej uniwersalnej dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych podał Urysohn [13]. Przykład Urysohna jest przestrzenią polską $\mathbb{U}$, mającą ponadto własność *ω-jednorodności*, tzn. każda izometria pomiędzy skończonymi podzbiorami $\mathbb{U}$ ma przedłużenie do izometrii całej przestrzeni. Sierpiński [12] zauważył, że własność ω-jednorodności odróżnia przykład Urysohna od przestrzeni $\mathrm{C}([0,1])$: jeśli $f \in \mathrm{C}([0,1])$ jest funkcją stale równą 1, a $g \in \mathrm{C}([0,1])$ jest funkcją stale równą 0, to zbiór

$$Z_1 = \{h \in \mathrm{C}([0,1]) : d(f,h) = d(g,h) = \tfrac{1}{2}\},$$

gdzie $d(f,h) = \sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [0,1]\}$, ma dokładnie jeden element, funkcję stale równą $\frac{1}{2}$. Z drugiej strony, zbiór

$$Z_2 = \{h \in \mathrm{C}([0,1]) : d(f,h) = d(\mathrm{id}_{[0,1]},h) = \tfrac{1}{2}\},$$

gdzie $\mathrm{id}_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest identycznością, ma nieskończenie wiele elementów. Podzbiory $\{f,g\}$ oraz $\{f,\mathrm{id}_{[0,1]}\}$ są izometryczne, gdyby więc istniała taka izometria φ przestrzeni $\mathrm{C}([0,1])$, że $\varphi(f) = f$ oraz $\varphi(g) = \mathrm{id}_{[0,1]}$, to wówczas $\varphi[Z_1] = Z_2$, co nie jest możliwe. Zatem przestrzeń $\mathrm{C}([0,1])$ nie jest ω-jednorodna.

Definicja. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *skończenie injektywna*, gdy dla każdej przestrzeni metrycznej skończonej Y oraz zanurzenia izometrycznego $f_0 : Y_0 \to X$, gdzie $Y_0 \subseteq Y$, istnieje takie zanurzenie $f : Y \to X$, że $f \restriction Y_0 = f_0$.

Urysohn pokazał, że, w przypadku przestrzeni polskich, uniwersalność oraz ω-jednorodność są równoważne skończonej injektywności.

Twierdzenie (Urysohn, [13]). *Jeśli X jest przestrzenią polską, to następujące warunki są równoważne:*

(*i*) *przestrzeń X jest ω-jednorodna oraz uniwersalna dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych,*

(*ii*) *przestrzeń X jest skończenie injektywna.*

Dowód. Załóżmy, że (X,d) jest przestrzenią polską spełniającą warunek (i). Ustalmy przestrzeń metryczną skończoną Y, podzbiór $Y_0 \subseteq Y$ oraz zanurzenie izometryczne $f_0 : Y_0 \to X$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $Y = Y_0 \cup \{y\}$ dla pewnego $y \in Y$. Skoro przestrzeń X jest uniwersalna dla klasy wszystkich ośrodkowych przestrzeni metrycznych, to istnieje podzbiór $Z \subseteq X$ oraz izometria $g : Y \to Z$. Funkcja $g \restriction Y_0$ jest izometrią przestrzeni Y_0 na zbiór $g[Y_0]$, a więc funkcja

$$f_0 \circ (g \restriction Y_0)^{-1} : g[Y_0] \to f_0[Y_0]$$

jest izometrią skończonych podzbiorów przestrzeni X. Z ω-jednorodności przestrzeni X wynika, że istnieje taka izometria $f : X \to X$, że

$$f \restriction g[Y_0] = f_0 \circ (g \restriction Y_0)^{-1}.$$

Zatem funkcja $f \circ g : Y \to X$ jest zanurzeniem izometrycznym. Ustalmy $t \in Y_0$. Wtedy $g(t) \in g[Y_0]$, a stąd

$$f(g(t)) = (f_0 \circ (g \restriction Y_0)^{-1})(g(t)) = f_0(t).$$

Tym samym zanurzenie izometryczne $f \circ g$ jest przedłużeniem zanurzenia f_0.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $Y = Y_0 \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ dla pewnego $n < \omega$ oraz $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Załóżmy, że dane jest zanurzenie $f_i : Y_0 \cup \{y_j : j < i\} \to X$ będące przedłużeniem zanurzenia f_0 dla pewnego $i < n$. Z rozumowania w poprzednim przypadku wynika, że istnieje zanurzenie

$$f_{i+1} : Y_0 \cup \{y_j : j < i + 1\} \to X$$

będące przedłużeniem zanurzenia f_i. Z założenia indukcyjnego wynika, że funkcja f_{i+1} jest przedłużeniem zanurzenia f_0. Kontynuując indukcyjną konstrukcję otrzymujemy zanurzenie $f_n : Y \to X$ będące przedłużeniem zanurzenia f_0.

Dla dowodu przeciwnej implikacji załóżmy, że przestrzeń X jest skończenie injektywna. Ustalmy podzbiory skończone $A, B \subseteq X$ oraz izometrię $f_0 : A \to B$. Ze skończonej injektywności przestrzeni X wynika, że przestrzeń X nie zawiera punktów izolowanych. Zatem istnieje podzbiór gęsty $\{x_n : n < \omega\} \subseteq X$ rozłączny z A oraz B. Załóżmy, że indukcyjnie skonstruowaliśmy zbiór $\{y_k : k < n\} \subseteq X$ oraz takie zanurzenie izometryczne

$$f_n : A \cup \{x_k : k < n\} \cup \{y_k : k < n\} \to X,$$

że $f_n \restriction (A \cup \{x_i : i < k\} \cup \{y_i : i < k\}) = f_k$ oraz $f_n(y_k) = x_k$ dla każdego $k < n$. Korzystając ze skończonej injektywności dla zanurzenia f_n oraz punktu x_n otrzymujemy zanurzenie

$$g : A \cup \{x_k : k < n + 1\} \cup \{y_k : k < n\} \to X$$

będące przedłużeniem zanurzenia f_n. Jeśli istnieje takie $x \in \operatorname{dom} g$, że $g(x) = x_n$, to przyjmujemy $f_{n+1} = g$ oraz $y_n = x$. W przeciwnym razie $x_n \notin \operatorname{rng} g$ i korzystając ze skończonej injektywności dla zanurzenia g^{-1} :

$\operatorname{rng} g \to X$ oraz punktu x_n otrzymujemy zanurzenie $h : \operatorname{rng} g \cup \{x_n\} \to X$ będące przedłużeniem zanurzenia g. Przyjmujemy $y_n = h(x_n)$ oraz

$$f_{n+1} = h^{-1} : A \cup \{x_k : k < n+1\} \cup \{y_k : k < n+1\} \to X.$$

Jeśli $y \in A \cup \{x_k : k < n\} \cup \{y_k : k < n\}$, to

$$f_{n+1}(y) = h^{-1}(y) = g(y) = f_n(y),$$

zatem f_{n+1} jest przedłużeniem zanurzenia f_n. W ten sposób indukcyjnie skonstruowane zostały podzbiory $\{x_n : n < \omega\}$, $\{y_n : n < \omega\}$ oraz ciąg zanurzeń $\{f_n : n < \omega\}$ spełniający dla każdego $n < \omega$ warunki:

(a) $\operatorname{dom} f_n = A \cup \{x_k : k < n\} \cup \{y_k : k < n\}$,

(b) $B \cup \{x_k : k < n\} \subseteq \operatorname{rng} f_n$,

(c) f_n jest przedłużeniem f_k dla każdego $k < n$.

Niech $f : A \cup \{x_n : n < \omega\} \cup \{y_n : n < \omega\} \to X$ będzie dane wzorem

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{gdy } x \in \{x_n, y_n\} \text{ dla pewnego } n < \omega, \\ f_0(x), & \text{gdy } x \in A. \end{cases}$$

Z warunku (c) wynika, że funkcja f jest poprawnie określona. Ustalmy $x, y \in \operatorname{dom} f$. Wtedy istnieje takie $n < \omega$, że $x, y \in \operatorname{dom} f_n$. Zatem

$$d(f(x), f(y)) = d(f_n(x), f_n(y)) = d(x, y),$$

ponieważ funkcja f_n jest zanurzeniem. Skoro zbiór $\operatorname{dom} f$ jest gęsty w X, to z lematu o przedłużaniu zanurzenia wynika, że istnieje takie zanurzenie $\overline{f} : X \to \overline{X}$, że $\overline{f} \restriction \operatorname{dom} f = f$. Przestrzeń X jest zupełna, możemy więc przyjąć, że $\overline{X} = X$. Dla każdego $n < \omega$ mamy inkluzję $\{x_k : k < n\} \subseteq \operatorname{rng} f_n \subseteq \operatorname{rng} f \subseteq \operatorname{rng} \overline{f}$, zatem $\operatorname{rng} \overline{f}$ jest podzbiorem gęstym w X, a jako izometryczny obraz przestrzeni zupełnej jest także podprzestrzenią zupełną. Stąd $\operatorname{rng} \overline{f} = X$, co kończy dowód ω-jednorodności przestrzeni X.

Ustalmy przestrzeń metryczną ośrodkową (Y, σ). Niech $\{z_n : n < \omega\}$ będzie podzbiorem przeliczalnym i gęstym przestrzeni Y. Punkt $t_0 \in X$ wybieramy dowolnie i zakładamy, że skonstruowaliśmy podzbiór $\{t_k : k < n\}$ oraz rosnący ciąg zanurzeń $f_0, \ldots, f_{n-1}$ spełniający dla każdego $k < n$ warunki:

(d) $\operatorname{dom} f_k = \{z_i : i < k\}$,

(e) $f_k(z_i) = t_i$ dla każdego $i < k$.

Ze skończonej injektywności przestrzeni X wynika, że istnieje takie zanurzenie $f_n : \{z_k : k < n\} \to X$ oraz punkt $t_n \in X$, że $f_n \restriction \{z_k : k < n-1\} = f_{n-1}$ oraz $f_n(z_n) = t_n$. Definiujemy analogicznie zanurzenie $f : \{z_n : n < \omega\} \to X$ i na mocy lematu o przedłużaniu zanurzenia otrzymujemy zanurzenie $\overline{f} : Y \to X$, co kończy dowód uniwersalności przestrzeni X dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych ośrodkowych. $\square$

Przedstawione powyżej pojęcia mają naturalne uogólnienia dla liczb kardynalnych nieskończonych.

Definicja (Hechler [8]). Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *κ-superuniwersalna*, gdy dla każdej przestrzeni metrycznej Y mocy mniejszej niż κ, każde zanurzenie izometryczne $f_0 : Y_0 \to X$, gdzie $Y_0 \subseteq Y$, ma przedłużenie do zanurzenia izometrycznego $f : Y \to X$.

Zatem własność ω-superuniwersalności jest własnością skończonej injektywności. Jeden z pierwszych przykładów przestrzeni κ-superuniwersalnych dla $\kappa > \omega$ został podany przez Hechlera.

Twierdzenie (Hechler, 1973, [8]). *Dla każdej liczby kardynalnej regularnej $\kappa > \omega$ istnieje przestrzeń κ-superuniwersalna mocy $\sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda$.*

Twierdzenie (Hechler, 1973, [8]). *Załóżmy, że $\kappa > \omega$ jest liczbą kardynalną regularną lub $\sum_{\mu<\kappa} 2^\mu = 2^\lambda$ dla pewnego $\lambda < \kappa$. Wtedy:*

(*i*) *każda przestrzeń κ-superuniwersalna jest mocy co najmniej $\sum_{\mu<\kappa} 2^\mu$,*

(*ii*) *istnieje przestrzeń κ-superuniwersalna mocy κ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba kardynalna μ, że $\kappa = \mu^+ = 2^\mu$ lub κ jest słabo nieosiągalne oraz $2^\mu \leqslant \kappa$ dla każdego $\mu < \kappa$,*

(*iii*) *wszystkie przestrzenie κ-superuniwersalne mocy κ są izometryczne.*

Używając argumentu „back-and-forth" można pokazać, że każda przestrzeń κ-superuniwersalna mocy κ jest także κ-jednorodna w sensie następującej definicji.

Definicja. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *κ-jednorodna*, gdy każda izometria zbioru A na B, gdzie $A, B \subseteq X$ są mocy mniejszej niż κ, ma przedłużenie do izometrii całej przestrzeni X.

Katětov [9] udowodnił, że jeśli $\kappa^{<\kappa} = \kappa > \omega$, to z dokładnością do izometrii istnieje dokładnie jedna przestrzeń metryczna κ-jednorodna, wagi κ, uniwersalna dla klasy wszystkich przestrzeni metrycznych wagi κ. Każda taka przestrzeń jest κ-superuniwersalna, gdyż wystarczy zastosować konstrukcję analogiczną do konstrukcji użytej w dowodzie twierdzenia Urysohna.

Wiesław Kubiś, w rozmowie z autorem pracy, zasugerował istnienie przestrzeni κ-superuniwersalnych, które nie są κ-jednorodne. Pokażę, że istnieją przestrzenie κ-superuniwersalne sztywne, tzn. takie, że ich jedynymi izometriami są przekształcenia tożsamościowe.

1 Amalgamacja przestrzeni metrycznych

Tę część pracy rozpoczniemy od przypomnienia pojęcia *pseudometryki*. Mówimy, że funkcja $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ jest pseudometryką na zbiorze X, gdy dla każdego $x, y, z \in X$ zachodzą warunki:

(i) $\rho(x, x) = 0$,

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(iii) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Poniższy lemat jest jak się zdaje dobrze znany więc pozostawię go bez dowodu.

Lemat 1.1. *Jeśli ρ jest pseudometryką na zbiorze X, to*

(i) relacja $\sim$ dana wzorem

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$$

jest równoważnością w zbiorze X,

(ii) funkcja $d : (X/\rho) \times (X/\rho) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$d([x], [y]) = \rho(x, y) \quad \text{dla} \quad x, y \in X$$

jest metryką w zbiorze $X/\rho = \{[x] : x \in X\}$, gdzie $[x]$ jest klasą abstrakcji elementu x względem relacji $\sim$.

Definicja 1.2. *Amalgamacją pary $f : X \to Y$* oraz *$g : X \to Z$* zanurzeń przestrzeni metrycznych nazywamy każdą przestrzeń metryczną T wraz z zanurzeniami $f' : Z \to T$ oraz $g' : Y \to T$ spełniającymi warunek $f' \circ f = g' \circ g$, tzn. przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f'"] & T \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & Z \arrow[u, "g'"']
\end{tikzcd}$$

Ustalmy liczbę kardynalną $\kappa \geqslant \omega$. Załóżmy, że dla każdego $\alpha < \kappa$ funkcja $f_\alpha : \{0\} \to [0,1] \times \{\alpha\}$ jest dana wzorem $f_\alpha(0) = (0, \alpha)$. Niech $J(\kappa) = [0,1] \times \kappa/\sim$ będzie jeżem z κ kolcami, gdzie

$$(x, \alpha) \sim (y, \beta) \Leftrightarrow (x = y \text{ oraz } \alpha = \beta) \text{ lub } x = y = 0.$$

Wtedy przestrzeń $J(\kappa)$ możemy uważać za pewnego rodzaju amalgamację rodziny odcinków $\{[0,1] \times \{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$: dla każdego $\alpha < \beta < \kappa$ przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times \{\alpha\}} \arrow[r, "g_\alpha"] & J(\kappa) \\
\{0\} \arrow[u, "f_\alpha"] \arrow[r, "f_\beta"] & {[0,1] \times \{\beta\}} \arrow[u, "g_\beta"']
\end{tikzcd}$$

gdzie $g_\alpha : [0,1] \times \{\alpha\} \to J(\kappa)$ jest dane wzorem $g_\alpha(x, \alpha) = [(x, \alpha)]_\sim$ oraz $[(x, \alpha)]_\sim$ oznacza klasę abstrakcji punktu (x, α) względem relacji $\sim$.

Innym przykładem pary zanurzeń przestrzeni metrycznych, która ma amalgamację, jest taka para przestrzeni metrycznych (X, d) oraz (Y, σ), że $d \restriction X \cap Y = \sigma \restriction X \cap Y$ oraz $X \cap Y \neq \emptyset$, gdzie symbol $d \restriction A$ oznacza zacieśnienie metryki d do podzbioru $A \subseteq X$. Wtedy przedłużenie $\rho : (X \cup Y) \times (X \cup Y) \to \mathbb{R}$ metryk d i σ, dane wzorem

(1) $$\rho(x, y) = \inf\{d(x, z) + \sigma(z, y) : z \in X \cap Y\}$$

dla każdego $(x, y) \in X \times Y$, jest pseudometryką na zbiorze $X \cup Y$. Z lematu 1.1 otrzymujemy przestrzeń metryczną $(X \cup Y)/\rho$. W tej sytuacji przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g_Y"] & (X \cup Y)/\rho \\
X \cap Y \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & Y \arrow[u, "g_X"']
\end{tikzcd}$$

gdzie funkcje $g_X : X \to (X \cup Y)/\rho$ oraz $g_Y : Y \to (X \cup Y)/\rho$ dane są wzorami $g_X(x) = [x]$ oraz $g_Y(x) = [x]$. Zauważmy, że warunek $d \restriction X \cap Y = \sigma \restriction X \cap Y$ jest konieczny dla istnienia pseudometryki na zbiorze $X \cup Y$ przedłużającej metryki d oraz σ. Istotnie, jeśli ρ jest pseudometryką na zbiorze $X \cup Y$ przedłużającą metryki d oraz σ, to

$$d(x, y) = \rho(x, y) = \sigma(x, y)$$

dla każdego $x, y \in X \cap Y$. Funkcja ρ na ogół nie jest metryką, gdyż podzbiór $X \cap Y$ może zawierać ciąg zbieżny zarówno w przestrzeni X jak i Y.

Przykład 1.3. Niech

$$X = \{\tfrac{1}{n} : n \geqslant 1\} \cup \{0\} \quad \text{oraz} \quad Y = \{\tfrac{1}{n} : n \geqslant 1\} \cup \{-1\}.$$

Definiujemy funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ wzorem $d(x, y) = |x - y|$ oraz funkcję $\sigma : Y \times Y \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{gdy } x, y > 0, \\ x, & \text{gdy } y = -1 \text{ oraz } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x = y = -1. \end{cases}$$

Funkcje d oraz σ są metrykami oraz $d \restriction X \cap Y = \sigma \restriction X \cap Y$. Niech ρ będzie pseudometryką zdefiniowaną wzorem (1). Wtedy

$$\rho(0, -1) \leqslant d(0, \tfrac{1}{n}) + \sigma(\tfrac{1}{n}, -1) = \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n}$$

dla każdego $n \geqslant 1$. Zatem $\rho(0, -1) = 0$. Punkty 0 oraz -1 są różne, a więc ρ nie jest metryką.

Określmy metryki d_{01}, d_{02}, d_{12} odpowiednio na zbiorach $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$ oraz $\{1, 2\}$ wzorami $d_{01}(0, 1) = d_{02}(0, 2) = 1$ oraz $d_{12}(1, 2) = 3$. Nie istnieje taka pseudometryka d na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, że $(\{i, j\}, d_{ij})$ jest podprzestrzenią przestrzeni $(\{0, 1, 2\}, d)$ dla każdego $0 \leqslant i < j \leqslant 2$: w przeciwnym razie otrzymalibyśmy nierówność

$$3 = d_{12}(1, 2) = d(1, 2) \leqslant d(0, 1) + d(0, 2) = d_{01}(0, 1) + d_{02}(0, 2) = 2;$$

sprzeczność. Możemy uważać, że punkty 0, 1, 2 są wierzchołkami pewnego grafu, będącego jednocześnie cyklem indukowanym i nie zawierającego się w żadnej z przestrzeni $\{i, j\}$. Opisana powyżej sytuacja uzasadnia wprowadzenie pojęcia *grafu G rodziny przestrzeni metrycznych $\mathcal{R}$* oraz znalezienie warunków wystarczających dla grafu G tak aby istniała amalgamacja rodziny $\mathcal{R}$.

Załóżmy, że $\{(X_s, d_s) : s \in S\}$ jest rodziną przestrzeni metrycznych. Niech G będzie grafem o zbiorze wierzchołków $\bigcup_{s\in S} X_s$ w którym para xy jest krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $s \in S$, że $x, y \in X_s$. Ciąg $z_0z_1, z_1z_2, \ldots, z_{n-1}z_n$ nazywamy *ścieżką z x do y*, gdy $z_0 = x$, $z_n = y$ oraz z_iz_{i+1} jest krawędzią w G dla każdego $i < n$. Graf nazywamy *spójnym*, gdy dla dowolnych wierzchołków x oraz y tego grafu istnieje ścieżka z x do y. Ścieżkę $z_0z_1, z_1z_2, \ldots, z_{n-1}z_n$ będziemy oznaczać krótko przez $z_0 \ldots z_n$. Jeśli z_0z_n również jest krawędzią w grafie G, to mówimy, że $z_0 \ldots z_nz_0$ jest *cyklem w G*. Jeśli cykl jest podgrafem grafu G, to mówimy, że jest *cyklem indukowanym w G*. Jeśli $z_0 \ldots z_n$ jest ścieżką, a $s_1, \ldots, s_n \in S$ są takie, że $z_iz_{i+1} \in X_{s_i}$ dla $i < n$, to liczbę

$$w(z_0 \ldots z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} d_{s_{i+1}}(z_i, z_{i+1})$$

będziemy nazywać *wagą ścieżki* $z_0 \ldots z_n$. Zauważmy, że jeśli $d_s\restriction(X_s \cap X_t) = d_t(X_s \cap X_t)$ dla każdego $s, t \in S$, to definicja wagi ścieżki nie zależy od wyboru indeksów $s_1, \ldots, s_n$.

Definicja 1.4. Jeśli ρ jest pseudometryką na zbiorze X, to definiujemy pomocniczo liczbę

$$\rho(x, Z_1, \ldots, Z_n, y) = \inf\{w(xz_1 \ldots z_ny) : (z_1, \ldots, z_n) \in Z_1 \times \ldots \times Z_n\}$$

dla $x, y \in X$ oraz $Z_1, \ldots, Z_n \subseteq X$.

Lemat 1.5. *Załóżmy, że $\{(X_s, d_s) : s \in S\}$ jest rodziną przestrzeni metrycznych o grafie spójnym G spełniającą warunki:*

(i) *$d_s\restriction(X_s \cap X_t) = d_t\restriction(X_s \cap X_t)$ dla każdego $s, t \in S$,*

(ii) *jeśli $x_1 \ldots x_nx_1$ jest cyklem indukowanym w G, to istnieje takie $s \in S$, że $x_1, \ldots, x_n \in X_s$.*

Wtedy istnieje taka pseudometryka ρ na zbiorze $\bigcup_{s\in S} X_s$, że $\rho\restriction X_s = d_s$ dla każdego $s \in S$.

Jeśli ponadto istnieje takie $s_0 \in S$, że $X_s \cap X_{s_0} \neq \emptyset$ oraz $X_s \cap X_t \subseteq X_{s_0}$ dla każdego $s \neq t$, to dla każdego $s \neq t$, $x \in X_s$, $y \in X_t$ oraz $z \in X_{s_0}$ prawdziwe są następujące równości:

$$\rho(x, y) = \rho(x, X_s \cap X_{s_0}, X_t \cap X_{s_0}, y),$$

$$\rho(x, z) = \rho(x, X_s \cap X_{s_0}, z).$$

Dowód. Ustalmy $x, y \in \bigcup_{s\in S} X_s$. Skoro G jest grafem spójnym, to istnieje ścieżka $z_0 \dots z_n$ z x do y, tj. $z_0 = x$, $z_n = y$ oraz dla każdego $i < n$ istnieje takie $s_i \in S$, że $z_i, z_{i+1} \in X_{s_{i+1}}$. Skoro dowolne dwa punkty zbioru $X = \bigcup\{X_s : s \in S\}$ są połączone ścieżką, to funkcja $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, dana wzorem

$$\rho(x, y) = \inf\{w(z_0 \dots z_n) : z_0 \dots z_n \text{ jest ścieżką z } x \text{ do } y\},$$

jest poprawnie zdefiniowana. Zauważmy, że funkcja ρ jest symetryczna.

Ustalmy $x, y, z \in X$. Niech $z_0 \dots z_n$ będzie ścieżką z x do y, a $a_0 \dots a_m$ niech będzie ścieżką z y do z. Wtedy $z_0 \dots z_n a_1 \dots a_m$ jest ścieżką z x do z. Zatem $\rho(x, z) \leqslant w(z_0 \dots z_n a_1 \dots a_m)$. Skoro ścieżki $z_0 \dots z_n$ oraz $a_0 \dots a_m$ zostały wybrane dowolnie, to otrzymujemy nierówność

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że ρ jest pseudometryką na zbiorze X.

Zauważmy, że $\rho(x, y) \leqslant d_s(x, y)$ dla każdego $x, y \in X_s$. Przez indukcję ze względu na długość ścieżki pokażemy, że $d_s(x, y)$ jest nie większe od wagi każdej ścieżki z x do y. Ustalmy $x, y \in X_s$ oraz ścieżkę $z_0 z_1 z_2$ z x do y. Skoro $z_0 z_1 z_2 z_0$ jest cyklem indukowanym w G, to istnieje takie $t \in S$, że $z_0, z_1, z_2 \in X_t$. Wtedy

$$d_s(x, y) = d_t(x, y) \leqslant d_t(z_0, z_1) + d_t(z_1, z_2) = w(z_0 z_1 z_2).$$

Ustalmy $2 \leqslant n < \omega$ oraz załóżmy, że dla każdego $2 \leqslant k < n$, $s \in S$, $x, y \in X_s$ oraz dla każdej ścieżki $z_0 \dots z_k$ z x do y prawdziwa jest nierówność $d_s(x, y) \leqslant w(z_0 \dots z_k)$. Ustalmy $x, y \in X_s$ oraz ścieżkę $z_0 \dots z_n$ z x do y. Jeśli $z_0 \dots z_n z_0$ jest cyklem indukowanym, to rozumowanie jest podobne jak w przypadku ścieżki o długości 2. Załóżmy więc, że $z_0 \dots z_n z_0$ nie jest cyklem indukowanym. Wtedy w grafie G istnieje krawędź $z_i z_j$, która nie jest krawędzią cyklu $z_0 \dots z_n z_0$. Możemy założyć, że $i < j$, a zatem $i+1 < j$ oraz $0 < i$ lub $j < n$. Istnieje takie $t \in S$, że $z_i, z_j \in X_t$, a stąd $z_0 \dots z_{i-1} z_i z_j z_{j+1} \dots z_n$ jest ścieżką z x do y długości $i + 1 + (n - j) < j + (n - j) = n$ oraz $z_i z_{i+1} \dots z_{j-1} z_j$ jest ścieżką z z_i do z_j długości $j - i < n$, ponieważ $i > 0$ lub $j < n$. Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy nierówności $d_s(x, y) \leqslant w(z_0 \dots z_i z_j \dots z_n)$ oraz $d_t(z_i, z_j) \leqslant w(z_i z_{i+1} \dots z_{j-1} z_j)$. Stąd

$$\begin{aligned} d_s(x, y) &\leqslant w(z_0 \dots z_i z_j \dots z_n) = w(z_0 \dots z_i) + d_t(z_i, z_j) + w(z_j \dots z_n) \leqslant \\ &w(z_0 \dots z_i) + w(z_i z_{i+1} \dots z_{j-1} z_j) + w(z_j \dots z_n) = w(z_0 \dots z_n). \end{aligned}$$

Ostatecznie $d_s(x,y) \leqslant \rho(x,y)$, a więc $d_s(x,y) = \rho(x,y)$ dla każdego $x, y \in X_s$.

Niech $s_0 \in S$ będzie takie jak w założeniach lematu. Ustalmy $s, t \in S$, $s \neq t$, $x \in X_s$ oraz $y \in X_t$. Łatwo zauważyć, że $\rho(x,y) \leqslant \rho(x, X_s \cap X_{s_0}, X_t \cap X_{s_0}, y)$. Dla dowodu przeciwnej nierówności ustalmy ścieżkę $z_0 \dots z_n$ z x do y. Przypuśćmy, że nie istnieją takie i oraz j, że $z_i \in X_s \cap X_{s_0}$ oraz $z_j \in X_t \cap X_{s_0}$. W szczególności $z_0, z_n \notin X_{s_0}$. Niech

$$i = \max\{r : z_0, \dots, z_r \in X_s \setminus X_{s_0}\} \text{ oraz } j = \min\{r : z_r, \dots, z_n \in X_t \setminus X_{s_0}\}.$$

Skoro $X_s \cap X_t \subseteq X_{s_0}$, to $i < j$. Zatem $z_{i+1} \notin X_s$ oraz istnieje takie $p \in S \setminus \{s\}$, że $z_i, z_{i+1} \in X_p$. Wtedy $z_i \in X_s \cap X_p \subseteq X_{s_0}$; sprzeczność. Istnieją więc takie i oraz j, że $z_i \in X_s \cap X_{s_0}$ oraz $z_j \in X_t \cap X_{s_0}$. Niech $s_1, \dots, s_n \in S$ będą takie, że $z_k, z_{k+1} \in X_{s_{k+1}}$ dla każdego $k < n$. Otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned}\rho(x, z_i) + \rho(z_i, z_j) + \rho(z_j, y) \leqslant \\ \sum_{k=0}^{i-1} \rho(z_k, z_{k+1}) + \sum_{k=i}^{j-1} \rho(z_k, z_{k+1}) + \sum_{k=j}^{n-1} \rho(z_k, z_{k+1}) = \\ \sum_{k=0}^{n-1} \rho(z_k, z_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_{s_{k+1}}(z_k, z_{k+1}) = w(z_0 \dots z_n).\end{aligned}$$

Podobnie dowodzimy równość $\rho(x,z) = \rho(x, X_s \cap X_{s_0}, z)$ dla $x \in X_s$ oraz $z \in X_{s_0}$. □

Twierdzenie 1.6. *Załóżmy, że $s_0 \in S$ oraz $\{(X_s, d_s) : s \in S\}$ jest rodziną przestrzeni metrycznych spełniającą dla każdego $s, t \in S$ następujące warunki:*

(i) $X_{s_0} \cap X_s \neq \emptyset$,

(ii) $X_s \cap X_t \subseteq X_{s_0}$, *o ile* $s \neq t$,

(iii) $d_{s_0} \restriction (X_{s_0} \cap X_s) = d_s \restriction (X_{s_0} \cap X_s)$.

Wtedy istnieje taka przestrzeń metryczna (Y, d), że

(iv) X_{s_0} *jest podprzestrzenią przestrzeni* Y,

(v) *dla każdego $s \in S$ istnieje takie zanurzenie izometryczne $i_s : X_s \to Y$, że $i_s \restriction (X_{s_0} \cap X_s) = \mathrm{id}_{X_{s_0} \cap X_s}$*,

(vi) $Y \subseteq \bigcup_{s \in S} X_s$,

(vii) *dla każdego* $s \neq t$, $x \in i_s[X_s]$, $y \in i_t[X_t]$ *oraz* $z \in X_{s_0}$ *prawdziwe są następujące równości:*

$$d(x, y) = d(x, X_{s_0} \cap X_s, X_{s_0} \cap X_t, y),$$

$$d(x, z) = d(x, X_{s_0} \cap X_s, z).$$

Dowód. Przypuśćmy, że graf rodziny $\{(X_s, d_s) : s \in S\}$ nie spełnia warunku (ii) lematu 1.5. Wtedy istnieje taki cykl indukowany $z_0 \dots z_n z_0$, że $\{z_0, \dots, z_n\} \nsubseteq X_s$ dla każdego $s \in S$. Przypuśćmy, że istnieje takie $s \in S$, że $|X_s \cap \{z_0, \dots, z_n\}| \geqslant 3$. Niech $0 \leqslant i < j < k \leqslant n$ będą takie, że $z_i, z_j, z_k \in X_s$. Wtedy $z_i z_j$, $z_j z_k$ oraz $z_i z_k$ są krawędziami grafu G. Cykl $z_0 \dots z_n z_0$ jest indukowany, a więc $\{z_0 z_1, z_1 z_2, \dots, z_{n-1} z_n, z_n z_0\}$ jest zbiorem wszystkich krawędzi grafu G pomiędzy wierzchołkami ze zbioru $\{z_0, \dots, z_n\}$. Skoro $z_i z_j$ jest krawędzią oraz $j < n$, to $i+1 = j$. Analogicznie $j+1 = k$. Ponieważ $i+1 < k$, więc $i = 0$ oraz $k = n$. Stąd $\{z_0, \dots, z_n\} = \{z_i, z_j, z_k\} \subseteq X_s$ wbrew założeniu o cyklu $z_0 \dots z_n z_0$. Zatem dla każdego $s \in S$ zachodzi nierówność:

$$|X_s \cap \{z_0, \dots, z_n\}| \leqslant 2.$$

Z założenia o cyklu $z_0 \dots z_n z_0$ wynika, że $\{z_0, \dots, z_n\} \nsubseteq X_{s_0}$, a więc istnieje takie i, że $z_i \notin X_{s_0}$. Niech $s \in S$ będzie takie, że $z_i \in X_s$. Niech

$$j = \min\{r \leqslant i : z_r, \dots, z_i \in X_s\},$$

$$k = \max\{r \geqslant i : z_i, \dots, z_r \in X_s\}.$$

Jeśli $j = 0$ oraz $k = n$, to $\{z_0, \dots, z_n\} \subseteq X_s$ wbrew założeniu o cyklu $z_0 \dots z_n z_0$. Zatem $j > 0$ lub $k < n$. Rozpatrzmy przypadek, gdy $j > 0$. Wtedy $z_{j-1} \notin X_s$. Skoro $z_{j-1} z_j$ jest krawędzią grafu G, to istnieje takie $t \in S \setminus \{s\}$, że $z_{j-1}, z_j \in X_t$. Zatem $z_j \in X_t \cap X_s \subseteq X_{s_0}$. Skoro $z_i \notin X_{s_0}$, to $j < i$. Ponieważ każdy wierzchołek cyklu należy do dwóch krawędzi tego cyklu, więc istnieje takie $\ell \neq i-1$, że $z_i z_\ell$ jest krawędzią grafu G. Zauważmy, że $z_\ell \notin X_s$, ponieważ w przeciwnym razie otrzymujemy nierówność

$$|X_s \cap \{z_0, \dots, z_n\}| \geqslant |\{z_j, z_i, z_\ell\}| = 3$$

która, jak pokazaliśmy w pierwszej części dowodu, nie może zachodzić. Istnieje więc takie $p \in S \setminus \{s\}$, że $z_i, z_\ell \in X_p$. Z założenia (ii) wynika, że $X_p \cap X_s \subseteq X_{s_0}$, zatem $z_i \in X_p \cap X_s \subseteq X_{s_0}$; sprzeczność, ponieważ $z_i \notin X_{s_0}$. Przypadek, gdy $k < n$, jest analogiczny.

Pokazaliśmy, że graf rodziny $\{(X_s, d_s) : s \in S\}$ spełnia warunek (ii) lematu 1.5, a więc istnieje pseudometryka ρ na zbiorze $\bigcup_{s\in S} X_s$ spełniająca tezę tego lematu. Z lematu 1.1 wynika, że relacja

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$$

jest równoważnością w zbiorze $\bigcup_{s\in S} X_s$. Niech Y będzie selektorem rodziny $\{[x] : x \in \bigcup_{s\in S} X_s\}$, gdzie $[x]$ jest klasą równoważności punktu x względem relacji $\sim$, zawierającym przestrzeń X_{s_0}. Wtedy $(Y, \rho \restriction Y)$ jest przestrzenią metryczną.

Dla każdego $s \in S$ definiujemy $i_s : X_s \to Y$ tak aby $i_s(x) \in [x] \cap Y$, gdzie $x \in X_s$. $\square$

Definicja 1.7. W dalszych częściach pracy przestrzeń Y z twierdzenia 1.6 będziemy nazywać *amalgamacją rodziny* $\{X_s : s \in S\}$.

2 Rozszerzenie izometryczne

W tej części pracy zdefiniujemy dla każdej przestrzeni metrycznej X oraz liczby kardynalnej κ rozszerzenie $F(X)$ o następującej własności: dla każdej przestrzeni Y mocy mniejszej niż κ, punktu $y \in Y$ oraz zanurzenia $f_0 : Y \setminus \{y\} \to X$, istnieje takie zanurzenie $f : Y \to F(X)$, że $f \restriction (Y \setminus \{y\}) = f_0$.

Ustalmy przestrzeń (X, d) oraz liczbę kardynalną κ. Ustalmy również rozłączny z X zbiór A mocy $\lambda = (|X| + \mathfrak{c})^{<\kappa}$ oraz podział $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq [A]^\lambda$ zbioru A. Ustalmy numerację

$$[X]^{<\kappa} \setminus \{\emptyset\} = \{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \quad \text{oraz} \quad A_\alpha = \{a_{\alpha,\beta} : \beta < \lambda\}.$$

Dla każdego zbioru Z mocy mniejszej niż κ prawdziwa jest następująca nierówność:

$$|\{\rho \in {}^{Z\times Z}\mathbb{R} : \rho \text{ jest metryką}\}| \leqslant \mathfrak{c}^{<\kappa} \leqslant \lambda.$$

Zatem istnieje rodzina $\{d_{\alpha,\beta} : \beta < \lambda\}$ metryk spełniająca dla każdego $\alpha < \lambda$ następujące warunki:

(1) dla każdego $\beta < \lambda$ funkcja $d_{\alpha,\beta}$ jest metryką na zbiorze $X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\}$,

(2) dla każdego $\beta < \lambda$ zachodzi równość $d \restriction X_\alpha = d_{\alpha,\beta} \restriction X_\alpha$,

(3) jeśli Y jest przestrzenią metryczną, a $f_0 : Y \setminus \{y\} \to X_\alpha$ jest izometrią, to istnieją takie $\beta < \lambda$ oraz izometria $f : Y \to X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\}$, że $f \restriction (Y \setminus \{y\}) = f_0$.

Niech $\mathcal{R} = \{X\} \cup \{X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\} : \alpha, \beta < \lambda\}$. Zauważmy, że dla $X_{s_0} = X$ rodzina $\mathcal{R}$ spełnia założenia twierdzenia 1.6, a więc istnieje amalgamacja (Y, d) tej rodziny o następujących własnościach:

(4) X jest podprzestrzenią przestrzeni Y,

(5) $Y \subseteq \bigcup\{X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\} : \alpha, \beta < \lambda\}$,

(6) dla każdego $\alpha, \beta < \lambda$ istnieje takie zanurzenie $i_{\alpha,\beta} : X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\} \to Y$, że $i_{\alpha,\beta} \restriction X_\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha}$,

(7) dla każdego $y \in Y$ istnieje takie $\alpha < \lambda$, że dla każdego $x \in X$ prawdziwa jest następująca równość:

$$d(y, x) = d(y, X_\alpha, x).$$

Amalgamację tę będziemy oznaczać symbolem $F(X)$ i traktować jako rozszerzenie metryczne przestrzeni X.

Twierdzenie 2.1. *Dla każdej przestrzeni metrycznej X rozszerzenie izometryczne $F(X)$ ma następujące własności:*

(i) *każde zanurzenie izometryczne $f_0 : Y \setminus \{y_0\} \to X$, gdzie $|Y| < \kappa$ i $y_0 \in Y$, ma przedłużenie do zanurzenia izometrycznego $f : Y \to F(X)$,*

(ii) *dla każdego $y \in F(X)$ istnieje takie $Z \in [X]^{<\kappa}$, że $d(x, y) = d(x, Z, y)$ dla każdego $x \in X$, gdzie d jest metryką rozszerzenia $F(X)$.*

Dowód. Ustalmy przestrzeń X. Niech $\{d_{\alpha,\beta} : \beta < \lambda\}$ będzie rodziną wszystkich metryk na zbiorach $\{X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\} : \beta < \lambda\}$ o własnościach (1)–(3), zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na początku tej części pracy.

(i) Ustalmy przestrzeń (Y, σ) mocy mniejszej niż κ, punkt $y_0 \in Y$ oraz zanurzenie $f_0 : Y \setminus \{y_0\} \to X$. Skoro $|f_0[Y \setminus \{y_0\}]| < \kappa$, to istnieje takie $\alpha < \lambda$, że $f_0[Y \setminus \{y_0\}] = X_\alpha$. Zatem $f_0 : Y \setminus \{y_0\} \to X_\alpha$ jest izometrią. Na mocy własności (3) istnieje takie $\beta < \lambda$ oraz izometria $g : Y \to X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\}$, że $g \restriction (Y \setminus \{y_0\}) = f_0$. Z własności (6) otrzymujemy takie zanurzenie $i_{\alpha,\beta} : X_\alpha \cup \{a_{\alpha,\beta}\} \to F(X)$, że $i_{\alpha,\beta} \restriction X_\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha}$. Funkcja $f = i_{\alpha,\beta} \circ g : Y \to F(X)$ jest zanurzeniem izometrycznym. Dla każdego $y \in Y \setminus \{y_0\}$ otrzymujemy

$$f(y) = i_{\alpha,\beta}(g(y)) = i_{\alpha,\beta}(f_0(y)) = f_0(y),$$

ponieważ $f_0(y) \in X_\alpha$. Zatem $f \restriction (Y \setminus \{y_0\}) = f_0$.

(ii) Ustalmy $y \in F(X)$. Z własności (7) wynika, że istnieje takie $\alpha < \lambda$, że dla każdego $x \in X$ prawdziwa jest następującą równość:

$$d(y, x) = d(y, X_\alpha, x).$$

$\square$

W pracy [9] Katětov podał konstrukcję rozszerzenia $E(X, \kappa)$ również spełniającego warunki (i), (ii) powyższego lematu. Metryka σ rozszerzenia $E(X, \kappa)$ spełnia dla każdego $x, z \in E(X, \kappa) \setminus X$ równość

$$\sigma(x, z) = \sup\{|\sigma(x, y) - \sigma(z, y)| : y \in X\}.$$

Dla każdego $x, z \in E(X, \kappa) \setminus X$ oraz $y \in X$ wprost z definicji metryki wynika nierówność

$$\sigma(x, z) \geqslant |\sigma(x, y) - \sigma(z, y)|,$$

zatem $\sigma(x, z)$ jest najmniejszą dopuszczalną odległością w rozszerzeniu metrycznym przestrzeni X. Z konstrukcji rozszerzenia $F(X)$ oraz twierdzenia 1.6 wynika, że metryka d w rozszerzeniu $F(X)$ spełnia równość

$$d(x, z) = \inf\{d(x, y) + d(y, z) : y \in X\},$$

a więc $d(x, z)$ jest największą dopuszczalną odległością w rozszerzeniu przestrzeni X.

Tę część pracy zakończymy lematem opisującym sumę łańcucha przestrzeni metrycznych.

Lemat 2.2. *Niech $\{Z_\beta : \beta < \alpha\}$ będzie rosnącym ciągiem przestrzeni metrycznych, tzn. Z_β jest podprzestrzenią przestrzeni Z_γ dla każdego $\beta < \gamma < \alpha$. Wtedy na zbiorze $\bigcup_{\gamma<\alpha} Z_\gamma$ istnieje taka metryka d, że Z_β jest podprzestrzenią przestrzeni $\bigcup_{\gamma<\alpha} Z_\gamma$, dla każdego $\beta < \alpha$.*

Dowód. Ustalmy $x, y \in Z = \bigcup_{\gamma<\alpha} Z_\gamma$. Istnieje takie $\gamma < \alpha$, że $x, y \in Z_\gamma$. Przyjmujemy $d(x, y) = d_\gamma(x, y)$. Skoro Z_γ jest podprzestrzenią przestrzeni Z_β dla każdego $\gamma < \beta < \alpha$, to funkcja $d : Z \times Z \to \mathbb{R}$ jest poprawnie zdefiniowana. Łatwo widać, że funkcja d jest metryką. $\square$

3 Charakter dyskretny punktu

Przez *przestrzeń dyskretną* będziemy rozumieli przestrzeń metryczną w której metryka przyjmuje dwie wartości: 0 i 1.

Ustalmy liczbę kardynalną $\kappa > \omega$. Załóżmy, że X jest przestrzenią dyskretną mocy κ oraz $y \in F(X) \setminus X$. Z własności (7) wynika, że istnieje takie $Z \in [X]^{<\kappa}$, że $d(y,x) = d(y,Z,x)$ dla każdego $x \in X$, gdzie d jest metryką przestrzeni $F(X)$. Zatem jeśli $x \in X \setminus Z$, to

$$d(y,x) = d(y,Z,x) = \inf\{d(y,z) + d(z,x) : z \in Z\} = d(y,Z) + 1 \geqslant 1,$$

a więc w rozszerzeniu $F(X)$ nie ma takiego punktu y oraz podzbioru $T \in [X]^\kappa$, że $d(y,z) = \frac{1}{2}$ dla każdego $z \in T$. Powyższa obserwacja sugeruje, aby dla przestrzeni metrycznej (X,d) oraz podprzestrzeni dyskretnej $Y \subseteq X$ wprowadzić następujące pojęcia:

(a) punkt $x \in X$ będziemy nazywać *punktem środkowym podprzestrzeni* Y, gdy $d(x,y) = \frac{1}{2}$ dla każdego $y \in Y$,

(b) jeśli Y jest podprzestrzenią, która nie ma punktu środkowego $x \in X$, to powiemy, że podprzestrzeń Y jest *bez punktów środkowych*,

(c) jeśli każdy podzbiór $Z \in [Y]^\kappa$ jest bez punktów środkowych w przestrzeni X, to powiemy, że podprzestrzeń Y jest *dziedzicznie bez punktów środkowych*,

(d) liczbę

$$\tau(x,X) = \sup\{|Y| : Y \subseteq X \text{ jest podprzestrzenią dziedzicznie bez punktów środkowych}, x \in Y\}$$

będziemy nazywać *charakterem dyskretnym punktu* x.

Zauważmy, że powyższa definicja zależy od liczby κ, która na ogół będzie wcześniej ustalona.

Przykład 3.1. Niech (X,d) będzie przestrzenią dyskretną mocy κ. Ustalmy $Z \in [X]^\kappa$, $Z \neq X$ oraz $y \notin X$. Niech σ będzie funkcją określoną na zbiorze $Z \cup \{y\}$ wzorem

$$\sigma(x,z) = \begin{cases} d(x,z), & \text{gdy } x,z \in Z, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } x = y \text{ oraz } z \in Z, \\ 0, & \text{gdy } x = z = y. \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że funkcja σ jest metryką. Ponadto $\sigma \restriction Z = d \restriction Z$, a więc na mocy twierdzenia 1.6 istnieje amalgamacja (Y, ρ) przestrzeni (X, d) oraz $(Z \cup \{y\}, \sigma)$ spełniająca dla każdego $x \in X$ warunek

$$\rho(y,x) = \rho(y,Z,x) = \inf\{\sigma(y,z)+d(z,x) : z \in Z\} = \tfrac{1}{2}+\inf\{d(z,x) : z \in Z\}.$$

Skoro $X \neq Z$, to istnieje punkt $x \in X \setminus Z$, zatem $\rho(y,x) \geqslant \frac{3}{2}$, a stąd y nie jest punktem środkowym podprzestrzeni X w przestrzeni Y. Z drugiej strony punkt y jest punktem środkowym podprzestrzeni $Z \in [X]^\kappa$, a więc X nie jest podprzestrzenią dziedzicznie bez punktów środkowych w przestrzeni Y.

Lemat 3.2. *Jeśli $f : X \to X$ jest izometrią, to $\tau(x, X) = \tau(f(x), X)$ dla każdego $x \in X$.*

Dowód. Ustalmy $x \in X$, izometrię $f : X \to X$ oraz taką podprzestrzeń $Y \subseteq X$ dziedzicznie bez punktów środkowych, że $x \in Y$. Niech d będzie metryką przestrzeni X. Przypuśćmy, że $f[Y]$ nie jest dziedzicznie bez punktów środkowych. Zatem istnieje podprzestrzeń $Z \in [f[Y]]^\kappa$ oraz jej punkt środkowy $z \in X$. Wtedy $f^{-1}[Z] \in [Y]^\kappa$. Oczywiście $d(f^{-1}(z), f^{-1}(x)) = d(z,x)$ dla każdego $z \in Z$. Zatem $f^{-1}(x)$ jest punktem środkowym podprzestrzeni $f^{-1}[Z]$; sprzeczność. $\square$

Załóżmy, że podprzestrzeń $Y \subseteq X$ jest dziedzicznie bez punktów środkowych. Załóżmy ponadto, że istnieje taki ciąg Cauchy'ego $\{x_n : n < \omega\} \subseteq X$, że

$$d(x_n, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

dla każdego $n \geqslant 1$ oraz $y \in Y$. Skoro $d(x_n, y) > \frac{1}{2}$ dla każdego $n < \omega$ oraz $y \in Y$, to żaden z punktów x_n nie jest punktem środkowym jakiegokolwiek podzbioru $Z \in [Y]^\kappa$. Możemy założyć, że symbol d oznacza również metrykę rozszerzenia $F(X)$. Niech $T = \overline{\{x_n : n < \omega\}}$ będzie uzupełnieniem podprzestrzeni $\{x_n : n < \omega\}$. Niech $x \in T$ będzie granicą ciągu $\{x_n : n < \omega\}$. Niech zanurzenie $f_0 : \{x_n : n < \omega\} \to X$ będzie dane wzorem $f_0(x_n) = x_n$ dla każdego $n < \omega$. Na mocy twierdzenia 2.1 (i) istnieje takie zanurzenie

$$f : \{x\} \cup \{x_n : n < \omega\} \to F(X),$$

że $f(x_n) = x_n$ dla każdego $n < \omega$. Wtedy

$$d(f(x), y) \leqslant d(f(x), x_n) + d(x_n, y) = d(f(x), f(x_n)) + d(x_n, y)$$

dla każdego $n \geqslant 1$ oraz $y \in Y$, a więc $d(x,y) \leqslant \frac{1}{2}$ dla każdego $y \in Y$. Z drugiej strony,

$$1 = d(y,y') \leqslant d(y,x) + d(x,y')$$

dla każdego $y, y' \in Y$, $y \neq y'$, ponieważ $Y \subseteq X$ oraz X jest przestrzenią dyskretną. Stąd jeśli $|Y| \geqslant 2$, to $d(x,y) = \frac{1}{2}$ dla każdego $y \in Y$.

Wydaje się więc, że lepiej brać pod uwagę *słabe punkty środkowe*: jeśli (X,d) jest przestrzenią metryczną, to mówimy, że x jest słabym punktem środkowym podprzestrzeni $Y \subseteq X$, gdy $d(x,y) = d(x,y') < 1$ dla każdego $y, y' \in Y$. Okazuje się, że punkty środkowe lepiej nadają się do zdefiniowania charakteru dyskretnego, natomiast słabe punkty środkowe będą ważnym narzędziem do zbadania istnienia punktów środkowych z uwagi na posiadaną przez nie własność redukcji, o której mówi ostatni lemat tej części pracy.

Symbolem $d(x,A)$ oznaczamy odległość punktu x od niepustego zbioru A, tzn. $d(a,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$. Zatem jeśli x jest słabym punktem środkowym niepustej podprzestrzeni Y, to $d(x,Y) = d(x,y)$ dla każdego $y \in Y$.

Lemat 3.3. *Niech κ będzie taką liczbą kardynalną regularną, że $\lambda^{\aleph_0} < \kappa$ dla każdego $\lambda < \kappa$. Załóżmy, że (X,d) jest przestrzenią metryczną, $Y \subseteq X$ oraz $x \in X \setminus Y$ jest słabym punktem środkowym zbioru $D \in [Y]^\kappa$ dla którego istnieje takie $Z \in [Y]^{<\kappa}$, że $d(x,y) = d(x,Z,y)$ dla każdego $y \in Y$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór $D' \in [D]^\kappa$ oraz słaby punkt środkowy $x' \in Y$ zbioru D', że*

$$d(x,x') + d(x',D') < d(x,D) + \varepsilon.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\varepsilon < 1 - d(x,D)$. Na mocy założenia istnieje takie $Z \in [Y]^{<\kappa}$, że $d(x,y) = d(x,Z,y)$ dla każdego $y \in Y$. Skoro

$$d(x,Z,y) = \inf\{d(x,z) + d(z,y) : z \in Z\}$$

to dla każdego $y \in D$ istnieje taki ciąg $(z_{y,n})_{n<\omega} \in {}^\omega Z$, że

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty}(d(x,z_{y,n}) + d(z_{y,n},y)). \tag{2}$$

Definiujemy funkcję $\Phi : D \to {}^\omega(Z \times \mathbb{R})$ wzorem

$$\Phi(y) = (z_{y,n}, d(z_{y,n},y))_{n<\omega}$$

dla $y \in D$. Skoro $|{}^\omega(Z \times \mathbb{R})| = |Z|^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{c} < \kappa$, to istnieje takie $(z_n, r_n)_{n<\omega} \in {}^\omega(Z \times \mathbb{R})$, że $|\Phi^{-1}[\{(z_n,r_n)_{n<\omega}\}]| = |D|$. Niech $D' = \Phi^{-1}[\{(z_n,r_n)_{n<\omega}\}]$. Zatem dla każdego $y, y' \in D'$ i $n < \omega$ otrzymujemy

$$z_{y,n} = z_{y',n} \quad \text{oraz} \quad d(z_{y,n},y) = d(z_{y',n},y').$$

Przyjmując $t_n = z_{y,n} = z_{y',n}$ otrzymujemy $d(t_n, y) = d(t_n, y')$ dla każdego $y, y' \in D$ oraz $n < \omega$. Ze wzoru (2) wynika, że istnieje takie $n < \omega$, że $d(x, t_n) + d(t_n, y) < d(x, y) + \varepsilon < 1$ dla każdego $y \in D$. Zatem t_n jest słabym punktem środkowym podprzestrzeni D'. $\square$

4 Operacja dołączania podprzestrzeni dziedzicznie bez punktów środkowych

Ustalmy liczbę kardynalną κ, przestrzeń X oraz jej podprzestrzeń $Y \subseteq X$. Niech $X \setminus Y = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ dla pewnej liczby kardynalnej λ. Dla każdego $\alpha < \lambda$ ustalamy rozłączny z X zbiór D_α mocy $\aleph_{\kappa+|X|+\alpha+2}$. Możemy założyć, że $D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$ dla $\alpha < \beta < \lambda$. Niech d_α będzie metryką dyskretną na zbiorze $D_\alpha \cup \{x_\alpha\}$. Z twierdzenia 1.6 otrzymujemy amalgamację $A(X, Y)$ rodziny $\{X\} \cup \{D_\alpha \cup \{x_\alpha\} : \alpha < \lambda\}$. Niech

$$\mathcal{A}(X, Y) = \{D_\alpha \cup \{x_\alpha\} : \alpha < \lambda\}.$$

Przestrzeń $A(X, Y)$ jest zatem rozszerzeniem przestrzeni X o następujących własnościach:

(A1) dla każdego $x \in X \setminus Y$ istnieje taka podprzestrzeń dyskretna $D_x \in \mathcal{A}(X, Y)$, że $D_x \cap X = \{x\}$ oraz $|D_x| > |X| \cdot \kappa^+$,

(A2) dla każdego $x, y \in X \setminus Y$, jeśli $x \neq y$, to $D_x \cap D_y = \emptyset$ oraz $|D_x| \neq |D_y|$,

(A3) $d(x', y) = d(x', x) + d(x, y) = 1 + d(x, y)$ dla każdego $x \in X \setminus Y$, $x' \in D_x \setminus \{x\}$ oraz $y \in X$, gdzie d jest metryką rozszerzenia $A(X, Y)$.

Zauważmy, że jeśli $x \in X \setminus Y$, to $\tau(x, A(X, Y)) = |D_x|$, a więc

$$\tau(x, A(X, Y)) \neq \tau(y, A(X, Y))$$

dla każdego $x, y \in X \setminus Y$, $x \neq y$.

Zdefiniujemy teraz operację pozwalającą otrzymać rozszerzenie metryczne $S(X)$ przestrzeni X w którym wybrane podprzestrzenie przestrzeni X przestaną być podprzestrzeniami dziedzicznie bez punktów środkowych. Jeśli podprzestrzeń $Y \subseteq X$ jest dziedzicznie bez punktów środkowych, to wystarczy wybrać dowolny podzbiór $Y' \in [Y]^\kappa$ i dołączyć w poszukiwanym rozszerzeniu $S(X)$ przestrzeni X punkt środkowy podprzestrzeni Y'. Zatem definiując operację usuwania podprzestrzeni dziedzicznie bez punktów środkowych możemy ograniczyć się do podprzestrzeni mocy κ. Z drugiej strony, jeśli podprzestrzenie z ustalonej rodziny $\mathcal{G}$ mają być przestrzeniami dziedzicznie bez punktów środkowych w rozszerzeniu $S(X)$ przestrzeni X, to każda podprzestrzeń Y do której dołączymy punkt środkowy musi spełniać następujący warunek:

$$|Y \cap G| < \kappa \quad \text{dla każdego } G \in \mathcal{G}.$$

Definiujemy pomocniczo rodzinę

$$\mathcal{D}(X) = \{Y \in [X]^{\geqslant\kappa} : Y \text{ jest podprzestrzenią} \\ \text{dziedzicznie bez punktów środkowych}\}.$$

Ustalmy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}(X)$. Niech

$$\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\} = \{Y \in \mathcal{D}(X) \cap [X]^\kappa : \forall_{Z \in \mathcal{G}} |Y \cap Z| < \kappa\}.$$

dla pewnej liczby kardynalnej λ. Niech $Z = \{z_\alpha : \alpha < \lambda\}$ będzie zbiorem mocy λ, rozłącznym z X. Dla każdego $\alpha < \lambda$ definiujemy funkcję $d_\alpha : (Y_\alpha \cup \{z_\alpha\}) \times (Y_\alpha \cup \{z_\alpha\}) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$d_\alpha(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & \text{gdy } x, y \in Y_\alpha, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } y \in Y_\alpha \text{ oraz } x = z_\alpha. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że d_α jest metryką na zbiorze $Y_\alpha \cup \{z_\alpha\}$. Z twierdzenia 1.6 otrzymujemy amalgamację $S(X, \mathcal{G})$ rodziny $\{X\} \cup \{Y_\alpha \cup \{z_\alpha\} : \alpha < \lambda\}$. Zatem $S(X, \mathcal{G})$ jest rozszerzeniem przestrzeni X o następujących własnościach:

(S1) dla każdego $Y \in \mathcal{D}(X)$, jeśli $|Y \cap Z| < \kappa$ dla wszystkich $Z \in \mathcal{G}$, to istnieje $Y' \in [Y]^\kappa$ oraz punkt środkowy $x \in S(X, \mathcal{G})$ podprzestrzeni Y',

(S2) dla każdego $y \in S(X, \mathcal{G})$ istnieje takie $Y \in [X]^\kappa$, że $d(y, x) = d(y, Y, x)$ dla każdego $x \in S(X, \mathcal{G}) \setminus \{y\}$, gdzie d jest metryką rozszerzenia $S(X, \mathcal{G})$.

5 Łańcuchowe własności operacji F, S i A

Zdefiniujemy indukcyjnie rosnący łańcuch rozszerzeń. Załóżmy, że $\kappa > \mathfrak{c}$ jest taką regularną liczbą kardynalną, że $\lambda^{\aleph_0} < \kappa$ dla każdego $\lambda < \kappa$, np. $\kappa = \mathfrak{c}^+$. Definiujemy przestrzeń pustą $X_0 = \emptyset$ oraz przestrzeń jednoelementową $X_1 = \{0\}$. Załóżmy, że skonstruowaliśmy rosnący łańcuch $\{(X_\beta, d_\beta) : \beta <$

$\alpha\}$ przestrzeni metrycznych. Jeśli α jest liczbą graniczną, to korzystając z lematu 2.2 przyjmujemy

$$X_{\alpha+1} = X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \qquad \text{oraz} \qquad \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha) = \emptyset.$$

Jeśli $\alpha = \beta + 2$ dla pewnego $\beta < \alpha$, to przyjmujemy

$$X_\alpha = F(S(A(X_{\beta+1}, X_\beta), \bigcup_{\gamma\leqslant\beta} \mathcal{A}(X_{\gamma+1}, X_\gamma))). \tag{3}$$

W ten sposób otrzymujemy przestrzeń (X_{κ^+}, d) oraz rodziny $\{X_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ i $\{\mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha) : \alpha < \kappa^+\}$ o następujących własnościach:

(P1) $X_{\kappa^+} = \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$,

(P2) dla każdego $\beta < \alpha < \kappa^+$ przestrzeń X_β jest podprzestrzenią przestrzeni X_α,

(P3) dla każdego $\alpha < \kappa^+$, jeśli α jest liczbą graniczną, to $X_{\alpha+1} = X_\alpha = \bigcup\{X_\beta : \beta < \alpha\}$ oraz $\mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha) = \emptyset$,

(P4) dla każdego $\alpha < \kappa^+$, jeśli $\alpha = \beta + 2$, to zachodzi wzór (3),

(P5) dla każdego $x \in X_{\kappa^+}$ istnieje takie $\alpha < \kappa^+$ oraz podprzestrzeń dyskretna $D_x \in \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha)$, że $x \in X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha$ oraz $D_x \cap X_{\alpha+1} = \{x\}$,

(P6) każdy punkt podprzestrzeni $X_{\kappa^+} \setminus X_1$ jest punktem dodanym przez jedno z rozszerzeń: F, S lub A.

Lemat 5.1. *Przestrzeń X_{κ^+} jest κ-superuniwersalna.*

Dowód. Ustalmy przestrzeń metryczną (Y, σ) mocy mniejszej niż κ, podzbiór $Y_0 \subseteq Y$ oraz zanurzenie $f_0 : Y_0 \to X_{\kappa^+}$. Niech $Y \setminus Y_0 = \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ dla pewnej liczby kardynalnej λ. Załóżmy, że skonstruowaliśmy ciąg zanurzeń $\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ o następujących własnościach:

(i) $f_\beta : Y_0 \cup \{y_\gamma : \gamma < \beta\} \to X_{\kappa^+}$ dla każdego $\beta < \alpha$,

(ii) $f_\beta \restriction \mathrm{dom}\, f_\gamma = f_\gamma$ dla każdego $\gamma < \beta < \alpha$.

Jeśli $\alpha \leqslant \lambda$ jest liczbą graniczną, to funkcję $f_\alpha : Y_0 \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\} \to X_{\kappa^+}$ definiujemy wzorem

$$f_\alpha(y) = \begin{cases} f_\beta(y), & \text{gdy } y = y_\gamma \text{ dla pewnego } \gamma < \beta < \alpha, \\ f_0(y), & \text{gdy } y \in Y_0. \end{cases}$$

Z własności (ii) wynika, że funkcja f_α jest poprawnie zdefiniowanym zanurzeniem.

Załóżmy więc, że $\alpha = \beta + 1$ dla pewnego $\beta < \lambda$. Skoro $|\operatorname{rng} f_\beta| < \kappa$ oraz $X_{\kappa^+} = \bigcup\{X_\delta : \delta < \kappa^+\}$, to istnieje takie $\delta < \kappa^+$, że $\operatorname{rng} f_\beta \subseteq X_\delta$. Mamy następujący ciąg rozszerzeń:

$$X_\delta \subseteq X_{\delta+1} \subseteq A(X_{\delta+1}, X_\delta) \subseteq S(A(X_{\delta+1}, X_\delta), \bigcup_{\gamma \leqslant \delta} \mathcal{A}(X_{\gamma+1}, X_\gamma)).$$

Z twierdzenia 2.1 (i) wynika, że istnieje takie zanurzenie

$$f_\alpha : \operatorname{dom} f_\beta \cup \{y_\beta\} \to F(S(A(X_{\delta+1}, X_\delta), \bigcup_{\gamma \leqslant \delta} \mathcal{A}(X_{\gamma+1}, X_\gamma))),$$

że $f_\alpha \restriction \operatorname{dom} f_\beta = f_\beta$. Indukcyjna konstrukcja jest w ten sposób zakończona, a zanurzenie $f_\lambda : Y \to X_{\kappa^+}$ jest przedłużeniem zanurzenia f_0. $\square$

Pokażę, że przestrzeń X_{κ^+} jest sztywna, tzn. jedyną izometrią przestrzeni X_{κ^+} jest identyczność. W tym celu udowodnię szereg lematów opisujących łańcuchowe własności operacji F, S i A.

Definicja 5.2. Liczbę *rangę punktu* $x \in X$ wzorem

$$r(x) = \min\{\alpha < \kappa^+ : x \in X_\alpha\}.$$

Lemat 5.3. *Załóżmy, że $x, y \in X_{\kappa^+}$ oraz y jest słabym punktem środkowym podprzestrzeni $D \in [D_x]^\kappa$. Wtedy $r(x) < r(y)$ oraz punkt y został dodany przez operację F lub przez operację S. Jeśli ponadto y jest punktem środkowym D, to punkt y został dodany przez operację F.*

Dowód. Istnieją takie $\beta, \delta < \kappa^+$, że $x \in X_{\beta+2} \setminus X_{\beta+1}$ oraz $y \in X_{\delta+2} \setminus X_{\delta+1}$. Zatem $r(y) = \delta + 2$ oraz $r(x) = \beta + 2$.

Przypuśćmy, że $r(x) \geqslant r(y)$. Skoro $r(y) \leqslant \beta + 2$, to $y \in X_{\beta+2}$, a więc na mocy własności (A3) mamy

$$d(v, y) = d(v, x) + d(x, y) = 1 + d(x, y) \geqslant 1$$

dla każdego $v \in D_x \setminus \{x\}$; sprzeczność, ponieważ y jest punktem środkowym zbioru $D \subseteq D_x$. Zatem $r(x) < r(y)$, a więc $r(x) \leqslant \delta + 1$.

Przypuśćmy, że punkt y został dodany przez operację A. Wtedy istnieje takie $w \in X_{\delta+1}$, że $y \in D_w \setminus \{w\}$. Zatem $D_x \cup D_w \subseteq A(X_{\delta+1}, X_\delta)$, a więc na mocy własności (A3) mamy

$$d(y, v) = d(y, w) + d(w, v) \geqslant 1$$

dla każdego $v \in D_x$; sprzeczność z faktem, że y jest punktem środkowym zbioru D.

Przypuśćmy, że y jest punktem środkowym D dodanym przez operację S. Wtedy istnieje taka podprzestrzeń dyskretna $Z \in [A(X_{\delta+1}, X_\delta)]^\kappa$, że

$$d(y,w) = d(y,Z,w) \quad \text{dla każdego } w \in A(X_{\delta+1}, X_\delta) \setminus \{y\},$$

oraz $|Z \cap D'| < \kappa$ dla każdego $D' \in \bigcup_{\zeta \leqslant \delta} \mathcal{A}(X_{\zeta+1}, X_\zeta)$. Skoro $r(x) \leqslant \delta + 1$, to $x \in X_{\delta+1}$, a więc $D_x \in \bigcup_{\zeta \leqslant \delta} \mathcal{A}(X_{\zeta+1}, X_\zeta)$. Zatem $|Z \cap D_x| < \kappa$, w szczególności $|Z \cap D| < \kappa$, a więc istnieje $v \in D \setminus Z$. Wtedy

$$\frac{1}{2} = d(y,v) = d(y,Z,v) = \frac{1}{2} + \inf\{d(z,v) : z \in Z\},$$

a więc $\inf\{d(z,v) : z \in Z\} = 0$. Istnieje zatem takie $z_0 \in Z$, że $d(v,z_0) < \frac{1}{2}$. Skoro $v \notin Z$ oraz $z_0 \in Z$, to $v \neq z_0$, a więc $d(v,z_0) > 0$. Jeszcze raz korzystając z równości $\inf\{d(z,v) : z \in Z\} = 0$ otrzymujemy takie $z_1 \in Z$, że $d(z_1,v) < d(z_0,v)$. Zatem z_0 oraz z_1 są różnymi elementami podprzestrzeni dyskretnej Z. Wtedy $1 = d(z,z') \leqslant d(z,v) + d(z',v) < 1$; sprzeczność. $\square$

Lemat 5.4. *Załóżmy, że $x, y \in X_{\kappa^+}$ oraz y jest słabym punktem środkowym podprzestrzeni $D \in [D_x]^\kappa$ dodanym przez operację F. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją takie $D' \in [D]^\kappa$ oraz słaby punkt środkowy y' podprzestrzeni D', że*

$$d(y,y') + d(y',D') < d(y,D) + \varepsilon$$

i

(i) *$r(y') \leqslant r(y)$ oraz y' jest punktem dodanym przez operację S, lub*

(ii) *$r(y') < r(y)$ oraz y' jest punktem dodanym przez operację F.*

Dowód. Skoro punkt y został dodany przez operację F, to istnieje takie $\beta < \kappa^+$ oraz $Z \in [T]^{<\kappa}$, że

$$y \in X_{\beta+2} \setminus T,$$

gdzie $T = S(A(X_{\beta+1}, X_\beta), \bigcup_{\delta \leqslant \beta} \mathcal{A}(X_{\delta+1}, X_\delta))$ oraz $d(y,t) = d(y,Z,t)$ dla każdego $t \in T$.

Z lematu 5.3 wynika, że $r(x) < r(y)$, a więc $D_x \subseteq T$. Na mocy lematu 3.3 otrzymujemy taki słaby punkt środkowy $y' \in T$ pewnej podprzestrzeni $D' \in [D]^\kappa$, że $d(y,y') + d(y',D') < d(y,D) + \varepsilon$. Zauważmy, że $r(y') \leqslant$

$r(y)$, a więc jeśli y' jest punktem dodanym przez operację S, to dowód jest zakończony.

Załóżmy więc, że punkt y' nie został dodany przez operację S. Na mocy lematu 5.3 punkt y' został dodany przez operację F, zatem wystarczy pokazać, że $r(y') < r(y)$. Każdy punkt przestrzeni T został dodany przez operację S lub A bądź też jest elementem podprzestrzeni $X_{\beta+1}$. Skoro $y' \in T$ oraz punkt y' nie został dodany ani przez operację S ani przez operację A, to $y \in X_{\beta+1}$. Stąd $r(y') \leqslant \beta + 1 < r(y)$. $\square$

Lemat 5.5. *Jeśli $x, y \in X_{\kappa^+}$ są różnymi punktami dodanymi przez operację S, to $d(x, y) \geqslant \frac{1}{2}$.*

Dowód. Załóżmy, że $x \in T_\alpha$ oraz $y \in T_\beta$, gdzie $\alpha \leqslant \beta$ oraz

$$T_\xi = S(A(X_{\xi+1}, X_\xi), \bigcup_{\delta \leqslant \xi} \mathcal{A}(X_{\delta+1}, X_\delta)) \setminus A(X_{\xi+1}, X_\xi)$$

dla $\xi \in \{\alpha, \beta\}$. Punkt y został dodany przez operację S, a więc na mocy własności (S2) istnieje takie $Z \in [A(X_{\beta+1}, X_\beta)]^\kappa$, że

$$d(y, w) = \frac{1}{2} + \inf\{d(z, w) : z \in Z\}$$

dla każdego $w \in T_\beta \setminus \{y\}$. Skoro $T_\alpha \subseteq T_\beta$, to $d(x, y) \geqslant \frac{1}{2}$. $\square$

Lemat 5.6. *Załóżmy, że $x, y \in X_{\kappa^+}$ oraz y jest słabym punktem środkowym podprzestrzeni $D \in [D_x]^\kappa$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka podprzestrzeń $D' \in [D]^\kappa$ i jej słaby punkt środkowy y' dodany przez operację S, że $d(y, y') + d(y', D') < d(y, D) + \varepsilon$.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\alpha, \delta_0 < \kappa^+$ będą takie, że $r(x) = \alpha + 2$ oraz $r(y) = \delta_0 + 2$. Z lematu 5.3 wynika, że $\alpha < \delta_0$. Przyjmijmy $z_0 = y$, $D_0 = D$, $r(y) = \delta_0 + 2$ oraz załóżmy, że istnieją takie $z_0, \ldots, z_n$, $D_n \subseteq \ldots \subseteq D_0$, $\delta_0 > \ldots > \delta_n > \alpha$, że dla każdego $i \leqslant n$ zachodzą warunki:

(i) z_i jest słabym punktem środkowym D_i,

(ii) $d(z_{i-1}, z_i) + d(z_i, D_i) < d(z_{i-1}, D_{i-1}) + \varepsilon/2^{(i+3)}$ dla $i > 0$,

(iii) $D_i \in [D_x]^\kappa$,

(iv) $z_i \in X_{\delta_i+2} \setminus A(X_{\delta_i+1}, X_{\delta_i})$.

Jeśli $z_n \in S(A(X_{\delta_n+1}, X_{\delta_n}), \bigcup_{\delta \leqslant \delta_n} \mathcal{A}(X_{\delta+1}, X_\delta))$, to przyjmujemy $y' = z_n$ oraz $D' = D_n$. W przeciwnym razie z lematu 5.4 otrzymujemy $\alpha < \delta_{n+1} < \delta_n$, $D_{n+1} \in [D_n]^\kappa$ oraz taki słaby punkt środkowy

$$z_{n+1} \in X_{\delta_{n+1}+2} \setminus A(X_{\delta_{n+1}+1}, X_{\delta_{n+1}})$$

podprzestrzeni D_{n+1}, że

$$d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, D_{n+1}) < d(z_n, D_n) + \frac{1}{2^{n+4}}.$$

Zauważmy, że dla pewnego $n < \omega$ punkt z_n jest dodany przez operację S, ponieważ w przeciwnym razie otrzymalibyśmy nieskończony i malejący ciąg liczb porządkowych. Następujące oszacowanie kończy dowód:

$$\begin{aligned}
d(z_0, z_n) + d(z_n, D_n) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} d(z_{i-1}, z_i) + d(z_n, D_n) \leqslant \\
&\sum_{i=1}^{n-1} d(z_{i-1}, z_i) + d(z_{n-1}, z_n) + d(z_n, D_n) < \\
&\sum_{i=1}^{n-1} d(z_{i-1}, z_i) + d(z_{n-1}, D_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} < \ldots \\
&\ldots < d(z_0, D_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+3}} < d(z_0, D_0) + \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

□

Lemat 5.7. *Dla każdego $x \in X_{\kappa^+}$ podprzestrzeń D_x jest dziedzicznie bez punktów środkowych w X_{κ^+}.*

Dowód. Przypuśćmy, że dla pewnego $x \in X_{\kappa^+}$ podprzestrzeń D_x nie jest dziedzicznie bez punktów środkowych. Istnieje takie $\alpha < \kappa^+$ oraz $D_0 \in [D_x]^\kappa$ z punktem środkowym $z_0 \in X_{\kappa^+}$, że $x \in X_{\alpha+2} \setminus X_{\alpha+1}$. Z lematu 5.6 wynika, że istnieje taka podprzestrzeń $D_1 \in [D_0]^\kappa$ oraz jej słaby punkt środkowy z_1 dodany przez operację S, że $d(z_0, z_1) + d(z_1, D_1) < 3/4$. Zauważmy, że $d(z_1, D_1) < 3/4$. Z lematu 5.3 wynika, że

(i) punkt z_0 został dodany przez operację F, zatem $z_0 \neq z_1$, a więc $d(z_0, z_1) > 0$,

(ii) prawdziwa jest nierówność $d(z_1, D_1) > 1/2$, ponieważ punkt z_1 nie jest punktem środkowym podprzestrzeni D_1.

Niech liczba ε będzie dana wzorem

$$\varepsilon = \min\{d(z_1, D_1) - \tfrac{1}{2}, d(z_0, z_1)\}.$$

Z punktów (i) oraz (ii) wynika, że $\varepsilon > 0$. Skoro z_0 jest punktem środkowym zbioru D_0, to jest także punktem środkowym podprzestrzeni $D_1 \subseteq D_0$. Korzystając ponownie z lematu 5.6 dla podprzestrzeni D_1, jej punktu środkowego z_0 oraz liczby ε otrzymujemy słaby punkt środkowy z_2 pewnej podprzestrzeni $D_2 \in [D_1]^\kappa$ dodany przez operację S i spełniający nierówność

$$d(z_0, z_2) + d(z_2, D_2) < \frac{1}{2} + \varepsilon. \tag{4}$$

Skoro $d(z_0, z_1) + d(z_1, D_1) < \frac{3}{4}$ oraz $\frac{1}{2} < d(z_1, D_1)$, to

$$d(z_0, z_1) < \frac{3}{4} - d(z_1, D_1) < \frac{1}{4},$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2} + \varepsilon \leqslant d(z_1, D_1) < \frac{3}{4} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2} \leqslant d(z_2, D_2),$$

więc z nierówności (4) wynika, że

$$d(z_0, z_2) < d(z_1, D_1) - d(z_2, D_2) \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

a stąd $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_0) + d(z_0, z_2) < 1/2$. Skoro

$$d(z_2, D_2) < d(z_1, D_1) = d(z_1, D_2),$$

to $z_1 \neq z_2$. Punkty z_1 i z_2 zostały dodane przez operację S, zatem z lematu 5.5 wynika, że $d(z_1, z_2) \geqslant 1/2$; sprzeczność, ponieważ $d(z_1, z_2) < 1/2$. $\square$

Lemat 5.8. *Dla każdego $x, t \in X_{\kappa^+}$ istnieje takie $Z \in [D_x]^{\leqslant\kappa}$, że $d(t, y) = d(t, Z, y)$ dla dowolnego $y \in D_x$.*

Dowód. Ustalmy $x \in X_{\kappa^+}$ i niech $\alpha < \kappa^+$ będzie takie, że $x \in X_{\alpha+2} \setminus X_{\alpha+1}$. Wtedy $d(t, y) = d(t, x) + d(x, y) = d(t, \{x\}, y)$ dla każdego $y \in D_x$ oraz $t \in A(X_{\alpha+2}, X_{\alpha+1}) \setminus D_x$. Jeśli $t \in D_x$, to dla każdego $y \in D_x$ mamy $d(t, y) = d(t, \{t\}, y)$.

Załóżmy, że dla pewnego $\beta \geqslant \alpha$ i dla każdego $t \in A(X_{\beta+2}, X_{\beta+1})$ istnieje takie $Z_t \in [D_x]^{\leqslant\kappa}$, że $d(t, y) = d(t, Z_t, y)$ dla dowolnego $y \in D_x$. Ustalmy $t \in X_{\beta+3} \setminus X_{\beta+2}$ dodane przez operację S. Istnieje taka podprzestrzeń dyskretna $Z \in [A(X_{\beta+2}, X_{\beta+1})]^\kappa$, że $d(t, y) = d(t, Z, y)$ dla dowolnego $y \in$

$A(X_{\beta+2}, X_{\beta+1})$. Na mocy założenia indukcyjnego, dla każdego $z \in Z$ istnieje takie $T_z \in [D_x]^{\leqslant\kappa}$, że $d(z,y) = d(z, T_z, y)$ dla dowolnego $y \in D_x$. Wtedy $\bigcup_{z\in Z} T_z \in [D_x]^{\leqslant\kappa}$. Przypuśćmy, że

$$\varepsilon = d(t, \bigcup_{z\in Z} T_z, y) - d(t,y) > 0$$

dla pewnego $y \in D$. Istnieje takie $z \in Z$, że $d(t,z) + d(z,y) < d(t,y) + \varepsilon/2$ oraz istnieje takie $w \in T_z$, że $d(z,w) + d(w,y) < d(z,y) + \varepsilon/2$. Wtedy

$$d(t,w) + d(w,y) \leqslant d(t,z) + d(z,w) + d(w,y) < d(x,z) + d(z,y) + \varepsilon/2 < \\ d(t,y) + \varepsilon = d(t, \bigcup_{z\in Z} T_z, y) \leqslant d(t,w) + d(w,y);$$

sprzeczność. Przypadek, gdy t jest punktem dodanym przez operację F lub A jest analogiczny. □

Lemat 5.9. *Jeśli $x, y \in X_{\kappa^+}$ oraz $x \neq y$, to $|D_x \cap D_y| \leqslant 1$.*

Dowód. Ustalmy $x, y \in X_{\kappa^+}$. Z własności (P5) wynika, że istnieją takie $\alpha, \beta < \kappa^+$, że

$$x \in X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha, \quad y \in X_{\beta+1} \setminus X_\beta, \quad D_x \in \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha) \quad \text{oraz} \\ D_y \in \mathcal{A}(X_{\beta+1}, X_\beta).$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy $r(x) = r(y)$. Z własności (A2) wynika, że $D_x \cap D_y = \emptyset$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $r(x) < r(y)$. Wtedy $\alpha + 2 \leqslant \beta + 1$, a więc mamy następujący ciąg rozszerzeń:

$$X_{\alpha+1} \subseteq A(X_{\alpha+1}, X_\alpha) \subseteq X_{\beta+1}.$$

Z własności (A1) wynika, że $D_y \cap X_{\beta+1} = \{y\}$, zatem $|D_y \cap D_x| \leqslant 1$, ponieważ $D_x \cap D_y \subseteq D_y \cap X_{\beta+1}$. □

Lemat 5.10. *Załóżmy, że $Y \subseteq X_{\kappa^+}$ jest zbiorem dziedzicznie bez punktów środkowych oraz $|Y| > \kappa^+$. Wtedy zbiór Y jest zawarty w pewnym elemencie rodziny $\bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha)$.*

Dowód. Rozpatrzmy przypadek, gdy istnieje takie $\beta < \kappa^+$ oraz podprzestrzeń $D \in \mathcal{A}(X_{\beta+1}, X_\beta)$, że $|D \cap Y| > \kappa$. Jeśli $Y \subseteq D$, to dowód jest zakończony. Przypuśćmy więc, że istnieje $x \in Y \setminus D$. Na mocy lematu 5.8

istnieje takie $Z \in [D]^{\leqslant\kappa}$, że $d(x,y) = d(x,Z,y)$ dla każdego $y \in D$. Skoro $|Z| < |D \cap Y|$, to istnieje $y \in D \cap Y \setminus Z$. Wtedy

$$1 = d(x,y) = d(x,Z,y) = \inf\{d(x,z) + 1 : z \in Z\}.$$

Skoro $x \notin Z$, to istnieją takie $z, z' \in Z$, $z \neq z'$, że $d(x,z), d(x,z') < 1/2$. Wtedy $1 = d(z,z') \leqslant d(z,x) + d(x,z') < 1$; sprzeczność.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $|Y \cap D| \leqslant \kappa$ dla każdego podzbioru $D \in \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha)$. Niech

$$\mathcal{K} = \{D \in \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha) : |Y \cap D| = \kappa\}.$$

Przypuśćmy, że $|Y \setminus \bigcup\mathcal{K}| \geqslant \kappa$. Wybierzmy $T \in [Y \setminus \bigcup\mathcal{K}]^\kappa$. Zatem $|T \cap D| < \kappa$ dla każdego $D \in \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha)$. Skoro $|T| = \kappa$, to istnieje takie $\beta < \kappa^+$, że $T \subseteq X_\beta$. Z definicji operacji S wynika, że istnieje punkt środkowy $t \in X_{\beta+2}$ podprzestrzeni T; sprzeczność, ponieważ $T \in [Y]^\kappa$ oraz Y jest dziedzicznie bez punktów środkowych. Zatem $|Y \setminus \bigcup\mathcal{K}| < \kappa$. Wtedy $|Y \cap \bigcup\mathcal{K}| = |Y|$. Jeśli $|\mathcal{K}| \leqslant \kappa^+$, to

$$|Y \cap \bigcup\mathcal{K}| = |\bigcup_{D\in\mathcal{K}} Y \cap D| \leqslant |\mathcal{K}| \cdot \sup\{|Y \cap D| : D \in \mathcal{K}\} \leqslant |\mathcal{K}| \cdot \kappa \leqslant \kappa^+;$$

sprzeczność, ponieważ $|Y| > \kappa^+$. Zatem $|\mathcal{K}| > \kappa^+$.

Przypuśćmy, że istnieje takie $\alpha < \kappa^+$ oraz dwa punkty $x, y \in X_{\alpha+2} \setminus X_{\alpha+1}$, że $D_x, D_y \in \mathcal{K}$. Skoro $|D_x \cap Y| = |D_y \cap Y| = \kappa$, to istnieją $x' \in D_x \cap Y \setminus \{x\}$ oraz $y' \in D_y \cap Y \setminus \{y\}$. Z własności (A3) wynika, że

$$d(x',y') = d(x',x) + d(x,y) + d(y,y') = 2 + d(x,y);$$

sprzeczność, ponieważ $d(x',y') = 1$. Zatem $|\mathcal{K} \cap \mathcal{A}(X_{\alpha+1}, X_\alpha)| \leqslant 1$ dla każdego $\alpha < \kappa^+$. Skoro $|\mathcal{K}| > \kappa^+$, to istnieje taki podzbiór $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X_{\kappa^+}$, że $\{D_{x_\alpha} : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{K}$ oraz $x_\alpha \in X_{\alpha+2} \setminus X_{\alpha+1}$ dla każdego $\alpha < \kappa$. Skoro $|D_{x_\alpha} \cap Y| = \kappa$ dla każdego $\alpha < \kappa$, to na mocy lematu 5.9 istnieje takie $T \in [Y]^\kappa$, że $|T \cap D_{x_\alpha}| \leqslant 1$ dla każdego $\alpha < \kappa$. Ponownie otrzymujemy sprzeczność z dziedzicznym brakiem punktów środkowych podprzestrzeni Y. $\square$

Lemat 5.11. *Dla każdego $x \in X_{\kappa^+}$, jeśli D jest podprzestrzenią dziedzicznie bez punktów środkowych oraz $x \in D$, to $|D| \leqslant |D_x|$.*

Dowód. Ustalmy $x \in X_{\kappa^+}$. Istnieje takie $\alpha < \kappa^+$, że $x \in X_{\alpha+2} \setminus X_{\alpha+1}$. Ustalmy podprzestrzeń D dziedzicznie bez punktów środkowych i załóżmy, że $x \in D$. Jeśli $|D| \leqslant \kappa^+$, to $|D| \leqslant |D_x|$, ponieważ $|D_x| > \kappa^+$ na mocy własności (A1). Załóżmy więc, że $|D_x| > \kappa^+$. Na mocy lematu 5.10 podprzestrzeń D jest podzbiorem pewnego elementu rodziny $\bigcup_{\beta<\kappa^+} \mathcal{A}(X_{\beta+1}, X_\beta)$. Zatem istnieje takie $\beta < \kappa^+$ oraz $y \in X_{\beta+2} \setminus X_{\beta+1}$, że $D \subseteq D_y$. Jeśli $\beta < \alpha$, to $\beta + 3 \leqslant \alpha + 2$, $D_y \subseteq X_{\beta+3}$, a więc $|D_y| \leqslant |X_{\beta+3}| \leqslant |X_{\alpha+2}| < |D_x|$, ponieważ $X_{\beta+3} \subseteq X_{\alpha+2}$.

Jeśli $\beta = \alpha$, to z własności (A1) wynika, że $D_y = D_x$.

Jeśli $\beta > \alpha$, to $X_{\alpha+2} \subseteq X_{\beta+1}$. Zatem $x \in D_y \cap X_{\beta+1} = \emptyset$. □

Twierdzenie 5.12. *Jeśli $x, y \in X_{\kappa^+}$ są różnymi punktami, to $\tau(x, X_{\kappa^+}) \neq \tau(y, X_{\kappa^+})$.*

Dowód. Ustalmy $x, y \in X_{\kappa^+}$, $x \neq y$. Z lematu 5.7 oraz lematu 5.11 wynika, że $\tau(x, X_{\kappa^+}) = |D_x|$. Jeśli $r(x) = r(y)$, to na mocy własności (A2) otrzymujemy $|D_x| \neq |D_y|$. Jeśli $r(x) < r(y)$, to na mocy własności (A1) otrzymujemy $|D_x| < |D_y|$. □

Twierdzenie 5.13. *X_{κ^+} jest sztywną przestrzenią metryczną.*

Dowód. Załóżmy, że $f : X_{\kappa^+} \to X_{\kappa^+}$ jest izometrią i ustalmy $x \in X_{\kappa^+}$. Na mocy lematu 3.2 otrzymujemy $\tau(x, X_{\kappa^+}) = \tau(f(x), X_{\kappa^+})$. Z twierdzenia 5.12 wynika, że $x = f(x)$. □

Wniosek 5.14. *Dla każdej liczby kardynalnej κ istnieje κ-superuniwersalna sztywna przestrzeń metryczna.*

Twierdzenie 5.15. *Jeśli $\lambda > \kappa$ jest liczbą silnie nieosiągalną, to istnieje κ-superuniwersalna sztywna przestrzeń metryczna mocy λ.*

Dowód. Niech $\lambda > \kappa$ będzie liczbą silnie nieosiągalną. Zauważmy, że jeśli X jest przestrzenią metryczną, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}(X)$ oraz $Y \subseteq X$, to

$$|F(X)| \leqslant |X| + \sum_{\mu<\kappa} \sum_{Y \in [X]^\mu} \mathfrak{c}^{|Y|} \leqslant |X| + \kappa \cdot |X|^\mu \cdot \mathfrak{c}^{|X|} \leqslant 2^{\kappa \cdot |X|},$$

$$|S(X, \mathcal{G})| \leqslant |X| + |[X]^\kappa| \leqslant 2^{\kappa \cdot |X|},$$

$$|A(X, Y)| \leqslant \aleph_{\kappa + |X| \cdot 3}.$$

Ustalmy $\alpha < \lambda$ i załóżmy, że $|X_\beta| < \lambda$ dla każdego $\beta < \alpha$. Jeśli α jest liczbą graniczną, to z regularności liczby λ otrzymujemy nierówność $|\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta| < \lambda$. Jeśli $\alpha = \beta + 2$, to

$$|A(X_{\beta+1}, X_\beta)| \leqslant \aleph_{\kappa + |X_{\beta+1}| \cdot 3} < \lambda$$

oraz

$$|S(A(X_{\beta+1}, X_\beta), \bigcup_{\delta \leqslant \beta} \mathcal{A}(X_{\delta+1}, X_\delta))| \leqslant 2^{\kappa \cdot |A(X_{\beta+1}, X_\beta)|} < \lambda.$$

Jeszcze raz korzystając z oszacowania mocy rozszerzenia F otrzymujemy $|X_\alpha| = |F(S(A(X_{\beta+1}, X_\beta), \bigcup_{\delta \leqslant \beta} \mathcal{A}(X_{\delta+1}, X_\delta)))| < \lambda$. Stąd $|X_\lambda| = \lambda$. $\square$

Część II

Kraty

W tej części przedstawimy związki krat dystrybutywnych z przestrzeniami zwartymi. Przez *kratę* będziemy rozumieć zbiór uporządkowany, którego każdy skończony podzbiór ma kres górny oraz kres dolny. Zatem $(L, \leqslant)$ jest kratą, gdy w L istnieje element najmniejszy $\mathbf{0}_L$ oraz element największy $\mathbf{1}_L$, a dla każdego $x, y \in L$ istnieją supremum $x \vee y = \sup\{x, y\}$ oraz infimum $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Jeśli nie będzie prowadziło to do nieporozumień, to będziemy pisać $\mathbf{0}$ oraz $\mathbf{1}$ zamiast odpowiednio $\mathbf{0}_L$ oraz $\mathbf{1}_L$. Skoro każda para elementów kraty ma dokładnie jedno infimum oraz supremum, to w danej kracie wyznaczone są dwie operacje dwuargumentowe $\vee$ oraz $\wedge$, zatem kratę $(L, \leqslant)$ można również rozumieć jako strukturę algebraiczną $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$. Wprost z definicji otrzymujemy następujące własności:

(a) $x \vee y = y \vee x$ and $x \wedge y = y \wedge x$ (przemienność),

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ oraz $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (łączność),

(c) $x = x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y)$ (pochłanianie).

Strukturę algebraiczną spełniającą warunki (a)–(c) również nazywamy kratą; zob. np. Twierdzenie 1 w [2], s. 44. W dalszej części zarówno kratę $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ jak i zbiór L będziemy oznaczać tym samym symbolem $\mathbb{L}$. Własności (a) oraz (b) wynikają bezpośrednio z definicji operacji supremum oraz infimum. Własność (c) jest konsekwencją następujących równoważności:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

Wobec przemienności i łączności, z powyższych równoważności wynika, że

$$x \leqslant y \Rightarrow x \wedge z \leqslant y \wedge z \text{ oraz } x \vee z \leqslant y \vee z$$

dla każdego $x, y, z \in \mathbb{L}$. W szczególności

$$x \wedge y \leqslant x \wedge (y \vee z) \quad \text{oraz} \quad x \wedge z \leqslant x \wedge (y \vee z),$$

i ostatecznie

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z).$$

Powyższa nierówność na ogół jest ostra. Kratę $\mathbb{L}$ nazywamy *dystrybutywną*, gdy dla każdego $x, y, z \in \mathbb{L}$ prawdziwa jest równość:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Mówimy, że krata $\mathbb{K}$ jest *podkratą kraty* $\mathbb{L}$, gdy $\mathbb{K}$ jest podzbiorem $\mathbb{L}$, $\mathbf{0}_{\mathbb{L}}, \mathbf{1}_{\mathbb{L}} \in \mathbb{K}$ oraz operacje kratowe w $\mathbb{K}$ są indukowane z kraty $\mathbb{L}$.

Oczywiście podkrata kraty dystrybutywnej jest dystrybutywna.

Ważne przykłady krat dystrybutywnych są związane z przestrzeniami topologicznymi. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to symbolem $\mathrm{cl}\, F$ będziemy oznaczać domknięcie podzbioru $F \subseteq X$. Zbiór

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(X) = \{F \subseteq X : F = \mathrm{cl}\, F\}$$

jest podkratą kraty $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X ze zwykłymi operacjami na zbiorach. Oczywiście $\mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest kratą dystrybutywną.

Definicja 5.16 (Kubiś [11])**.** Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ niech będzie podkratą kraty $\mathbb{C}\mathrm{l}(X)$. Wtedy $\mathbb{L}$ nazywamy *kratą bazową*, gdy rodzina $\{X \setminus F : F \in \mathbb{L}\}$ jest bazą topologii przestrzeni X.

W dalszej części pracy pojęcie to będzie odgrywało istotną rolę.

Mówimy, że krata $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ jest *normalna*, gdy jest dystrybutywna oraz dla każdego $a, b \in \mathbb{L}$ takiego, że $a \wedge b = \mathbf{0}$, istnieją takie $x, y \in \mathbb{L}$, że

$$x \vee y = \mathbf{1} \quad \text{oraz} \quad x \wedge a = y \wedge b = \mathbf{0}.$$

Każda algebra Boole'a jest kratą normalną. Przypomnijmy, że krata dystrybutywna $\mathbb{B}$ jest *algebrą Boole'a* (*kratą Boole'a*), gdy jest komplementarna, tzn. dla każdego $a \in \mathbb{B}$ istnieje dokładnie jeden taki element $-a \in \mathbb{B}$, że $a \vee -a = \mathbf{1}$ oraz $a \wedge -a = \mathbf{0}$. Zatem jeśli $\mathbb{B}$ jest algebrą Boole'a, to dla $a \wedge b = \mathbf{0}$ wystarczy przyjąć $x = -a$ oraz $y = -b$.

Wprost z definicji przestrzeni normalnej otrzymujemy następujący

Lemat 5.17. *Jeśli X jest T_1-przestrzenią topologiczną, to krata $\mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią normalną.*

Podkrata kraty normalnej nie musi być kratą normalną: każda topologia jest podkratą kraty wszystkich podzbiorów danego zbioru. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, a $U, V \subseteq X$ są takimi podzbiorami otwartymi, że $\mathrm{cl}\, U \cap \mathrm{cl}\, V \neq \emptyset$, to nie istnieją takie podzbiory otwarte $U', V' \subseteq X$, że $U' \cup V' = X$ oraz $U \cap U' = V \cap V' = \emptyset$. Ponadto, jeśli X jest T_1-przestrzenią, to topologia przestrzeni X jest kratą bazową topologii dyskretnej na zbiorze X. Zatem nawet jeśli przestrzeń topologiczna jest normalna, to nie każda jej krata bazowa jest normalna.

Dla przestrzeni zwartej Hausdorffa otrzymujemy następujący

Lemat 5.18. *Każda krata bazowa przestrzeni zwartej Hausdorffa jest normalna.*

Dowód. Niech $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ będzie kratą bazową przestrzeni zwartej Hausdorffa X. Na mocy założenia

$$\mathcal{B} = \{X \setminus F : F \in \mathbb{L}\}$$

jest bazą przestrzeni X zamkniętą ze względu na skończone sumy oraz przekroje. Ustalmy rozłączne $A, B \in \mathbb{L}$. Z normalności przestrzeni X otrzymujemy takie podzbiory otwarte $U, V \subseteq X$, że $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ oraz $U \cap V = \emptyset$. Skoro A jest zwarte, $\mathcal{B}$ jest bazą, a $\mathbb{L}$ jest zamknięte ze względu na przekroje skończone, to istnieje takie $F \in \mathbb{L}$, że

$$A \subseteq X \setminus F \subseteq U.$$

Podobnie stwierdzamy istnienie takiego $G \in \mathbb{L}$, że

$$B \subseteq X \setminus G \subseteq V.$$

Zatem

$$A \cap F = B \cap G = \emptyset,$$

a także $X \setminus F \subseteq U$ oraz $X \setminus G \subseteq V$. Stąd $F \cup G = X$, ponieważ $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Odnotujmy jeszcze jeden przykład kraty normalnej. Niech $\mathrm{C}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych, określonych na przestrzeni topologicznej X. Jeśli X jest przestrzenią Tichonowa (niekoniecznie przestrzenią normalną), to podzbiór $A \subseteq X$ nazywamy *zero-zbiorem*, gdy $A = f^{-1}[\{0\}]$ dla pewnego $f \in \mathrm{C}(X)$. Równoważnie, zero-zbiór to przeciwobraz podzbioru domkniętego poprzez funkcję ciągłą o wartościach rzeczywistych. Rodzinę wszystkich zero-zbiorów przestrzeni X oznaczamy symbolem $\mathcal{Z}(X)$; zatem

$$\mathcal{Z}(X) = \{f^{-1}[\{0\}] : f \in \mathrm{C}(X)\}.$$

Oczywiście rodzina $\mathcal{Z}(X)$ składa się ze zbiorów domkniętych. Skoro rodzina $\mathrm{C}(X)$ jest zamknięta ze względu na złożenie z funkcją wartości bezwzględnej, to $|f|, |g| \in \mathrm{C}(X)$ dla każdego $f, g \in \mathrm{C}(X)$. Otrzymujemy zatem

$$f^{-1}[\{0\}] \cup g^{-1}[\{0\}] = (f \cdot g)^{-1}[\{0\}] \text{ oraz}$$
$$f^{-1}[\{0\}] \cap g^{-1}[\{0\}] = (|f| + |g|)^{-1}[\{0\}].$$

Łatwo zauważyć, że zbiory $\emptyset, X$ są reprezentowane przez funkcje stałe, tzn. $\emptyset = f^{-1}[\{0\}]$, gdzie f jest stale równe 1 oraz $X = g^{-1}[\{0\}]$, gdzie g jest funkcją stale równą 0. Zatem $\mathcal{Z}(X)$ jest podkratą kraty $\mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ wszystkich podzbiorów domkniętych przestrzeni X. W szczególności $\mathcal{Z}(X)$ jest kratą dystrybutywną. Z definicji przestrzeni Tichonowa wynika natychmiast, że $\mathcal{Z}(X)$ jest kratą bazową przestrzeni Tichonowa X.

Lemat 5.19. *Jeśli X jest przestrzenią Tichonowa, to krata $\mathcal{Z}(X)$ jest normalna.*

Dowód. Ustalmy takie $f, g \in \mathrm{C}(X)$, że $f^{-1}[\{0\}] \cap g^{-1}[\{0\}] = \emptyset$. Funkcja

$$h = \frac{|f|}{|f| + |g|}$$

jest zdefiniowana poprawnie oraz jest ciągła. Ponadto

$$h^{-1}[\{0\}] = f^{-1}[\{0\}] \quad \text{oraz} \quad h^{-1}[\{1\}] = g^{-1}[\{0\}].$$

Wtedy zbiory $F = h^{-1}[[0, 1/2]]$ i $G = h^{-1}[[1/2, 1]]$ należą do $\mathcal{Z}(X)$, a także $F \cup G = X$. Zauważmy, że

$$f^{-1}[\{0\}] \cap G = g^{-1}[\{0\}] \cap F = \emptyset.$$

□

Definicja 5.20. Mówimy, że krata $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest *dyzjunktywna*, gdy dla każdego $x \in X$ oraz $F \in \mathbb{L}$, jeśli $x \notin F$, to istnieje takie $G \in \mathbb{L}$, że $x \in G$ oraz $F \cap G = \emptyset$.

Jeśli X jest T_1-przestrzenią, to krata $\mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest dyzjunktywna. Nie każda krata bazowa $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest dyzjunktywna, nawet jeśli przestrzeń X jest normalna: jeśli X jest przestrzenią dyskretną nieskończoną, to

$$\mathbb{L} = \{F \subseteq X : |X \setminus F| < \omega\} \cup \{\emptyset\}$$

jest kratą bazową, która nie jest dyzjunktywna.

Oprócz krat wszystkich podzbiorów domkniętych istnieją także inne naturalne przykłady krat dyzjunktywnych.

Lemat 5.21. *Dla każdej przestrzeni Tichonowa X krata $\mathcal{Z}(X)$ jest dyzjunktywna.*

Dowód. Załóżmy, że $f \in \mathrm{C}(X)$ oraz $x \notin f^{-1}[\{0\}]$. Skoro X jest przestrzenią Tichonowa, to istnieje taka funkcja ciągła $\varphi : X \to [0, 1]$, że $\varphi(x) = 0$ oraz $\varphi[f^{-1}[\{0\}]] \subseteq \{1\}$. Wtedy $\varphi^{-1}[\{0\}] \cap f^{-1}[\{0\}] = \emptyset$ oraz $x \in \varphi^{-1}[\{0\}]$. □

Lemat 5.22. *Jeśli X jest zwartą T_1-przestrzenią, to każda krata bazowa $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest dyzjunktywna.*

Dowód. Ustalmy $G \in \mathbb{L}$ oraz $x \notin G$. Skoro rodzina $\mathcal{B} = \{X \setminus F : F \in \mathbb{L}\}$ jest bazą przestrzeni X oraz $\mathbb{L}$ jest zamknięte ze względu przekroje skończone, to, na mocy zwartości przestrzeni X, istnieje takie $F \in \mathbb{L}$, że $x \in F$ oraz $F \cap G = \emptyset$. □

6 Przestrzenie Wallmana

Mówimy, że niepusty podzbiór ξ kraty $\mathbb{L}$ jest *scentrowany*, gdy

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \xi \Rightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n > \mathbf{0}.$$

Każdy taki podzbiór, na mocy twierdzenia Tarskiego, jest zawarty w maksymalnym (ze względu na inkluzję) podzbiorze scentrowanym; zob. np. [2]. Dla każdej kraty $\mathbb{L}$ definiujemy rodzinę

$$\mathrm{Ult}(\mathbb{L}) = \{\xi \subseteq \mathbb{L} : \xi \text{ jest maksymalną rodziną scentrowaną}\}.$$

Elementy rodziny $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ nazywamy *ultrafiltrami* w kracie $\mathbb{L}$. Elementarne własności ultrafiltrów są dobrze znane, ale dla wygody Czytelnika przytaczamy je poniżej.

Lemat 6.1. *Jeśli* $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ *oraz* $x, y \in \mathbb{L}$, *to*

(1) $\mathbf{0} \notin \xi$ *oraz* $\mathbf{1} \in \xi$,

(2) $x \in \xi$ *oraz* $x \leqslant y \Rightarrow y \in \xi$,

(3) $x, y \in \xi \Rightarrow x \wedge y \in \xi$,

(4) $x \notin \xi \Rightarrow (\exists y \in \xi)(x \wedge y = \mathbf{0})$,

(5) $x \vee y \in \xi \Rightarrow x \in \xi$ *lub* $y \in \xi$.

Dowód. Warunek (1) jest oczywisty. Warunki (2) oraz (3) wynikają bezpośrednio z maksymalności podzbioru ξ oraz z tego, że ξ powiększone o odpowiednio y oraz $x \wedge y$, jest scentrowane. W celu uzasadnienia warunku (4) załóżmy, że $x \wedge y > \mathbf{0}$ dla każdego $y \in \xi$. Wtedy $\xi \cup \{x\}$ jest scentrowane, zatem $x \in \xi$.

Aby uzasadnić warunek (5) załóżmy, że $x \notin \xi$ oraz $y \notin \xi$. Wtedy z warunku (4) wynika, że istnieją takie $a, b \in \xi$, że $x \wedge a = y \wedge b = \mathbf{0}$. Zatem

$$(x \vee y) \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a \wedge b) \vee (y \wedge a \wedge b) = \mathbf{0},$$

sprzeczność, ponieważ $a \wedge b \in \xi$ oraz $x \vee y \in \xi$. $\square$

Z następującego lematu wynika, że własności (1)–(5) charakteryzują ultrafiltry.

Lemat 6.2. *Jeśli* $\xi \subseteq \mathbb{L}$ *spełnia dla każdego* $x, y \in \mathbb{L}$ *warunki*

(1) $\mathbf{0} \notin \xi$ *and* $\mathbf{1} \in \xi$,

(2) $x, y \in \xi \Rightarrow x \wedge y \in \xi$,

(3) $x \notin \xi \Rightarrow (\exists y \in \xi)(x \wedge y = \mathbf{0})$,

to ξ *jest ultrafiltrem.*

Dowód. Ustalmy taką rodzinę scentrowaną $\eta \subseteq \mathbb{L}$, że $\xi \subseteq \eta$. Przypuśćmy, że $x \in \eta \setminus \xi$. Skoro $x \notin \xi$, to istnieje takie $y \in \xi$, że $x \wedge y = \mathbf{0}$, sprzeczność, ponieważ $x \wedge y \in \eta$ oraz η jest scentrowane. □

Jeśli $\mathbb{L}$ jest kratą dystrybutywną z elementami $\mathbf{0}$ oraz $\mathbf{1}$, to na zbiorze $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ rozważamy topologię generowaną przez rodzinę $\mathcal{B}(\mathbb{L}) = \{\mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus u^* : u \in \mathbb{L}\}$, gdzie

$$u^* = \{\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) : u \in \xi\}.$$

Skoro $\mathbf{0}^* = \emptyset$, to $\mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \in \mathcal{B}(\mathbb{L})$.

Topologię przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ nazywamy *topologią Wallmana*, a zbiór $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ wraz z topologią nazywamy *przestrzenią Wallmana kraty* $\mathbb{L}$. Przestrzenie Wallmana wprowadził Henry Wallman w roku 1938; zob. [14].

Następny lemat stwierdza, że rodzina

$$\mathcal{C}(\mathbb{L}) = \{u^* : u \in \mathbb{L}\}$$

jest zamknięta ze względu na skończone sumy i przekroje. Zatem jest podkratą kraty $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathrm{Ult}(\mathbb{L}))$ wszystkich podzbiorów domkniętych przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$, jest ponadto kratą bazową przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$, tzn. każdy domknięty podzbiór przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ jest przekrojem pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{C}(\mathbb{L})$.

Lemat 6.3. *Dla każdego* $u, w \in \mathbb{L}$ *prawdziwe są następujące równości*

$$(u \vee w)^* = u^* \cup w^*,$$

$$(u \wedge w)^* = u^* \cap w^*.$$

W szczególności rodzina $\mathcal{C}(\mathbb{L})$ *jest kratą bazową przestrzeni Wallmana* $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$.

Dowód. Z warunków (2) oraz (5) lematu 6.1 wynika, że

$$u \vee w \in \xi \Leftrightarrow u \in \xi \text{ or } w \in \xi,$$

gdzie na mocy warunków (2) i (3) tego samego lematu otrzymujemy

$$u \wedge w \in \xi \Leftrightarrow u \in \xi \text{ and } w \in \xi.$$

□

Warunek dyzjunktywności możemy rozważać w odniesieniu do podkrat kraty wszystkich podzbiorów domkniętych ustalonej przestrzeni topologicznej. W pozostałych przypadkach możemy rozważać własność separowalności. Mówimy, że krata $\mathbb{L}$ *separowalna*, gdy dla każdego $x, y \in \mathbb{L}$, jeśli $x \nleqslant y$, to istnieje takie $z \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$, że $z \leqslant x$ oraz $y \wedge z = \mathbf{0}$.

Dla krat separowalnych otrzymujemy następujące

Twierdzenie 6.4. *Jeśli $\mathbb{L}$ jest kratą separowalną, to $\mathbb{L}$ jest izomorficzne z $\mathcal{C}(\mathbb{L})$.*

Dowód. Z lematu 6.3 wynika, że funkcja $\varphi : \mathbb{L} \to \mathcal{C}(\mathbb{L})$ dana wzorem

$$\varphi(u) = u^*$$

jest homomorfizmem surjektywnym. Wystarczy więc pokazać, że φ jest różnowartościowe. Załóżmy, że $u, w \in \mathbb{L}$ oraz $u \nleqslant w$. Wtedy istnieje takie $z \in \mathbb{L}$, że $\mathbf{0} < z \leqslant u$ oraz $z \wedge w = \mathbf{0}$. Zatem $\emptyset \neq z^* \subseteq u^*$ oraz $z^* \cap w^* = (z \wedge w)^* = \mathbf{0}^* = \emptyset$. Stąd $u^* \neq w^*$. □

Następujące twierdzenie pochodzi od Wallmana [14].

Twierdzenie 6.5 (twierdzenie Wallmana)**.** *Jeśli $\mathbb{L}$ kratą dystrybutywną z elementami $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$, to przestrzeń Wallmana $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ jest zwartą T_1-przestrzenią. Jeśli ponadto krata $\mathbb{L}$ jest normalna, to $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ przestrzenią zwartą Hausdorffa.*

Dowód. Ustalmy rodzinę scentrowaną $\mathcal{F}$ domkniętych podzbiorów przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$. Skoro każdy element rodziny $\mathcal{F}$ jest przekrojem pewnej podrodziny rodziny $\{u^* : u \in \mathbb{L}\}$, to możemy zakładać, że $\mathcal{F} \subseteq \{u^* : u \in \mathbb{L}\}$. Niech

$$F = \{u \in \mathbb{L} : u^* \in \mathcal{F}\}.$$

Skoro $\mathcal{F}$ jest scentrowane, to na mocy lematu 6.3 rodzina F jest scentrowana w $\mathbb{L}$. Niech $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ będzie takie, że $F \subseteq \xi$. Wtedy $\xi \in u^*$ dla każdego $u \in F$, zatem $\xi \in \bigcap \mathcal{F}$.

Jeśli $\xi, \eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ oraz $\xi \neq \eta$, to $\eta \nsubseteq \xi$ oraz $\xi \nsubseteq \eta$. Wtedy istnieją $u \in \xi \setminus \eta$ oraz $w \in \eta \setminus \xi$. Stąd $\xi \in u^* \setminus w^*$ oraz $\eta \in w^* \setminus u^*$, a zatem podzbiory jednoelementowe przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ są domknięte. Z lematu 6.1(5) wynika, że istnieją takie $x \in \eta$ oraz $y \in \xi$, że $u \wedge x = \mathbf{0} = w \wedge y$. Zatem $x \wedge w \in \eta$, $y \wedge u \in \xi$ oraz

$$(x \wedge w) \wedge (y \wedge u) = \mathbf{0}.$$

Stąd jeśli krata jest normalna, to istnieją takie $a, b \in \mathbb{L}$, że $a \vee b = \mathbf{1}$ oraz

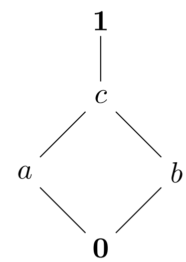
$$(x \wedge w) \wedge a = \mathbf{0} = (y \wedge u) \wedge b.$$

Wtedy $a^* \cup b^* = \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$, a więc

$$U = \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus a^* \quad \text{and} \quad V = \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus b^*$$

są podzbiorami otwartymi i rozłącznymi przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$. Skoro $x \wedge w \in \eta$ oraz $(x \wedge w) \wedge a = \mathbf{0}$, to $a \notin \eta$. Stąd $\eta \notin a^*$, a zatem $\eta \in U$. Podobnie pokazujemy, że $\xi \in V$. □

Przykład 6.6. Niech $\mathbb{L}$ będzie kratą o pięciu elementach $\mathbf{0}, a, b, c, \mathbf{1}$, gdzie $\mathbf{0} < a, b < c < \mathbf{1}$ są jej jedynymi nierównościami:



$\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$, jako skończona T_1-przestrzeń, jest przestrzenią Hausdorffa. Mimo to krata $\mathbb{L}$ nie jest normalna, nie jest też separowalna.

Zauważmy, że jeśli $\mathbb{K}$ jest kratą separowalną, której przestrzeń Wallmana jest przestrzenią Hausdorffa, to $\mathbb{K}$ jest kratą normalną, ponieważ jest izomorficzna z bazą $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ przestrzeni zwartej Hausdorffa.

Jeśli $\mathbb{L}$ jest algebrą Boole'a, to topologia Wallmana pokrywa się z topologią Stone'a na zbiorze $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$. Istotnie, w przypadku algebr Boole'a otrzymujemy

$$\mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus u^* = (-u)^*$$

dla każdego $u \in \mathbb{L}$, ponieważ, na mocy lematu 6.1, mamy

$$u^* \cup (-u)^* = (u \vee -u)^* = \mathbf{1}^* = \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$$

oraz

$$u^* \cap (-u)^* = (u \wedge -u)^* = \mathbf{0}^* = \emptyset.$$

Twierdzenie 6.4 mówi, że każda krata separowalna jest izomorficzna z kratą bazową pewnej przestrzeni Wallmana. Ten fakt razem z poprzednim twierdzeniem oznacza, że każda krata normalna i separowalna jest izomorficzna z kratą bazową przestrzeni zwartej Hausdorffa.

Z lematu 5.22, twierdzenia 6.4 oraz twierdzenia 6.5 wynika, że każda krata separowalna jest izomorficzna z dyzjunktywną bazą pewnej zwartej T_1-przestrzeni. Mimo to istnieją separowalne kraty bazowe, które nie są dyzjunktywne.

Przykład 6.7. Niech $\mathbb{L}$ będzie podkratą kraty $\mathcal{P}(\omega)$ generowaną przez rodzinę

$$\{\{n\} : 1 \leqslant n < \omega\} \cup \{\{0\} \cup \{k : k \geqslant n\} : n < \omega\} \cup \{\{2n+1 : n < \omega\}\}.$$

Zauważmy, że jeśli $F \in \mathbb{L}$, to $0 \in F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus F$ jest skończone. Ustalmy takie $F, G \in \mathbb{L}$, że $F \nsubseteq G$ i przypuśćmy, że

$$(F \setminus G) \cap (X \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Wtedy $F \setminus G = \{0\}$, $0 \in F$, zatem $X \setminus F$ oraz $X \setminus G$ są skończone, a stąd $0 \in G$, sprzeczność. Zatem istnieje $n \in (F \setminus G) \setminus \{0\}$. Wtedy $\{n\} \in \mathbb{L}$, co pokazuje, że krata $\mathbb{L}$ jest separowalna. Krata $\mathbb{L}$ nie jest dyzjunktywna jako krata bazowa topologii generowanej przez rodzinę $\{\omega \setminus F : F \in \mathbb{L}\}$. Istotnie, nie istnieje takie $F \in \mathbb{L}$, że $0 \in F$ oraz $F \cap \{2n+1 : n < \omega\} = \emptyset$.

Przypomnijmy, że funkcję ciągłą $f : X \to Y$ nazywamy *zanurzeniem*, gdy jest homeomorfizmem przestrzeni X na obraz $f[X]$. Ponadto otrzymujemy następujące twierdzenie; zob. [1].

Twierdzenie 6.8. *Niech $\mathbb{L} \subseteq \mathrm{Cl}(X)$ będzie kratą bazową dyzjunktywną i normalną T_1-przestrzeni X. Wtedy funkcja $\iota : X \to \mathcal{P}(\mathbb{L})$ dana wzorem*

$$\iota(x) = \{F \in \mathbb{L} : x \in F\}$$

jest zanurzeniem przestrzeni X w $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ oraz $\iota[X]$ jest podzbiorem gęstym przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$.

Dowód. Na mocy lematu 6.2 $\iota(x)$ jest ultrafiltrem dla każdego $x \in X$. Istotnie, jeśli $G \in \mathbb{L}$ oraz $G \notin \iota(x)$, to, wobec dyzjunktywności kraty $\mathbb{L}$, istnieje takie $F \in \iota(x)$, że $F \cap G = \emptyset$.

Załóżmy, że $x, y \in X$ oraz $x \neq y$. Skoro X jest T_1-przestrzenią, to istnieje takie $G \in \mathbb{L}$, że $x \in G$ oraz $y \notin G$. Z dyzjunktywności kraty $\mathbb{L}$ wynika, że istnieje takie $F \in \mathbb{L}$, że $y \in F$ oraz $F \cap G = \emptyset$. Stąd $\iota(x) \neq \iota(y)$, a zatem ι jest różnowartościowe.

Aby udowodnić, że $\iota[X]$ jest podzbiorem gęstym, przypuśćmy, że

$$\iota[X] \cap (\mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus F^*) = \emptyset$$

dla pewnego $F \in \mathbb{L}$. Wtedy $\iota[X] \subseteq F^*$, co oznacza, że $\iota(x) \in F^*$ dla każdego $x \in X$. Stąd $F \in \iota(x)$ dla każdego $x \in X$, a więc $F = X$. Tym samym $\mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus F^* = \emptyset$.

W celu uzasadnienia, że ι jest homeomorfizmem przestrzeni X na $\iota[X]$ wystarczy pokazać, że
$$\iota[F] = F^* \cap \iota[X]$$
dla każdego $F \in \mathbb{L}$. To jednak wynika z następujących równoważności:
$$x \in F \Leftrightarrow F \in \iota(x) \Leftrightarrow \iota(x) \in F^*.$$
□

Jeśli X jest przestrzenią zwartą Hausdorffa, to na mocy lematu 5.22 oraz lematu 5.18 każda krata bazowa $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest kratą dyzjunktywną i normalną. Zatem z twierdzenia 6.8 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 6.9. *Jeśli X przestrzenią zwartą Hausdorffa, a $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ jest kratą bazową, to* $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ *jest homeomorficzne X.*

Uwaga 6.10. Homeomorfizm przestrzeni X oraz $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ można otrzymać inaczej: dla każdego ultrafiltru $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ istnieje dokładnie jeden taki punkt $x(\xi) \in X$, że
$$\xi = \{F \in \mathbb{L} : x(\xi) \in F\}.$$
Funkcja $f : \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \to X$ dana wzorem
$$f(\xi) = x(\xi)$$
jest homeomorfizmem, a jej odwrotnością jest ι zdefiniowane w twierdzeniu 6.8.

Ostatnie twierdzenie mówi, że każdą przestrzeń zwartą Hausdorffa można opisać kratami podzbiorów domkniętych na wiele różnych sposobów w tym sensie, że ta sama przestrzeń topologiczna może być przestrzenią Wallmana krat nieizomorficznych. Wystarczy dla przestrzeni zwartej Hausdorffa rozważyć dwie bazy $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ różniące się mocą, a więc nieizomorficzne. Możemy zakładać, że bazy $\mathcal{B}_1$ oraz $\mathcal{B}_2$ są zamknięte na skończone sumy oraz przekroje. Wtedy $\mathbb{L}_1 = \{X \setminus U : U \in \mathcal{B}_1\}$ oraz $\mathbb{L}_2 = \{X \setminus U : U \in \mathcal{B}_2\}$ są nieizomorficznymi kratami bazowymi o homeomorficznych przestrzeniach Wallmana. W teorii algebr Boole'a sytuacja jest zupełnie inna: każda przestrzeń zwarta zerowymiarowa jest przestrzenią Stone'a algebry wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych tej przestrzeni. Reprezentacja ta jest jedyna. Istotnie, jeśli $\mathbb{B}_1$ oraz $\mathbb{B}_2$ są podkratami kraty wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych oraz są bazami tej samej przestrzeni zwartej zerowymiarowej, to $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$. Łatwo zauważyć, że kraty bazowych podzbiorów domkniętych nie mają tej własności.

7 Reprezentacje homomorfizmów

Pokażemy, że każdy homomorfizm krat normalnych jest reprezentowany przez dokładnie jedną funkcję ciągłą pomiędzy przestrzeniami Wallmana tych krat. Odpowiedniość ta prowadzi do określenia funktora z kategorii wszystkich krat normalnych wraz z ich homomorfizmami w kategorię przestrzeni zwartych Hausdorffa wraz z funkcjami ciągłymi. Aby uniknąć nieporozumień przypomnijmy, że funkcja $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ jest homomorfizmem krat, gdy $\varphi(\mathbf{0}_\mathbb{K}) = \mathbf{0}_\mathbb{L}$, $\varphi(\mathbf{1}_\mathbb{K}) = \mathbf{1}_\mathbb{L}$ oraz φ zachowuje operacje krat, tzn.

$$\varphi(u \vee w) = \varphi(u) \vee \varphi(w) \quad \text{and} \quad \varphi(u \wedge w) = \varphi(u) \wedge \varphi(w)$$

dla każdego $u, w \in \mathbb{K}$. Rezultaty od lematu 7.1 do twierdzenia 7.5 można znaleźć również w [11].

Lemat 7.1. *Niech $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ będzie homomorfizmem krat normalnych $\mathbb{K}$ oraz $\mathbb{L}$. Wtedy dla każdego ultrafiltru $\xi \subseteq \mathbb{L}$ zbiór*

$$A_\xi = \{x \in \mathbb{K} : x \wedge y > \mathbf{0} \textit{ for all } y \in \varphi^{-1}[\xi]\}$$

jest jedynym ultrafiltrem zawierającym zbiór $\varphi^{-1}[\xi]$.

Dowód. W celu uzasadnienia, że zbiór A_ξ jest zamknięty ze względu na operację $\wedge$, przypuśćmy, że istnieją takie $x, x' \in A_\xi$, że $x \wedge x' \notin A_\xi$. Istnieje takie $y \in \varphi^{-1}[\xi]$, że $x \wedge x' \wedge y = \mathbf{0}$. Skoro $(x \wedge y) \wedge (x' \wedge y) = \mathbf{0}$, to, na mocy normalności kraty $\mathbb{K}$, istnieją takie a, b, że $a \vee b = \mathbf{1}$ oraz $a \wedge (x' \wedge y) = b \wedge (x \wedge y) = \mathbf{0}$. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $\varphi(a) \in \xi$. Wtedy $\varphi(a \wedge y) = \varphi(a) \wedge \varphi(y) \in \xi$, stąd $a \wedge y \in \varphi^{-1}[\xi]$ oraz $(a \wedge y) \wedge x' = \mathbf{0}$; sprzeczność, ponieważ $x' \in A_\xi$.

Jeśli $x \in \varphi^{-1}[\xi]$, to $x \wedge y > \mathbf{0}$ dla każdego $y \in \varphi^{-1}[\xi]$. W przeciwnym razie otrzymalibyśmy $\mathbf{0} = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ co jest niemożliwe, ponieważ $\varphi(x), \varphi(y) \in \xi$. Stąd $\varphi^{-1}[\xi] \subseteq A_\xi$. Łatwo widać, że $\mathbf{0} \notin A_\xi$ oraz $\mathbf{1} \in A_\xi$. Tym samym, na mocy lematu 6.2, zbiór A_ξ jest ultrafiltrem.

Zauważmy, że jeśli $\eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$ oraz $\varphi^{-1}[\xi] \subseteq \eta$, to $\eta \subseteq A_\xi$. Zatem A_ξ jest jedynym ultrafiltrem zawierającym filtr $\varphi^{-1}[\xi]$. $\square$

Twierdzenie 7.2. *Niech $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ będzie homomorfizmem krat normalnych $\mathbb{K}$ oraz $\mathbb{L}$. Wtedy funkcja $\varphi^* : \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \to \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$, dana wzorem*

$$\varphi^*(\xi) = \{x \in \mathbb{K} : x \wedge y > \mathbf{0} \textit{ for all } y \in \varphi^{-1}[\xi]\}$$

dla każdego $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$, jest ciągła.

Dowód. Na mocy lematu 7.1 funkcja φ^* jest poprawnie określona. W celu udowodnienia ciągłości funkcji φ^* ustalmy takie $u \in \mathbb{K}$ oraz $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$, że

$$\varphi^*(\xi) \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K}) \setminus u^*.$$

Wystarczy pokazać, że istnieje takie $w \in \mathbb{L}$, że $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus w^*$ oraz

$$\varphi^*[\mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus w^*] \subseteq \mathrm{Ult}(\mathbb{K}) \setminus u^*.$$

Otrzymujemy następujące implikacje:

$$\varphi^*(\xi) \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K}) \setminus u^* \Rightarrow \varphi^*(\xi) \notin u^* \Rightarrow u \notin \varphi^*(\xi).$$

Skoro, na mocy lematu 7.1, $\varphi^*(\xi)$ jest największą rodziną scentrowaną zawierającą $\varphi^{-1}[\xi]$ oraz $u \notin \varphi^*(\xi)$, to istnieje takie $x \in \varphi^{-1}[\xi]$, że

$$(*) \qquad x \wedge u = \mathbf{0}.$$

Z normalności kraty $\mathbb{K}$ wynika, że istnieje takie $a, b \in \mathbb{K}$, że

$$(**) \qquad a \vee b = \mathbf{1} \quad \text{oraz} \quad a \wedge x = b \wedge u = \mathbf{0}.$$

Skoro $a \wedge x = \mathbf{0}$, to otrzymujemy $\varphi(a) \wedge \varphi(x) = \mathbf{0}$. Zatem $\varphi(a) \notin \xi$, ponieważ $\varphi(x) \in \xi$. Stąd $\xi \notin (\varphi(a))^*$ oraz

$$\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus w^*,$$

gdzie $w = \varphi(a)$. Wystarczy pokazać, że $\varphi^*(\eta) \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K}) \setminus u^*$ dla każdego $\eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus w^*$. Mamy następujące implikacje:

$$\eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus w^* \Rightarrow \eta \notin w^* \Rightarrow \varphi(a) = w \notin \eta.$$

Z warunku $(**)$ wynika, że $\varphi(a) \vee \varphi(b) = \mathbf{1}$. Stąd, na mocy lematu 6.1, $\varphi(b) \in \eta$, ponieważ $\varphi(a) \notin \eta$. Skoro $\varphi(b) \in \eta$, to

$$b \in \varphi^{-1}[\eta] \subseteq \varphi^*(\eta).$$

Zatem z warunku $(**)$ wynika, że $u \notin \varphi^*(\eta)$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \setminus w^* \Rightarrow u \notin \varphi^*(\eta) \Rightarrow \varphi^*(\eta) \notin u^* \Rightarrow \varphi^*(\eta) \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K}) \setminus u^*.$$

□

Następne twierdzenie pokazuje, że operacja * określa funktor kontrawariantny z kategorii krat normalnych wraz z homomorfizmami w kategorię przestrzeni zwartych Hausdorffa wraz z funkcjami ciągłymi. Dokładniej, definiujemy funktor $\mathcal{W}$: **Lat** $\to$ **Comp** przyporządkowując każdej kracie normalnej $\mathbb{K}$ jej przestrzeń Wallmana $\mathcal{W}(\mathbb{K}) = \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$, a każdemu homomorfizmowi $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ funkcję ciągłą $\mathcal{W}(\varphi) = \varphi^* : \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \to \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$. Funktor $\mathcal{W}$ zacieśniony do podkategorii krat Boole'a pokrywa się z funktorem o którym mówi twierdzenie Stone'a o reprezentacji; zobacz np. [10].

Twierdzenie 7.3. *Niech $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ oraz $\mathbb{M}$ będą kratami normalnymi, a $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ oraz $\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ niech będą homomorfizmami. Wtedy*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Jeśli ponadto $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ jest identycznością na kracie $\mathbb{K}$, to $(\mathrm{id}_{\mathbb{K}})^*$ jest identycznością na $\mathrm{Ult}(\mathbb{K})$.

Dowód. Ustalmy $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ oraz $\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$. Z twierdzenia 7.2 wynika, że $\psi^{-1}[\xi] \subseteq \psi^*(\xi)$ dla każdego $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{M})$, zatem $\varphi^{-1}[\psi^{-1}[\xi]] \subseteq \varphi^{-1}[\psi^*(\xi)]$. Używając tego samego argumentu dla funkcji φ^* otrzymujemy inkluzję $\varphi^{-1}[\psi^*(\xi)] \subseteq \varphi^*(\psi^*(\xi))$. Zatem

$$(\psi \circ \varphi)^{-1}[\xi] = \varphi^{-1}[\psi^{-1}[\xi]] \subseteq \varphi^*(\psi^*(\xi)).$$

Skoro, na mocy twierdzenia 7.2, $(\psi \circ \varphi)^*(\xi)$ jest jedynym ultrafiltrem zawierającym rodzinę scentrowaną $(\psi \circ \varphi)^{-1}[\xi]$, to $(\psi \circ \varphi)^*(\xi) = \varphi^*(\psi^*(\xi))$.

Niech $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ oraz ustalmy $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$. Zatem $(\mathrm{id}_{\mathbb{K}})^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ult}(\mathbb{K})}$. $\square$

Każdy funktor zachowuje izomorfizmy, otrzymujemy więc następujący

Wniosek 7.4. *Jeśli $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ jest izomorfizmem krat normalnych, to $\varphi^* : \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \to \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$ jest homeomorfizmem przestrzeni Wallmana.*

Analogicznie do twierdzenia Stone'a o reprezentacji otrzymujemy następujące

Twierdzenie 7.5. *Niech $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ będzie różnowartościowym homomorfizmem krat normalnych. Wtedy funkcja $\varphi^* : \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \to \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$ jest ciągłą surjekcją.*

Dowód. Ustalmy $\eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$. Skoro φ jest różnowartościowe, to zbiór $\varphi[\eta] \subseteq \mathbb{L}$ jest scentrowany. Istotnie, jeśli $y_1, \ldots, y_n \in \varphi[\eta]$, to istnieją takie

$x_1, \ldots, x_n \in \eta$, że $\varphi(x_i) = y_i$ dla każdego $i \leqslant n$. Skoro η jest ultrafiltrem, to otrzymujemy $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n > \mathbf{0}$. Zatem $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n = \varphi(x_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(x_n) = \varphi(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) > \mathbf{0}$, ponieważ φ jest różnowartościowe. Niech $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ będzie takie, że $\varphi[\eta] \subseteq \xi$. Wtedy $\eta \subseteq \varphi^{-1}[\xi] \subseteq \varphi^*(\xi)$ i w konsekwencji $\eta = \varphi^*(\xi)$. $\square$

Można byłoby oczekiwać, że, podobnie do teorii reprezentacji Stone'a algebr Boole'a, jeśli φ jest surjektywnym homomorfizmem krat normalnych, to $\mathcal{W}(\varphi)$ jest zanurzeniem przestrzeni Wallmana. Okazuje się, że tak nie jest. Poniżej podajemy obszerną klasę przykładów odróżniających w tym sensie kraty normalne od algebr Boole'a. Przypomnijmy wpierw kratę podzbiorów regularnie domkniętych.

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to elementy rodziny

$$\mathbb{R}\mathrm{C}(X) = \{F \in \mathbb{C}\mathrm{l}(X) : \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\, F = F\}$$

nazywamy *regularnie domkniętymi.* Powszechnie wiadomo, że zbiór $\mathbb{R}\mathrm{C}(X)$ razem z poniższymi operacjami:

$$F \vee G = F \cup G,$$

$$F \wedge G = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\,(F \cap G),$$

$$-F = \mathrm{cl}\,(X \setminus F)$$

jest zupełną kratą Boole'a, izomorficzną z kratą Boole wszystkich podzbiorów *regularnie otwartych* $\mathrm{RO}(X) = \{U \subseteq X : \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\, U = U\}$.

Bez dowodu przytaczamy poniższy lemat, który wynika z podstawowych własności operacji wnętrza i domknięcia.

Lemat 7.6. *Jeśli F i G są podzbiorami domkniętymi przestrzeni topologicznej, to*

$$\mathrm{cl}\,\mathrm{int}\,(F \cup G) = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\, F \cup \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\, G$$

oraz

$$\mathrm{cl}\,\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\,\mathrm{int}\, F \cap \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\, G) = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\,(F \cap G).$$

Z powyższego lematu wynika następujące

Twierdzenie 7.7. *Dla każdej przestrzeni topologicznej X funkcja*

$$h : \mathbb{C}\mathrm{l}(X) \to \mathbb{R}\mathrm{C}(X)$$

dana wzorem

$$h(F) = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\, F$$

jest homomorfizmem surjektywnym krat normalnych.

Dowód. Zauważmy, ze $h(\emptyset) = \emptyset$ oraz $h(X) = X$. Sprawdzimy, że

(a) $h(F \cup G) = h(F) \vee h(G)$,

(b) $h(F \cap G) = h(F) \wedge h(G)$,

dla każdego $F, G \in \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$. Aby udowodnić równość (a) wystarczy użyć pierwszej z równości w wypowiedzi lematu 7.6. W przypadku równości (b), wprost z definicji operacji $\wedge$ w $\mathbb{R}\mathrm{C}(X)$, otrzymujemy

$$h(F \cap G) = \operatorname{cl} \operatorname{int} (F \cap G).$$

Wtedy, na mocy drugiej z równości lematu 7.6, otrzymujemy

$$\operatorname{cl} \operatorname{int} (F \cap G) = \operatorname{cl} \operatorname{int} (\operatorname{cl} \operatorname{int} F \cap \operatorname{cl} \operatorname{int} G) = \operatorname{cl} \operatorname{int} (h(F) \cap h(G)) = h(F) \wedge h(G).$$

□

Przykład 7.8. Jeśli X jest nieskończoną przestrzenią metryczną, a homomorfizm $h : \mathbb{C}\mathrm{l}(X) \to \mathbb{R}\mathrm{C}(X)$ jest dany wzorem

$$h(F) = \operatorname{cl} \operatorname{int} F,$$

to funkcja $h^* : \mathrm{Ult}(\mathbb{R}\mathrm{C}(X)) \to \mathrm{Ult}(\mathbb{C}\mathrm{l}(X))$ nie może być różnowartościowa. Istotnie, skoro krata $\mathbb{R}\mathrm{C}(X)$ jest izomorficzna z kratą Boole'a $\mathrm{RO}(X)$, to przestrzeń Wallmana $\mathrm{Ult}(\mathbb{R}\mathrm{C}(X))$ jest ekstremalnie niespójna, ponieważ przestrzenie Stone'a zupełnych algebr Boole'a są ekstremalnie niespójne. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia 6.9, $\mathrm{Ult}(\mathbb{C}\mathrm{l}(X))$ jest homeomorficzne z X. Zatem h^* nie może być różnowartościowe, ponieważ w przeciwnym razie przestrzeń metryzowalna zawierałaby nieskończoną i ekstremalnie niespójną przestrzeń zwartą. To jednak jest niemożliwe, ponieważ przestrzenie ekstremalnie niespójne nie zawierają nietrywialnych ciągów zbieżnych.

Powyższy przykład pokazuje, że jeśli φ jest epimorfizmem krat normalnych, to funkcja $\mathcal{W}(\varphi)$ nie musi być zanurzeniem.

Zauważmy, że twierdzenia 7.5 nie można odwrócić: niech $\varphi : \{\mathbf{0}, a, \mathbf{1}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ będzie funkcją daną wzorami $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(a) = \mathbf{0}$ oraz $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Łatwo widać, że funkcja φ jest homomorfizmem krat normalnych, a φ^* jest homeomorfizmem ich jednoelementowych przestrzeni Wallmana. Jednak krata $\{\mathbf{0}, a, \mathbf{1}\}$ nie jest separowalna. Poniższy przykład pokazuje, że twierdzenia 7.5 nie można odwrócić również w przypadku krat separowalnych.

Przykład 7.9. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1]) \cup \{\{0\} \cup F : F \in \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])\}$. Działania $\vee$ oraz $\wedge$ definiujemy następująco:

$$F \vee G = F \cup G, \quad \text{gdy } F, G \in \mathbb{K},$$

$$F \wedge G = \operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cap G), \quad \text{gdy } 0 \notin F \cap G$$

oraz

$$F \wedge G = \{0\} \cup \operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cap G), \quad \text{gdy } 0 \in F \cap G.$$

Niech $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$ będzie dane wzorem $\varphi(F) = \operatorname{cl}\operatorname{int} F$ dla $F \in \mathbb{K}$.

Ustalmy $F, G \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$\varphi(F \vee G) = \varphi(\operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cup G)) = \operatorname{cl}\operatorname{int}\operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cup G) = \\ \operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cup G) = \operatorname{cl}\operatorname{int} F \cup \operatorname{cl}\operatorname{int} G = \varphi(F) \vee \varphi(G),$$

gdzie przedostatnia równość wynika z lematu 7.6. Rozpatrzmy przypadek, gdy $0 \notin F \cap G$. Wtedy

$$\varphi(F \wedge G) = \varphi(\operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cap G)) = \operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cap G) = \\ \operatorname{cl}\operatorname{int}(\operatorname{cl}\operatorname{int} F \cap \operatorname{cl}\operatorname{int} G) = \operatorname{cl}\operatorname{int}(\varphi(F) \cap \varphi(G)) = \varphi(F) \wedge \varphi(G).$$

Pozostaje przypadek, gdy $0 \in F \cap G$. Wtedy

$$\varphi(F \wedge G) = \varphi(\{0\} \cup \operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cap G)) = \operatorname{cl}\operatorname{int}\{0\} \cup \operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cap G) = \\ \operatorname{cl}\operatorname{int}(F \cap G) = \operatorname{cl}\operatorname{int}(\varphi(F) \cap \varphi(G)) = \varphi(F) \wedge \varphi(G).$$

Oczywiście $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ oraz $\varphi([0,1]) = [0,1]$. To pokazuje, że φ jest homomorfizmem krat.

$\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$ jest kratą Boole'a, a więc w szczególności jest kratą separowalną i normalną. Pokażemy, że krata $\mathbb{K}$ jest również separowalna. W tym celu ustalmy $F, G \in \mathbb{K}$, $F \nleqslant G$. Jeśli $F \setminus G = \{0\}$, to wystarczy zauważyć, że $\{0\} \in \mathbb{K}$, $\{0\} \leqslant F$ oraz $\{0\} \wedge G = \emptyset$. Załóżmy więc, że $F \setminus G \neq \{0\}$. Wtedy $\varphi(F) \nleqslant \varphi(G)$, a więc istnieje takie $H \in \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$, że $\emptyset < H \leqslant \varphi(F) \leqslant F$ oraz $H \wedge \varphi(G) = \emptyset$. Skoro H jest niezerowe w kracie $\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$, to możemy zakładać, że $0 \notin H$. Zatem $H \wedge G = \emptyset$.

Krata $\mathbb{K}$ jest także normalna. Istotnie, ustalmy takie niezerowe elementy $F, G \in \mathbb{K}$, że $F \wedge G = \emptyset$. Jeśli $F, G \in \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$, to wystarczy skorzystać z normalności kraty $\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$. Załóżmy więc, że $F \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$. Wtedy $F = \{0\} \cup \varphi(F)$ oraz $G \in \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$. Skoro krata $\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$ jest normalna, to istnieją takie $F', G' \in \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$, że $F' \vee G' = [0,1]$ oraz $F' \wedge \varphi(F) = G' \wedge G =$

$\emptyset$. Zauważmy, że $0 \notin G \cup \varphi(F)$. Jeśli $0 \notin F'$, to $F' \wedge (\{0\} \cup \varphi(F)) = \emptyset$ i dowód normalności kraty $\mathbb{K}$ jest zakończony. Jeśli $0 \in F'$, to istnieją takie $H, K \in \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$, że $H \cup K = F'$ oraz $0 \notin H$. Wtedy $H \wedge F = (G' \cup K) \wedge G = \emptyset$ oraz $H \vee (G' \cup K) = H \cup K \cup G' = F' \cup G' = [0,1]$.

Zatem $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$ jest homomorfizmem krat normalnych i separowalnych. Pokażemy, że $\varphi^* : \mathrm{Ult}(\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])) \to \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$ jest bijekcją. Ustalmy $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathbb{K})$. Rozpatrzmy przypadek, gdy $\{0\} \notin \xi$. Niech $\eta = \{\varphi(F) : F \in \xi\}$. Ustalmy $G \in \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1]) \setminus \eta$. Wtedy $G \notin \xi$, ponieważ $G = \varphi(G)$. Zatem istnieje takie $H \in \xi$, że $G \wedge H = \emptyset$. Stąd $G \wedge \varphi(H) = \varphi(G) \wedge \varphi(H) = \emptyset$ oraz $\varphi(H) \in \eta$. To pokazuje, że $\eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1]))$. Ustalmy $F \in \varphi^{-1}[\eta]$, tzn. $\varphi(F) \in \eta$. Istnieje takie $F' \in \xi$, że $\varphi(F) = \varphi(F')$. Jeśli $F' \leqslant F$, to $F \in \xi$. Załóżmy więc, że $F' \nleqslant F$. Wtedy $F' = \{0\} \cup \varphi(F') = \{0\} \cup F$. Skoro $\{0\} \notin \xi$, to $F \in \xi$. Zatem w przypadku, gdy $\{0\} \notin \xi$, otrzymujemy inkluzję $\varphi^{-1}[\eta] \subseteq \xi$. Stąd $\varphi^*(\eta) = \xi$. Rozpatrzmy przypadek, gdy $\{0\} \in \xi$. Niech $\eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1]))$ będzie filtrem zawierającym rodzinę $\{[0,1/n] : n \geqslant 1\}$. Ustalmy $F \in \varphi^{-1}[\eta]$. Wtedy $0 \in \varphi(F)$, a stąd $\{0\} \subseteq F$ oraz $F \in \xi$, co pokazuje, że $\varphi^{-1}[\eta] \subseteq \xi$.

Ustalmy różne $\xi, \eta \in \mathrm{Ult}(\mathbb{R}\mathrm{C}([0,1]))$. Wtedy istnieją takie $F \in \xi$ oraz $G \in \eta$, że $F \wedge G = \emptyset$, w szczególności $0 \notin F \cap G$. Skoro $F, G \in \mathbb{K}$, $\varphi(F) = F$ oraz $\varphi(G) = G$, to $F \in \varphi^{-1}[\xi]$ oraz $G \in \varphi^{-1}[\eta]$. Ponieważ $0 \notin F \cap G$, to $F \wedge G = \emptyset$ również w kracie $\mathbb{K}$. Zatem przeciwobrazy $\varphi^{-1}[\xi]$ oraz $\varphi^{-1}[\eta]$ wyznaczają różne ultrafiltry $\varphi^*(\xi)$ oraz $\varphi^*(\eta)$.

Z drugiej strony $\varphi(\{0\}) = \emptyset$, a więc φ nie jest różnowartościowe.

W. Kubiś ([11]) definiuje również pojęcie *homomorfizmu separowalnego*: mówimy, że homomorfizm $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ jest separowalny, gdy dla każdego $x \in \mathbb{K}$ oraz $y \in \mathbb{L}$, jeśli $\varphi(x) \wedge y = \mathbf{0}$, to istnieje takie $z \in \mathbb{K}$, że $x \wedge z = \mathbf{0}$ oraz $y \leqslant \varphi(z)$.

Zdefiniowany w powyższym przykładzie homomorfizm $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{R}\mathrm{C}([0,1])$ nie jest separowalny, mimo że φ^* jest bijekcją. Istotnie, wystarczy zauważyć, że

$$\varphi(\{0\}) \wedge [0,1] = \emptyset \wedge [0,1] = \emptyset,$$

ponieważ, jeśli $F \in \mathbb{K}$ jest takie, że $[0,1] \leqslant \varphi(F)$, to $F = [0,1]$, a więc $F \wedge \{0\} > \emptyset$.

8 Zastosowania

Z przedstawionej w poprzedniej części wersji reprezentacji Wallmana otrzymujemy łatwo inną konstrukcję uzwarcenia Čecha–Stone'a; zobacz także [7].

Dokładniej, pokazujemy, że każde przedłużenie funkcji ciągłej na uzwarcenie Čecha–Stone'a jest indukowane przez pewien homomorfizm krat, w sposób opisany w twierdzeniu 7.2.

Twierdzenie 8.1. *Jeśli X jest przestrzenią Tichonowa, to* $\mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(X))$ *jest uzwarceniem Čech–Stone przestrzeni X.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 6.8, lematu 5.19 oraz lematu 5.21 przestrzeń Wallmana $\mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(X))$ jest uzwarceniem przestrzeni X. Ustalmy funkcję ciągłą $f : X \to Z$, gdzie Z jest przestrzenią zwartą Hausdorffa. Zauważmy, że jeśli $F \in \mathcal{Z}(Z)$, to $f^{-1}[F] \in \mathcal{Z}(X)$. Zatem funkcja $\varphi : \mathcal{Z}(Z) \to \mathcal{Z}(X)$ dana wzorem

$$\varphi(F) = f^{-1}[F]$$

jest homomorfizmem krat normalnych. Zatem, na mocy twierdzenia 7.2, istnieje taka funkcja ciągła $\varphi^* : \mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(X)) \to \mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(Z))$, że $\varphi^{-1}[\iota(x)] \subseteq \varphi^*(\iota(x))$ dla każdego $x \in X$, gdzie $\iota : X \to \mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(X))$ zostało zdefiniowane w twierdzeniu 6.8. Odwzorowanie ι jest zanurzeniem oraz dla każdego $x \in X$ mamy

$$\bigcap \varphi^*(\iota(x)) \subseteq \bigcap \varphi^{-1}[\iota(x)] = \bigcap\{F \in \mathcal{Z}(Z) : \varphi(F) \in \iota(x)\} = \\ \bigcap\{F \in \mathcal{Z}(Z) : x \in f^{-1}[F]\} = \bigcap\{F \in \mathcal{Z}(Z) : f(x) \in F\} = \{f(x)\}.$$

Tak jak zauważyliśmy w uwadze 6.10, odwzorowanie $g : \mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(Z)) \to Z$, spełniające warunek $\{g(\xi)\} = \bigcap \xi$, jest homeomorfizmem. Zatem $g \circ \varphi^*$ jest żądanym przedłużeniem funkcji f. □

Przedstawimy jeszcze jedno zastosowanie reprezentacji Wallmana. Jest to wariant charakteryzacji Frinka przestrzeni Tichonowa; zobacz np. Engelking [4].

Twierdzenie 8.2 (Frink, [5])**.** *Jeśli X jest T_1-przestrzenią oraz $\mathrm{Cl}(X)$ zawiera dyzjunktywną i normalną podkratę bazową, to X jest przestrzenią Tichonowa.*

Dowód. Skoro przestrzenie Wallmana są zwarte, a podprzestrzenie przestrzeni zwartych Hausdorffa są przestrzeniami Tichonowa, to z twierdzenia 6.8 wynika, że X is przestrzenią Tichonowa. □

Uwaga 8.3. W przypadku charakteryzacji Frinka dyzjunktywność również jest konieczna. Frink zakłada także warunek normalności, jednak w odniesieniu do bazy zbiorów domkniętych, która nie musi być kratą. Niemniej jednak krata $\mathcal{Z}(X)$ jest zarówno normalna jak i dyzjunktywna, tak więc każda przestrzeń Tichonowa ma dyzjunktywną i normalną kratę bazową. Z drugiej strony, nietrudno pokazać, że jeśli $\mathbb{L} \subseteq \mathrm{Cl}(X)$ jest separowalną kratą bazową przestrzeni X, $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ jest przestrzenią Hausdorffa, a X jest homeomorficzne z gęstym podzbiorem przestrzeni $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$, to $\mathbb{L}$ jest kratą normalną. Wynika to z lematu 5.22, który mówi, że w przestrzeni zwartej Hausdorffa każda krata jest normalna oraz z twierdzenia 6.4 na mocy którego $\mathbb{L}$ jest izomorficzne z kratą $\{u^* : u \in \mathbb{L}\}$.

Zauważmy, że dla dowolnego zbioru X oraz rodziny $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ możemy rozważać pojęcie normalności i dyzjunktywności rodziny $\mathcal{R}$, stosując odpowiednie definicje sformułowane dla kraty $\mathcal{P}(X)$. W związku z tym, że Frink rozważa dyzjunktywną i normalną bazę zbiorów domkniętych, która nie musi być kratą, wydaje się, że wystarczy taką bazę zamknąć ze względu na działania sumy i iloczynu otrzymując w ten sposób kratę bazową, a następnie zastosować do tak otrzymanej kraty twierdzenie 8.2. Wygenerowana krata bazowa będzie dyzjunktywna, ale może nie być kratą normalną, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 8.4. Załóżmy, że każde dwa elementy rodziny $\{F, G, H\}$ mają przekrój niepusty oraz $F \cap G \cap H = \emptyset$. Niech $X = F \cup G \cup H$. Załóżmy ponadto, że niepuste elementy podciała $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ generowanego przez $\{F, G, H\}$ są nieskończone. Niech

$$\mathcal{F} = \{F, G, H\} \cup \{\{x\} : x \in X\} \cup \{Z \subseteq X : |X \setminus Z| < \omega\}.$$

Pokażemy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest normalna. W tym celu ustalmy takie $T, Z \in \mathcal{F}$, że $T \cap Z = \emptyset$. Wtedy $T = \{x\}$ lub $Z = \{x\}$ dla pewnego $x \in X$. Załóżmy, że $T = \{x\}$. Wystarczy zauważyć, że

$$\{x\} \cap Z = T \cap (X \setminus \{x\}) = \emptyset \quad \text{oraz} \quad \{x\} \cup (X \setminus \{x\}) = X.$$

Rodzina $\mathcal{F}$ jest dyzjunktywna. Istotnie, ustalmy $T \in \mathcal{F}$ oraz $x \notin T$. Wtedy $x \in \{x\} \subseteq X \setminus T$.

Niech $\mathbb{L}$ będzie kratą generowaną przez $\mathcal{F}$, a $\mathbb{K}$ niech będzie kratą generowaną przez $\{F, G, H\}$. Zbadamy ogólną postać elementu kraty $\mathbb{L}$. Ustalmy $A \in \mathbb{L}$. Korzystając z postaci elementu kraty generowanej przez daną rodzinę otrzymujemy

$$A = (A_{11} \cap \ldots \cap A_{1n_1}) \cup \ldots \cup (A_{k1} \cap \ldots \cap A_{kn_k}),$$

gdzie $A_{ij} \in \mathcal{F}$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, n_i\}$. Załóżmy, że jest $A_{i1} \cap \ldots \cap A_{in_i}$ jest niepustym składnikiem w którym żaden z elementów nie jest postaci $\{x\}$. Zatem $A_{i1} \cap \ldots \cap A_{in_i} = B \setminus C$ dla pewnego $B \in \mathbb{K}$ oraz zbioru skończonego $C \subseteq X$. Ostatecznie $A = (B \setminus C) \cup D$ dla pewnego $B \in \mathbb{K}$ oraz podzbiorów skończonych $C, D \subseteq X$.

Pokażemy, że krata $\mathbb{L}$, choć generowana przez rodzinę normalną i dyzjunktywną, nie jest normalna. Przypuśćmy, że istnieją takie $D, E \in \mathbb{L}$, że $(F \cap G) \cap D = (G \cap H) \cap E = \emptyset$ oraz $D \cup E = X$. Korzystając z wyprowadzonej wcześniej postaci elementu kraty $\mathbb{L}$ stwierdzamy, że istnieją takie $D', E' \in \mathbb{K}$ oraz $a, b, c, d \in [X]^{<\omega}$, że $D = (D' \setminus a) \cup b$ oraz $E = (E' \setminus c) \cup d$. Zatem $D' = H$ oraz $E' = F$. Stąd

$$X = D' \cup E' \cup b \cup d = H \cup F \cup b \cup d,$$

sprzeczność, ponieważ $X \setminus (H \cup F)$ jest nieskończone.

Wskazując odpowiedni izomorfizm krat zero-zbiorów, możemy łatwo otrzymać twierdzenie Gelfanda–Kołmogorowa stwierdzające, że przestrzenie zwarte Hausdorffa są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy izomorficzne są ich pierścienie funkcji ciągłych. Jeśli X oraz Y są przestrzeniami Tichonowa, to bijekcję $\Phi : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(Y)$ nazywamy *izomorfizmem pierścieni*, gdy

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g) \quad \text{oraz} \quad \Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$$

dla każdego $f, g \in \mathrm{C}(X)$. Poniższy lemat jest najprawdopodobniej znany.

Lemat 8.5. *Jeśli $\Phi : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(Y)$ jest izomorfizmem pierścieni, to $\Phi(1_X) = 1_Y$, gdzie 1_X oraz 1_Y oznaczają funkcje stale równe 1 odpowiednio na X oraz Y.*

Dowód. Łatwo widać, że

$$(\Phi(1_X))^2 = \Phi(1_X) \cdot \Phi(1_X) = \Phi(1_X \cdot 1_X) = \Phi(1_X).$$

Skoro Φ jest surjekcją, to istnieje takie $f \in \mathrm{C}(X)$, że $\Phi(f) = 1_Y - \Phi(1_X)$. W takim razie otrzymujemy

$$\Phi(f) + \Phi(1_X) = 1_Y = (1_Y)^2 = (\Phi(f) + \Phi(1_X))^2 = (\Phi(f))^2 + 2\Phi(f) + \Phi(1_X).$$

Stąd $\Phi(f)(\Phi(f) + 1_Y) = 0_Y$. Podobnie

$$\Phi(1_X) = (\Phi(1_X))^2 = (1_Y - \Phi(f))^2 = 1_Y - 2\Phi(f) + (\Phi(f))^2.$$

Zatem $\Phi(f)(1_Y - \Phi(f)) = 0_Y$. Jeśli istnieje takie $y \in Y$, że $(\Phi(f))(y) \neq 0$, to

$$(\Phi(f) + 1_Y)(y) = (1_Y - \Phi(f))(y) = 0,$$

a więc $-1 = (\Phi(f))(y) = 1$; sprzeczność. Zatem $\Phi(f) = 0_Y$ i w konsekwencji $\Phi(1_X) = 1_Y$. $\square$

Twierdzenie 8.6. *Jeśli X oraz Y są przestrzeniami Tichonowa, a $\mathrm{C}(X)$ oraz $\mathrm{C}(Y)$ są pierścieniami izomorficznymi, to kraty $\mathcal{Z}(X)$ oraz $\mathcal{Z}(Y)$ są izomorficzne.*

Dowód. Załóżmy, że $\Phi : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(Y)$ jest izomorfizmem pierścieni. Wtedy funkcja $\varphi : \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y)$, dana wzorem

$$\varphi(f^{-1}[\{0\}]) = (\Phi(f))^{-1}[\{0\}],$$

gdzie $f \geqslant 0$, jest izomorfizmem krat. Pokażemy, że φ jest poprawnie określone. Wpierw zauważmy, że

$$(*) \qquad f > 0 \Leftrightarrow \Phi(f) > 0,$$

gdzie $f > 0$ oznacza, że $f(x) > 0$ dla każdego $x \in X$. Istotnie, jeśli $f > 0$, to istnieje odwrotność $\frac{1}{f}$ oraz $f \cdot \frac{1}{f} = 1_X$. Wtedy, na mocy lematu 8.5, otrzymujemy $\Phi(f) \cdot \Phi(\frac{1}{f}) = 1_Y$. Z drugiej strony $\Phi(f)(y) \geqslant 0$ dla każdego $y \in Y$, ponieważ $\Phi(f) = (\Phi(\sqrt{f}))^2$. Stąd w szczególności $\Phi(f) > 0$. Pozostała implikacja wynika z tego, że Φ^{-1} również jest izomorfizmem.

Przypuśćmy teraz, że istnieje takie $y \in (\Phi(f))^{-1}[\{0\}] \setminus (\Phi(g))^{-1}[\{0\}]$, że $f^{-1}[\{0\}] = g^{-1}[\{0\}]$, gdzie $f, g \geqslant 0$. Skoro Y jest przestrzenią Tichonowa, to istnieje taka funkcja ciągła $h : Y \to [0,1]$, że $h(y) = 0$ oraz $h \upharpoonright (\Phi(g))^{-1}[\{0\}] = 1$. Wtedy $\Phi(g) + h > 0$. Ponieważ Φ jest surjekcją, więc istnieje takie $k \in \mathrm{C}(X)$, że $h = \Phi(k)$. Stąd $\Phi(g+k) > 0$ oraz, na mocy warunku $(*)$, $g + k > 0$. Skoro dla każdego $x \in X$ zachodzi równoważność

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

to $f + k > 0$. Używając raz jeszcze warunku $(*)$ otrzymujemy $\Phi(f) + h > 0$, co jest sprzeczne z równością $\Phi(f)(y) = h(y) = 0$.

Pozostaje wykazać, że φ zachowuje operacje kratowe. W tym celu ustalmy $F = f^{-1}[0]$ oraz $G = g^{-1}[0]$, gdzie $f, g \in \mathrm{C}(X)$ oraz $f, g \geqslant 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}\varphi(F \cup G) &= \varphi(f^{-1}[\{0\}] \cup g^{-1}[\{0\}]) = \varphi((f \cdot g)^{-1}[\{0\}]) = \\ &= (\Phi(f \cdot g))^{-1}[\{0\}] = (\Phi(f))^{-1}[\{0\}] \cup (\Phi(g))^{-1}[\{0\}] = \varphi(F) \cup \varphi(G).\end{aligned}$$

Podobne obliczenia prowadzą do równości $\varphi(F \cap G) = \varphi(F) \cap \varphi(G)$. Skoro $\Phi(1_X) = 1_Y$, to $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Ponadto $\varphi(X) = Y$, ponieważ funkcja Φ przekształca funkcję stale równą 0 na X na funkcję stale równą 0 na Y. □

Twierdzenie 8.7 (Gelfand–Kołmogorow, [6])**.** *Jeśli X oraz Y są takimi przestrzeniami zwartymi Hausdorffa, że $\mathrm{C}(X)$ jest izomorficzne z $\mathrm{C}(Y)$, to X jest homeomorficzne z Y.*

Dowód. Niech $\Phi : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(Y)$ będzie izomorfizmem pierścieni, a funkcja φ niech będzie izomorfizmem o którym mówi poprzednie twierdzenie. Z wniosku 7.4 wynika, że $\varphi^* : \mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(Y)) \to \mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(X))$ jest homeomorfizmem. Z twierdzenia 6.9 wynika, że X oraz Y są homeomorficzne odpowiednio z $\mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(X))$ oraz $\mathrm{Ult}(\mathcal{Z}(Y))$. □

Innym zastosowaniem twierdzenia 7.2 jest dowód znanego twierdzenia mówiącego, że każda przestrzeń zwarta Hausdorffa jest ciągłym obrazem przestrzeni zwartej zerowymiarowej tej samej wagi. W szczególności, każda przestrzeń metryczna zwarta jest ciągłym obrazem zbioru Cantora. Pokażemy, że przyporządkowanie opisane powyżej może mieć charakter funktorialny.

Niech X będzie przestrzenią zwartą Hausdorffa oraz niech $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ będzie kratą bazową przestrzeni X. Oczywiście $\mathbb{L}$ jest także podkratą kraty Boole'a $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów przestrzeni X. Niech $\mathbb{L}^c$ będzie podkratą Boole'a kraty $\mathcal{P}(X)$ generowaną przez $\mathbb{L}$. Jeśli $\mathbb{L}$ jest nieskończone, to $|\mathbb{L}| = |\mathbb{L}^c|$. Skoro $\mathbb{L}^c$ jest algebrą Boole'a, to przestrzeń

$$X^0(\mathbb{L}) = \mathrm{Ult}(\mathbb{L}^c)$$

jest zwarta i zerowymiarowa. Niech $e : \mathbb{L} \to \mathbb{L}^c$ będzie włożeniem wyznaczonym przez inkluzję $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}^c$. Wtedy, na mocy twierdzenia 7.2 oraz twierdzenia 7.5, otrzymujemy ciągłą surjekcję $e^* : \mathrm{Ult}(\mathbb{L}^c) \to \mathrm{Ult}(\mathbb{L})$. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia 6.9, mamy także kanoniczny homeomorfizm $f_{X,\mathbb{L}} : \mathrm{Ult}(\mathbb{L}) \to X$. Otrzymujemy zatem ciągłą surjekcję $p_{X,\mathbb{L}} = f_{X,\mathbb{L}} \circ e^* : X^0(\mathbb{L}) \to X$ z przestrzeni zwartej zerowymiarowej $X^0(\mathbb{L})$ na X.

Twierdzenie 8.8. *Załóżmy, że X oraz Y są przestrzeniami zwartymi Hausdorffa, a $g : X \to Y$ jest funkcją ciągłą. Jeśli $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ i $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{l}(Y)$ są kratami bazowymi odpowiednio X i Y, a $g^{-1}[F] \in \mathbb{L}$ dla każdego $F \in \mathbb{K}$, to istnieje taka funkcja ciągła $g^0(\mathbb{L},\mathbb{K}) : X^0(\mathbb{L}) \to Y^0(\mathbb{K})$, że*

$$p_{Y,\mathbb{K}} \circ g^0(\mathbb{L},\mathbb{K}) = g \circ p_{X,\mathbb{L}};$$

tj. następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
X^0(\mathbb{L}) \arrow[r, "p_{X,\mathbb{L}}"] \arrow[d, "g^0(\mathbb{L},\mathbb{K})"'] & X \arrow[d, "g"] \\
Y^0(\mathbb{K}) \arrow[r, "p_{Y,\mathbb{K}}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Dowód. Skoro $g^{-1}[F] \in \mathbb{L}$ dla każdego $F \in \mathbb{K}$, to funkcja $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ jest popranie określonym homomorfizmem. Reszta wynika z twierdzenia 7.3. $\square$

Bezpośrednio z twierdzenia otrzymujemy następujący

Wniosek 8.9. *Każda przestrzeń zwarta Hausdorffa jest ciągłym obrazem przestrzeni zwartej zerowymiarowej tej samej wagi. W szczególności, każda przestrzeń metryczna zwarta jest ciągłym obrazem zbioru Cantora.*

Dowód. Ustalmy przestrzeń zwartą Hausdorffa. Wystarczy zastosować ostatnie twierdzenie dla kraty bazowej $\mathbb{L}$ o najmniejszej mocy.

Jeśli X jest ponadto przestrzenią metryczną, to $|\mathbb{L}| \leqslant \omega$. W tej sytuacji $\mathrm{Ult}(\mathbb{L})$ jest homeomorficzne z X, a zarazem jest ciągłym obrazem produktu $\mathrm{Ult}(\mathbb{L}^c) \times \{0,1\}^\omega$. Ostatnia z wymienionych powyżej przestrzeni jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora. $\square$

Zauważmy, że tezę powyższego wniosku można uzasadnić również w inny sposób. Na przykład wynika to z faktu mówiącego, że każdą przestrzeń zwartą Hausdorffa można zanurzyć w $[0,1]^\tau$, gdzie $\tau = w(X)$ oraz $[0,1]^\tau$ jest ciągłym obrazem kostki Cantora $\{0,1\}^\tau$. Nie widać jednak w jaki sposób konstrukcja ta mogłaby prowadzić do funktora.

Skorzystajmy z twierdzenia 8.8 dla $\mathbb{L} = \mathbb{C}\mathrm{l}(X)$ oraz $\mathbb{K} = \mathbb{C}\mathrm{l}(Y)$. Biorąc pod uwagę to, że przeciwobrazy podzbiorów domkniętych poprzez funkcje ciągłe są domknięte, możemy uprościć zapis: zamiast $p_{X,\mathbb{L}}$ będziemy pisać krócej p_X. W tym sformułowaniu otrzymujemy

Wniosek 8.10. *Załóżmy, że X oraz Y są przestrzeniami zwartymi Hausdorffa oraz $g : X \to Y$ jest funkcją ciągłą. Wtedy istnieje taka funkcja ciągła $g^0 : X^0 \to Y^0$, że*

$$p_Y \circ g^0 = g \circ p_X;$$

tj. poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} X^0 \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "g^0"'] & X \arrow[d, "g"] \\ Y^0 \arrow[r, "p_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Jeśli ponadto $h : Y \to Z$, to $(h \circ g)^0 = h^0 \circ g^0$.

Literatura

[1] J. M. Aarts, *Wallman–Shanin Compactification*, w: K. P. Hart, Jun-iti Nagata, J. E. Vaughan, (eds.) *Encyclopedia of General Topology*, Elsevier Science, Amsterdam 2004.

[2] R. Balbes, P. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Missouri 1974.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I, Warszawa 1932, str. 187.

[4] R. Engelking, *Topologia ogólna*, Wydanie trzecie, Warszawa 2007, str. 292.

[5] O. Frink, *Compactifications and semi-normal spaces*, American Journal of Mathematics 86 (1964), 602–907.

[6] I. Gelfand, A. Kolmogoroff, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 22 (1939), 11–15.

[7] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton 1960.

[8] S. H. Hechler, *Large superuniversal metric spaces*, Israel J. Math. 14(2) 1973, 115–148.

[9] M. Katětov, On universal metric spaces, w: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI, Proc. Sixth Prague Topological Symposium 1986, Z. Frolík (ed.), Berlin 1988.

[10] S. Koppelberg, *Handbook of Boolean Algebras, vol. 1, General Theory of Boolean Algebras*, North-Holland 1989.

[11] W. Kubiś, *Compact spaces, lattices, and absoluteness: a survey*, arXiv:1402.1589 [math.GN].

[12] W. Sierpiński, *Sur un espace métrique separable universel*, Fundamenta Mathematicae 33 (1945), 115–122.

[13] P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math. 51 (1927), 43–64.

[14] H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Annals of Mathematics 39 (1938), 112–126.