Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Nieliniowej Analizy Matematycznej i Topologii

Zbigniew Błaszczyk

Właściwe grupy przekształceń powierzchni homotopijnych i produktów sfer

Promotor:
dr hab. Marek Golasiński

Toruń 2013

Abstract

Properly discontinuous transformation groups of homotopy surfaces and products of spheres

A ubiquitous problem throughout all of mathematics is to decide which groups act in a specific manner on a given object. We investigate two instances of this situation in topology.

The first part is concerned with the study of properly discontinuous and cellular actions of arbitrary groups on homotopy surfaces. We develop a method for investigating such actions via short exact sequences of groups. A straightforward consequence of our approach is that a finite group acts freely and cellularly on a homotopy surface if and only if it acts freely on a surface of the same genus. We also prove that most homotopy surfaces do not admit properly discontinuous and cellular actions of groups with infinite virtual cohomological dimension. As an example of specific calculations, we classify the groups that act properly discontinuously on $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$, where Σ_2 is the closed orientable surface of genus 2.

In the second part, we investigate the problem of existence of free actions of alternating groups on products of spheres. Most notably, we prove that for $d = p$ or $d = p + 1$, where $p \geq 7$ is a prime number, the alternating group $\mathcal{A}_d$ cannot act freely on a finite-dimensional CW complex with the integral cohomology ring isomorphic to that of $(S^n)^{d-1}$ for any positive integer n. This extends previous results due to L. P. Plakhta.

The two parts are interlinked by the fact that many of the results on homotopy surfaces can be promoted to aspherical Borel manifolds, a class of spaces which includes products of circles.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 57S25

Spis treści

Wstęp

Problemem często pojawiającym się w różnych dziedzinach matematyki jest rozstrzygnięcie, które grupy działają w określony sposób na uprzednio ustalonym obiekcie. Jednym z przykładów takiej sytuacji w topologii jest pochodzące od Hopfa [41] *zagadnienie form sferycznych*: problem wyznaczenia grup skończonych, które działają w sposób wolny (tzn. poprzez homeomorfizmy bez punktów stałych) na sferach. Rozwiązanie zostało podane przez Madsena, Thomasa i Walla [46]: grupa skończona działa w sposób wolny na pewnej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej podgrupa abelowa jest cykliczna oraz każdy jej element rzędu 2 jest centralny. Grupy o tych własnościach zostały wcześniej sklasyfikowane przez Suzukiego [60] i Zassenhausa [68], [69].

Zagadnienie form sferycznych okazało się interesujące nie tylko samo w sobie, ale też przyczyniło się do rozwoju algebraicznej K-teorii oraz teorii chirurgii, a różne jego aspekty przyciągnęły uwagę m. in. Milnora [48], Postnikowa [54] i Swana [61]. Nie jest zatem zaskoczeniem, że zainteresowano się także jego naturalnym przedłużeniem – badaniem grup skończonych, których wolne działania dopuszczają produkty sfer. Ponieważ każda grupa skończona G działa w sposób wolny na pewnym produkcie sfer, kluczową rolę odgrywa problem wyznaczenia *wolnej rangi* grupy G: najmniejszej liczby k takiej, że produkt k sfer dopuszcza wolne działanie grupy G. Podejmowane wysiłki badawcze skoncentrowały się wokół hipotezy postawionej przez Bensona i Carlsona [9], która przewiduje, że w przypadku grup o randze większej niż 1, wolna ranga i ranga grupy pokrywają się. Pomimo wielu prób (na przykład Adem i Browder [3], Carlsson [16], Conner [18], Hanke [34], Heller [37], Yalçin [67]), nie udało się ustalić jej prawdziwości nawet w przypadku elementarnych abelowych p-grup, w którym to problem sprowadza się do odpowiedzi na pytanie, czy istnienie wolnego działania grupy $(\mathbb{Z}_p)^r$ na produkcie $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \cdots \times S^{n_k}$ implikuje, że $r \leq k$.

Blisko związany problem, postawiony przez Steina [59], dotyczy pytania, czy wolne działanie grupy o wolnej randze $k \geq 2$ można zrealizować na produkcie k sfer ustalonego wymiaru. To zagadnienie było punktem wyjścia do podjęcia badań nad wolnymi działaniami grup alternujących na produktach sfer przez Olivera [52]. Udowodnił on, że grupa alternująca $\mathcal{A}_4$, która ma rangę równą 2, nie może działać w sposób wolny na żadnym skończonym CW kompleksie X takim, że pierścienie kohomologii $H^*(X;\mathbb{Z})$ oraz $H^*(S^n \times S^n;\mathbb{Z})$ są izomorficzne dla pewnej liczby $n \geq 1$, a następnie skonstruował wolne $\mathcal{A}_4$-działanie na produkcie $S^2 \times S^3$. Rozważania te doprowadziły do postawienia następującej wersji problemu z hipotezy Bensona–Carlsona:

Mając daną grupę skończoną G, wyznaczyć najmniejszą liczbę $k = k(G)$ taką, że G działa w sposób wolny na produkcie $(S^n)^k$ dla pewnej liczby n.

W świetle wspomnianego wyniku Olivera, $k(\mathcal{A}_4) > 2$. Zadanie wyznaczenia liczby $k(\mathcal{A}_4)$ zostało zwieńczone przez Płachtę [53], który skonstruował wolne $\mathcal{A}_4$-działanie na produkcie $S^3 \times S^3 \times S^3$. Płachta rozszerzył także oszacowanie Olivera, dowodząc, że $k(\mathcal{A}_6) > 5$.

Wadą ograniczenia się do rozważania produktów sfer ustalonego wymiaru jest pogłębienie trudności problemu konstruowania wolnych działań, który nawet bez tego obostrzenia jest bardzo wymagający. Pewnym pomysłem na zaradzenie tej sytuacji jest wykorzystanie faktu, że grupa skończona G działa w sposób wolny na $(S^1)^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z}^d \to \pi_1(M) \to G \to 1,$$

gdzie M jest d-wymiarową, zamkniętą rozmaitością asferyczną, tj. o ściągalnym nakryciu uniwersalnym. Na przykład istnienie wolnego $\mathcal{A}_4$-działania na produkcie $S^1 \times S^1 \times S^1$ jest konsekwencją faktu, że grupa $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ jest dzielnikiem normalnym grupy podstawowej przestrzeni pewnej wiązki torusów nad okręgiem, o grupie ilorazowej $\mathcal{A}_4$.

Rozważania tego typu można umiejscowić w kontekście rozmaitości homotopijnych. Okazuje się, że jeśli M jest zamkniętą, asferyczną rozmaitością, to grupa G działa w sposób właściwie dyskretny i komórkowy na homotopijnej rozmaitości M wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to \pi_1(M) \to \Gamma \to G \to 1,$$

gdzie Γ jest grupą o skończonym wymiarze kohomologicznym. Ta obserwacja stanowi dobry punkt wyjścia do badania właściwie dyskretnych grup przekształceń rozmaitości postaci $M \times \mathbb{R}^n$. Wyjątkowo intensywnie badane były właściwie dyskretne i komórkowe grupy przekształceń sfer homotopijnych (Adem i Smith [5], Connolly i Prassidis [19], Golasiński, Gonçalves i Jimenéz [31], [32], Lee [44], Mislin i Talelli [50], Prassidis [55]). Sytuacja, która nas interesuje, jest więc "dualna" w tym sensie, że sfery są najprostszymi rozmaitościami z punktu widzenia homologii, a rozmaitości asferyczne – homotopii.

Celem rozprawy jest przybliżenie opublikowanych w artykułach [11] oraz [12] wyników, które dotyczą właściwie dyskretnych i komórkowych grup przekształceń powierzchni homotopijnych oraz wolnych działań grup alternujących na produktach sfer. Zagadnienia te łączy obserwacja, że wiele wyników prezentowanych dla powierzchni homotopijnych może zostać przeniesionych na klasę asferycznych rozmaitości borelowskich, która zawiera produkty okręgów.

Rozprawa zorganizowana jest jak następuje. Rozdział 1 ma charakter przygotowawczy: przypominamy kluczowe pojęcia i wiadomości wykorzystywane w dalszej części rozważań. Podobną funkcję sprawują dodatki, z tą różnicą, że zawarte w nich wiadomości są istotne tylko z punktu widzenia pojedynczych dowodów. I tak Dodatek A traktuje o grupach klas odwzorowań powierzchni, które pośrednio wykorzystujemy w dowodzie Twierdzenia 2.4.6; Dodatek B poświęcony jest elementom teorii końców, która odgrywa rolę w dowodzie Twierdzenia 2.6.3; w Dodatku C zamieszczamy podstawowe informacje o kohomologiach Farrella, w oparciu o które dowodzimy Stwierdzenia 3.2.13.

W Rozdziale 2 badamy właściwie dyskretne i komórkowe grupy przekształceń powierzchni homotopijnych. Zainteresowani jesteśmy głównie wynikami natury ogólnej. Do najważniejszych rezultatów zaliczamy Twierdzenie 2.3.2, w którym wyznaczamy związek pomiędzy wymiarem orientowalnej powierzchni homotopijnej, a wirtualnym wymiarem kohomologicznym jej właściwie dyskretnej i komórkowej grupy przekształceń, a także Twierdzenie 2.4.6, w którym weryfikujemy, czy grupy o nieskończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym działają w sposób właściwie dyskretny i komórkowy na powierzchniach homotopijnych. Jako przykład konkretnych obliczeń, w Twierdzeniu 2.6.3 podajemy klasyfikację grup, które działają w sposób właściwie dyskretny na rozmaitości $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$, gdzie Σ_2 oznacza orientowalną powierzchnię genusu 2.

Rozdział 3 poświęcony jest własnościom grup alternujących w kontekście wolnych działań na produktach sfer. Warto zwrócić uwagę na Twierdzenie 3.2.6, w którym uzupełniamy dotychczas znane wiadomości o wolnych działaniach grupy $\mathcal{A}_4$ na produktach trzech sfer. Głównymi wynikami są, przedstawione w Twierdzeniach 3.3.3 oraz 3.3.6, oszacowania liczby $k(\mathcal{A}_d)$ dla $d \geq 7$, które rozszerzają wspomniane rezultaty Olivera i Płachty.

W tym miejscu chciałbym podziękować Panu dr. hab. Markowi Golasińskiemu za poświęcony czas oraz cenne uwagi dotyczące przedstawionych w rozprawie zagadnień.

Dziękuję również Rodzicom i Żonie za to, że we mnie wierzą.

Standardowe oznaczenia

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone
$\mathbb{Z}_m$	liczby całkowite modulo m
$\sim$	jedno-jednoznaczna odpowiedniość zbiorów
$\simeq$	homotopijna równoważność przestrzeni topologicznych
$\approx$	homeomorfizm przestrzeni topologicznych
$\cong$	izomorfizm grup, pierścieni lub modułów
S^n	n-wymiarowa sfera jednostkowa
$\lvert\Gamma\rvert$	rząd grupy skończonej Γ
$[\Gamma : \Gamma']$	indeks podgrupy Γ' w grupie Γ
$\mathrm{Aut}(\Gamma)$	grupa automorfizmów grupy Γ
$\times$, $\prod$	produkt grup lub przestrzeni
$\oplus$	suma prosta grup lub modułów
$\rtimes$	produkt półprosty grup

W rozprawie przyjmujemy następującą konwencję: słowo *odwzorowanie* oznacza zawsze odwzorowanie ciągłe; słowo *powierzchnia* oznacza dwuwymiarową rozmaitość, która jest zamknięta (to znaczy zwarta i bez brzegu) i spójna. Indeks górny pojawiający się przy symbolu rozmaitości oznacza jej wymiar.

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

Spis treści

1.1 Topologia

1.1.1 Grupy przekształceń

Przypomnijmy, że grupę topologiczną Γ nazywamy *grupą przekształceń* przestrzeni topologicznej X, o ile istnieje odwzorowanie $\varphi\colon \Gamma \times X \to X$, ciągłe ze względu na topologię Tichonowa na produkcie $\Gamma \times X$, takie, że:

(1) $\varphi(1, x) = x$ dla dowolnego $x \in X$,

(2) $\varphi(\gamma_1\gamma_2, x) = \varphi(\gamma_1, \varphi(\gamma_2, x))$ dla dowolnych γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma$ oraz $x \in X$.

Mówimy wtedy także, że X jest Γ-*przestrzenią*, a odwzorowanie φ nazywamy *działaniem* grupy Γ na przestrzeni X. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, piszemy krótko $\varphi(\gamma, x) = \gamma x$.

W rozprawie grupa Γ niemal zawsze będzie dyskretna. W tej sytuacji istnienie działania $\Gamma \times X \to X$ jest równoważne istnieniu homomorfizmu grup $\Gamma \to \mathrm{Homeo}(X)$, gdzie $\mathrm{Homeo}(X)$ oznacza grupę homeomorfizmów X.

Symbolem X/Γ oznaczamy *przestrzeń orbit* działania $\Gamma \times X \to X$. Przestrzeń X/Γ jest więc zbiorem ilorazowym przestrzeni X ze względu na relację równoważności $x \sim y$, o ile $y = \gamma x$ dla pewnego $\gamma \in \Gamma$, wraz z topologią ilorazową wyznaczoną przez rzutowanie $X \to X/\Gamma$.

Mówimy, że działanie $\Gamma \times X \to X$ jest *właściwie dyskretne*, o ile spełnia następujący warunek:

> dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subseteq X$ takie, że $\gamma U \cap U = \emptyset$ dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$.

Działanie tego typu w literaturze często nosi także nazwę działania "właściwie nieciągłego". Jeśli grupa Γ działa w sposób właściwie dyskretny, to jest dyskretna, a naturalne rzutowanie $X \to X/\Gamma$ jest nakryciem.

Zwróćmy uwagę, że właściwie dyskretne działanie $\Gamma \times X \to X$ jest w szczególności *wolne*, to znaczy

$$\gamma x \neq x \text{ dla dowolnych } \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq 1, \text{ oraz } x \in X.$$

Nietrudno przekonać się, że wolne działanie grupy skończonej na przestrzeni Hausdorffa jest właściwie dyskretne.

Kilkukrotnie skorzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.1.1 ([21, Theorem 9.16])**.** *Niech* Γ *będzie grupą skończoną, która działa w sposób wolny na skończenie wymiarowym CW kompleksie* X *o określonej charakterystyce Eulera. Wtedy charakterystyka Eulera przestrzeni orbit* X/Γ *również jest określona oraz* $\chi(X) = |\Gamma| \cdot \chi(X/\Gamma)$.

Niech X będzie CW kompleksem. Mówimy, że działanie $\Gamma \times X \to X$ jest *komórkowe*, o ile spełnia następujący warunek:

> dla dowolnego $g \in \Gamma$ oraz dowolnej komórki $e \subseteq X$, przestrzeń γe także jest komórką kompleksu X.

Na ogół w definicji komórkowości działania żąda się dodatkowo, aby równość $\gamma e = e$ dla dowolnych $\gamma \in \Gamma$ oraz $e \subseteq X$ pociągała za sobą, że $\gamma x = x$ dla dowolnego $x \in e$. Będziemy jednak zainteresowani tylko działaniami, które są równocześnie wolne i komórkowe, w której to sytuacji mamy:

Lemat 1.1.2. *Jeśli grupa* Γ *działa w sposób wolny i komórkowy na CW kompleksie* X*, to* $\gamma e \neq e$ *dla dowolnego* $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$*, oraz dowolnej komórki* $e \subseteq X$.

Dowód. Pokażemy, że stabilizator $\Gamma_e = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma e = e\}$ jest trywialny dla dowolnej komórki $e \subseteq X$. Jeśli e jest komórką zerowymiarową, to teza wynika z założenia wolności działania.

Ustalmy liczbę $n \geq 1$ i załóżmy, że stabilizator dowolnej komórki wymiaru niewiększego niż $n-1$ jest trywialny. Niech $e \subseteq X$ będzie n-wymiarową komórką. Z założenia indukcyjnego wynika, że grupa Γ_e permutuje w sposób wolny komórki $(n-1)$-wymiarowego szkieletu kompleksu X, które mają niepusty przekrój z domknięciem komórki e. Ponieważ takich komórek jest skończenie wiele, Γ_e jest grupą skończoną. Z Twierdzenia 1.1.1 wynika jednak, że nietrywialna grupa skończona nie może działać w sposób wolny na żadnej komórce. □

Nietrudno zauważyć, że przestrzeń orbit X/Γ ze względu na wolne i komórkowe działanie grupy dyskretnej Γ jest CW kompleksem.

W dalszej części rozprawy przyjmujemy następującą konwencję: działanie, które jest właściwie dyskretne i komórkowe, nazywamy *właściwym*.

Niech Γ będzie grupą topologiczną, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ jej podgrupą, zaś X dowolną Γ'-przestrzenią. Wówczas przestrzeń $\mathrm{Map}_{\Gamma'}(\Gamma, X)$ wszystkich Γ'-odwzorowań $\Gamma \to X$, wyposażona w topologię zwarto-otwartą, jest Γ-przestrzenią ze względu na działanie określone w następujący sposób:

$$(\gamma f)(-) = f(-\gamma) \text{ dla dowolnych } \gamma \in \Gamma \text{ oraz } f \in \mathrm{Map}_{\Gamma'}(\Gamma, X).$$

Lemat 1.1.3 ([24, Induction Lemma])**.** (1) *Jeśli X jest wolną Γ'-przestrzenią, to $\mathrm{Map}_{\Gamma'}(\Gamma, X)$ także jest wolną Γ'-przestrzenią.*

(2) *Jeśli $\Gamma' \subseteq \Gamma$ jest podgrupą skończonego indeksu, to* $\mathrm{Map}_{\Gamma'}(\Gamma, X) \approx X^{[\Gamma:\Gamma']}$*.*

Dowód. (1) Jeśli $\gamma f = f$ dla pewnych $\gamma \in \Gamma'$, $f \in \mathrm{Map}_{\Gamma'}(\Gamma, X)$, to $(\gamma f)(1) = f(1)$, skąd $\gamma \cdot f(1) = f(1)$, a zatem $\gamma = 1$.

(2) Homeomorfizm $\mathrm{Map}_{\Gamma'}(\Gamma, X) \to X^{[\Gamma:\Gamma']}$ jest wyznaczony przez ewaluację na zbiorze reprezentantów warstw podgrupy Γ'. □

1.1.2 Przestrzenie Eilenberga–MacLane'a

Przestrzeń topologiczną X nazywamy *asferyczną*, o ile jest łukowo spójna oraz $\pi_i(X) = 0$ dla dowolnej liczby $i \geq 2$, gdzie $\pi_i(X)$ oznacza i-tą grupę homotopii przestrzeni X. Z twierdzenia Whiteheada wynika, że warunkiem równoważnym asferyczności CW kompleksu jest ściągalność jego nakrycia uniwersalnego. Dowolny asferyczny CW kompleks o grupie podstawowej Γ nazywamy *przestrzenią Eilenberga–MacLane'a* typu $(\Gamma, 1)$ i oznaczamy symbolem B_Γ.

Przestrzeń Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma, 1)$ istnieje dla dowolnej grupy Γ. Aby się o tym przekonać, ustalmy prezentację grupy Γ poprzez generatory i relacje:

$$\Gamma = \langle \{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mid \{r_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}} \rangle.$$

Rozpatrzmy bukiet okręgów $\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^1$. Ponieważ $\pi_1(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^1)$ jest grupą wolną o liczbie generatorów równej mocy zbioru $\mathcal{A}$, każda z relacji r_β, $\beta \in \mathcal{B}$, wyznacza odwzorowanie $S^1 \to \bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^1$. Dołączmy za ich pomocą dwuwymiarowe komórki do bukietu $\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^1$ i oznaczmy nowo powstały CW kompleks przez $X(1)$. Z twierdzenia Seiferta–van Kampena wynika, że $\pi_1(X(1)) \cong \Gamma$.

Dalsza część konstrukcji przebiega indukcyjnie. Dla dowolnej liczby $n \geq 1$ zdefiniujmy CW kompleks $X(n+1)$ poprzez dołączenie do $X(n)$ komórek wyznaczonych przez dowolny zbiór generatorów grupy $\pi_{n+1}(X(n))$. Z twierdzenia o aproksymacji komórkowej otrzymujemy, że inkluzja $X(n) \to X(n+1)$ indukuje izomorfizm $\pi_i(X(n)) \to \pi_i(X(n+1))$ dla $1 \leq i \leq n$, a ponadto $\pi_{n+1}(X(n+1)) = 0$.

W ten sposób uzyskaliśmy ciąg spójnych kompleksów $X(1) \subseteq X(2) \subseteq \cdots$ taki, że dla dowolnej liczby $n \geq 1$ kompleks $X(n)$ jest $(n+1)$-wymiarowy oraz

$$\pi_i(X(n)) \cong \begin{cases} \Gamma, & i = 1, \\ 0, & 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że granica prosta systemu $(X(n), X(n) \hookrightarrow X(n+k))_{n\geq 1,\, k\geq 0}$ spełnia warunki żądane w definicji przestrzeni Eilenberga–MacLane'a.

Powyższa konstrukcja oczywiście zależy od wyboru prezentacji grupy Γ. Istnieją także inne metody budowania przestrzeni Eilenberga–MacLane'a, na przykład konstrukcja Milnora z wykorzystaniem połączeń bądź *bar construction*. Mamy jednak:

Twierdzenie 1.1.4 ([36, Theorem 1B.8])**.** *Jeśli X oraz Y są asferycznymi CW kompleksami takimi, że $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$, to $X \simeq Y$. Innymi słowy, typ homotopijny przestrzeni Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma, 1)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez grupę Γ.*

1.1.3 Powierzchnie i rozmaitości borelowskie

Podkreślmy raz jeszcze, że *powierzchnią* nazywamy dwuwymiarową rozmaitość, która jest zamknięta i spójna.

Twierdzenie 1.1.5 ([47, Chapter I, Theorem 5.1])**.** *Dowolna orientowalna powierzchnia jest homeomorficzna albo ze sferą dwuwymiarową, albo z sumą spójną pewnej liczby torusów. Dowolna nieorientowalna powierzchnia jest homeomorficzna z sumą spójną pewnej liczby płaszczyzn rzutowych.*

Genusem powierzchni $\Sigma \approx \sharp_{k=1}^{n} S^1 \times S^1$ nazywamy liczbę $g(\Sigma) = n$. Przyjmujemy, że $g(S^2) = 0$. W analogiczny sposób definiujemy genus powierzchni nieorientowalnej. Dla dowolnych powierzchni Σ oraz Σ' zachodzi $\chi(\Sigma \sharp \Sigma') = \chi(\Sigma) + \chi(\Sigma') - 2$, skąd otrzymujemy, że

$$\chi(\Sigma) = \begin{cases} 2 - 2g(\Sigma), & \Sigma \text{ jest powierzchnią orientowalną,} \\ 2 - g(\Sigma), & \Sigma \text{ jest powierzchnią nieorientowalną.} \end{cases}$$

Z kolejnych dwóch twierdzeń wynika, że dowolna powierzchnia Σ różna od sfery dwuwymiarowej i płaszczyzny rzutowej jest przestrzenią Eilenberga–MacLane'a typu $(\pi_1(\Sigma), 1)$.

Twierdzenie 1.1.6 ([45, Corollary 12.18])**.** *Dowolna powierzchnia różna od sfery dwuwymiarowej i płaszczyzny rzutowej jest przestrzenią asferyczną.*

Twierdzenie 1.1.7 ([36, Corollary A.12])**.** *Dowolna d-wymiarowa, zwarta rozmaitość ma typ homotopijny d-wymiarowego CW kompleksu.*

Zamkniętą rozmaitość M nazywamy *borelowską*, o ile dowolna zamknięta rozmaitość homotopijnie równoważna z M jest automatycznie homeomorficzna z M.

Przykład 1.1.8. (1) Z Twierdzenia 1.1.5 wynika, że powierzchnie są rozmaitościami borelowskimi.

(2) Przestrzeń jednorodną spójnej, rozwiązalnej grupy Liego nazywamy *solv-rozmaitością*. W szczególności solv-rozmaitościami są spójne, rozwiązalne grupy Liego – na przykład produkty okręgów. Z twierdzenia Mostowa wynika, że zwarte solv-rozmaitości są borelowskie ([51, Theorem A]).

(3) Bezpośrednią konsekwencją pozytywnego rozwiązania hipotezy Poincaré jest borelowskość sfer.

Uwaga 1.1.9. Hipoteza Borela przewiduje, że każda zamknięta, asferyczna rozmaitość jest rozmaitością borelowską. Patrz [26].

1.2 Algebra

1.2.1 Elementy teorii (ko)homologii grup

Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewostronnym R-modułem. *Rezolwentą* modułu M nazywamy dowolny ciąg dokładny R-modułów

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Jeśli każdy z modułów P_i, $i \geq 0$, jest projektywny (odpowienio wolny, skończenie generowany), to rezolwentę nazywamy *projektywną* (*wolną*, *skończonego typu*). Ponieważ każdy moduł jest obrazem modułu wolnego, rezolwenta wolna (a zatem i projektywna) istnieje dla dowolnego modułu M. Jeśli istnieje liczba $n \geq 0$ taka, że $P_n \neq 0$ oraz $P_i = 0$ dla dowolnego $i > n$, to mówimy, że rezolwenta ma *długość* n. *Wymiarem projektywnym* modułu M nazywamy liczbę

$$\operatorname{projdim}_R M = \min\{n \mid M \text{ dopuszcza rezolwentę projektywną długości } n\}.$$

Jeśli taka liczba nie istnieje, przyjmujemy $\operatorname{projdim}_R M = \infty$.

W dalszej części rozprawy będziemy zainteresowani tylko sytuacją, w której R jest pierścieniem grupowym, a więc teraz krótka dygresja na ten temat.

Niech Γ będzie dowolną grupą. Oznaczmy przez $\mathbb{Z}\Gamma$ grupę abelową wolną generowaną przez elementy grupy Γ. Typowy element $\mathbb{Z}\Gamma$ jest więc postaci $\sum_{\gamma\in\Gamma} n_\gamma \gamma$, gdzie $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ oraz $n_\gamma = 0$ dla prawie wszystkich $\gamma \in \Gamma$. Mnożenie w grupie Γ przedłuża się jednoznacznie do $\mathbb{Z}$-dwuliniowego działania $\mathbb{Z}\Gamma \times \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma$; w ten sposób na $\mathbb{Z}\Gamma$ uzyskujemy strukturę pierścienia, który nazywamy *pierścieniem grupowym* grupy Γ.

Niech R^* oznacza grupę elementów odwracalnych pierścienia R. Zwróćmy uwagę, że dowolny homomorfizm grup $\Gamma \to R^*$ można przedłużyć jednoznacznie do homomorfizmu pierścieni $\mathbb{Z}\Gamma \to R$. W związku z tym mamy naturalną bijekcję

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}\Gamma, R) \sim \operatorname{Hom}(\Gamma, R^*)$$

zbiorów homomorfizmów, odpowiednio pierścieni i grup.

Moduły nad pierścieniem grupowym $\mathbb{Z}\Gamma$ nazywamy Γ-*modułami*. Innymi słowy, na Γ-moduł składa się grupa abelowa A wraz z homomorfizmem pierścieni $\mathbb{Z}\Gamma \to \operatorname{End}(A)$. W świetle wcześniejszego paragrafu taki homomorfizm odpowiada homomorfizmowi grup $\Gamma \to \operatorname{Aut}(A)$, a zatem o Γ-modułach można myśleć jako o grupach abelowych wyposażonych w działanie grupy Γ. Na przykład dowolna grupa abelowa A dopuszcza strukturę *trywialnego* Γ-modułu:

$$\gamma a = a \text{ dla dowolnych } \gamma \in \Gamma \text{ oraz } a \in A.$$

Niech teraz $\mathcal{P} \to \mathbb{Z}$ będzie rezolwentą projektywną trywialnego Γ-modułu $\mathbb{Z}$. Definiujemy k-tą *grupę homologii* $H_k(\Gamma, M)$ grupy Γ o współczynnikach w Γ-module M, $k \geq 0$, jako k-tą grupę homologii kompleksu łańcuchowego $\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M$:

$$H_k(\Gamma, M) = H_k(\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M) = \mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathbb{Z}, M),$$

gdzie $\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}$ oznacza iloczyn tensorowy nad pierścieniem $\mathbb{Z}\Gamma$. Analogicznie definiujemy k-tą *grupę kohomologii* $H^k(\Gamma, M)$ grupy Γ o współczynnikach w Γ-module M, $k \geq 0$:

$$H^k(\Gamma, M) = H^k(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathcal{P}, M)) = \mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathbb{Z}, M),$$

gdzie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}$ oznacza grupę $\mathbb{Z}\Gamma$-homomorfizmów. W obydwu przypadkach można pokazać, że definicja nie zależy od wyboru rezolwenty $\mathcal{P} \to \mathbb{Z}$.

Przykład 1.2.1 ([14, Chapter III, Example 1.2])**.** Ustalmy dowolną liczbę $m \geq 1$. Niech $\mathbb{Z}$ będzie trywialnym $\mathbb{Z}_m$-modułem. Wówczas

$$H^k(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \mathbb{Z}_m, & k \text{ jest liczbą parzystą, } k \neq 0, \\ 0, & k \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

Aby się o tym przekonać, ustalmy generator $\gamma \in \Gamma = \mathbb{Z}_m$. Zdefiniujmy homomorfizm $\varepsilon\colon \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}$ wzorem $\varepsilon(\gamma^i) = 1$ dla $0 \leq i \leq m-1$ oraz homomorfizmy s, $N\colon \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma$ jako mnożenie przez elementy odpowiednio $\gamma - 1$ oraz $1 + \gamma + \cdots + \gamma^{m-1}$. Nietrudno sprawdzić, że ciąg Γ-modułów

$$\cdots \xrightarrow{s} \mathbb{Z}\Gamma \xrightarrow{N} \mathbb{Z}\Gamma \xrightarrow{s} \mathbb{Z}\Gamma \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

jest dokładny, a więc stanowi rezolwentę wolną Γ-modułu $\mathbb{Z}$. Po zastosowaniu funktora $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(-, \mathbb{Z})$ otrzymujemy kompleks kołańcuchowy

$$\cdots \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z},$$

gdzie $m\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ oznacza mnożenie przez m.

(Ko)homologie grup można także interpretować w terminach (ko)homologii singularnych odpowiednich przestrzeni Eilenberga–MacLane'a:

Stwierdzenie 1.2.2 ([14, Chapter II, Proposition 2.4])**.** *Niech Γ będzie grupą, zaś M dowolnym Γ-modułem. Wówczas $H_k(\Gamma, M) \cong H_k(B_\Gamma; \mathcal{M})$ oraz $H^k(\Gamma, M) \cong H^k(B_\Gamma; \mathcal{M})$ dla dowolnej liczby $k \geq 0$, gdzie $\mathcal{M}$ oznacza system lokalnych współczynników na B_Γ stowarzyszony z Γ-modułem M. W szczególności, jeśli M jest trywialnym Γ-modułem, to $H_k(\Gamma, M) \cong H_k(B_\Gamma; M)$ oraz $H^k(\Gamma, M) \cong H^k(B_\Gamma; M)$ dla dowolnej liczby $k \geq 0$.*

Niech Γ będzie grupą, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ jej podgrupą, zaś M dowolnym Γ'-modułem. Oznaczmy $\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} M = \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma'} M$. Na $\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} M$ wprowadzamy strukturę Γ-modułu w następujący sposób:

$$\gamma_0(\gamma \otimes m) = (\gamma_0\gamma) \otimes m \text{ dla dowolnych } \gamma_0,\ \gamma \in \Gamma \text{ oraz } m \in M.$$

Ponadto niech $\mathrm{Coind}_{\Gamma'}^{\Gamma} M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma'}(\mathbb{Z}\Gamma, M)$. Wtedy $\mathrm{Coind}_{\Gamma'}^{\Gamma} M$ jest Γ-modułem ze względu na działanie

$$(\gamma f)(-) = f(-\gamma) \text{ dla dowolnych } \gamma \in \Gamma \text{ oraz } f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma'}(\mathbb{Z}\Gamma, M).$$

Lemat 1.2.3 ([14, Chapter III, Proposition 6.2])**.** *Niech* Γ *będzie grupą,* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *jej podgrupą, zaś* M *dowolnym* Γ'*-modułem.*

(1) *Dla dowolnej liczby* $k \geq 0$ *zachodzi* $H^k(\Gamma', M) \cong H^k(\Gamma, \mathrm{Coind}_{\Gamma'}^{\Gamma} M)$.

(2) *Jeśli* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *jest podgrupą skończonego indeksu, to* $\mathrm{Coind}_{\Gamma'}^{\Gamma} M \cong \mathrm{Ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} M$.

Podstawowym narzędziem służącym do wyznaczania grup kohomologii jest ciąg spektralny Lyndona–Hochschilda-Serre'a:

Twierdzenie 1.2.4 ([14, Chapter VII, Theorem 6.3])**.** *Dla dowolnego krótkiego ciągu dokładnego grup* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *oraz dowolnego* Γ*-modułu* M *istnieje ciąg spektralny postaci*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(\Gamma'', H^q(\Gamma', M)) \Longrightarrow H^{p+q}(\Gamma, M).$$

1.2.2 Rozszerzenia i grupa H^2

Grupę Γ nazywamy *rozszerzeniem* grupy Γ'' o grupę Γ', o ile istnieje krótki ciąg dokładny grup $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$. Takie rozszerzenie nazywamy *centralnym*, o ile grupa Γ' jest zawarta w centrum grupy Γ.

Mówimy, że rozszerzenia Γ, $\tilde{\Gamma}$ grupy Γ'' o grupę Γ' są *równoważne*, o ile istnieje homomorfizm $\Gamma \to \tilde{\Gamma}$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} & & \Gamma \arrow[dd] \arrow[dr] & & & \\ 1 \arrow[r] & \Gamma' \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Gamma'' \arrow[r] & 1 \\ & & \tilde{\Gamma} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Nietrudno przekonać się, że homomorfizm $\Gamma \to \tilde{\Gamma}$ o takiej własności musi być izomorfizmem.

Ciąg dokładny $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ indukuje homomorfizm $\Gamma'' \to \mathrm{Out}(\Gamma')$, gdzie $\mathrm{Out}(\Gamma)$ oznacza grupę automorfizmów zewnętrznych grupy Γ. (Przypomnijmy, że $\mathrm{Out}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\mathrm{Inn}(\Gamma)$, gdzie $\mathrm{Inn}(\Gamma)$ oznacza grupę automorfizmów grupy Γ wyznaczonych przez sprzężenie z pewnym elementem.) Prawdziwa jest częściowa odwrotność tego faktu:

Stwierdzenie 1.2.5 ([14, Chapter IV, Corollary 6.8])**.** *Jeśli grupa* Γ' *ma trywialne centrum, to dla dowolnego homomorfizmu* $\varphi \colon \Gamma'' \to \mathrm{Out}(\Gamma')$ *istnieje dokładnie jedno (z dokładnością do równoważności) rozszerzenie grupy* Γ'' *o grupę* Γ'.

W powyższej sytuacji jedyne rozszerzenie grupy Γ'' o grupę Γ' może być opisane za pomocą produktu włóknistego diagramu

$$\begin{tikzcd} & \Gamma'' \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{Aut}(\Gamma') \arrow[r] & \mathrm{Out}(\Gamma'). \end{tikzcd}$$

Załóżmy teraz, że $\Gamma' = A$ jest grupą abelową. Wówczas A przyjmuje strukturę Γ''-modułu: grupa Γ działa na A poprzez sprzężenie, a ponieważ działanie A na sobie poprzez sprzężenie jest trywialne, mamy indukowane działanie grupy $\Gamma/A \cong \Gamma''$ na A. Zwróćmy uwagę, że rozszerzenie jest centralne wtedy i tylko wtedy, gdy A jest trywialnym Γ''-modułem.

Twierdzenie 1.2.6 ([14, Theorem 3.12])**.** *Niech A będzie Γ''-modułem. Oznaczmy przez $\mathcal{E}(\Gamma'', A)$ zbiór klas równoważności tych rozszerzeń grupy Γ'' o grupę A, które indukują ustaloną strukturę Γ''-modułu na A. Wówczas istnieje jedno-jednoznaczna odpowiedniość*

$$\mathcal{E}(\Gamma'', A) \sim H^2(\Gamma'', A).$$

Przykład 1.2.7. Rozpatrzmy trywialny $\mathbb{Z}_2$-moduł $\mathbb{Z}$. W Przykładzie 1.2.1 uzasadniliśmy, że $H^2(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, a więc istnieją dokładnie dwa nierównoważne, centralne rozszerzenia grupy $\mathbb{Z}_2$ o grupę $\mathbb{Z}$. Łatwo je identyfikujemy: to $\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Niech $\tilde{\mathbb{Z}}$ oznacza nieskończoną grupę cykliczną ze strukturą nietrywialnego $\mathbb{Z}_2$-modułu. Korzystając z rezolwenty przedstawionej w Przykładzie 1.2.1, widzimy, że $H^2(\mathbb{Z}_2, \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$. Wobec tego $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_2, \tilde{\mathbb{Z}})$ jest zbiorem jednoelementowym, a jego jedynym elementem jest nieskończona grupa dihedralna $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

1.2.3 Wymiar kohomologiczny i geometryczny

Wymiarem kohomologicznym grupy Γ nazywamy wymiar projektywny nieskończonej grupy cyklicznej $\mathbb{Z}$, traktowanej jako trywialny Γ-moduł. Wymiar kohomologiczny grupy Γ oznaczamy symbolem $\operatorname{cd}\Gamma$. Nietrudno przekonać się, że

$$\begin{aligned} \operatorname{cd}\Gamma &= \inf\{n \mid H^i(\Gamma, -) = 0 \text{ dla } i > n\} \\ &= \sup\{n \mid H^n(\Gamma, M) \neq 0 \text{ dla pewnego } \Gamma\text{-modułu } M\}. \end{aligned}$$

Topologiczny odpowiednik wymiaru kohomologicznego, *wymiar geometryczny* grupy Γ, definiujemy jako minimalny wymiar (jako CW kompleksu) przestrzeni Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma, 1)$ i oznaczamy symbolem $\operatorname{gd}\Gamma$. Ze Stwierdzenia 1.2.2 wynika, że dla dowolnej grupy Γ zachodzi nierówność $\operatorname{cd}\Gamma \leq \operatorname{gd}\Gamma$. Prawdą jest jednak znacznie więcej:

Twierdzenie 1.2.8 ([14, Chapter VIII, Theorem 7.1])**.** *Niech Γ będzie dowolną grupą. Jeśli $\operatorname{cd}\Gamma \neq 2$, to $\operatorname{cd}\Gamma = \operatorname{gd}\Gamma$. W sytuacji, gdy $\operatorname{cd}\Gamma = 2$, pozostaje prawdą, że $2 \leq \operatorname{gd}\Gamma \leq 3$.*

Poniżej przedstawiamy kilka klasycznych przykładów grup o skończonym wymiarze kohomologicznym.

Przykład 1.2.9. (1) $\operatorname{cd}\Gamma = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy Γ jest grupą trywialną.

(2) Jeśli Γ jest (nietrywialną) grupą wolną, to $\operatorname{cd}\Gamma = 1$, ponieważ bukiet okręgów indeksowany generatorami grupy Γ jest przestrzenią Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma, 1)$. Na mocy wyników Stallingsa ([58, Theorem 6.8]) oraz Swana ([62, Theorem A]), prawdziwa jest także implikacja odwrotna.

(3) Jeśli Σ jest powierzchnią różną od sfery dwuwymiarowej i płaszczyzny rzutowej, to $\operatorname{cd} \pi_1(\Sigma) = 2$. Faktycznie, na mocy Twierdzeń 1.1.6 oraz 1.1.7, powierzchnia Σ jest dwuwymiarową przestrzenią Eilenberga–MacLane'a typu $(\pi_1(\Sigma), 1)$. Wobec tego $\operatorname{cd} \pi_1(\Sigma) \leq 2$. Ponadto korzystając z Stwierdzenia 1.2.2 i dualności Poincaré otrzymujemy, że $H^2(\pi_1(\Sigma), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, a zatem $\operatorname{cd} \pi_1(\Sigma) = 2$. (Można również zastosować Twierdzenie 1.2.8.)

(4) Argumentując podobnie jak wyżej, wnioskujemy, że jeśli Γ jest grupą podstawową zamkniętej, asferycznej rozmaitości M^d, to $\operatorname{cd} \Gamma = d$.

(5) Jeśli Γ jest grupą Liego o skończonej liczbie składowych spójności, to z twierdzenia Cartana–Iwasawy–Malcewa wynika, że w Γ istnieje maksymalna zwarta podgrupa K oraz $X = \Gamma/K \approx \mathbb{R}^d$, gdzie $d = \dim \Gamma - \dim K$ ([39, Chapter XV]). Wobec tego jeśli $\Gamma' \subseteq \Gamma$ jest dyskretną, beztorsyjną podgrupą, to $\operatorname{cd} \Gamma' < \infty$, ponieważ Γ'-działanie na X określone wzorem

$$\gamma_0(\gamma K) = (\gamma_0 \gamma)K \text{ dla } \gamma_0 \in \Gamma' \text{ oraz } \gamma \in \Gamma$$

jest właściwie dyskretne i, w efekcie, X/Γ' jest przestrzenią Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma', 1)$ ([14, Chapter II, Example 4.6]).

Innymi ważnymi przykładami grup o skończonym wymiarze kohomologicznym są grupy typu FL. Przypomnijmy, że grupa Γ jest *typu FL*, o ile $\mathbb{Z}$ dopuszcza wolną rezolwentę nad $\mathbb{Z}\Gamma$, która jest równocześnie skończonej długości i skończonego typu.

Twierdzenie 1.2.10 ([14, Chapter VIII, Theorem 7.1])**.** *Jeśli grupa Γ jest skończenie prezentowalna oraz typu FL, to istnieje skończona przestrzeń Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma, 1)$.*

Wróćmy teraz do podstawowych własności wymiaru kohomologicznego.

Lemat 1.2.11 ([14, Chapter VIII, Proposition 2.4])**.** (1) *Jeśli $\Gamma' \subseteq \Gamma$ jest dowolną podgrupą, to $\operatorname{cd} \Gamma' \leq \operatorname{cd} \Gamma$, przy czym równość zachodzi, jeśli $\operatorname{cd} \Gamma < \infty$ oraz $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$.*

(2) *Jeśli $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ jest krótkim ciągiem dokładnym grup, to $\operatorname{cd} \Gamma \leq \operatorname{cd} \Gamma' + \operatorname{cd} \Gamma''$.*

Dowód. (1) Nierówność wynika natychmiast z Lematu 1.2.3.

Dla dowodu równości załóżmy, że $\operatorname{cd} \Gamma = n < \infty$. Z prawostronnej dokładności funktora $H^*(\Gamma, -)$ wynika, że $H^n(\Gamma, F) \neq 0$ dla pewnego wolnego Γ-modułu F. Niech F' będzie wolnym Γ'-modułem tej samej rangi, co Γ-moduł F. Wówczas $\operatorname{Ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} F' = \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma'} F' \cong F$, a więc z Lematu 1.2.3 otrzymujemy, że $H^n(\Gamma', F') \cong H^n(\Gamma, F) \neq 0$.

(2) Jeśli $\operatorname{cd} \Gamma' = \infty$ lub $\operatorname{cd} \Gamma'' = \infty$, to teza jest spełniona w oczywisty sposób. Załóżmy zatem, że $\operatorname{cd} \Gamma', \operatorname{cd} \Gamma'' < \infty$. Ustalmy dowolny Γ-moduł M i rozpatrzmy ciąg spektralny Lyndona–Hochschilda–Serre'a

$$E_2^{p,q} \cong H^p(\Gamma'', H^q(\Gamma', M)) \Longrightarrow H^{p+q}(\Gamma, M).$$

Wprost z definicji wymiaru kohomologicznego wynika, że ten ciąg spektralny skoncentrowany jest w prostokącie

$$\begin{cases} 0 \le p \le \operatorname{cd}\Gamma'', \\ 0 \le q \le \operatorname{cd}\Gamma', \end{cases}$$

a więc $H^i(\Gamma, M) = 0$ dla dowolnej liczby $i > \operatorname{cd}\Gamma' + \operatorname{cd}\Gamma''$. □

Wniosek 1.2.12 ([14, Chapter VIII, Corollary 2.5])**.** *Jeśli* $\operatorname{cd}\Gamma < \infty$*, to grupa* Γ *jest beztorsyjna.*

Dowód. Jeśli grupa Γ zawiera element torsyjny, to $\mathbb{Z}_m \subseteq \Gamma$ dla pewnej liczby $m \ge 2$. Z Przykładu 1.2.1 wynika, że $\operatorname{cd}\mathbb{Z}_m = \infty$, a więc w oparciu o Lemat 1.2.11 wnioskujemy, że $\operatorname{cd}\Gamma = \infty$. □

Mamy także:

Twierdzenie 1.2.13 ([57, Théorème 1])**.** *Jeśli* Γ *jest grupą beztorsyjną oraz* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *jej dowolną podgrupą skończonego indeksu, to* $\operatorname{cd}\Gamma' = \operatorname{cd}\Gamma$*.*

O grupie Γ powiemy, że ma *skończony wirtualny wymiar kohomologiczny*, o ile istnieje podgrupa $\Gamma' \subseteq \Gamma$ skończonego indeksu taka, że $\operatorname{cd}\Gamma' < \infty$. Przyjmujemy wówczas $\operatorname{vcd}\Gamma = \operatorname{cd}\Gamma'$. Z Twierdzenia 1.2.13 wynika, że $\operatorname{vcd}\Gamma$ nie zależy od wyboru podgrupy Γ': jeśli Γ', $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ są dwiema beztorsyjnymi podgrupami skończonego indeksu, to $\Gamma' \cap \Gamma''$ ma skończony indeks zarówno w Γ', jak i Γ'', a więc $\operatorname{cd}\Gamma' = \operatorname{cd}\Gamma'' = \operatorname{cd}(\Gamma' \cap \Gamma'')$. Zauważmy także, że jeśli $\operatorname{vcd}\Gamma < \infty$, to podgrupę $\Gamma' \subseteq \Gamma$ można wybrać tak, aby była normalna: jeśli podgrupa jest skończonego indeksu, to tę samą własność ma jej rdzeń normalny.

Przykład 1.2.14.

(1) $\operatorname{vcd}\Gamma = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy Γ jest grupą skończoną.

(2) Niech Γ_1 będzie grupą beztorsyjną, Γ_2 grupą skończona. Wówczas dla dowolnego produktu półprostego $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ zachodzi $\operatorname{vcd}\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2 = \operatorname{cd}\Gamma_1$.

(3) Pełna grupa liniowa $GL(n, \mathbb{Z})$ stopnia n, $n \ge 1$, ma skończony wirtualny wymiar kohomologiczny. Rzeczywiście, z twierdzenia Minkowskiego wynika, że jądro epimorfizmu $GL(n, \mathbb{Z}) \to GL(n, \mathbb{Z}_p)$, gdzie $p \ge 3$ jest liczbą pierwszą, jest podgrupą beztorsyjną. Teza jest teraz konsekwencją zjawiska opisanego w ostatniej części Przykładu 1.2.9: $GL(n, \mathbb{Z})$ jest dyskretną podgrupą grupy Liego $GL(n, \mathbb{R})$, która ma dwie składowe spójności.

Jeśli nie jest prawdą, że grupa ma skończony wirtualny wymiar kohomologiczny, to mówimy, że ma *nieskończony wirtualny wymiar kohomologiczny*. Zauważmy, że taka sytuacja może mieć miejsce w dwóch przypadkach:

- jeśli grupa nie jest *wirtualnie beztorsyjna*, to znaczy nie zawiera beztorsyjnej podgrupy skończonego indeksu, lub
- jeśli jej beztorsyjna podgrupa skończonego indeksu ma nieskończony wymiar kohomologiczny.

Będziemy wielokrotnie korzystali z następującego, dobrze znanego, uogólnienia Lematu 1.2.11:

Lemat 1.2.15. (1) *Jeśli* Γ *jest grupą wirtualnie beztorsyjną, zaś* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *jej dowolną podgrupą, to* $\operatorname{vcd}\Gamma' \leq \operatorname{vcd}\Gamma$*; równość zachodzi, jeśli* $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$.

(2) *Jeśli* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *jest krótkim ciągiem dokładnym grup, przy czym* Γ' *jest grupą beztorsyjną, zaś* Γ'' *grupą wirtualnie beztorsyjną, to* $\operatorname{vcd}\Gamma \leq \operatorname{cd}\Gamma' + \operatorname{vcd}\Gamma''$.

Dowód. (1) Ponieważ Γ jest grupą wirtualnie beztorsyjną, istnieje jej beztorsyjna podgrupa skończonego indeksu $\tilde{\Gamma}$. Wtedy $\Gamma' \cap \tilde{\Gamma}$ jest beztorsyjną podgrupą skończonego indeksu w Γ', a więc na mocy Lematu 1.2.11 mamy

$$\operatorname{vcd}\Gamma' = \operatorname{cd}(\Gamma' \cap \tilde{\Gamma}) \leq \operatorname{cd}\tilde{\Gamma} = \operatorname{vcd}\Gamma.$$

Jeśli założymy dodatkowo, że Γ' jest podgrupą skończonego indeksu w Γ, to $\Gamma' \cap \tilde{\Gamma}$ jest podgrupą skończonego indeksu także w $\tilde{\Gamma}$, a więc z Twierdzenia 1.2.13 wynika, że $\operatorname{cd}(\Gamma' \cap \tilde{\Gamma}) = \operatorname{cd}\tilde{\Gamma}$ i, konsekwentnie, $\operatorname{vcd}\Gamma' = \operatorname{vcd}\Gamma$.

(2) Niech $\tilde{\Gamma}$ będzie beztorsyjną podgrupą skończonego indeksu w Γ''. Rozpatrzmy diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Gamma'' \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] \arrow[u, equal] & \hat{\Gamma} \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{\Gamma} \arrow[r] \arrow[u] & 1,
\end{tikzcd}$$

gdzie $\hat{\Gamma}$ jest przeciwobrazem grupy $\tilde{\Gamma}$ poprzez epimorfizm $\Gamma \to \Gamma''$. Ponieważ $\hat{\Gamma}$ jest beztorsyjną podgrupą skończonego indeksu w Γ, korzystając z Lematu 1.2.11 uzyskujemy

$$\operatorname{vcd}\Gamma = \operatorname{cd}\hat{\Gamma} \leq \operatorname{cd}\Gamma' + \operatorname{cd}\tilde{\Gamma} = \operatorname{cd}\Gamma' + \operatorname{vcd}\Gamma''.$$

□

1.2.4 Grupy powierzchni

W dalszej części rozprawy grupę podstawową (orientowalnej) powierzchni często nazywamy po prostu (*orientowalną*) *grupą powierzchni*.

Twierdzenie 1.2.16 ([1, Theorem 2.1])**.** *Podgrupa (orientowalnej) grupy powierzchni skończonego indeksu jest (orientowalną) grupą powierzchni. Podgrupa nieskończonego indeksu jest grupą wolną.*

Twierdzenie 1.2.17 ([33, Theorem 4.4])**.** *Niech* Σ *będzie powierzchnią różną od torusa, płaszczyzny rzutowej i butelki Kleina. Wówczas centrum grupy podstawowej powierzchni* Σ *jest trywialne.*

Twierdzenie 1.2.18 ([23, Corollary 2])**.** *Beztorsyjne rozszerzenie grupy skończonej o grupę powierzchni ponownie jest grupą powierzchni.*

1.2.5 Elementy teorii reprezentacji grup symetrycznych

Podziałem liczby naturalnej n nazywamy nierosnący ciąg liczb nieujemnych $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ taki, że $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = n$. Nasze zainteresowanie podziałami bierze się z następującego faktu:

Stwierdzenie 1.2.19 ([42, Proposition 2.4])**.** *Niech n będzie liczbą naturalną. Liczba nierozkładalnych, parami nieizomorficznych reprezentacji zespolonych grupy symetrycznej S_n jest równa liczbie podziałów liczby n.*

Na ogół w odniesieniu do podziałów będziemy stosowali konwencję zobrazowaną następującym przykładem:

$$(4, 2, 2, 1, 0, 0, \ldots) = (4, 2^2, 1).$$

W dalszej części podrozdziału zakładamy, że $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ jest ustalonym podziałem liczby n. Pokażemy, w jaki sposób z λ stowarzyszyć nierozkładalną reprezentację grupy S_n.

Diagramem stowarzyszonym z podziałem λ nazywamy zbiór

$$[\lambda] = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \text{ oraz } 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Definiujemy *k-ty wiersz* (odpowiednio *k-tą kolumnę*) diagramu $[\lambda]$ jako zbiór złożony z tych elementów $(i, j) \in [\lambda]$, dla których $i = k$ ($j = k$).

Dowolną bijekcję $[\lambda] \to \{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy *λ-tablicą*. Na zbiorze $\mathcal{T}_\lambda$ wszystkich λ-tablic mamy naturalne działanie grupy symetrycznej S_n:

$$\sigma t = \sigma \circ t \text{ dla dowolnych } \sigma \in S_n \text{ oraz } t \in \mathcal{T}_\lambda.$$

Stabilizatorem wierszy λ-tablicy t nazywamy zbiór

$$R_t = \{\sigma \in S_n \mid \sigma t(i, j) \in t(\{i\} \times \{1, 2, \ldots, \lambda_i\}) \text{ dla dowolnego } (i, j) \in [\lambda]\}.$$

Zwróćmy uwagę, że dla dowolnej tablicy $t \in \mathcal{T}_\lambda$, stabilizator R_t jest podgrupą grupy S_n. Ponadto łatwo sprawdzić, że:

Lemat 1.2.20. *$R_{\sigma t} = \sigma R_t \sigma^{-1}$ dla dowolnych $\sigma \in S_n$ oraz $t \in \mathcal{T}_\lambda$.*

Podobnie definiujemy *stabilizator kolumn C_t* tablicy t.

Na zbiorze $\mathcal{T}_\lambda$ wprowadzamy następującą relację równoważności: $t_1 \sim t_2$, o ile istnieje $\sigma \in R_{t_1}$ taka, że $t_2 = \sigma t_1$. Klasę równoważności tablicy t względem relacji $\sim$ nazywamy *λ-tabloidem* i oznaczamy symbolem $[t]$. Taka definicja pozwala mówić o wierszach tabloidu: *k-tym wierszem* λ-tabloidu $[t]$ nazywamy obraz k-tego wiersza diagramu $[\lambda]$ poprzez tablicę t.

Zauważmy, że S_n-działanie na zbiorze $\mathcal{T}_\lambda$ indukuje S_n-działanie na zbiorze λ-tabloidów:

$$\sigma[t] = [\sigma t] \text{ dla dowolnych } \sigma \in S_n \text{ oraz } [t] \in \mathcal{T}_\lambda/\sim.$$

Działanie to jest poprawnie określone, jeśli bowiem $[t_1] = [t_2]$ dla pewnych tabloidów $[t_1]$, $[t_2] \in \mathcal{T}_\lambda/\sim$, to $\sigma t_2 = \sigma\omega t_1$ dla dowolnego $\sigma \in S_n$ i pewnego $\omega \in R_{t_1}$, skąd $\sigma t_2 = (\sigma\omega\sigma^{-1})\sigma t_1$. Jednakże $\sigma\omega\sigma^{-1} \in R_{\sigma t_1}$ na mocy Lematu 1.2.20, a więc $[\sigma t_1] = [\sigma t_2]$.

Wprowadzimy teraz relację porządku liniowego na zbiorze λ-tabloidów. Mówimy, że $[t_1] < [t_2]$, o ile dla pewnego i:

(1) i jest elementem wyższego wiersza tabloidu $[t_1]$ niż $[t_2]$,
(2) jeśli $j > i$, to j jest elementem tego samego wiersza tabloidów $[t_1]$ oraz $[t_2]$.

Przykład 1.2.21. Niech $\lambda = (3, 2)$. O diagramach wygodnie jest myśleć w sposób zobrazowany następującym przykładem:

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2}\end{array}.$$

Tablice przedstawiamy wtedy w postaci diagramów z ponumerowanymi komórkami. Na przykład

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \longleftrightarrow \quad t(i,j) = \begin{cases} j+1, & i = 1, \\ 1, & (i,j) = (2,1), \\ 5, & (i,j) = (2,2). \end{cases}$$

Stabilizatorem wierszy tablicy t jest grupa $S_{\{2,3,4\}} \times S_{\{1,5\}}$, zaś stabilizatorem kolumn – grupa $S_{\{1,2\}} \times S_{\{3,5\}}$. (Symbol S_X oznacza grupę permutacji zbioru X.)

Tabloidy reprezentujemy jako diagramy bez wyróżnionych kolumn. Poniżej wypisujemy wszystkie λ-tabloidy uporządkowane względem relacji $<$:

$$\begin{array}{c}\hline 3\ 4\ 5 \\ \hline 1\ 2 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 2\ 4\ 5 \\ \hline 1\ 3 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 1\ 4\ 5 \\ \hline 2\ 3 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 2\ 3\ 5 \\ \hline 1\ 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 1\ 3\ 5 \\ \hline 2\ 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 1\ 2\ 5 \\ \hline 3\ 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 2\ 3\ 4 \\ \hline 1\ 5 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 1\ 3\ 4 \\ \hline 2\ 5 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 1\ 2\ 4 \\ \hline 3\ 5 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}\hline 1\ 2\ 3 \\ \hline 4\ 5 \\ \hline\end{array}.$$

Niech M^λ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ rozpiętą przez λ-tabloidy; M^λ w naturalny sposób przyjmuje strukturę $\mathbb{C}S_n$-modułu. Dla dowolnej λ-tablicy t zdefiniujmy element $\kappa_t \in \mathbb{C}S_n$ przyjmując

$$\kappa_t = \sum_{\sigma \in C_t} (\operatorname{sgn} \sigma)\sigma.$$

Polytabloidem stowarzyszonym z tablicą t nazywamy wektor $e_t = \kappa_t[t] \in M^\lambda$. Podprzestrzeń $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ rozpięta przez polytabloidy jest *de facto* podmodułem (z Lematu 1.2.20 wynika, że $\sigma e_t = e_{\sigma t}$ dla dowolnych $\sigma \in S_n$, $t \in \mathcal{T}_\lambda$), który nazywamy *modułem Spechta* stowarzyszonym z podziałem λ.

Twierdzenie 1.2.22 ([42, Theorem 4.12])**.** *Dla dowolnego podziału λ liczby n, moduł Spechta S^λ jest nierozkładalną reprezentacją zespoloną grupy symetrycznej S_n. Każda nierozkładalna reprezentacja zespolona grupy S_n jest izomorficzna z dokładnie jednym modułem Spechta.*

Przykład 1.2.23. Jeśli $\lambda = (n)$, to S^λ $(= M^\lambda)$ jest reprezentacją trywialną. Jeśli $\lambda = (1^n)$, to M^λ jest reprezentacją regularną grupy S_n, zaś S^λ – reprezentacją alternującą.

Tablicę t nazywamy *standardową*, o ile dla dowolnych i, i_1, i_2, j, j_1, j_2 takich, że $i_1 < i_2$ oraz $j_1 < j_2$, zachodzi $t(i, j_1) < t(i, j_2)$ oraz $t(i_1, j) < t(i_2, j)$. Innymi słowy, tablica jest standardowa, jeśli jej wartości rosną wzdłuż wierszy i kolumn.

Twierdzenie 1.2.24 ([42, Theorem 8.4])**.** *Dla dowolnego podziału λ liczby n, zbiór*

$$\mathcal{B} = \{e_t \in M^\lambda \mid t \text{ jest standardową } \lambda\text{-tablicą}\}$$

stanowi bazę modułu Spechta S^λ (jako przestrzeni wektorowej).

Bazę $\mathcal{B}$ z Twierdzenia 1.2.24 nazywamy *bazą standardową* modułu S^λ.

Następny wynik należy do klasyki teorii reprezentacji grup symetrycznych i alternujących.

Twierdzenie 1.2.25 ([29, Chapters 4, 5])**.** *Niech $d \geq 7$ będzie liczbą naturalną. Jedyna (z dokładnością do izomorfizmu) nietrywialna $(d-1)$-wymiarowa reprezentacja zespolona grupy alternującej $\mathcal{A}_d$ jest ograniczeniem modułu Spechta, który odpowiada podziałowi $(d-1,1)$. Jest to jedyna nietrywialna reprezentacja grupy $\mathcal{A}_d$ wymiaru mniejszego niż d.*

1.2.6 Całkowitoliczbowe reprezentacje grup cyklicznych

Przypomnimy teraz kompletny opis całkowitoliczbowych reprezentacji grup cyklicznych rzędu pierwszego. Wynik ten przypisywany jest Diedrichsenowi i Reinerowi, a zwyczajowym odnośnikiem do literatury jest [20, §74].

Przez cały podrozdział p oznacza ustaloną liczbę pierwszą. Niech $\xi \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia p z jedynki, zaś R pierścieniem elementów całkowitych ciała $\mathbb{Q}(\xi)$, a więc

$$R = \{\alpha \in \mathbb{Q}(\xi) \mid \operatorname{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}[X]\},$$

gdzie $\operatorname{Irr}(\alpha,\mathbb{Q})$ oznacza (jednoznacznie wyznaczony) nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$, moniczny wielomian taki, że $\operatorname{Irr}(\alpha,\mathbb{Q})(\alpha) = 0$. Odnotujmy, że

$$\operatorname{Irr}(\xi,\mathbb{Q}) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1.$$

Twierdzenie 1.2.26 ([20, Theorem 21.13])**.** *Niech $\xi \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia p z jedynki, zaś R pierścieniem elementów całkowitych ciała $\mathbb{Q}(\xi)$. Wtedy $R = \mathbb{Z}[\xi]$.*

Ideałem ułamkowym ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ nazywamy dowolny niezerowy, skończenie generowany R-podmoduł ciała $\mathbb{Q}(\xi)$. (Dla arbitralnej dziedziny całkowitości R, o ciele ułamków K, ideał ułamkowy definiujemy jako niezerowy R-podmoduł A ciała K taki, że $rA \subseteq R$ dla pewnego niezerowego elementu $r \in R$. W sytuacji, gdy R jest pierścieniem noetherowskim, te dwie definicje są równoważne.) Dobrze wiadomo, że:

Lemat 1.2.27. *Dowolny ideał ułamkowy ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ jest grupą abelową wolną o randze równej $p-1$.*

Dowód. Jeśli A jest ideałem ułamkowym ciała $\mathbb{Q}(\xi)$, to istnieje niezerowy element $r \in R$ taki, że $rA \subseteq R$. Oczywiście mamy izomorfizm $A \cong rA$ grup abelowych. Z Twierdzenia 1.2.26 wynika, że R jest grupą abelową wolną rangi $p-1$. Wobec tego A jest grupą abelową wolną rangi niewiększej niż $p-1$. Z drugiej strony, jeśli $a \in A$, $a \neq 0$, to $R \cong Ra$ jako grupy abelowe. Jednakże $Ra \subseteq A$, a więc ranga A jest niemniejsza niż $p-1$. □

Mówimy, że dwa ideały ułamkowe A, B ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ są *równoważne*, o ile istnieje niezerowy element $\alpha \in \mathbb{Q}(\xi)$ taki, że $A = \alpha B$.

Twierdzenie 1.2.28 ([20, Theorem 20.6])**.** *Liczba klas równoważności ideałów ułamkowych ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ jest skończona.*

Ustalmy generator $g \in \mathbb{Z}_p$. Niech A będzie ideałem ułamkowym ciała $\mathbb{Q}(\xi)$. Na A wprowadzamy strukturę $\mathbb{Z}_p$-modułu przyjmując

$$ga = \xi a, \ a \in A.$$

W ten sposób dowolny ideał ułamkowy ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ staje się nierozkładalnym $\mathbb{Z}_p$-modułem.

Inną rodzinę $\mathbb{Z}_p$-modułów możemy skonstruować postępując następująco. Niech A będzie ideałem ułamkowym ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ oraz $a_0 \in A$ ustalonym elementem. Rozważmy sumę prostą $A \oplus \mathbb{Z}x$ wraz z $\mathbb{Z}_p$-działaniem określonym poprzez

$$\begin{cases} ga = \xi a, \ a \in A, \\ gx = a_0 + x. \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że

$$g^p x = (\xi^{p-1} + \xi^{p-2} + \cdots + \xi + 1)a_0 + x = \mathrm{Irr}(\xi, \mathbb{Q})(\xi)a_0 + x = x,$$

a więc działanie jest poprawnie określone. Tą metodą otrzymujemy $\mathbb{Z}_p$-moduł, który oznaczamy symbolem (A, a_0).

Lemat 1.2.29 ([2, Proposition 1.3])**.** *Niech A będzie ideałem ułamkowym ciała $\mathbb{Q}(\xi)$, zaś $a_0 \in A$ ustalonym elementem. Jeśli $a_0 \in (\xi - 1)A$, to $(A, a_0) \cong A \oplus \mathbb{Z}$, gdzie $\mathbb{Z}$ jest trywialnym $\mathbb{Z}_p$-modułem. W przeciwnym wypadku (A, a_0) jest nierozkładalnym $\mathbb{Z}_p$-modułem. Co więcej, dla $a_0, a_1 \in A$ takich, że $a_0, a_1 \notin (\xi-1)A$, zachodzi $(A, a_0) \cong (A, a_1)$.*

Okazuje się, że w opisany powyżej sposób można uzyskać wszystkie (nietrywialne) nierozkładalne $\mathbb{Z}_p$-moduły o skończonej bazie nad $\mathbb{Z}$. Konkretniej, mamy:

Twierdzenie 1.2.30 ([20, Theorem 74.4])**.** *Dowolny $\mathbb{Z}_p$-moduł o skończonej bazie nad $\mathbb{Z}$ jest izomorficzny z sumą prostą postaci*

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k \oplus (A_{k+1}, a_{k+1}) \oplus (A_{k+2}, a_{k+2}) \oplus \cdots \oplus (A_m, a_m) \oplus Y,$$

gdzie A_i są ideałami ułamkowymi ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ dla $1 \le i \le m$, elementy $a_j \in A_j$ są wybrane tak, aby $a_j \notin (\xi - 1)A_j$ dla $k+1 \le j \le m$, oraz $Y \cong \mathbb{Z}^n$ jest trywialnym $\mathbb{Z}_p$-modułem. Klasa izomorfizmu takiego $\mathbb{Z}_p$-modułu wyznaczona jest przez liczby k, m, n oraz klasę równoważności ideału $A_1 A_2 \cdots A_m$.

W świetle Twierdzenia 1.2.30 mówimy, że $\mathbb{Z}_p$-moduł M o skończonej bazie nad $\mathbb{Z}$ jest *typu* (r, s, t), o ile istnieje rozkład

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i=1}^{r} A_i \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{s} (A_j, a_j) \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k=1}^{t} \mathbb{Z} \Big).$$

Ponadto z Lematu 1.2.29 oraz Twierdzenia 1.2.30 wynika, że nierozkładalnych, parami nieizomorficznych $\mathbb{Z}_p$-modułów o skończonej bazie nad $\mathbb{Z}$ jest $2h + 1$, gdzie h oznacza liczbę klas równoważności ideałów ułamkowych ciała $\mathbb{Q}(\xi)$.

Wniosek 1.2.31. *Istnieją dokładnie trzy nierozkładalne, parami nieizomorficzne reprezentacje całkowitoliczbowe grupy $\mathbb{Z}_3$. Mogą one być utożsamione z macierzami:*

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dowód. Jeśli $p = 3$, to $h = 1$ ([49, Remark 3.4]), a więc rzeczywiście istnieją dokładnie trzy nierozkładalne reprezentacje całkowitoliczbowe grupy $\mathbb{Z}_3$ – po jednej dla każdego z typów $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ oraz $(0,0,1)$.

Macierz $[1]$ odpowiada oczywiście trywialnemu $\mathbb{Z}_3$-modułowi $\mathbb{Z}$. Pierścień elementów całkowitych R ciała $\mathbb{Q}(\xi)$ jest ideałem ułamkowym o bazie nad $\mathbb{Z}$ złożonej z elementów 1, ξ. Mamy:

$$\begin{cases} g1 = \xi, \\ g\xi = \xi^2 = -1 - \xi, \end{cases}$$

a więc uzyskaliśmy $\mathbb{Z}_3$-moduł typu $(1,0,0)$ i drugą z macierzy.

Rozpatrzmy $\mathbb{Z}_3$-moduł $(R, 1+\xi)$. Łatwo sprawdzamy, że $1 + \xi \notin (\xi - 1)R$. Ponadto elementy $1 + \xi + x$, $\xi + x$, x tworzą bazę modułu $(R, 1+\xi)$ nad $\mathbb{Z}$. Widzimy, że:

$$\begin{cases} g(1 + \xi + x) = \xi + (-1 - \xi) + (1 + \xi + x) = \xi + x, \\ g(\xi + x) = (-1 - \xi) + (1 + \xi + x) = x, \\ gx = 1 + \xi + x. \end{cases}$$

W ten sposób otrzymaliśmy $\mathbb{Z}_3$-moduł typu $(0,1,0)$ i trzecią z macierzy. $\square$

Rozdział 2

Właściwe grupy przekształceń powierzchni homotopijnych

Spis treści

2.1 Wstęp

Typowym problemem geometrii rozmaitości jest podanie charakteryzacji grup skończonych, które działają w sposób wolny na uprzednio ustalonej zamkniętej rozmaitości M. W ostatnim pięćdziesięcioleciu popularna była również homotopijna wersja tego samego problemu – opisanie grup skończonych, które działają w sposób wolny i komórkowy na skończonych CW kompleksach o typie homotopijnym rozmaitości M. Szczególnie owocne okazało się rozpatrywanie obydwu tych problemów naraz – wypada w tym miejscu ponownie wspomnieć o zagadnieniu form sferycznych, które zostało rozwikłane najpierw właśnie w wersji homotopijnej. (Patrz monografia Davisa i Milgrama [22]).

Jeszcze trudniejszym problemem jest podanie charakteryzacji grup, które działają w sposób właściwie dyskretny na rozmaitościach postaci $M \times \mathbb{R}^n$ lub, ogólniej, na skończenie wymiarowych CW kompleksach o typie homotopijnym rozmaitości M. W rozprawie rozważamy ten drugi problem dla klasy rozmaitości asferycznych, ze szczególnym uwzględnieniem powierzchni homotopijnych. Najpierw jednak musimy zrozumieć grupy skończone, które działają w sposób wolny na powierzchniach. Takie zadanie zostało podjęte na przykład przez Fujiiego [27], [28]. Poniżej przedstawiamy uogólnienie zaproponowanego przez niego podejścia, które jest punktem wyjścia do dalszych rozważań.

Twierdzenie 2.1.1. *Niech M^d będzie zamkniętą, asferyczną rozmaitością borelowską. Grupa skończona G działa w sposób wolny na rozmaitości M^d wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny grup*

$$1 \to \pi_1(M^d) \to \pi_1(N^d) \to G \to 1,$$

gdzie N^d jest zamkniętą, asferyczną rozmaitością. Wtedy $M^d/G \approx N^d$ oraz $\chi(M^d) = |G| \cdot \chi(N^d)$.

Dowód. Jeśli grupa skończona G działa w sposób wolny na rozmaitości M^d, to przestrzeń orbit M^d/G jest d-wymiarową, zamkniętą i spójną rozmaitością. Ponadto z analizy długiego ciągu dokładnego grup homotopii stowarzyszonego z nakryciem $M^d \to M^d/G$ wynika, że $\pi_i(M^d/G) = 0$ dla dowolnej liczby $i \geq 2$ oraz jej grupa podstawowa $\pi_1(M^d/G)$ jest rozszerzeniem grupy G o grupę $\pi_1(M^d)$.

Odwrotnie, rozważmy krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to \pi_1(M^d) \to \pi_1(N^d) \to G \to 1,$$

gdzie N^d jest zamkniętą, asferyczną rozmaitością. Niech $\tilde{M}$ będzie nakryciem rozmaitości N^d odpowiadającym podgrupie $\pi_1(M^d) \subseteq \pi_1(N^d)$. Wtedy $\tilde{M}$ jest d-wymiarową, zamkniętą, asferyczną rozmaitością oraz $G \cong \pi_1(N^d)/\pi_1(M^d)$ działa w sposób wolny na $\tilde{M}$. Ale $\pi_1(\tilde{M}) \cong \pi_1(M^d)$, zatem z Twierdzeń 1.1.4 oraz 1.1.7 otrzymujemy, że $\tilde{M} \simeq M^d$. Jednakże założyliśmy, że M^d jest rozmaitością borelowską, a więc $\tilde{M} \approx M^d$. Z teorii przestrzeni nakrywających wynika, że $M^d/G \approx N^d$, zaś równość $\chi(M^d) = |G| \cdot \chi(N^d)$ jest konsekwencją Twierdzenia 1.1.1. □

Uwaga 2.1.2. Z dualności Poincaré i twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych wynika, że charakterystyka Eulera dowolnej zamkniętej i spójnej rozmaitości nieparzystego wymiaru jest równa 0. W tej sytuacji równość ze sformułowania Twierdzenia 2.1.1 nie wnosi więc żadnych dodatkowych informacji.

W świetle wyników zawartych w Podrozdziale 1.1.3, w sytuacji, gdy $d = 2$, odzyskujemy główny wynik pracy Fujiiego:

Wniosek 2.1.3 ([27, Theorem 1.6])**.** *Niech Σ będzie powierzchnią różną od sfery dwuwymiarowej i płaszczyzny rzutowej. Grupa skończona G działa w sposób wolny na powierzchni Σ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny grup*

$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(\Sigma') \to G \to 1,$$

gdzie Σ' jest powierzchnią. Wtedy $\Sigma/G \approx \Sigma'$ oraz $\chi(\Sigma) = |G| \cdot \chi(\Sigma')$.

Uwaga 2.1.4. Wykluczenie sfery i płaszczyzny rzutowej ze sformułowania Wniosku 2.1.3 nie jest w żadnym stopniu ograniczające, gdyż wolne grupy przekształceń tych przestrzeni są dobrze znane. Sfera S^2 jest wolną $\mathbb{Z}_2$-przestrzenią ze względu na *działanie antypodyczne*:

$$(-1)x = -x \text{ dla } x \in S^2.$$

Ponieważ $\chi(S^2) = 2$, z Twierdzenia 1.1.1 wynika, że $\mathbb{Z}_2$ jest jedyną nietrywialną grupą skończoną, która działa w sposób wolny na S^2. Z kolei płaszczyzna rzutowa $\mathbb{R}P^2$ nie dopuszcza wolnego działania żadnej nietrywialnej grupy skończonej, gdyż $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$.

Powyższy rezultat daje całkiem sprawne narzędzie do wyznaczania grup skończonych, które działają w sposób wolny na powierzchni Σ. Poniżej przedstawiamy kilka przykładów jego zastosowania.

Przykład 2.1.5. (1) Grupa skończona G działa w sposób wolny na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to G \to 0,$$

a więc wtedy i tylko wtedy, gdy G jest cykliczna.

(2) Jedyną nietrywialną grupą skończoną, która działa w sposób wolny na powierzchni $(S^1 \times S^1)\sharp(S^1 \times S^1)$ jest grupa cykliczna rzędu 2. Odpowiedni krótki ciąg dokładny można uzyskać rozpatrując podwójne nakrycie orientowalne powierzchni $\mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2$.

(3) Fujii pokazał, że grupa skończona działa w sposób wolny na butelce Kleina wtedy i tylko wtedy, gdy jest cykliczna rzędu $2m + 1$ lub $4m + 2$, $m \geq 0$ ([27, Theorem 1.8]).

(4) Powierzchnia $\mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2$ nie dopuszcza wolnego działania żadnej nietrywialnej grupy skończonej, gdyż $\chi(\mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2) = -1$.

(5) Niech $\mathcal{U}_{p+2}$ oznacza nieorientowalną powierzchnię genusu $p + 2$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Nietrudno przekonać się, że jedyną nietrywialną grupą skończoną, która działa w sposób wolny na $\mathcal{U}_{p+2}$ jest grupa cykliczna rzędu p ([28, Proposition 1.4]).

(6) Jeśli grupa skończona G działa w sposób wolny na d-wymiarowym torusie $(S^1)^d$ oraz przestrzeń orbit $(S^1)^d/G$ także jest d-wymiarowym torusem, to G jest skończoną grupą abelową, która może być wygenerowana za pomocą co najwyżej d elementów.

Wniosek 2.1.3 ma także następującą, dobrze znaną specjalistom w tej dziedzinie, konsekwencję:

Wniosek 2.1.6. *Grupa skończona G o n-elementowym zbiorze generatorów działa w sposób wolny na orientowalnej powierzchni genusu $1 + (n-1)|G|$. W szczególności dowolna grupa skończona działa w sposób wolny na pewnej orientowalnej powierzchni.*

Dowód. Niech $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ będzie zbiorem generatorów grupy G. Oznaczmy przez Σ' orientowalną powierzchnię genusu n. Wówczas

$$\pi_1(\Sigma') = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \mid [x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n] = 1 \rangle.$$

Zdefiniujmy epimorfizm $\pi_1(\Sigma') \to G$ przyjmując:

$$\begin{cases} x_i \mapsto g_i, \\ y_i \mapsto 1 \end{cases} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Na podstawie Twierdzenia 1.2.16 wnioskujemy, że jądro $\ker(\pi_1(\Sigma') \to G)$ jest grupą podstawową pewnej orientowalnej powierzchni Σ, przy czym $\Sigma \neq S^2$. Z Wniosku 2.1.3 wynika teraz, że grupa G działa w sposób wolny na Σ oraz $g(\Sigma) = 1 + (n-1)|G|$. □

Celem, który stawiamy sobie w Rozdziale 2, jest przeniesienie powyższych wyników na grunt przestrzeni skończenie wymiarowych, w duchu analogicznych rozważań Adema i Smitha [5] oraz Golasińskiego, Gonçalvesa i Jimenéza [31], [32] dla sfer. Głównym pomysłem jest wykorzystanie pojęcia i własności wymiaru kohomologicznego grupy.

Rozdział zorganizowany jest jak następuje.

- W Podrozdziale 2.2 przedstawiamy uogólnienie Twierdzenia 2.1.1 na przypadek rozmaitości homotopijnych (Twierdzenie 2.2.1), a następnie koncentrujemy się na bezpośrednich konsekwencjach zaprezentowanego podejścia. Dowodzimy na przykład, że grupa skończona działa w sposób wolny i komórkowy na pewnej powierzchni homotopijnej wtedy i tylko wtedy, gdy działa w sposób wolny na powierzchni tego samego genusu (Wniosek 2.2.5).

- W Podrozdziale 2.3 wyprowadzamy związek pomiędzy wymiarem rozmaitości homotopijnej a wirtualnym wymiarem kohomologicznym jej właściwej grupy przekształceń (Twierdzenie 2.3.2).

- Podrozdział 2.4 poświęcony jest badaniom właściwych działań grup o nieskończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Główny wynik stanowi, że grupa o nieskończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym nie działa w sposób właściwy na żadnej powierzchni homotopijnej, z czterema możliwymi wyjątkami (Twierdzenie 2.4.6).

- W Podrozdziale 2.5 zajmujemy się przede wszystkim metodami konstruowania działań grup o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Dowodzimy na przykład, że każda grupa o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej (Wniosek 2.5.2). Ponadto badamy grupy, które działają w sposób właściwie dyskretny na powierzchniach homotopijnych ustalonego typu, ze szczególnym uwzględnieniem powierzchni orientowalnej Σ_2 genusu 2 (Stwierdzenie 2.5.5).

- Rozdział zamykamy Pozdrozdziałem 2.6, w którym przedstawiamy kilka uwag dotyczących sytuacji, w której ogólne homotopijne rozmaitości zastąpione są rozmaitościami postaci $M \times \mathbb{R}^n$. W szczególności klasyfikujemy grupy, które działają w sposób właściwie dyskretny na rozmaitości $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$ (Twierdzenie 2.6.3).

2.2 Rozszerzenia i właściwe grupy przekształceń

Niech M^d będzie d-wymiarową rozmaitością. *Rozmaitością homotopijną* typu M^d nazywamy dowolny skończenie wymiarowy CW kompleks X homotopijnie równoważny z M^d. Modelowym przykładem rozmaitości homotopijnej typu M^d jest $X = M^d \times \mathbb{R}^n$.

Jeśli $d = 2$ oraz rozmaitość M^d jest zamknięta i spójna, to mówimy, że X jest *powierzchnią homotopijną*.

Twierdzenie 2.2.1. *Niech M będzie zamkniętą, asferyczną rozmaitością. Grupa G działa w sposób właściwy na pewnej rozmaitości homotopijnej X typu M wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny grup*

$$1 \to \pi_1(M) \to \Gamma \to G \to 1,$$

gdzie Γ jest grupą o skończonym wymiarze kohomologicznym. Wtedy przestrzeń orbit X/G jest skończenie wymiarową przestrzenią Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma, 1)$.

Dowód. Załóżmy, że grupa G działa w sposób właściwy na rozmaitości homotopijnej X typu M jak wyżej. Wtedy przestrzeń orbit X/G jest skończenie wymiarowym, asferycznym CW kompleksem, którego grupa podstawowa $\pi_1(X/G)$ wkomponowuje się w krótki ciąg dokładny $1 \to \pi_1(M) \to \pi_1(X/G) \to G \to 1$. Ponieważ $\operatorname{cd} \pi_1(X/G) \leq \operatorname{gd} \pi_1(X/G) \leq \dim X$, dowód pierwszej implikacji jest zakończony.

Odwrotnie, niech

$$1 \to \pi_1(M) \to \Gamma \to G \to 1,$$

będzie krótkim ciągiem dokładnym grup, gdzie $\operatorname{cd} \Gamma < \infty$. Rozpatrzmy przestrzeń Eilenberga–MacLane'a B_Γ. Z Twierdzenia 1.2.8 wynika, że możemy założyć, że B_Γ jest skończenie wymiarowym CW kompleksem. Niech X będzie nakryciem przestrzeni B_Γ odpowiadającym podgrupie $\pi_1(M) \subseteq \Gamma$. Wówczas X jest skończenie wymiarowym, asferycznym CW kompleksem oraz $G \cong \Gamma/\pi_1(M)$ działa w sposób właściwy na X. Ponieważ $\pi_1(X) \cong \pi_1(M)$, w oparciu o Twierdzenie 1.1.4 wnioskujemy, że X jest rozmaitością homotopijną typu M. $\square$

Uwaga 2.2.2. Zaprezentowany powyżej dowód zawiera jeszcze jedną dodatkową informację: w opisanej sytuacji, jeśli $\operatorname{gd} \Gamma = n$, to grupa G działa w sposób właściwy na n-wymiarowej rozmaitości homotopijnej typu M.

Przykład 2.2.3. Dla dowolnej rozmaitości asferycznej M różnej oraz grupy G o skończonym wymiarze kohomologicznym istnieje rozmaitość homotopijna typu M, która dopuszcza właściwe działanie grupy G. Aby się o tym przekonać, wystarczy przyjąć $\Gamma = \pi_1(M) \times G$ w Twierdzeniu 2.2.1. Ponieważ obydwie grupy mają skończony wymiar kohomologiczny, taki ma również grupa Γ na mocy Lematu 1.2.11.

Geometrycznym odpowiednikiem powyższej obserwacji jest $E_G \times M$, gdzie E_G oznacza nakrycie uniwersalne skończenie wymiarowej przestrzeni Eilenberga–MacLane'a B_G, która istnieje ze względu na Twierdzenie 1.2.8.

Wniosek 2.2.4. *Niech Σ będzie powierzchnią różną od sfery dwuwymiarowej i płaszczyzny rzutowej.*

(1) *Grupa G działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej X typu Σ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny grup*

$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \Gamma \to G \to 1,$$

gdzie Γ jest grupą o skończonym wymiarze kohomologicznym. Wtedy przestrzeń orbit X/G jest skończenie wymiarową przestrzenią Eilenberga–MacLane'a typu $(\Gamma, 1)$.

(2) *W szczególności grupa skończona G działa w sposób wolny i komórkowy na pewnej powierzchni homotopijnej X typu Σ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krótki ciąg dokładny grup*

$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(\Sigma') \to G \to 1,$$

gdzie Σ' jest powierzchnią. Wtedy $X/G \simeq \Sigma'$ oraz $\chi(\Sigma) = |G| \cdot \chi(\Sigma')$.

Dowód. Dla dowodu drugiej części należy postępować podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.2.1, z niewielką modyfikacją w przypadku implikacji "$\Rightarrow$". Z Wniosku 1.2.12 wynika, że grupa $\pi_1(X/G)$ jest beztorsyjna. Wobec tego korzystając z Twierdzenia 1.2.18 otrzymujemy, że $\pi_1(X/G) \cong \pi_1(\Sigma')$ dla pewnej powierzchni Σ'. □

Odnotujmy kilka natychmiastowych konsekwencji Wniosku 2.2.4.

Wniosek 2.2.5. (1) *Grupa skończona działa w sposób wolny i komórkowy na pewnej powierzchni homotopijnej typu Σ wtedy i tylko wtedy, gdy działa w sposób wolny na Σ.*

(2) *Grupa skończona działa w sposób wolny na powierzchni Σ wtedy i tylko wtedy, gdy działa w sposób wolny i komórkowy na Σ.*

Dowód. (1) Wystarczy połączyć Wnioski 2.1.3 oraz 2.2.4.

(2) Implikacja w jedną stronę jest trywialna. Aby uzyskać implikację odwrotną, zastosujmy Wniosek 2.1.3 celem uzyskania odpowiedniego rozszerzenia grup. Dalej postępujemy analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 2.2.1, z tą różnicą, że za B_Γ przyjmujemy powierzchnię Σ'. Wówczas X ponownie jest powierzchnią, a ponieważ powierzchnie są rozmaitościami borelowskimi, mamy $X \approx \Sigma$. □

Zwróćmy uwagę, że zjawisko opisane w pierwszej części powyższego wniosku jest bardzo nietypowe.

Przykład 2.2.6. Milnor udowodnił, że jeśli grupa skończona działa w sposób wolny na pewnej sferze, to każdy jej element rzędu 2 jest zawarty w centrum (patrz Podrozdział 3.4). W szczególności żadna sfera nie dopuszcza wolnego działania grupy symetrycznej S_3. Z drugiej strony, Swan skonstruował skończony, trójwymiarowy CW kompleks o typie homotopijnym sfery S^3, dopuszczający wolne i komórkowe S_3-działanie ([61, Appendix]).

Wniosek 2.2.7. *Niech X będzie powierzchnią homotopijną, która dopuszcza właściwe działanie grupy G.*

(1) *Przestrzeń orbit X/G jest powierzchnią homotopijną wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest skończona.*

(2) *Jeśli przestrzeń orbit X/G ma typ homotopijny skończonego CW kompleksu, to grupa G jest skończenie generowana. Odwrotnie, jeśli grupa G jest skończenie prezentowalna i typu FL, to X/G ma typ homotopijny skończonego CW kompleksu.*

Dowód. (1) Część pierwsza jest konsekwencją Twierdzenia 1.2.16 oraz Wniosku 2.2.4.

(2) Jeśli przestrzeń orbit X/G ma typ homotopijny skończonego CW kompleksu, to grupa $\pi_1(X/G)$ jest skończenie generowana. Z Wniosku 2.2.4 wynika, że istnieje epimorfizm $\pi_1(X/G) \to G$, więc to samo jest prawdą w przypadku grupy G.

Odwrotnie, grupy $\pi_1(M)$ oraz G są skończenie prezentowalne i typu FL, a więc te własności ma także grupa $\pi_1(X/G)$, gdyż są one zamknięte ze względu na rozszerzenia ([43, Chapter 10, Proposition 1]). Z Twierdzenia 1.2.10 wynika zatem, że X/G ma typ homotopijny skończonego CW kompleksu. □

2.3 Wymiar grup przekształceń rozmaitości homotopijnych

Zakładając, że grupa G działa w sposób właściwy na rozmaitości homotopijnej X typu M^d, można pytać, jaki jest najmniejszy wymiar X jako CW kompleksu? Z dualności Poincaré wynika, że $\dim X \geq d$, ale rozsądnym wydaje się oczekiwać lepszego ograniczenia w terminach wymiaru kohomologicznego grupy G, tak jak w wynikach Golasińskiego, Gonçalvesa i Jimenéza ([32, Proposition 3.4]) oraz Lee ([44, Theorem 5.2]). Tak rzeczywiście jest, przynajmniej w przypadku rozmaitości homotopijnych orientowalnego typu.

Lemat 2.3.1. *Niech X będzie n-wymiarowym, asferycznym CW kompleksem takim, że $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ oraz niech G będzie grupą o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Wówczas dla dowolnego krótkiego ciągu dokładnego grup*

$$1 \to \pi_1(X) \to \Gamma \to G \to 1$$

zachodzi równość $\operatorname{vcd}\Gamma = \operatorname{cd}\pi_1(X) + \operatorname{vcd} G$.

Dowód. Oznaczmy $\pi = \pi_1(X)$. Zauważmy najpierw, że możemy założyć bez zmniejszenia ogólności rozważań, że G jest grupą beztorsyjną (a więc $\operatorname{cd} G < \infty$) oraz że $H_n(\pi, \mathbb{Z})$ jest trywialnym G-modułem. Rzeczywiście, w przeciwnym wypadku możemy wybrać podgrupę $G' \subseteq G$ skończonego indeksu taką, że

$\operatorname{cd} G' < \infty$ i rozważyć diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi \arrow[r] \arrow[u, equal] & \Gamma' \arrow[r] \arrow[u] & G' \arrow[r] \arrow[u] & 1, \\
& & 1 \arrow[u] & 1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

gdzie Γ' jest przeciwobrazem grupy G' poprzez epimorfizm $\Gamma \to G$. W szczególności grupa Γ' jest beztorsyjna, jako rozszerzenie grupy beztorsyjnej o grupę beztorsyjną. Ponieważ $[G : G'] < \infty$, więc $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$, skąd $\operatorname{vcd}\Gamma = \operatorname{cd}\Gamma'$. Co więcej, $G'' = \ker[G' \to \operatorname{Aut}(H_n(\pi, \mathbb{Z}))] \subseteq G'$ jest podgrupą skończonego indeksu, zatem z Lematu 1.2.11 wynika, że $\operatorname{cd} G' = \operatorname{cd} G''$. Oczywiście $H_n(\pi, \mathbb{Z})$ jest trywialnym G''-modułem. Rozpatrzmy teraz diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] & G' \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi \arrow[r] \arrow[u, equal] & \Gamma'' \arrow[r] \arrow[u] & G'' \arrow[r] \arrow[u] & 1, \\
& & 1 \arrow[u] & 1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

gdzie grupa Γ'' jest zdefiniowana analogicznie, jak Γ'. Z tej samej przyczyny co wcześniej, $\operatorname{cd}\Gamma' = \operatorname{cd}\Gamma''$. Wobec tego, jeśli wykażemy, że $\operatorname{cd}\Gamma'' = \operatorname{cd}\pi + \operatorname{cd} G''$, to

$$\operatorname{vcd}\Gamma = \operatorname{cd}\Gamma' = \operatorname{cd}\Gamma'' = \operatorname{cd}\pi + \operatorname{cd} G'' = \operatorname{cd}\pi + \operatorname{cd} G' = \operatorname{cd}\pi + \operatorname{vcd} G.$$

Niech $\operatorname{cd} G = m$. Z Lematu 1.2.11 wynika, że $\operatorname{cd}\Gamma \leq \operatorname{cd}\pi + \operatorname{cd} G = n + m$, a więc dla zakończenia dowodu potrzeba i wystarczy wskazać Γ-moduł A taki, że $H^{m+n}(\Gamma, A) \neq 0$. Przyjmijmy za A dowolny G-moduł taki, że $H^m(G, A) \neq 0$ i rozważmy na nim strukturę Γ-modułu indukowaną przez epimorfizm $\Gamma \to G$. Rozpatrzmy ciąg spektralny Lyndona–Hochschilda–Serre'a stowarzyszony z ciągiem dokładnym $1 \to \pi \to \Gamma \to G \to 1$:

$$E_2^{p,q} \cong H^p(G, H^q(\pi, A)) \Longrightarrow H^{p+q}(\Gamma, A).$$

Ponieważ ten ciąg spektralny skoncentrowany jest w prostokącie

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq m, \\ 0 \leq q \leq n, \end{cases}$$

widzimy, że $H^{m+n}(\Gamma, A) \cong H^m(G, H^n(\pi, A))$. Ale A jest trywialnym π-modułem, zatem korzystając z twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych otrzymujemy krótki ciąg dokładny G-modułów

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(\pi, \mathbb{Z}), A) \to H^n(\pi, A) \to \operatorname{Hom}(H_n(\pi, \mathbb{Z}), A) \to 0.$$

Ponieważ $H_n(\pi,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ jest trywialnym G-modułem, mamy izomorfizm G-modułów $\mathrm{Hom}(H_n(\pi,\mathbb{Z}),A) \cong A$ i ze stowarzyszonego długiego ciągu dokładnego grup kohomologii uzyskujemy epimorfizm $H^m(G,H^n(\pi,A)) \to H^m(G,A)$. Jednakże G-moduł A został wybrany w ten sposób, że $H^m(G,A) \neq 0$, więc $H^m(G,H^n(\pi,A)) \neq 0$. Konsekwentnie, $H^{m+n}(\Gamma,A) \neq 0$. □

Przechodzimy do sformułowania zapowiedzianego związku pomiędzy wymiarem rozmaitości homotopijnej i wirtualnym wymiarem kohomologicznym jej właściwej grupy przekształceń.

Twierdzenie 2.3.2. *Niech M^d będzie zamkniętą, asferyczną rozmaitością orientowalną, zaś G grupą o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Jeśli G działa w sposób właściwy na rozmaitości homotopijnej X typu M^d, to* $\dim X \geq \mathrm{vcd}\, G + d$.

Dowód. W dowodzie Twierdzenia 2.2.1 uzasadniliśmy, że przestrzeń X/G jest skończenie wymiarowym, asferycznym CW kompleksem, którego grupa podstawowa jest wyznaczona przez krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to \pi_1(M^d) \to \pi_1(X/G) \to G \to 1.$$

Z Lematu 2.3.1 wynika, że $\mathrm{cd}\,\pi_1(X/G) = \mathrm{cd}\,\pi_1(M^d) + \mathrm{vcd}\,G$. W Przykładzie 1.2.9 wyjaśniliśmy, że $\mathrm{cd}\,\pi_1(M^d) = d$, a więc

$$\dim X = \dim X/G \geq \mathrm{gd}\,\pi_1(X/G) \geq \mathrm{cd}\,\pi_1(X/G) = \mathrm{vcd}\,G + d,$$

czego oczekiwaliśmy. □

Wniosek 2.3.3. *Niech X będzie rozmaitością homotopijną orientowalnego typu M^d, która dopuszcza właściwe działanie grupy G o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym.*

(1) *Jeśli* $\dim X = d$*, to G jest grupą skończoną.*

(2) *Jeśli* $\dim X = d + 1$*, to G jest grupą skończoną lub grupą wirtualnie wolną, to znaczy G zawiera wolną podgrupę skończonego indeksu.*

Dowód. Przypomnijmy, że $\mathrm{vcd}\,\Gamma = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy Γ jest grupą skończoną, zaś z Przykładu 1.2.9 wynika, że $\mathrm{vcd}\,\Gamma = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy Γ jest grupą wirtualnie wolną. □

2.4 Nieistnienie właściwych działań grup o nieskończonym vcd

Przejdziemy teraz do problemu wyznaczenia grup, które działają w sposób właściwy na powierzchniach homotopijnych. Przykład 2.2.3 pokazuje, że nie ma nadziei na zapanowanie nad grupami o skończonym wymiarze kohomologicznym. Skupimy się więc na różnych klasach grup o nieskończonym wymiarze kohomologicznym. Narzucające się pytanie jest następujące: czy grupa o nieskończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym może działać w sposób właściwy na pewnej homotopijnej powierzchni?

Zanim przejdziemy do odpowiedzi, przypomnijmy definicję grupy Thompsona $\mathcal{F}$, która posłuży nam za przykład skończenie prezentowalnej, beztorsyjnej grupy o nieskończonym wymiarze kohomologicznym.

Przykład 2.4.1. Niech f_n, $n \geq 0$, oznacza kawałkami liniowy homeomorfizm prostej rzeczywistej, który jest identycznością na przedziale $(-\infty, n]$, ma współczynnik kierunkowy równy 2 na odcinku $[n, n+1]$, oraz współczynnik kierunkowy równy 1 na przedziale $[n+1, \infty)$. Grupę Thompsona $\mathcal{F}$ definiujemy jako podgrupę grupy homeomorfizmów prostej rzeczywistej generowaną przez homeomorfizmy f_n, $n \geq 0$.

Łatwo przekonać się, że $\mathcal{F}$ jest grupą beztorsyjną. Wybierzmy w tym celu nietrywialny element $f \in \mathcal{F}$ oraz niech $t_0 = \inf\{t \geq 0 \mid f(t) \neq t\}$. Wtedy $f(t_0) = t_0$. Prawostronna pochodna funkcji f w punkcie t_0 jest równa 2^m dla pewnej liczby $m \neq 0$, a więc z reguły łańcuchowej wynika, że dla dowolnej liczby $n \geq 1$ pochodna funkcji f^n w punkcie t_0 jest równa 2^{mn}. Widzimy zatem, że $f^n \neq \mathrm{id}$ dla $n \geq 1$.

Grupa $\mathcal{F}$ może być przedstawiona za pomocą prezentacji poprzez generatory i relacje w następujący sposób ([15, Theorem 3.4]):

$$\mathcal{F} = \langle a, b \mid [ab^{-1}, a^{-1}ba] = [ab^{-1}, a^{-2}ba^2] = 1 \rangle.$$

Przyjmijmy:

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_1 = b, \\ x_n = a^{-(n-1)}ba^{n-1} \text{ dla } n \geq 2. \end{cases}$$

Nietrudno przekonać się, że $x_k^{-1}x_nx_k = x_{n+1}$ dla dowolnych liczb $n \geq 1$ oraz $0 \leq k < n$, skąd wynika, że podgrupa $\mathcal{F}$ generowana przez $\{x_{2n}x_{2n+1}^{-1} \mid n \geq 0\}$ jest grupą abelową wolną o nieskończonej liczbie generatorów. Z Lematu 1.2.11 otrzymujemy, że $\operatorname{cd} \mathcal{F} = \infty$.

Zauważmy, że z Twierdzenia 2.3.2 wynika, że wymiar kohomologiczny podgrup grupy, która działa w sposób właściwy na rozmaitości homotopijnej orientowalnego typu musi być ograniczony. Dokładniej:

Wniosek 2.4.2. *Niech M będzie zamkniętą, asferyczną rozmaitością orientowalną. Jeśli grupa G działa w sposób właściwy na powierzchni homotopijnej typu M, to istnieje liczba $k \geq 0$ taka, że $\operatorname{vcd} G' \leq k$ dla dowolnej podgrupy $G' \subseteq G$ o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym.*

Modyfikując nieznacznie rozumowanie przedstawione w dowodzie Lematu 2.3.1 można pokazać, że w przypadku rozmaitości homotopijnych w ogóle nie musimy się martwić grupami takimi, jak grupa Thompsona $\mathcal{F}$.

Stwierdzenie 2.4.3. *Jeśli grupa G zawiera grupę $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ jako podgrupę, to G nie działa w sposób właściwy na żadnej rozmaitości homotopijnej.*

Dowód. Ustalmy liczbę $n \geq 1$. Załóżmy, że grupa $\mathbb{Z}^n$ działa w sposób właściwy na pewnej homotopijnej rozmaitości X typu M^d. Rozpatrzmy rozwłóknienie $X \to X/\mathbb{Z}^n \to B_{\mathbb{Z}^n}$ i stowarzyszony ciąg spektralny Serre'a:

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B_{\mathbb{Z}^n}; \mathcal{H}^q(X; \mathbb{Z}_2)) \Longrightarrow H^{p+q}(X/\mathbb{Z}^n; \mathbb{Z}_2).$$

Ponieważ $\operatorname{cd}\mathbb{Z}^n = n$, ten ciąg spektralny skoncentrowany jest w prostokącie

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq n, \\ 0 \leq q \leq d, \end{cases}$$

więc $H^{n+d}(X/\mathbb{Z}^n;\mathbb{Z}_2) \cong H^n(B_{\mathbb{Z}^n};\mathcal{H}^d(X;\mathbb{Z}_2)) \cong H^n(B_{\mathbb{Z}^n};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Stąd wynika, że $\dim X/\mathbb{Z}^n \geq n + d$. □

Istnieją jednak grupy beztorsyjne o nieskończonym wymiarze kohomologicznym, które nie zawierają $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ jako podgrupy. Taką grupę można skonstruować w następujący sposób.

Przykład 2.4.4. Wszystkie rozmaitości, o których mowa w tym przykładzie, są zamknięte, triangulowalne i asferyczne. Belegradek udowodnił, że dowolna rozmaitość M^d o hiperbolicznej grupie podstawowej jest retraktem rozmaitości M^{d+1}, której grupa podstawowa także jest hiperboliczna ([8, Theorem 3.1]). Postępując indukcyjnie, otrzymujemy ciąg $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots$ beztorsyjnych grup hiperbolicznych. Niech Γ_∞ oznacza granicę prostą systemu $(\Gamma_n, \Gamma_n \hookrightarrow \Gamma_{n+k})_{n\geq 1,\, k\geq 0}$. Oczywiście Γ_∞ jest grupą beztorsyjną o nieskończonym wymiarze kohomologicznym. Ponadto Γ_∞ nie zawiera $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ jako podgrupy: żadna grupa hiperboliczna nie zawiera $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ jako podgrupy ([13, Chapter III.Γ, Corollary 3.10]), a więc każda abelowa podgrupa grupy Γ_∞ jest skończenie generowana.[1]

Aby uzyskać wynik o nieistnieniu działań grup o nieskończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym bez żadnych dodatkowych założeń o grupie, skorzystamy z następującego:

Lemat 2.4.5. *Grupa automorfizmów zewnętrznych dowolnej grupy powierzchni ma skończony wirtualny wymiar kohomologiczny.*

Dowód. Z Twierdzenia A.2 otrzymujemy, że grupa automorfizmów zewnętrznych grupy powierzchni jest izomorficzna z rozszerzoną grupą klas odwzorowań tej powierzchni.

(POWIERZCHNIE ORIENTOWALNE) Harer udowodnił, że grupa klas odwzorowań orientowalnej powierzchni ma skończony wirtualny wymiar kohomologiczny ([35, Theorem 4.1]). Ponieważ grupa klas odwzorowań jest podgrupą indeksu 2 w rozszerzonej grupie klas odwzorowań, uzyskujemy żądany wynik w oparciu o Twierdzenie 1.2.13.

(POWIERZCHNIE NIEORIENTOWALNE) Hope i Tillmann pokazali, że rozszerzona grupa klas odwzorowań nieorientowalnej powierzchni genusu g jest podgrupą grupy klas odwzorowań orientowalnej powierzchni genusu $g-1$. Korzystając z poprzedniego przypadku oraz Lematu 1.2.15, uzyskujemy potrzebne ograniczenie górne. □

Twierdzenie 2.4.6. *Niech Σ będzie powierzchnią różną od sfery dwuwymiarowej, torusa, płaszczyzny rzutowej i butelki Kleina. Jeśli G działa w sposób właściwy na homotopijnej powierzchni typu Σ, to grupa G ma skończony wirtualny wymiar kohomologiczny.*

[1] Przykład 2.4.4 został zasugerowany autorowi przez I. Agola.

Dowód. Załóżmy, że grupa G działa w sposób właściwy na powierzchni homotopijnej X typu Σ jak wyżej. Z Twierdzenia 2.2.1 wynika, że istnieje krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \Gamma \to G \to 1,$$

gdzie $\operatorname{cd}\Gamma < \infty$. Jak zauważyliśmy w Podrozdziale 1.2.2, ciąg dokładny takiej postaci indukuje homomorfizm $\varphi\colon G \to \operatorname{Out}(\pi_1(\Sigma))$. Centrum grupy $\pi_1(\Sigma)$ jest trywialne na podstawie Twierdzenia 1.2.17, a więc ze Stwierdzenia 1.2.5 otrzymujemy, że grupa Γ jest jednoznacznie wyznaczona przez φ:

$$\Gamma \cong \operatorname{Aut}(\pi_1(\Sigma)) \times_{\operatorname{Out}(\pi_1(\Sigma))} G = \{(\sigma, g) \in \operatorname{Aut}(\pi_1(\Sigma)) \times G \mid \eta(\sigma) = \varphi(g)\},$$

gdzie $\eta\colon \operatorname{Aut}(\pi_1(\Sigma)) \to \operatorname{Out}(\pi_1(\Sigma))$ jest naturalnym rzutowaniem. Ponieważ $G \cong \operatorname{Inn}(G)$, stąd wynika, że $\ker\varphi \subseteq \pi_1(\Sigma) \times \ker\varphi \subseteq \Gamma$. Konsekwentnie, na mocy Lematu 1.2.11, $\operatorname{cd}\ker\varphi < \infty$. W szczególności $\ker\varphi$ jest grupą beztorsyjną ze względu na Wniosek 1.2.12. Ponadto w oparciu o Lematy 1.2.15 oraz 2.4.5 wnioskujemy, że $\operatorname{vcd}\operatorname{im}\varphi < \infty$. Stosując raz jeszcze Lemat 1.2.15, tym razem w odniesieniu do krótkiego ciągu dokładnego $1 \to \ker\varphi \to G \to \operatorname{im}\varphi \to 1$, otrzymujemy, że $\operatorname{vcd} G \leq \operatorname{cd}\ker\varphi + \operatorname{vcd}\operatorname{im}\varphi < \infty$. □

Uważna lektura dowodu Twierdzenia 2.4.6 pozwala na zauważenie:

Wniosek 2.4.7. *Niech Σ będzie powierzchnią różną od sfery dwuwymiarowej, torusa, płaszczyzny rzutowej i butelki Kleina. Jeśli grupa skończona G działa w sposób wolny na powierzchni homotopijnej typu Σ, to G jest podgrupą grupy* $\operatorname{Out}(\pi_1(\Sigma))$.

Dowód. Na mocy Wniosku 2.2.5 możemy założyć, że grupa G działa na powierzchni Σ w sposób wolny i komórkowy. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.4.6 uzyskujemy: homomorfizm $\varphi\colon G \to \operatorname{Out}(\pi_1(\Sigma))$, grupę Γ o skończonym wymiarze kohomologicznym oraz jej opis jako produktu włóknistego. Z tego ostatniego wynika, że $\ker\varphi \subseteq \Gamma$. Gdyby więc grupa $\ker\varphi$ była nietrywialna, to w Γ istniałby element torsyjny, czyniący jej wymiar kohomologiczny nieskończonym (Wniosek 1.2.12). □

Odnotujmy, że w ogólności jest możliwe, aby grupa nieskończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym działała w sposób właściwy na skończenie wymiarowym CW kompleksie.

Przykład 2.4.8. (1) Niech F oznacza grupę wolną o nieskończonej, przeliczalnej liczbie generatorów. Wówczas $\operatorname{cd} F = 1$ oraz $\operatorname{cd}[F,F] = 1$, ponieważ komutant $[F,F] \subseteq F$ także jest (nietrywialną) grupą wolną. Stąd otrzymujemy krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to [F,F] \to F \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \to 0.$$

Postępując podobnie jak w dowodzie Twierdznia 2.2.1, a więc rozpatrując przestrzeń Eilenberga–MacLane'a typu $(F,1)$ i jej nakrycie stowarzyszone z podgrupą $[F,F] \subseteq F$, otrzymujemy właściwe działanie grupy $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ na jednowymiarowym CW kompleksie, który ma typ homotopijny bukietu okręgów.

Zauważmy, że stąd wynika, że *dowolna* grupa G działa w sposób właściwy na pewnym jednowymiarowym homotopijnym bukiecie okręgów w taki sposób, że przestrzeń orbit ponownie jest jednowymiarowym homotopijnym bukietem okręgów. Aby się o tym przekonać, wystarczy rozważyć epimorfizm $F \to G$, gdzie F jest grupą wolną i powtórzyć powyższe rozumowanie.

(2) Przypomnijmy, że grupę nazywamy *lokalnie cykliczną*, o ile każda jej skończenie generowana podgrupa jest cykliczna. Prassidis udowodnił, że każda przeliczalna grupa lokalnie cykliczna działa w sposób właściwie dyskretny na produkcie $S^n \times \mathbb{R}^m$ dla pewnych liczb m, $n \geq 0$ ([55, Example 1]). Dowolna nieskończona grupa lokalnie cykliczna G jest grupą torsyjną, a więc $\operatorname{vcd} G = \infty$.

2.5 Właściwe działania grup o skończonym vcd

Rozpoczniemy od uogólnienia zjawiska, które opisaliśmy w Przykładzie 2.2.3.

Stwierdzenie 2.5.1. *Niech G będzie grupą o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym, $N \subseteq G$ jej beztorsyjnym dzielnikiem normalnym skończonego indeksu. Jeśli G/N działa w sposób wolny na rozmaitości asferycznej M^d, to G działa w sposób właściwy na rozmaitości homotopijnej typu M^d o wymiarze $[G : N] \cdot \operatorname{gd} N + d$.*

Dowód. Dzięki Wnioskowi 2.2.5 możemy założyć, że grupa G/N działa na M^d w sposób wolny i komórkowy. Wtedy G działa w sposób komórkowy, choć nie właściwie dyskretny, na M^d poprzez homomorfizm $G \to G/N \to \operatorname{Homeo}(M^d)$. Z Lematu 1.1.3 wynika, że grupa G działa na przestrzeni ściągalnej

$$X = \operatorname{Map}_N(G, E_N) \approx (E_N)^{[G:N]},$$

przy czym ograniczenie tego działania do podgrupy $N \subseteq G$ jest właściwe. Łatwo sprawdzamy, że działanie $G \times (X \times M^d) \to X \times M^d$ określone wzorem

$$g(x, m) = (gx, (gN)m) \text{ dla dowolnych } g \in G,\ x \in X \text{ oraz } m \in M^d$$

jest właściwe. □

Wniosek 2.5.2. *Dowolna grupa o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej orientowalnego typu.*

Dowód. W Podrozdziale 1.2.3 zauważyliśmy, że w grupie o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym zawsze znajdziemy beztorsyjny dzielnik normalny skończonego indeksu. Teza jest więc bezpośrednią konsekwencją Wniosku 2.1.6 oraz Stwierdzenia 2.5.1. □

Przykład 2.5.3. Niech $n \geq 2$ oraz $p \geq 3$ będzie liczbą pierwszą. Pełna grupa liniowa $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ jest generowana przez dwa elementy ([65, Theorem 1]) oraz

$$|GL(n, \mathbb{Z}_p)| = p_n = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}),$$

a więc z Wniosku 2.1.6 wynika, że $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ działa w sposób wolny na orientowalnej powierzchni genusu $1 + p_n$. W Przykładzie 1.2.14 uzasadniliśmy, że grupa $GL(n, \mathbb{Z})$ ma skończony wirtualny wymiar kohomologiczny, a jądro epimorfizmu $GL(n, \mathbb{Z}) \to GL(n, \mathbb{Z}_p)$ jest grupą beztorsyjną. Na podstawie Stwierdzenia 2.5.1 wnioskujemy, że grupa $GL(n, \mathbb{Z})$ działa w sposób właściwy na pewnej orientowalnej powierzchni homotopijnej genusu $1 + p_n$.

Tezę Stwierdzenia 2.5.1 można poprawić w sytuacji, gdy G jest produktem półprostym.

Stwierdzenie 2.5.4. *Niech N będzie grupą o skończonym wymiarze kohomologicznym. Jeśli grupa skończona G działa w sposób wolny na powierzchni Σ różnej od sfery dwuwymiarowej, torusa, płaszczyzny rzutowej i butelki Kleina, to dowolny produkt półprosty $N \rtimes G$ działa w sposób właściwy na pewnej* $(\mathrm{gd}\, N + 2)$*-wymiarowej powierzchni homotopijnej typu Σ.*

Dowód. Z Wniosku 2.1.3 wynika, że wolne G-działanie na Σ wyznacza krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \tilde{\Gamma} \to G \to 1,$$

gdzie $\tilde{\Gamma}$ jest pewną grupą powierzchni. Stąd z kolei otrzymujemy homomorfizm $\varphi\colon G \to \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$. Zdefiniujmy homomorfizm $\phi\colon N \rtimes G \to \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$ wzorem $\phi(n, g) = \varphi(g)$ dla $(n, g) \in N \rtimes G$. Centrum grupy $\pi_1(\Sigma)$ jest trywialne na podstawie Twierdzenia 1.2.17, więc w oparciu o Stwierdzenie 1.2.5 wnosimy istnienie krótkiego ciągu dokładnego grup

$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \Gamma \to N \rtimes G \to 1,$$

gdzie $\Gamma \cong \mathrm{Aut}(\pi_1(\Sigma)) \times_{\mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))} (N \rtimes G)$. Aby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że Γ jest beztorsyjna, wtedy bowiem $\mathrm{cd}\,\Gamma \le \mathrm{cd}\,\pi_1(\Sigma) + \mathrm{vcd}\, N \rtimes G = \mathrm{cd}\, N + 2$ w świetle Lematu 1.2.15 i teza wyniknie z Uwagi 2.2.2 oraz Wniosku 2.2.4.

Beztorsyjność grupy Γ jest prostą konsekwencją faktu, że $(\sigma, (n, g)) \in \Gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\sigma, g) \in \tilde{\Gamma}$. Rzeczywiście, niech $(\sigma, (n, g)) \in \Gamma$ i przypuśćmy, że $(\sigma, (n, g))^k = 1$ dla pewnej liczby $k > 1$. Wtedy

$$1 = (\sigma, (n, g))^k = (\sigma^k, (n, g)^k) = (\sigma^k, (n', g^k))$$

dla pewnego $n' \in N$. W szczególności $\sigma^k = \mathrm{id}$ oraz $g^k = 1$. Ale $(\sigma, g) \in \tilde{\Gamma}$, a więc $(\sigma, g)^k = (\sigma^k, g^k) \in \tilde{\Gamma}$. Ponieważ $\tilde{\Gamma}$ jest grupą beztorsyjną, $\sigma = \mathrm{id}$ oraz $g = 1$, skąd $n' = n^k$. Z beztorsyjności grupy N wynika zatem, że $n = 1$. □

Przechodzimy do działań grup na homotopijnych powierzchniach ustalonego typu. Niech Σ_2 oznacza orientowalną powierzchnię genusu 2, zaś $\mathcal{U}_3$ nieorientowalną powierzchnię genusu 3.

Stwierdzenie 2.5.5. *Grupa G działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej typu Σ_2 wtedy i tylko wtedy, gdy G ma skończony wymiar kohomologiczny lub $G \cong G' \rtimes \mathbb{Z}_2$, gdzie grupa G' ma skończony wymiar kohomologiczny.*

Dowód. Jeśli grupa G jest jak wyżej, to teza jest konsekwencją Stwierdzenia 2.5.4.

Odwrotnie, załóżmy, że G działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej X typu Σ_2. Z Twierdzenia 2.4.6 wynika, że $\operatorname{vcd} G < \infty$, a więc w przypadku, gdy G jest beztorsyjna, dowód jest zakończony. Załóżmy zatem, że G zawiera elementy torsyjne. Zauważmy, że jeśli $H \subseteq G$ jest nietrywialną, skończoną podgrupą, to $H^2(X;\mathbb{Z}_3)$ jest nietrywialnym H-modułem. Rzeczywiście, z Wniosku 2.2.4 wynika, że $H \cong \mathbb{Z}_2$ oraz $X/H \simeq \mathcal{U}_3$. Korzystając z izomorfizmu transferu, wnioskujemy, że

$$H^2(X;\mathbb{Z}_3)^H \cong H^2(X/H;\mathbb{Z}_3) \cong H^2(\mathcal{U}_3;\mathbb{Z}_3) = 0,$$

co chcieliśmy uzyskać.

Reasumując, wskazaliśmy epimorfizm $G \to \operatorname{Aut}(H^2(X;\mathbb{Z}_3))$, którego jądro $G' = \ker\left[G \to \operatorname{Aut}(H^2(X;\mathbb{Z}_3))\right]$ jest beztorsyjne i, ponownie dzięki Twierdzeniu 2.4.6, ma skończony wymiar kohomologiczny. Ponieważ $\operatorname{Aut}(H^2(X;\mathbb{Z}_3)) \cong \mathbb{Z}_2$, otrzymujemy rozszczepialny krótki ciąg dokładny

$$1 \to G' \to G \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

□

Stwierdzenie 2.5.6. *Grupa działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej typu $\mathcal{U}_3$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończony wymiar kohomologiczny.*

Dowód. Ponieważ $\chi(\mathcal{U}_3) = -1$, w oparciu o Twierdzenie 1.1.1 wnioskujemy, że powierzchnie homotopijne typu $\mathcal{U}_3$ nie dopuszczają wolnych i komórkowych działań nietrywialnych grup skończonych. Wobec tego każda właściwa grupa przekształceń przestrzeni tego typu jest beztorsyjna. Łącząc tę obserwację z Twierdzeniem 2.4.6 oraz Stwierdzeniem 2.5.1, otrzymujemy tezę. □

Uwaga 2.5.7. Powyższe stwierdzenie stanowi również kontrprzykład dla ewentualnej odwrotności Wniosku 2.4.7, ponieważ $\operatorname{Out}(\pi_1(\mathcal{U}_3)) \cong GL(2,\mathbb{Z})$, zaś ta ostatnia grupa w oczywisty sposób zawiera nietrywialne podgrupy skończone (patrz Przykład A.1).

W ogólności im wyższy genus rozpatrywanej powierzchni Σ, tym trudniejsze zadanie opisania grup, których właściwe działania dopuszczają powierzchnie homotopijne typu Σ. Pewnym rozwiązaniem jest ograniczenie się do rozpatrywania konkretnej klasy grup o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Niech $\mathcal{U}_{p+2}$ nieorientowalną powierzchnię genusu $p+2$, gdzie p jest liczbą pierwszą

Przypomnijmy, że grupę nazywamy *wirtualnie cykliczną*, o ile zawiera podgrupę cykliczną skończonego indeksu. W świetle Twierdzenia B.5 grupa wirtualnie cykliczna G jest albo skończona, albo:

- postaci $G \cong G' \rtimes \mathbb{Z}$, gdzie G' jest grupą skończoną lub
- postaci $G \cong G_1 *_H G_2$, gdzie $[G_i : H] = 2$ dla $i = 1, 2$ oraz H jest grupą skończoną.

Stwierdzenie 2.5.8. (1) *Nietrywialna grupa wirtualnie cykliczna G działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej typu $\mathcal{U}_4$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą cykliczną rzędu 2, nieskończoną grupą cykliczną, sumą prostą $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ lub produktem półprostym $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.*

(2) *Jeśli nietrywialna grupa wirtualnie cykliczna G działa w sposób właściwy na pewnej powierzchni homotopijnej typu $\mathcal{U}_{p+2}$, gdzie $p \geq 3$ jest liczbą pierwszą, to G jest grupą cykliczną rzędu p, nieskończoną grupą cykliczną lub pewnym produktem półprostym $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}$.*

Dowód. Ustalmy liczbę pierwszą p. W Przykładzie 2.1.5 odnotowaliśmy, że jedyną nietrywialną grupą skończoną, która działa w sposób wolny na powierzchni homotopijnej typu $\mathcal{U}_{p+2}$ jest grupa cykliczna rzędu p. Ze względu na Wniosek 2.2.5 możemy założyć, że działanie to jest komórkowe.

Jeśli grupa G jest postaci $G \cong G' \rtimes \mathbb{Z}$, gdzie G' jest grupą skończoną, to G' jest grupą trywialną lub $G' \cong \mathbb{Z}_p$. Jest jasne, że zarówno $\mathbb{Z}$, jak i $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}$ działają w sposób właściwy na $\mathcal{U}_{p+2} \times \mathbb{R}$.

Załóżmy, że $G_1 *_H G_2$, gdzie $[G_i : H] = 2$ dla $i = 1, 2$ oraz H jest grupą skończoną. Przypomnijmy, że grupy G_1 oraz G_2 mogą być traktowane jako podgrupy grupy $G_1 *_H G_2$ ([14, Chapter II, Lemma 7.4]). Stąd wynika, że $p = 2$: grupa $\mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$, nie zawiera podgrupy indeksu 2. Konsekwentnie, $G \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Dobrze jednak wiadomo, że $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$, a ta ostatnia grupa działa w sposób właściwy na pewnej homotopijnej powierzchni typu $\mathcal{U}_4$ na mocy Stwierdzenia 2.5.4. □

2.6 Właściwie dyskretne grupy przekształceń rozmaitości $M \times \mathbb{R}^n$

Założenie komórkowości działania w sformułowaniach Twierdzenia 2.2.1 oraz Wniosku 2.2.4 jest potrzebne celem uzyskania struktury skończenie wymiarowego CW kompleksu na przestrzeni orbit. W sytuacji, gdy rozmaitość homotopijna jest *de facto* rozmaitością (na przykład jeśli $X = M \times \mathbb{R}^n$), przestrzeń orbit działania właściwie dyskretnego ponownie jest rozmaitością i założenie komórkowości może być zaniedbane. Dokładniej, jeśli M jest rozmaitością asferyczną, to istnienie działania właściwie dyskretnego grupy G na rozmaitości $M \times \mathbb{R}^n$ pociąga za sobą istnienie krótkiego ciągu dokładnego

$$1 \to \pi_1(M) \to \Gamma \to G \to 1,$$

gdzie Γ jest grupą o skończonym wymiarze kohomologicznym. Wysłowimy teraz kilka wyników dotyczących takiej "geometrycznej" sytuacji.

Twierdzenie 2.6.1. *Niech M będzie zamkniętą, asferyczną rozmaitością orientowalną, zaś G grupą o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Jeśli G działa w sposób właściwie dyskretny na rozmaitości $M \times \mathbb{R}^n$, to* $\operatorname{vcd} G \leq n$, *przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość $(M \times \mathbb{R}^n)/G$ jest zamknięta.*

Dowód. Dowód Twierdzenia 2.3.2 funkcjonuje równie dobrze w przypadku pierwszej części tezy, z tą różnicą, że teraz $(M \times \mathbb{R}^n)/G$ jest asferyczną rozmaitością, zaś "dim" oznacza wymiar przestrzeni jako rozmaitości.

Dla dowodu drugiej części tezy przypomnijmy, że w Przykładzie 1.2.9 wykazaliśmy, że jeśli N^d jest zamkniętą, asferyczną rozmaitością, to $\operatorname{cd} \pi_1(N) = d$. Wobec tego z Lematu 2.3.1 otrzymujemy, że jeśli przestrzeń orbit $(M \times \mathbb{R}^n)/G$ jest rozmaitością zamkniętą, to

$$\begin{aligned}\operatorname{cd} \pi_1(M) + \operatorname{vcd} G &= \operatorname{cd} \pi_1(M \times \mathbb{R}^n) + \operatorname{vcd} G = \operatorname{cd} \pi_1\big((M \times \mathbb{R}^n)/G\big) \\ &= \dim (M \times \mathbb{R}^n)/G = \dim M \times \mathbb{R}^n = \operatorname{cd} \pi_1(M) + n.\end{aligned}$$

Odwrotnie, załóżmy, że rozmaitość $(M \times \mathbb{R}^n)/G$ nie jest zamknięta. Oznaczmy $d = \dim M$ oraz $\Gamma = \pi_1\big((M \times \mathbb{R}^n)/G\big)$. Z dualności Poincaré w wersji dla lokalnych współczynników oraz Stwierdzenia 1.2.2 wynika, że $H^{n+d}(\Gamma, M) \cong H^{n+d}\big((M \times \mathbb{R}^n)/G, \mathcal{M}\big) = 0$ dla dowolnego Γ-modułu M, a więc $\operatorname{cd} \Gamma < n + d$. Wobec tego, ponownie w oparciu o Lemat 2.3.1, wnioskujemy, że

$$\dim M + \operatorname{vcd} G = \operatorname{cd} \pi_1(M) + \operatorname{vcd} G = \operatorname{cd} \pi_1\big((M \times \mathbb{R}^n)/G\big) < \dim M + n.$$

□

Możemy także przedstawić następującą wersję Stwierdzenia 2.5.4:

Stwierdzenie 2.6.2. *Niech M będzie rozmaitością, która dopuszcza wolne działanie grupy skończonej G. Wtedy dowolny produkt półprosty $\mathbb{Z}^n \rtimes_\rho G$ działa w sposób właściwie dyskretny rozmaitości $M \times \mathbb{R}^n$.*

Dowód. Określmy działanie grupy $\mathbb{Z}^n \rtimes_\rho G$ na rozmaitości $M \times \mathbb{R}^n$ w następujący sposób:

$$(\mathbf{m}, g)(x, \mathbf{t}) = \big(gx, \mathbf{m} + \rho(g)(\mathbf{t})\big) \text{ dla } (\mathbf{m}, g) \in \mathbb{Z}^n \rtimes_\rho G \text{ oraz } x \in M,\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Powyższa definicja rzeczywiście określa działanie:

$$\begin{aligned}\big((\mathbf{m}_1, g_1)(\mathbf{m}_2, g_2)\big)(x, \mathbf{t}) &= (\mathbf{m_1} + \rho(g_1)(\mathbf{m}_2), g_1 g_2)(x, \mathbf{t}) \\ &= \big((g_1 g_2)x, \mathbf{m_1} + \rho(g_1)(\mathbf{m}_2) + \rho(g_1 g_2)(\mathbf{t})\big) \\ &= \big(g_1(g_2 x), \mathbf{m_1} + \rho(g_1)(\mathbf{m}_2 + \rho(g_2)(\mathbf{t}))\big) \\ &= (\mathbf{m}_1, g_1)\big(g_2 x, \mathbf{m}_2 + \rho(g_2)(\mathbf{t})\big) \\ &= (\mathbf{m}_1, g_1)\big((\mathbf{m}_2, g_2)(x, \mathbf{t})\big).\end{aligned}$$

Zauważmy, że tak zdefiniowane działanie jest właściwie dyskretne: dla dowolnego punktu $x \in M$ istnieje takie jego otoczenie, że dla $g \in G$, $g \neq 1$, zachodzi $gU \cap U = \emptyset$. Teraz wystarczy zauważyć, że $(\mathbf{m}, g) \cdot U \times \mathbb{R}^n = gU \times \mathbb{R}^n$. □

Zebranie właściwie wszystkich wyników Rozdziału 2 pozwala na zauważenie:

Twierdzenie 2.6.3. *Nietrywialna grupa G działa w sposób właściwie dyskretny na rozmaitości $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą cykliczną rzędu 2, nieskończoną grupą cykliczną, sumą prostą $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ lub nietrywialnym produktem półprostym $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.*

Dowód. Załóżmy, że nietrywialna grupa G działa w sposób właściwie dyskretny na rozmaitości $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$. Z Twierdzenia 2.4.6 wynika, że $\operatorname{vcd} G < \infty$, zatem na podstawie Twierdzenia 2.6.1 uzyskujemy $\operatorname{vcd} G \leq 1$. Jeśli $\operatorname{vcd} G = 0$, to G jest grupą skończoną oraz $G \cong \mathbb{Z}_2$ ze względu na Twierdzenie 1.1.1. Ponieważ $\mathbb{Z}_2$ jest wolną grupą przekształceń rozmaitości Σ_2, jest ona także wolną grupą przekształceń rozmaitości $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$.

Załóżmy teraz, że $\operatorname{vcd} G = 1$. W oparciu o Twierdzenie 2.6.1 wnioskujemy, że przestrzeń orbit $(\Sigma_2 \times \mathbb{R})/G$ jest rozmaitością zamkniętą, a więc z Wniosku 2.2.7 wynika, że grupa G jest skończenie generowana. Wobec tego z Przykładu B.4 oraz Twierdzenia B.7 otrzymujemy, że $e(G) = e(\Sigma_2 \times \mathbb{R}) = 2$. Korzystając w końcu z Twierdzenia B.5 widzimy, że G jest nieskończoną grupą cykliczną, sumą prostą $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ lub produktem półprostym $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$. Oczywiście dwie pierwsze grupy działają w sposób właściwie dyskretny na $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$, a ze Stwierdzenia 2.6.2 wynika, że jest to prawdą również w przypadku grupy $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$. $\square$

Rozdział 3

Wolne działania grup alternujących na produktach sfer

Spis treści

3.1 Wstęp

Badania nad wolnymi działaniami grup alternujących na produktach sfer datują się wstecz do artykułu Olivera [52]. Udowodnił on, że grupa alternująca $\mathcal{A}_4$ nie może działać w sposób wolny na żadnym skończonym CW kompleksie X takim, że pierścienie kohomologii $H^*(X;\mathbb{Z})$ oraz $H^*(S^n \times S^n;\mathbb{Z})$ są izomorficzne dla pewnej liczby $n \geq 1$. Z drugiej strony, Oliver w tym samym artykule zauważył, że każda grupa skończona działa w sposób wolny na pewnym produkcie sfer:

Stwierdzenie 3.1.1 ([52, Theorem 5]). *Niech G będzie grupą skończoną. Dla dowolnej liczby nieparzystej $n \geq 1$ istnieje liczba $k \geq 1$ taka, że grupa G działa w sposób wolny na produkcie $(S^n)^k$.*

Dowód. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą nieparzystą. Przypomnijmy, że dla dowolnego nietrywialnego elementu $g \in G$, grupa cykliczna $\langle g\rangle \subseteq G$ działa w sposób wolny na S^n. Na podstawie Lematu 1.1.3 wnioskujemy, że grupa G działa na

$$M_g = \mathrm{Map}_{\langle g\rangle}(G, S^n) \approx (S^n)^{[G:\langle g\rangle]},$$

przy czym jej podgrupa $\langle g\rangle \subseteq G$ działa na M_g w sposób wolny. Widzimy więc, że produkt $\prod_{g\in G,\, g\neq 1} M_g$ wraz z diagonalnym G-działaniem jest wolną G-przestrzenią. $\square$

Konstrukcja zaprezentowana w dowodzie Stwierdzenia 3.1.1 ma zasadniczą wadę: jest bardzo nieefektywna w sensie liczby sfer występujących w uzyskanym produkcie. Na przykład jeśli za grupę G przyjmiemy elementarną abelową p-grupę rangi r, to otrzymamy w efekcie wolne G-działanie na $(S^n)^{p^{r-1}(p^r-1)}$, natomiast taka grupa oczywiście działa w sposób wolny na $(S^n)^r$. Doprowadziło to do postawienia następującego problemu:

Mając daną grupę skończoną G, wyznaczyć najmniejszą liczbę $k = k(G)$ taką, że G działa w sposób wolny na produkcie $(S^n)^k$ dla pewnej liczby n.

Przykład 3.1.2. (1) Dla dowolnej liczby $m \geq 1$ mamy $k(\mathbb{Z}_m) = 1$. Ogólniej, rozwiązanie zagadnienia form sferycznych, podane przez Madsena, Thomasa i Walla, stanowi, że grupa G spełnia równość $k(G) = 1$ wtedy i tylko gdy każda abelowa podgrupa grupy G jest cykliczna oraz każdy jej element rzędu 2 jest centralny ([46, Theorem 0.5]).

(2) Adem i Browder udowodnili, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p zachodzi równość $k((\mathbb{Z}_p)^r) = r$ ([3, Theorem 4.2]). Pytanie, czy $k((\mathbb{Z}_2)^r) = r$, pozostaje otwarte.

(3) W kontekście grup alternujących wiadomo, że $k(\mathcal{A}_4) = 3$. Wspomniany wynik Olivera mówi, że $k(\mathcal{A}_4) > 2$, zaś wolne $\mathcal{A}_4$-działanie na produkcie $S^3 \times S^3 \times S^3$ zostało skonstruowane przez Płachtę ([53, Example 1]). Ponadto w tej samej pracy Płachta wykazał, że $k(\mathcal{A}_6) > 5$.

Zwróćmy uwagę, że $k(G)$ istotnie zależy nie tylko od grupy G, ale także od liczby n. Innymi słowy, z faktu, że grupa G działa w sposób wolny na produkcie $(S^n)^k$ nie wynika, że G działa w sposób wolny na $(S^m)^k$ dla $m \neq n$, ani nawet na skończenie wymiarowym CW kompleksie o typie homotopijnym produktu $(S^m)^k$.

Przykład 3.1.3. Grupa kwaternionów $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ działa w sposób wolny na S^3 jako podgrupa, zaś z Twierdzenia 2.2.1 wynika, że okręgi homotopijne dopuszczają wolne działania jedynie grup cyklicznych.

To sugeruje możliwość subtelniejszego podejścia do problemu wyznaczania liczby $k(G)$. Dla skończonej grupy G i liczby $n \geq 1$ definiujemy $k^n(G)$ jako najmniejszą liczbę k o tej własności, że G działa w sposób wolny na produkcie $(S^n)^k$. Wtedy

$$k(G) = \min\{k^n(G) \mid n \geq 1\}.$$

Przedmiotem naszego zainteresowania w tym rozdziale jest zachowanie liczby k w klasie grup alternujących. Poniżej podsumowujemy uzyskane wyniki.

- Podrozdział 3.2 poświęcony jest badaniom wolnych działań grupy $\mathcal{A}_4$ na produktach sfer. W szczególności wyznaczamy $k^n(\mathcal{A}_4)$ dla $n \geq 1$, co uzupełnia wspomniane rezultaty Olivera i Płachty (Twierdzenie 3.2.6 oraz Stwierdzenie 3.2.8). Ponadto dowodzimy, że $\mathcal{A}_4$ nie działa w sposób wolny na $S^1 \times S^n$ dla żadnej liczby $n \geq 1$.

- Główne wyniki rozdziału przedstawione są w Podrozdziale 3.3. Dowodzimy, że $k(\mathcal{A}_d) > d-2$ dla dowolnej liczby $d \geq 5$ (Stwierdzenie 3.3.1) oraz $k(\mathcal{A}_d) > d-1$, jeśli $d = p$ lub $d = p+1$, gdzie $p \geq 7$ jest liczbą pierwszą (Twierdzenia 3.3.3 oraz 3.3.6).
- W Podrozdziale 3.4 przedstawiamy wiadomości o wolnych działaniach grupy symetrycznej S_3 na produktach dwóch sfer; przede wszystkim wyznaczamy liczbę $k^n(S_3)$ dla $n \geq 1$ (Stwierdzenie 3.4.2). Odnotowujemy także, że $k(\mathcal{A}_d) \leq k(S_d) \leq 2k(\mathcal{A}_d)+1$ dla $d \geq 1$.
- Uzyskane wyniki stosujemy w Podrozdziale 3.5 w teorii grup krystalograficznych: pokazujemy, że grupa alternująca $\mathcal{A}_d$ nie może być zrealizowana jako grupa holonomii $(d-1)$-wymiarowej grupy Bieberbacha (Stwierdzenie 3.5.2).

Wśród wykorzystywanych narzędzi najistotniejszą rolę odgrywa teoria reprezentacji grup alternujących oraz całkowitoliczbowa teoria reprezentacji grup cyklicznych rzędu pierwszego, a także następujący rezultat autorstwa Adema, który wiąże strukturę $\mathbb{Z}_p$-modułu na $H^n((S^n)^k;\mathbb{Z})$ i charakter zbioru punktów stałych działania.

Twierdzenie 3.1.4 ([2, Theorems 4.5, 4.6])**.** *Niech X będzie skończenie wymiarowym CW kompleksem takim, że pierścienie $H^*(X;\mathbb{Z})$ oraz $H^*((S^n)^k;\mathbb{Z})$ są izomorficzne dla pewnych liczb naturalnych k, n. Ustalmy liczbę pierwszą p i załóżmy, że X jest $\mathbb{Z}_p$-przestrzenią.*

(1) *Jeśli $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest typu $(0,s,0)$, to zbiór punktów stałych F działania jest niepusty. Co więcej, $H^*(F;\mathbb{Z}_p) \cong H^*((S^n)^s;\mathbb{Z}_p)$.*

(2) *Jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą oraz $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest typu $(r,0,0)$, to zbiór punktów stałych F działania jest niepusty oraz pierścień $H^*(F;\mathbb{Z}_p)$ jest beztorsyjny, trywialny w nieparzystej gradacji oraz rangi p^r.*

W dalszej części rozdziału przyjmujemy następującą konwencję: $X \sim (S^n)^k$ oznacza, że przestrzenie X oraz $(S^n)^k$ mają izomorficzne pierścienie kohomologii o współczynnikach całkowitych.

3.2 Wolne działania grupy $\mathcal{A}_4$

Przypomnijmy, że grupę $\mathcal{A}_4$ można przedstawić dwojako: za pomocą prezentacji poprzez generatory i relacje,

$$\mathcal{A}_4 \cong \langle a,b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1\rangle,$$

oraz jako nietrywialne rozszerzenie

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{A}_4 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_3 \to 0.$$

W dalszej części rozprawy skorzystamy z obydwu możliwości. Symbol ϵ zarezerwowany jest przez cały podrozdział dla epimorfizmu z powyższego krótkiego ciągu dokładnego.

Punktem wyjścia dla naszych rozważań jest następujący wynik Olivera:

Twierdzenie 3.2.1 ([52, Theorem 1]). *Niech k, n będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Jeśli grupa alternująca $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na skończenie wymiarowym CW kompleksie X takim, że pierścienie kohomologii $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ oraz $H^*((S^n)^k;\mathbb{Z}_2)$ są izomorficzne, to $H^n(X;\mathbb{Z}_2)$ jest nietrywialnym $\mathcal{A}_4$-modułem.*

Poniższy lemat pokazuje, że Twierdzenie 3.2.1 jest prawdziwe także dla pierścienia kohomologii o współczynnikach całkowitych. Właśnie w takiej wersji będziemy z niego korzystać.

Lemat 3.2.2. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną o skończenie generowanych, abelowych wolnych grupach homologii $H_k(X;\mathbb{Z})$ dla dowolnej liczby $k \geq 0$. Ustalmy liczbę pierwszą p.*

(1) *Pierścienie $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ oraz $H^*(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$ są izomorficzne.*

(2) *Załóżmy dodatkowo, że X jest G-przestrzenią dla pewnej grupy G. Jeśli $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest trywialnym G-modułem dla pewnej liczby $n \geq 0$, to $H^n(X;\mathbb{Z}_p)$ także jest trywialnym G-modułem.*

Dowód. (1) Część pierwsza wynika z twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych i faktu, że homomorfizm zmiany współczynników $H^*(X;\mathbb{Z}) \to H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ jest homomorfizmem pierścieni.

(2) Dla dowolnego elementu $g \in G$ mamy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd} H^n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\rho^*"'] & H^n(X;\mathbb{Z}) \arrow[d, "\rho^*"] \\ H^n(X;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "g^*"'] & H^n(X;\mathbb{Z}_p), \end{tikzcd}$$

gdzie $g^*\colon H^n(X;-) \to H^n(X;-)$ jest homomorfizmem indukowanym przez odwzorowanie $X \to X$, $x \mapsto gx$ dla $x \in X$, natomiast $\rho^*\colon H^n(X;\mathbb{Z}) \to H^n(X;\mathbb{Z}_p)$ oznacza homomorfizm zmiany współczynników indukowany przez $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$, $\rho(1) = 1 \bmod p$. Ponieważ automorfizm $g^*\colon H^n(X;\mathbb{Z}) \to H^n(X;\mathbb{Z})$ jest z założenia identycznością, dla zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że ρ^* jest epimorfizmem. Rozpatrzmy w tym celu długi ciąg dokładny grup kohomologii stowarzyszony z krótkim ciągiem dokładnym $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}_p \to 0$, gdzie $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ jest mnożeniem przez p:

$$\cdots \to H^n(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho^*} H^n(X;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

Z twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych wynika, że $H^k(X;\mathbb{Z}) \cong H_k(X;\mathbb{Z})$ dla dowolnej liczby $k \geq 0$. Ponieważ p^* także jest mnożeniem przez p, to jest monomorfizmem. Stąd otrzymujemy, że $\beta = 0$ i, konsekwentnie, ρ^* jest epimorfizmem. □

Następne stwierdzenie zostało uzyskane przez Olivera w wersji dla skończonych CW kompleksów poprzez połączenie Twierdzenia 3.2.1 i twierdzenia Lefschetza o punkcie stałym ([52, Theorem 2]).

Stwierdzenie 3.2.3. *Grupa alternująca $\mathcal{A}_4$ nie działa w sposób wolny na żadnym skończenie wymiarowym CW kompleksie X takim, że $X \sim S^n \times S^n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.*

Dowód. Przypuśćmy, że grupa $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na CW kompleksie X jak wyżej. Na podstawie Twierdzenia 3.2.1 i Lematu 3.2.2 wnioskujemy, że $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest nietrywialnym $\mathcal{A}_4$-modułem. Grupa $\mathcal{A}_4$ generowana jest przez cykle długości 3, zatem $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest także nietrywialnym $\mathbb{Z}_3$-modułem dla pewnej podgrupy $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathcal{A}_4$; oznaczmy ją przez $\mathcal{Z}_3$. Korzystając z Twierdzenia 1.2.30 otrzymujemy, że $\mathcal{Z}_3$-moduł $H^n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ jest typu $(1,0,0)$, co stoi w sprzeczności z Twierdzeniem 3.1.4. □

Stąd oczywiście wynika, że żadna grupa, która zawiera $\mathcal{A}_4$ jako podgrupę, nie działa w sposób wolny na takim CW kompleksie. W szczególności mamy:

Wniosek 3.2.4. *Skończona grupa prosta o randze równej 2 nie działa w sposób wolny na żadnym skończenie wymiarowym CW kompleksie takim, że $X \sim S^n \times S^n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.*

Dowód. Jest to natychmiastowa konsekwencja faktu, że grupa $\mathcal{A}_4$ jest podgrupą każdej skończonej grupy prostej rangi 2 ([5, Section 5]). □

Dążymy do wyznaczenia liczby $k^n(\mathcal{A}_4)$ dla dowolnego $n \geq 1$. Płachta wykazał, że grupa $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na $S^3 \times S^3 \times S^3$ ([53, Example 1]). Uzupełnimy ten wynik dowodząc, że $k^n(\mathcal{A}_4) = 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1, 3, 7$. Wykorzystamy w tym celu następującą obserwację poczynioną przez Adema:

Lemat 3.2.5 ([2, Proposition 2.1])**.** *Niech k, n będą liczbami naturalnymi, przy czym $n \neq 1, 3, 7$. Jeśli $f\colon (S^n)^k \to (S^n)^k$ jest odwzorowaniem takim, że homomorfizm indukowany $f^*\colon H^n((S^n)^k;\mathbb{Z}) \to H^n((S^n)^k;\mathbb{Z})$ jest automorfizmem, to $f^*\colon H^n((S^n)^k;\mathbb{Z}_2) \to H^n((S^n)^k;\mathbb{Z}_2)$ jest macierzą permutacji w bazie kanonicznej.*

Przechodzimy do dowodu zapowiedzianego faktu.

Twierdzenie 3.2.6. *Grupa alternująca $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na produkcie $S^n \times S^n \times S^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1, 3, 7$.*

Dowód. $(\Leftarrow)$ Załóżmy, że $n = 1$, 3 lub 7. Wtedy na sferze S^n istnieje struktura H-przestrzeni, pochodzącą z mnożenia odpowiednio liczb zespolonych, kwaternionów i oktaw Cayleya. Wykorzystamy ją do określenia żądanego działania.

Niech $F_2 = \langle a, b \rangle$ będzie grupą wolną o dwóch generatorach. Zdefiniujmy F_2-działanie na $S^n \times S^n$ w następujący sposób:

$$\begin{cases} a(x,y) = (-x,y), \\ b(x,y) = (y, y^{-1}x^{-1}) \end{cases} \quad \text{dla } x, y \in S^n.$$

Jeśli $n = 1$ lub 3, to działanie jest trywialne po ograniczeniu do domknięcia normalnego zbioru $\{a^2, b^3, (ab)^3\}$, a zatem indukuje ono działanie grupy $\mathcal{A}_4$ na $S^n \times S^n$. Oznaczmy je przez φ. Wprost z definicji wynika, że działanie φ jest wolne po ograniczeniu do podgrupy $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \langle a, bab^2 \rangle \subseteq \mathcal{A}_4$.

W przypadku, gdy $n = 7$, możemy zdefiniować F_2-działanie na $S^7 \times S^7$ dokładnie tak samo, jak wyżej. Aby wykazać, że to działanie wyznacza działanie grupy $\mathcal{A}_4$, które jest wolne po ograniczeniu do podgrupy $\langle a, bab^2 \rangle$, potrzebujemy łączności mnożenia po ograniczeniu do dowolnej podalgebry o dwóch generatorach. Mnożenie oktaw Cayleya nie jest łączne w ogólności, ale ma żądaną własność ([66, Appendix A, Theorem 4.16]).

Rozpatrzmy teraz jakiekolwiek wolne $\mathbb{Z}_3$-działanie na S^n i przedłużmy je do działania $\phi\colon \mathcal{A}_4 \times S^n \to S^n$ za pomocą epimorfizmu ϵ. Łatwo zauważyć, że działanie diagonalne powstałe z działań φ oraz ϕ jest wolne. Rzeczywiście, niech $\sigma \in \mathcal{A}_4$. Mamy:

$$\sigma(x, y, z) = (\sigma(x, y), \sigma z) = \begin{cases} (\varphi(\sigma, (x, y)), z), & \sigma \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ (\varphi(\sigma, (x, y)), \epsilon(\sigma) z), & \sigma \notin \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{cases}$$

Jeśli $\sigma \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\sigma \neq 1$, to z konstrukcji wynika, że $\varphi(\sigma, (x, y)) \neq (x, y)$. Jeśli zaś $\sigma \notin \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, to $\epsilon(\sigma) \neq 1 \in \mathbb{Z}_3$, a więc $\epsilon(\sigma) z \neq z$.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że grupa $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na $X = S^n \times S^n \times S^n$. W oparciu o Twierdzenie 3.2.1 i Lemat 3.2.2 wnioskujemy, że $H^n(X; \mathbb{Z})$ jest nietrywialnym $\mathcal{A}_4$-modułem. Jedynym nietrywialnym dzielnikiem normalnym grupy $\mathcal{A}_4$ jest grupa $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, a więc $H^n(X; \mathbb{Z})$ jest także nietrywialnym $\mathbb{Z}_3$-modułem dla dowolnej podgrupy $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathcal{A}_4$. Ustalmy taką podgrupę i oznaczmy ją przez $\mathcal{Z}_3$. Korzystając z Twierdzeń 1.2.30, 3.1.4 oraz 3.2.1 otrzymujemy, że $\mathcal{Z}_3$-moduł $H^n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ jest typu $(1, 0, 1)$, zatem z Wniosku 1.2.31 wynika, że istnieje baza $H^n(X; \mathbb{Z})$ jako wolnego $\mathbb{Z}$-modułu, w której jego struktura $\mathcal{Z}_3$-modułu wyznaczona jest przez macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przedstawmy strukturę $\mathcal{Z}_3$-modułu na $H^n(X; \mathbb{Z})$ w bazie kanonicznej i oznaczmy uzyskaną macierz przez A. Obraz A poprzez epimorfizm $GL(3, \mathbb{Z}) \to GL(3, \mathbb{Z}_2)$ będzie macierzą podobną do

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tym samym A nie może być macierzą permutacji, co wynika na przykład z porównania wielomianów minimalnych. Na podstawie Lematu 3.2.5 wnioskujemy, że $n = 1, 3, 7$. $\square$

Zademonstrujemy teraz inną metodę dowiedzenia, że $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na produkcie $S^1 \times S^1 \times S^1$.

Przykład 3.2.7. W świetle Przykładu 1.1.8 i Twierdzenia 2.1.1, istnienie wolnego $\mathcal{A}_4$-działania na $S^1 \times S^1 \times S^1$ jest równoważne istnieniu krótkiego ciągu dokładnego grup

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \pi_1(N) \to \mathcal{A}_4 \to 1,$$

gdzie N jest zamkniętą, trójwymiarową rozmaitością asferyczną.

Potraktujmy S^1 jako grupę addytywną liczb rzeczywistych modulo 1. Niech N będzie przestrzenią całkowitą wiązki torusów nad okręgiem wyznaczonej przez homeomorfizm $h\colon S^1\times S^1\to S^1\times S^1$ dany jako $h(t_1,t_2)=(-t_2,t_1-t_2)$ dla dowolnych t_1, $t_2\in S^1$. Dobrze wiadomo, że uzyskana w taki sposób przestrzeń N jest zamkniętą, trójwymiarową rozmaitością. Jej asferyczność wynika z długiego ciągu dokładnego grup homotopii stowarzyszonej wiązki włóknistej $S^1\times S^1\to N\to S^1$. ($N$ jest rozmaitością (1.5) z pracy Hempela [38].) Co więcej,

$$\pi_1(N)\cong(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})\rtimes_{h_*}\mathbb{Z}\cong\langle a,b,c\mid [a,b]=1,\ cac^{-1}=b,\ cbc^{-1}=a^{-1}b^{-1}\rangle,$$

gdzie $h_*\colon\pi_1(S^1\times S^1)\to\pi_1(S^1\times S^1)$ jest automorfizmem indukowanym przez h. Niech $G\subseteq\pi_1(N)$ będzie podgrupą generowaną przez elementy a^2, b^2 oraz c^3. Zauważmy, że c^3 komutuje zarówno z a, jak i b:

$$\begin{aligned}c^3a&=c^2cac^{-1}c=c^2bc=ccbc^{-1}c^2=ca^{-1}b^{-1}c^2=ca^{-1}c^{-1}cb^{-1}c^{-1}c^3\\&=b^{-1}bac^3=ac^3;\\c^3b&=c^2cbc^{-1}c=c^2a^{-1}b^{-1}c=cca^{-1}c^{-1}cb^{-1}c^{-1}c^2=cb^{-1}bac^2=cac^2\\&=cac^{-1}c^3=bc^3.\end{aligned}$$

Stąd oraz z Twierdzenia 1.1.7 i Wniosku 1.2.12 wynika, że $G\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Teraz łatwo już wywnioskować, że G jest dzielnikiem normalnym w $\pi_1(N)$: wystarczy w tym celu pokazać, że $cGc^{-1}\subseteq G$. Rzeczywiście, dla dowolnych liczb całkowitych k, l, m mamy

$$\begin{aligned}ca^{2k}b^{2l}c^{3m}c^{-1}&=ca^{2k}c^{-1}cb^{2l}c^{-1}c^{3m}=(cac^{-1})^{2k}(cbc^{-1})^{2l}c^{3m}\\&=b^{2k}(a^{-1}b^{-1})^{2l}c^{3m}=b^{2k}a^{-2l}b^{-2l}c^{3m}=a^{-2k}b^{2(k-l)}c^{3m}\in G.\end{aligned}$$

Pozostało udowodnić, że $\pi_1(N)/G\cong\mathcal{A}_4$. Zauważmy jednak, że $|\pi_1(N)/G|=12$, a istnieją dokładnie trzy nieabelowe grupy rzędu 12: nietrywialny produkt półprosty $\mathbb{Z}_3\rtimes\mathbb{Z}_4$, $S_3\times\mathbb{Z}_2$ oraz $\mathcal{A}_4$, przy czym dwie pierwsze z nich zawierają element rzędu 6. Grupa $\pi_1(N)/G$ nie ma tej własności, a więc rzeczywiście $\pi_1(N)/G\cong\mathcal{A}_4$.

To podejście pokazuje przy okazji, że przestrzeń orbit tego działania jest homeomorficzna z rozmaitością N.

Stwierdzenie 3.2.8. *Grupa alternująca $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na produkcie $(S^n)^4$ dla dowolnej liczby nieparzystej $n\geq 1$.*

Dowód. Niech $n\geq 1$ będzie liczbą nieparzystą. Będziemy postępowali podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.2.6. Określmy F_2-działanie na $S^n\times S^n\times S^n$ przymując:

$$\begin{cases}a(x,y,z)=(-x,y,-z),\\ b(x,y,z)=(y,z,x)\end{cases}\quad\text{dla } x,\ y,\ z\in S^n.$$

Tak określone działanie jest trywialne po ograniczeniu do domknięcia normalnego zbioru $\{a^2,b^3,(ab)^3\}$, a więc uzyskujemy $\mathcal{A}_4$-działanie na $S^n\times S^n\times S^n$, przy czym działanie to jest wolne po ograniczeniu do podgrupy $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2=\langle a,bab^2\rangle\subseteq\mathcal{A}_4$.

Rozpatrzmy teraz jakiekolwiek wolne $\mathbb{Z}_3$-działanie na S^n i przedłużmy je do działania grupy $\mathcal{A}_4$ poprzez epimorfizm ϵ. Podobnie jak wcześniej weryfikujemy, że diagonalne $\mathcal{A}_4$-działanie na $(S^n)^4$ powstałe z tak określonych dwóch działań jest wolne. $\square$

Wniosek 3.2.9. *Kompletna informacja o liczbie $k(\mathcal{A}_4)$ przedstawia się następująco:*

$$k^n(\mathcal{A}_4) = \begin{cases} 3, & n = 1, 3, 7, \\ 4, & n \text{ jest liczbą nieparzystą} \neq 1, 3, 7, \\ \infty, & n \text{ jest liczbą parzystą.} \end{cases}$$

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.2.3 wynika, że $k(\mathcal{A}_4) > 2$. Zapowiedziane równości są konsekwencją Twierdzeń 1.1.1, 3.2.6 oraz Stwierdzenia 3.2.8. $\square$

Dotychczas byliśmy zainteresowani działaniami na produktach sfer tego samego wymiaru. Jest to istotne ograniczenie: Oliver podał przykład wolnego działania grupy $\mathcal{A}_4$ na produkcie $S^2 \times S^3$ ([52, Lemma 3]). Poniżej przedstawiamy jego konstrukcję.

Przykład 3.2.10. Niech $SO(n)$ oznacza specjalną grupę ortogonalną stopnia n. Rozważmy produkt skręcony $SO(3) \times_{S^1} S^3$, gdzie $S^1 \cong SO(2)$ działa jako podgrupa zarówno na $SO(3)$, jak i S^3. O przestrzeni $SO(3) \times_{S^1} S^3$ dobrze wiadomo, że jest przestrzenią całkowitą wiązki włóknistej nad $SO(3)/SO(2) \approx S^2$, z włóknem S^3 i grupą strukturalną S^1, oraz dopuszcza wolne $SO(3)$-działanie.

Zauważmy, że S^1-działanie na S^3 zawarte jest w działaniu grupowym S^3, a zatem o $SO(3) \times_{S^1} S^3$ możemy myśleć jako o przestrzeni totalnej głównej S^3-wiązki włóknistej. Wiązki tego typu klasyfikowane są przez klasy homotopii odwzorowań $S^2 \to BS^3$, gdzie BS^3 oznacza przestrzeń klasyfikującą grupy topologicznej S^3. Ponieważ

$$\pi_2(BS^3) \cong \pi_1(S^3) = 0,$$

wiązka $S^3 \to SO(3) \times_{S^1} S^3 \to S^2$ jest trywialna, to znaczy $SO(3) \times_{S^1} S^3 \approx S^2 \times S^3$. Konstrukcję kończy obserwacja, że $\mathcal{A}_4$ jest podgrupą grupy $SO(3)$. Aby się o tym przekonać, wystarczy przyjąć:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Interesującym zagadnieniem jest wyznaczenie wszystkich par (m, n), dla których istnieje wolne działanie grupy $\mathcal{A}_4$ na produkcie $S^m \times S^n$. Podsumujmy znane wyniki.

- Ze Stwierdzenia 3.2.3 otrzymujemy, że $m \neq n$.
- Z Twierdzenia 1.1.1 wynika, że przynajmniej jedna z liczb m, n musi być liczbą nieparzystą.
- W Stwierdzeniu 3.2.13 dowiedziemy, że $\mathcal{A}_4$ nie działa w sposób wolny na $S^1 \times S^n$ dla żadnej liczby $n \geq 1$.

Jeśli zaś chodzi o wyniki natury pozytywnej:

- W Przykładzie 3.2.10 wyjaśniliśmy, że grupa $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na produkcie $S^2 \times S^3$.
- Adem, Davis i Ünlü wykazali, że grupa $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na $S^{2n-1} \times S^{4n-5}$ dla dowolnej liczby $n \geq 3$ ([4, Theorem 3.1]).

Trudność przy konstruowaniu wolnych $\mathcal{A}_4$-działań na $S^m \times S^n$ bierze się z faktu, że żadne takie działanie nie może być diagonalne ([5, Theorem 5.1]). Gdyby bowiem grupa $\mathcal{A}_4$ działała w sposób wolny i diagonalny na $S^m \times S^n$, to rozpatrując odpowiednią liczbę połączeń każdej ze sfer, otrzymalibyśmy wolne $\mathcal{A}_4$-działanie na $S^{(m+1)(n+1)-1} \times S^{(m+1)(n+1)-1}$, co prowadzi do sprzeczności ze Stwierdzeniem 3.2.3. (Przypomnijmy, że k-krotne połączenie n-wymiarowej sfery jest z dokładnością do homeomorfizmu $(k(n+1)-1)$-wymiarową sferą.)

Aby dowieść, że grupa $\mathcal{A}_4$ nie działa w sposób wolny na $S^1 \times S^n$ dla żadnej liczby $n \geq 1$, potrzebujemy następujących faktów:

Lemat 3.2.11 ([32, Lemma 2.7])**.** *Niech* $0 \to A' \to A \xrightarrow{\kappa} A'' \to 0$ *będzie centralnym rozszerzeniem grup. Jeśli* A' *jest beztorsyjną grupą abelową, zaś* A'' *torsyjną grupą abelową, to* A *jest grupą abelową.*

Dowód. Niech $a, b \in A$. Oczywiście $\kappa(a)^n = 0$ dla pewnej liczby $n > 0$, a więc $a^n \in A'$. Wobec tego $[a^n, b] = [a, b]^n = 1$. Ale $[a, b] \in A'$, co kończy dowód, gdyż A' jest grupą beztorsyjną. □

Lemat 3.2.12. *Jeśli* Γ *jest rozszerzeniem grupy* $\mathbb{Z}_3$ *o grupę* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$*, to* $\Gamma \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ *lub* $\Gamma \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$*.*

Dowód. Ponieważ $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, każde rozszerzenie grupy $\mathbb{Z}_3$ o grupę $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ jest centralne. Korzystając z twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych otrzymujemy, że $H^2(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_3$. Aby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że grupa $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ jest rozszerzeniem grupy $\mathbb{Z}_3$ o grupę $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ na dwa różne sposoby:

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\kappa_i} \mathbb{Z}_3 \to 0, \ i = 1, 2,$$

gdzie $\kappa_1(1, 0) = 1$, $\kappa_2(1, 0) = 2$ oraz $\kappa_i(0, 1) = 0$ dla $i = 1, 2$. Ponieważ istnieją tylko cztery automorfizmy $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, łatwo sprawdzamy, że rozszerzenia rzeczywiście nie są równoważne. □

Stwierdzenie 3.2.13. *Grupa alternująca* $\mathcal{A}_4$ *nie działa w sposób wolny na produkcie* $S^1 \times S^n$ *dla żadnej liczby* $n \geq 1$*.*

Dowód. Ze względu na Stwierdzenie 3.2.3 możemy założyć, że $n \geq 2$. Przypuśćmy zatem, że grupa $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na produkcie $S^1 \times S^n$, gdzie $n \geq 2$. Wtedy grupa $\Gamma = \pi_1((S^1 \times S^n)/\mathcal{A}_4)$ działa w sposób właściwie dyskretny na rozmaitości $S^n \times \mathbb{R}$. Z Twierdzenia C.4 wynika, że warunkiem koniecznym ku temu jest okresowość kohomologii Farrella grupy Γ, skąd otrzymujemy, na podstawie Stwierdzenia C.3, że każda elementarna abelowa podgrupa grupy Γ jest cykliczna. Naszym celem będzie wykazanie, że Γ zawiera $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ jako podgrupę.

Rozważmy następujący diagram przemienny o dokładnych wierszach i kolumnach, który pochodzi z długiego ciągu dokładnego grup homotopii stowarzyszonego z nakryciem $S^1 \times S^n \to (S^1 \times S^n)/\mathcal{A}_4$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & \mathbb{Z}_3 \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}_3 \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{A}_4 \arrow[r] \arrow[u] & 1 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & \Gamma' \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[u] & 0. \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Ponieważ jedynym dzielnikiem normalnym grupy $\mathcal{A}_4$ jest $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, rozszerzenie $0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma \to \mathcal{A}_4 \to 1$ jest centralne. To samo jest więc prawdą w przypadku rozszerzenia $0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma' \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to 0$. W oparciu o Lemat 3.2.11 wnioskujemy, że grupa Γ' jest abelowa. Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem znaleźć dwa elementy rzędu 2 w grupie Γ'. Aby osiągnąć ten cel, wybierzmy podgrupę $\mathbb{Z}_2 \subseteq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Otrzymujemy wówczas kolejny diagram przemienny o dokładnych wierszach i kolumnach:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & \mathbb{Z}_2 \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}_2 \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & \Gamma'' \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[u] & 0. \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Rozszerzenie $0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma'' \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ jest *a fortiori* centralne, a więc $\Gamma'' \cong \mathbb{Z}$ lub $\Gamma'' \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Jeśli zachodziłaby pierwsza możliwość, to $\Gamma' \cong \mathbb{Z}$ lub $\Gamma' \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, gdyż jedyne inne rozszerzenie grupy $\mathbb{Z}_2$ o grupę $\mathbb{Z}$ jest nieskończoną grupą dihedralną (Przykład 1.2.7), która jest nieabelowa. Jednakże z Lematu 3.2.12 wynika, że w tej sytuacji Γ byłaby grupą abelową, co oczywiście jest niemożliwe. Wobec tego $\Gamma'' \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, skąd otrzymujemy, że Γ' zawiera element rzędu 2 dla każdej podgrupy $\mathbb{Z}_2 \subseteq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. $\square$

Uwaga 3.2.14. Przedstawiona powyżej argumentacja działa równie dobrze w sytuacji, gdy $\mathcal{A}_4$ zastąpimy dowolną skończoną grupą nieabelową, która zawiera $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ jako dzielnik normalny oraz nie dopuszcza epimorfizmu na grupę $\mathbb{Z}_2$.

Wniosek 3.2.15. *Jeśli grupa $\mathcal{A}_4$ działa w sposób wolny na produkcie $S^m \times S^n$ dla pewnych liczb $m, n \geq 1$, to $m + n \geq 5$.*

Dowód. Jest to natychmiastowa konsekwencja Stwierdzeń 3.2.3 oraz 3.2.13. Ponadto działanie skonstruowane w Przykładzie 3.2.10 pokazuje, że to ograniczenie nie może zostać poprawione. □

3.3 Nieistnienie wolnych $\mathcal{A}_d$-działań na pewnych produktach sfer

Przechodzimy teraz do najważniejszych wyników tego rozdziału.

Stwierdzenie 3.3.1. *Niech $d \geq 7$ będzie liczbą naturalną. Grupa alternująca $\mathcal{A}_d$ nie działa w sposób wolny na żadnym skończenie wymiarowym CW kompleksie X takim, że $X \sim (S^n)^{d-2}$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.*

Dowód. Jeśli grupa $\mathcal{A}_d$ działa na CW kompleksie X jak wyżej, to z Twierdzenia 1.2.25 wynika, że $H^n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{d-2}$ jest trywialnym $\mathcal{A}_d$-modułem. Wobec tego Twierdzenie 3.2.1 wraz z Lematem 3.2.2 implikują, że $\mathcal{A}_d$-działanie na X nie może być wolne. □

Wniosek 3.3.2. *Dla dowolnej liczby naturalnej $d \geq 7$ zachodzi $k(\mathcal{A}_d) > d - 2$.*

Naszym celem będzie teraz poprawienie ograniczenia dolnego uzyskanego w Stwierdzeniu 3.3.1.

Twierdzenie 3.3.3. *Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Grupa alternująca $\mathcal{A}_p$ nie działa w sposób wolny na żadnym skończenie wymiarowym CW kompleksie X takim, że $X \sim (S^n)^{p-1}$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.*

Dowód. Przypuśćmy, że grupa $\mathcal{A}_p$ działa w sposób wolny na CW kompleksie X jak wyżej. W oparciu o Twierdzenie 3.2.1 i Lemat 3.2.2 wnioskujemy, że $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest nietrywialnym $\mathcal{A}_p$-modułem, zatem z prostoty grupy $\mathcal{A}_p$ wynika, że $H^n(X;\mathbb{Z})$ musi być wiernym $\mathcal{A}_p$-modułem. Jeśli więc $G \subseteq \mathcal{A}_p$ jest nietrywialną podgrupą, to $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest nietrywialnym G-modułem. W szczególności, jeśli G jest grupą cykliczną generowaną przez cykl długości p, to G-moduł $H^n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{p-1}$ jest typu $(1,0,0)$ na mocy Twierdzenia 1.2.30. To prowadzi do sprzeczności z Twierdzeniem 3.1.4. □

Załóżmy teraz, że $d \geq 7$ jest liczbą nieparzystą. Niech $\{e_{t_1}, e_{t_2}, \ldots, e_{t_d}\}$ będzie standardową bazą modułu Spechta stowarzyszonego z podziałem $(d,1)$ liczby $d+1$, ze standardowymi $(d,1)$-tablicami $t_1, t_2, \ldots, t_d$ uporządkowanymi tak, że $[t_d] < [t_{d-1}] < \cdots < [t_1]$. Korzystając z rozważań przedstawionych w Podrozdziale 1.2.5 uzyskujemy d-wymiarową, nierozkładalną reprezentację zespoloną grupy symetrycznej S_{d+1}. Oznaczmy jej ograniczenie do podgrupy $\mathcal{A}_{d+1} \subseteq S_{d+1}$ przez φ.

Lemat 3.3.4. *Niech liczba d oraz polytabloidy $e_{t_1}, e_{t_2}, \ldots, e_{t_d}$ będą jak wyżej. Wtedy dla d-cyklu $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ d) \in \mathcal{A}_{d+1}$ zachodzą następujące równości:*

$$\begin{cases} \sigma e_{t_k} = e_{t_{k+1}} - e_{t_1} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, d-2, \\ \sigma e_{t_{d-1}} = -e_{t_1}, \\ \sigma e_{t_d} = e_{t_d} - e_{t_1}. \end{cases}$$

Dowód. Niech $t_0 \colon [(d,1)] \to \{1, 2, \ldots, d+1\}$ będzie tablicą określoną wzorem:

$$\begin{cases} t(1, j) = j + 1 \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, d, \\ t(2, 1) = 1. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $1 \leq k \leq d$ mamy $t_k(1,1) = 1$ oraz $t_k(2,1) = k+1$, w związku z czym $C_{t_k} = \{1, (1\ k{+}1)\}$. Wobec tego $e_{t_k} = [t_k] - [t_0]$ dla $1 \leq k \leq d$. Ponadto

$$\sigma[t_k] = \begin{cases} [t_1], & k = 0, \\ [t_{k+1}], & k = 1, 2, \ldots, d-2, \\ [t_0], & k = d-1, \\ [t_d], & k = d. \end{cases}$$

Teraz widzimy, że jeśli $1 \leq k \leq d-2$, to

$$\sigma e_{t_k} = \sigma\big([t_k] - [t_0]\big) = \sigma[t_k] - \sigma[t_0] = [t_{k+1}] - [t_1] = e_{t_{k+1}} - e_{t_1}.$$

Taki sam rachunek pokazuje, że $\sigma e_{t_{d-1}} = -e_{t_1}$ oraz $\sigma e_{t_d} = e_{t_d} - e_{t_1}$. □

Z Lematu 3.3.4 wynika, że macierz $\varphi_\sigma^{\mathcal{B}}$ automorfizmu $\varphi(\sigma)$ w bazie

$$\mathcal{B} = \{e_{t_d} - e_{t_1}, e_{t_d} - e_{t_2}, \ldots, e_{t_d} - e_{t_{d-1}}, e_{t_d}\}$$

ma postać

$$\left[\begin{array}{c|c} \Theta & 1 \\ \hline E_{d-1} & \Theta \end{array}\right],$$

gdzie E_{d-1} oznacza $(d{-}1)$-wymiarową macierz jednostkową, zaś Θ odpowiednie macierze zerowe.

Lemat 3.3.5. *Niech liczba d oraz polytabloidy $e_{t_1}, e_{t_2}, \ldots, e_{t_d}$ będą jak wyżej. Wtedy dla 3-cyklu $\tau = (1\ d+1\ d) \in \mathcal{A}_{d+1}$ mamy:*

$$\begin{cases} \tau e_{t_k} = e_{t_k} - e_{t_d} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, d-2, \\ \tau e_{t_{d-1}} = -e_{t_d}, \\ \tau e_{t_d} = e_{t_{d-1}} - e_{t_d}. \end{cases}$$

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak w przypadku Lematu 3.3.4. Zauważmy tylko, że

$$\tau[t_k] = \begin{cases} [t_d], & k = 0, \\ [t_k], & k = 1, 2, \ldots, d-2, \\ [t_0], & k = d-1, \\ [t_{d-1}], & k = d. \end{cases}$$

□

Lemat 3.3.5 implikuje, że macierz $\varphi_\tau^{\mathcal{B}}$ przyjmuje postać

$$\left[\begin{array}{c|cc} E_{d-2} & \multicolumn{2}{c}{\Theta} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-\mathbf{1}} \\ \hline \Theta & 1 & 0 \end{array}\right],$$

gdzie $-\mathbf{1}$ jest macierzą wymiaru $1 \times d$ składającą się z -1.

Twierdzenie 3.3.6. *Niech $p \geq 7$ będzie liczbą pierwszą. Grupa alternująca $\mathcal{A}_{p+1}$ nie działa w sposób wolny na żadnym skończenie wymiarowym CW kompleksie X takim, że $X \sim (S^n)^p$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.*

Dowód. Przypuśćmy, że grupa $\mathcal{A}_{p+1}$ działa w sposób wolny na CW kompleksie X jak wyżej. Niech ρ oznacza stowarzyszoną reprezentację całkowitoliczbową grupy $\mathcal{A}_{p+1}$ w $H^n(X;\mathbb{Z})$. Zauważmy, że:

(1) Na mocy Twierdzeń 1.2.25 oraz 3.2.1, ρ jest izomorficzna (nad $\mathbb{C}$) z reprezentacją φ.

(2) Niech $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ p) \in \mathcal{A}_{p+1}$. Oznaczmy przez $\tilde{\rho}$ ograniczenie reprezentacji ρ do podgrupy $\langle\sigma\rangle \subseteq \mathcal{A}_{p+1}$. Z Twierdzenia 1.2.30 wynika, że $\mathbb{Z}_p$-moduł wyznaczony przez $\tilde{\rho}$ jest albo typu $(0,0,p)$, albo typu $(1,0,1)$, albo typu $(0,1,0)$.

Pierwszą możliwość natychmiast wykluczamy dzięki prostocie grupy $\mathcal{A}_{p+1}$. Załóżmy zatem, że zachodzi druga możliwość, to znaczy $H^n(X;\mathbb{Z})$ jest izomorficzny jako $\mathbb{Z}_p$-moduł z $A \oplus \mathbb{Z}$, gdzie A jest ideałem ułamkowym w $\mathbb{Q}(\xi)$ oraz $\mathbb{Z}$ jest trywialnym $\mathbb{Z}_p$-modułem. Wtedy istnieje baza $\mathcal{B}'$ nad $\mathbb{Z}$ modułu $H^n(X;\mathbb{Z})$ taka, że reprezentacja $\tilde{\rho}$ jest wyznaczona przez macierz

$$D = \left[\begin{array}{c|c} D_1 & \Theta \\ \hline \Theta & 1 \end{array}\right].$$

Na podstawie (1) istnieje macierz odwracalna $T = [t_{ij}]$ taka, że

$$T\varphi_\pi^{\mathcal{B}}T^{-1} = \rho_\pi^{\mathcal{B}'} \text{ dla dowolnego } \pi \in \mathcal{A}_{p+1},$$

gdzie $\mathcal{B} = \{e_{t_d} - e_{t_1}, e_{t_d} - e_{t_2}, \ldots, e_{t_d} - e_{t_{d-1}}, e_{t_d}\}$. W świetle Lematu 3.3.4, relacja $T\varphi_\sigma^{\mathcal{B}}T^{-1} = D$ oznacza, że:

$$\begin{cases} t_{p1} = t_{p2} = \cdots = t_{pp}, \\ s_{1p} = s_{2p} = \cdots = s_{pp}, \\ pt_{pp}s_{pp} = 1, \end{cases}$$

gdzie $T^{-1} = [s_{ij}]$. Niech $\tau = (1\ p+1\ p) \in \mathcal{A}_{p+1}$. Ponieważ $T\varphi_\tau^{\mathcal{B}}T^{-1} = \rho_\tau^{\mathcal{B}'}$, z Lematu 3.3.5 wynika, że prawy dolny element $\rho_\tau^{\mathcal{B}'}$ jest równy $-t_{pp}s_{pp} = -1/p$. To przeczy faktowi, że ρ jest reprezentacją całkowitoliczbową.

Konsekwentnie, $\mathbb{Z}_p$-moduł wyznaczony przez $\tilde{\rho}$ jest typu $(0,1,0)$. Twierdzenie 3.1.4 implikuje teraz, że $\mathcal{A}_{p+1}$-działanie na X nie może być wolne. □

Wniosek 3.3.7. *Dla dowolnej liczby pierwszej $p \geq 5$ mamy: $k(\mathcal{A}_p) > p-1$ oraz $k(\mathcal{A}_{p+1}) > p$.*

Następny przykład pokazuje, że prezentowane rozważania nie mogą zostać przeniesione na grunt nieskończenie wymiarowych CW kompleksów.

Przykład 3.3.8. W świetle Wniosku 1.2.12, nakrycie uniwersalne $E_{\mathcal{A}_4}$ dowolnej przestrzeni Eilenberga–MacLane'a typu $(\mathcal{A}_4, 1)$ jest nieskończenie wymiarowym, ściągalnym CW kompleksem wyposażonym w wolne działanie grupy $\mathcal{A}_4$. Wobec tego przestrzeń $E_{\mathcal{A}_4} \times (S^n)^k$, dla dowolnych liczb k, $n \geq 1$, jest przykładem nieskończenie wymiarowego CW kompleksu o typie homotopijnym produktu $(S^n)^k$, który dopuszcza wolne $\mathcal{A}_4$-działanie.

Zakończymy ten podrozdział uwagą, która uświadamia, że w przypadku prostych grup alternujących przestrzenie całkowite wiązek torusów nad okręgiem nie są dobrymi kandydatami do powtórzenia konstrukcji zaprezentowanej w Przykładzie 3.2.7.

Uwaga 3.3.9. Zauważmy, że jeśli grupa $\mathcal{A}_d$, $d \geq 5$, działa w sposób wolny na produkcie $(S^1)^n$, to przestrzeń orbit $(S^1)^n/\mathcal{A}_d$ nie jest $(S^1)^{n-1}$-wiązką nad okręgiem.

Przypuśćmy przeciwnie. Wtedy z długiego ciągu dokładnego grup homotopii stowarzyszonego z nakryciem $(S^1)^n \to (S^1)^n/\mathcal{A}_d$ otrzymujemy epimorfizm $h\colon \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathbb{Z} \to \mathcal{A}_d$. Ponieważ $\mathbb{Z}^{n-1} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}$ jest dzielnikiem normalnym, $h(\mathbb{Z}^{n-1}) \subseteq \mathcal{A}_d$ także jest dzielnikiem normalnym. Jednakże $\mathcal{A}_d$ jest grupą prostą, a zatem $h(\mathbb{Z}^{n-1})$ jest albo grupą trywialną, albo $h(\mathbb{Z}^{n-1}) \cong \mathcal{A}_d$. Drugą możliwość natychmiast wykluczamy: obraz grupy abelowej poprzez homomorfizm jest ponownie grupą abelową. Wobec tego $h(\mathbb{Z}^{n-1})$ jest grupą trywialną. Wówczas jednak, jak łatwo sprawdzić, $\operatorname{im} h = h(\mathbb{Z})$. W ten sposób uzyskujemy sprzeczność, gdyż h jest epimorfizmem.

3.4 Wolne działania grupy S_3

W Przykładzie 2.2.6 wspomnieliśmy, że grupa symetryczna S_3 nie działa w sposób wolny na żadnej sferze, a więc $k(S_3) > 1$. Jest to konsekwencja następującego wyniku Milnora:

Twierdzenie 3.4.1 ([48, Theorem 1]). *Niech M będzie rozmaitością taką, że pierścienie kohomologii $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ oraz $H^*(S^n;\mathbb{Z}_2)$ są izomorficzne dla pewnej liczby $n \geq 1$. Jeśli $T\colon M \to M$ jest wolną inwolucją, to dla dowolnego odwzorowania $f\colon M \to M$ nieparzystego stopnia istnieje punkt $x \in M$ taki, że $T \circ f(x) = f \circ T(x)$.*

Z Twierdzenia 3.4.1 natychmiast wynika, że jeśli grupa G działa w sposób wolny na pewnej sferze, to każdy jej element rzędu 2 jest centralny. Rzeczywiście, jeśli $g \in G$ jest elementem rzędu 2, zaś $h \in G$ dowolnym innym elementem, to $(gh)x = (hg)x$, a więc $gh = hg$ ([48, Corollary 1]).

Stwierdzenie 3.4.2. *Grupa symetryczna S_3 działa w sposób wolny na produkcie $S^m \times S^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy m lub n jest liczbą nieparzystą. W szczególności S_3 działa w sposób wolny na $S^n \times S^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą, oraz*

$$k^n(S_3) = \begin{cases} 2, & n \text{ jest liczbą nieparzystą} \\ \infty, & n \text{ jest liczbą parzystą.} \end{cases}$$

Dowód. Ze względu na Twierdzenie 1.1.1, wystarczy skonstruować wolne S_3-działanie na $S^m \times S^n$, gdy m lub n jest liczbą nieparzystą.

Załóżmy, że m jest liczbą nieparzystą i potraktujmy S^m jako podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{C}^{(m+1)/2}$. Będziemy postępować analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.2.6. Niech $F_2 = \langle a, b\rangle$ będzie grupą wolną o dwóch generatorach. Zdefiniujmy F_2-działanie na S^m przyjmując:

$$\begin{cases} ax = \bar{x}, \\ bx = e^{2\pi i/3}x \end{cases} \quad \text{dla } x \in S^m,$$

gdzie $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ oraz $\bar{x}_i$ oznacza sprzężenie liczby zespolonej x_i, $1 \le i \le m$. O grupie S_3 dobrze wiadomo, że ma następującą prezentację poprzez generatory i relacje:

$$\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 = 1\rangle.$$

Korzystając z niej weryfikujemy, że określone powyżej działanie indukuje S_3-działanie na S^m. Wprost z definicji wynika, że to S_3-działanie jest wolne po ograniczeniu do podgrupy $\mathbb{Z}_3 = \langle b\rangle \subseteq S_3$.

Rozpatrzmy teraz działanie antypodyczne na S^n i przedłużmy je do działania grupy S_3 za pomocą epimorfizmu pochodzącego z krótkiego ciągu dokładnego $0 \to \mathbb{Z}_3 \to S_3 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$. Działanie diagonalne powstałe z tych dwóch działań jest wolnym S_3-działaniem na produkcie $S^m \times S^n$. □

Uwaga 3.4.3. Dla dowolnej liczby $n \ge 1$, przestrzeń orbit $(S^1 \times S^n)/S_3$ działania skonstruowanego w dowodzie Stwierdzenia 3.4.2 jest homeomorficzna z sumą spójną $\mathbb{R}P^{n+1} \sharp \mathbb{R}P^{n+1}$. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}(S^1 \times S^n)/S_3 &\approx \big((S^1 \times S^n)/\mathbb{Z}_3\big)/\mathbb{Z}_2 \approx \big((S^1/\mathbb{Z}_3) \times S^n\big)/\mathbb{Z}_2 \approx (S^1 \times S^n)/\mathbb{Z}_2 \\ &\approx \mathbb{R}P^{n+1} \sharp \mathbb{R}P^{n+1},\end{aligned}$$

gdyż ostatnie $\mathbb{Z}_2$-działanie na $S^1 \times S^n$ jest wyznaczone przez $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -y)$ dla $x \in S^1$, $y \in S^n$.

Jeśli $n = 1$ lub 2, to samo jest prawdą dla każdego wolnego S_3-działania na $S^1 \times S^n$. Gdy $n = 1$, jest to konsekwencja Twierdzenia 1.1.5 oraz Wniosku 2.1.3. W przypadku, gdy $n = 2$, to wynik autorstwa Tollefsona ([64, Corollary 2]). Ponadto Golasiński, Gonçalves i Jimenéz udowodnili, że jeśli n jest liczbą parzystą, to $(S^1 \times S^n)/S_3 \simeq \mathbb{R}P^{n+1} \sharp \mathbb{R}P^{n+1}$ ([31, Corollary 2.3]).

Uwaga 3.4.4. Część Stwierdzenia 3.4.2 można oczywiście wysłowić ogólniej: z Twierdzenia 1.1.1 wynika, że jeśli grupa symetryczna S_d, $d \geq 3$, działa w sposób wolny na skończenie wymiarowym CW kompleksie o typie homotopijnym produktu $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \cdots \times S^{n_k}$, to przynajmniej jedna z liczb $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jest nieparzysta.

Poza przedstawionym powyżej wynikiem niewiele wiadomo o zachowaniu liczby k w klasie grup symetrycznych. Zauważmy jednak, że dla dowolnej liczby $d \geq 1$ zachodzi

$$k(\mathcal{A}_d) \leq k(S_d) \leq 2k(\mathcal{A}_d) + 1.$$

Rzeczywiście, korzystając z faktu, że $\mathcal{A}_d$ jest podgrupą indeksu 2 w grupie S_d, z Lematu 1.1.3 otrzymujemy, że S_d działa na $(S^n)^{2k(\mathcal{A}_d)}$, przy czym działanie podgrupy $\mathcal{A}_d \subseteq S_d$ jest wolne. Działanie diagonalne powstałe z tak określonego działania i przedłużenia działania antypodycznego na S^n do działania grupy S_d jest działaniem wolnym.

3.5 Związki z teorią grup krystalograficznych

Przypomnijmy, że dyskretną podgrupę Γ grupy izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy n-wymiarową *grupą krystalograficzną*, o ile rozmaitość $\mathbb{R}^n/\Gamma$ jest zwarta. Beztorsyjną grupę krystalograficzną nazywamy *grupą Bieberbacha*.

Twierdzenie 3.5.1 ([7, Theorem 1])**.** *Grupa Γ jest izomorficzna z n-wymiarową grupą krystalograficzną wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera $\mathbb{Z}^n$ jako normalną i maksymalną abelową podgrupę skończonego indeksu.*

W szczególności n-wymiarowa grupa krystalograficzna Γ wyznacza krótki ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \to G \to 1,$$

gdzie G jest grupą skończoną, którą nazywamy *grupą holonomii* grupy Γ. Z faktu, że $\mathbb{Z}^n$ jest maksymalną abelową podgrupą grupy Γ wynika, że homomorfizm $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ indukowany przez powyższy ciąg dokładny jest monomorfizmem. Innymi słowy, *reprezentacja holonomii* $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ jest wierna. Zauważmy także, że jeśli Γ jest grupą Bieberbacha, to $\operatorname{cd}\Gamma = n$ na mocy Twierdzenia 1.2.13. (Prawdą jest znacznie więcej: Γ jest grupą podstawową rozmaitości borelowskiej. Ta informacja nie będzie jednak potrzebna w dalszych rozważaniach.)

Dobrze wiadomo, że każda grupa skończona jest grupą holonomii pewnej grupy Bieberbacha ([7, Theorem 3]). Jednym z otwartych problemów teorii grup krystalograficznych jest wyznaczenie minimalnego wymiaru grupy Bieberbacha, która realizuje daną grupę jako swoją grupę holonomii. Szczepański zwrócił uwagę, że niewiele wiadomo w tym kontekście między innymi o grupach symetrycznych i alternujących ([63, Problem 1]). Zauważmy jednak, że łącząc Twierdzenia 1.2.25, 3.5.1 oraz wierność reprezentacji holonomii, otrzymujemy, że dla dowolnej liczby $d \geq 7$, grupa $\mathcal{A}_d$ nie może być grupą holonomii żadnej $(d-2)$-wymiarowej grupy Bieberbacha.

Stwierdzenie 3.5.2. *Niech $d = p$ lub $d = p + 1$, gdzie $p \geq 7$ jest liczbą pierwszą. Grupa alternująca $\mathcal{A}_d$ nie może być zrealizowana jako grupa holonomii $(d-1)$-wymiarowej grupy Bieberbacha.*

Dowód. Przypuśćmy, że grupa $\mathcal{A}_d$, gdzie d jest jak wyżej, jest grupą holonomii pewnej $(d-1)$-wymiarowej grupy Bieberbacha. Wtedy istnieje krótki ciąg dokładny $0 \to \mathbb{Z}^{d-1} \to \Gamma \to \mathcal{A}_d \to 1$, przy czym $\operatorname{cd}\Gamma = d - 1$. W oparciu o Twierdzenie 2.2.1 wnioskujemy, że grupa $\mathcal{A}_{d-1}$ działa w sposób wolny na skończenie wymiarowym CW kompleksie o typie homotopijnym produktu $(S^1)^{d-1}$. To prowadzi do sprzeczności z Twierdzeniami 3.3.3 oraz 3.3.6. □

Z drugiej strony możemy wykorzystać znane rezultaty teorii grup krystalograficznych do uzyskania częściowej informacji o liczbie $k(\mathcal{A}_5)$.

Stwierdzenie 3.5.3. *Grupa alternująca $\mathcal{A}_5$ nie działa w sposób wolny na produkcie $(S^1)^6$. Innymi słowy, $k^1(\mathcal{A}_5) > 6$.*

Dowód. Rozważmy na $\mathbb{Z}$ strukturę trywialnego $\mathcal{A}_5$-modułu. Ponieważ

$$H_i(\mathcal{A}_5, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & i = 2 \text{ ([6, Proposition 33.15])}, \end{cases}$$

z twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych wynika, że $H^2(\mathcal{A}_5, \mathbb{Z}^n) = 0$ dla dowolnej liczby $n \geq 1$. Na podstawie Twierdzenia 1.2.6 wnioskujemy, że jedynym centralnym rozszerzeniem grupy $\mathcal{A}_5$ o grupę $\mathbb{Z}^n$ jest $\mathbb{Z}^n \times \mathcal{A}_5$. Ta grupa ma nieskończony wymiar kohomologiczny na mocy Wniosku 1.2.12. Stąd otrzymujemy, że istnienie wolnego działania grupy $\mathcal{A}_5$ na produkcie $(S^1)^6$ skutkuje istnieniem krótkiego ciągu dokładnego grup

$$0 \to \mathbb{Z}^6 \to \Gamma \to \mathcal{A}_5 \to 1,$$

gdzie indukowany homomorfizm $\mathcal{A}_5 \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^6)$ jest monomorfizmem, a więc $\mathbb{Z}^6$ jest maksymalną podgrupą abelową grupy Γ. W efekcie grupa $\mathcal{A}_5$ byłaby grupą holonomii 6-wymiarowej grupy Bieberbacha. Jednakże grupy Bieberbacha wymiaru niewiększego niż 6 i ich grupy holonomii zostały opisane przez Cida i Schulza; wśród nich nie ma grupy $\mathcal{A}_5$ ([17, Sections 4, 5]). □

Odnotujmy, że w przypadku grupy $\mathcal{A}_4$ wyniki, które można uzyskać dzięki teorii grup krystalograficznych są słabsze od tych przedstawionych w rozprawie: grupa $\mathcal{A}_4$ może zostać zrealizowana jako grupa holonomii 4-wymiarowej grupy Bieberbacha.

Dodatek A

Grupy klas odwzorowań powierzchni

Niech Σ będzie dowolną powierzchnią. *Rozszerzoną grupą klas odwzorowań* powierzchni Σ nazywamy grupę klas homotopii homeomorfizmów $\Sigma \to \Sigma$. Grupę tę oznaczamy symbolem $\mathcal{M}^{\pm}(\Sigma)$.

Przykład A.1. (1) Z twierdzenia Hopfa otrzymujemy, że $\mathcal{M}^{\pm}(S^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

(2) Grupa $\mathcal{M}^{\pm}(\mathbb{R}P^2)$ jest trywialna, $\mathcal{M}^{\pm}(\mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ([40, Section 1]).

(3) Wynik Birman i Chillingwortha stanowi, że $\mathcal{M}^{\pm}(\mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2) \cong GL(2, \mathbb{Z})$ ([10, Theorem 3]).

Głównym celem dodatku jest przedstawienie szkicu uzasadnienia, że grupy $\mathcal{M}^{\pm}(\Sigma)$ oraz $\mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$ są blisko związane.

Niech $x \in \Sigma$. Dla odwzorowania $f\colon \Sigma \to \Sigma$ oraz drogi $\gamma\colon [0,1] \to \Sigma$ takiej, że $\gamma(0) = x$ oraz $\gamma(1) = f(x)$, definiujemy homomorfizm $f_\gamma\colon \pi_1(\Sigma, x) \to \pi_1(\Sigma, x)$ przyjmując

$$f_\gamma([\alpha]) = [\gamma \cdot (f \circ \alpha) \cdot \gamma^{-1}] \text{ dla } [\alpha] \in \pi_1(\Sigma, x).$$

Jeśli f jest homeomorfizmem, to f_γ jest automorfizmem. Ponadto łatwo zauważyć, że różne wybory drogi γ prowadzą do homomorfizmów f_γ, które są sprzężone przez element grupy $\pi_1(\Sigma, x)$. Stąd otrzymujemy homomorfizm

$$\varsigma\colon \mathcal{M}^{\pm}(\Sigma) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma)).$$

Załóżmy, że Σ jest powierzchnią różną od sfery dwuwymiarowej i płaszczyzny rzutowej. Z asferyczności przestrzeni Σ wynika, że klasy homotopii odwzorowań $\Sigma \to \Sigma$ są w jedno-jednoznacznej odpowiedniości z klasami sprzężoności homomorfizmów $\pi_1(\Sigma) \to \pi_1(\Sigma)$. Wobec tego ς jest monomorfizmem. Prawdą jest jednak więcej:

Twierdzenie A.2 ([25, Theorem 8.1])**.** *Niech Σ będzie powierzchnią różną od sfery dwuwymiarowej i płaszczyzny rzutowej. Wówczas*

$$\varsigma\colon \mathcal{M}^{\pm}(\Sigma) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$$

jest izomorfizmem.

Surjektywność homomorfizmu ς jest bezpośrednią konsekwencją faktu, że w klasie homotopii dowolnej homotopijnej równoważności $\Sigma \to \Sigma$ istnieje homeomorfizm.

Uwaga A.3. Niech Σ będzie powierzchnią orientowalną. Oznaczmy symbolem $\mathcal{M}(\Sigma)$ *grupę klas odwzorowań* powierzchni Σ, a więc grupę klas homotopii tych homeomorfizmów $\Sigma \to \Sigma$, które zachowują orientację. Grupa klas odwzorowań jest związana z rozszerzoną grupą klas odwzorowań krótkim ciągiem dokładnym

$$1 \to \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathcal{M}^{\pm}(\Sigma) \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Dodatek B

Elementy teorii końców przestrzeni i grup

Niech X będzie dowolnym CW kompleksem. *Nośnikiem* podprzestrzeni $A \subseteq X$ nazywamy najmniejszy podkompleks kompleksu X, który zawiera A. Nośnik podprzestrzeni $A \subseteq X$ oznaczamy symbolem $C(A)$.

CW kompleks X nazywamy *silnie lokalnie skończonym*, o ile rodzina

$$\{C(e) \mid e \text{ jest komórką kompleksu } X\}$$

stanowi lokalnie skończone pokrycie kompleksu X.

Lemat B.1 ([30, Proposition 10.1.12]). *Lokalnie skończony i skończenie wymiarowy CW kompleks jest silnie lokalnie skończony. W szczególności dowolne nakrycie skończonego CW kompleksu jest silnie lokalnie skończonym CW kompleksem.*

Niech K będzie podkompleksem CW kompleksu X. Symbolem $X - K$ oznaczamy *CW dopełnienie* podkompleksu K, a więc $X - K$ jest największym podkompleksem kompleksu X, którego 0-wymiarowy szkielet składa się z tych 0-komórek, które nie wchodzą w skład kompleksu K.

Lemat B.2 ([30, Proposition 13.4.4]). *Niech X będzie spójnym, nieskończonym i silnie lokalnie skończonym CW kompleksem, zaś $K \subseteq X$ jego skończonym podkompleksem. Wówczas $X - K$ jest niepustym CW kompleksem o skończonej liczbie składowych spójności.*

Niech X będzie spójnym, silnie lokalnie skończonym CW kompleksem, zaś $K \subseteq X$ jego skończonym podkompleksem. Oznaczmy przez $n(K)$ liczbę tych składowych spójności CW kompleksu $X - K$, które są nieskończonymi podkompleksami. *Liczbę końców* CW kompleksu X definiujemy jako

$$e(X) = \sup\{n(K) \mid K \text{ jest skończonym podkompleksem kompleksu } X\}.$$

Symbolem $X^{(n)}$ oznaczamy n-wymiarowy szkielet CW kompleksu X. Nietrudno przekonać się, że:

Stwierdzenie B.3 ([30, Proposition 13.4.1]). *Dla dowolnego silnie lokalnie skończonego CW kompleksu X zachodzi równość $e(X) = e(X^{(1)})$.*

Przykład B.4. (1) Łatwo zauważyć, że $e(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończonym CW kompleksem.

(2) Zgodnie z intuicją, $e(\mathbb{R}) = 2$. Jeśli bowiem za K przyjmiemy 0-wymiarową komórkę, to $n(K) = 2$. Z drugiej strony dowolny skończony podkompleks $K \subseteq \mathbb{R}$ zawarty jest w pewnym odcinku I, o którym możemy założyć, że jest podkompleksem kompleksu $\mathbb{R}$. Kompleks $\mathbb{R} - I$ ma dokładnie dwie składowe spójności; składowa spójności kompleksu $\mathbb{R} - K$, która ma pusty przekrój z każdą z nich jest zawarta w I, a więc jest skończona.

(3) Podobny argument jak wyżej pokazuje, że jeśli X jest skończonym CW kompleksem, to $e(X \times \mathbb{R}) = 2$.

Niech Γ będzie skończenie generowaną grupą. Wybierzmy spójny CW kompleks X o skończonym jednowymiarowym szkielecie oraz taki, że $\pi_1(X) \cong \Gamma$. (CW kompleks o takich własnościach istnieje dla dowolnej skończenie generowanej grupy Γ, co wynika na przykład z konstrukcji przestrzeni B_Γ przedstawionej w Podrozdziale 1.1.2.) Rozpatrzmy nakrycie uniwersalne $\tilde{X}$ kompleksu X z CW strukturą indukowaną przez odwzorowanie nakrywające. Ograniczenie nakrycia $\tilde{X} \to X$ do jednowymiarowych szkieletów również jest nakryciem. Z Lematu B.1 wynika, że jednowymiarowy szkielet $\tilde{X}^{(1)}$ jest silnie lokalnie skończonym CW kompleksem. *Liczbę końców* grupy Γ definiujemy jako

$$e(\Gamma) = e(\tilde{X}^{(1)}).$$

Można pokazać, że powyższa definicja nie zależy od wyboru CW kompleksu X.

Twierdzenie B.5 ([56, Theorem 5.12]). *Następujące warunki są równoważne dla nieskończonej, skończenie generowanej grupy* Γ*:*

(1) $e(\Gamma) = 2$,

(2) Γ *zawiera nieskończoną grupę cykliczną jaką podgrupę skończonego indeksu,*

(3) $\Gamma \cong \Gamma' \rtimes \mathbb{Z}$, *gdzie* Γ' *jest grupą skończoną, lub* $\Gamma \cong \Gamma_1 *_{\Gamma'} \Gamma_2$, *gdzie* $[\Gamma_i : \Gamma'] = 2$ *dla* $i = 1, 2$ *oraz* Γ' *jest grupą skończoną.*

Niech $\Gamma' \subseteq \Gamma$ będzie dowolną podgrupą oraz niech $\tilde{X}_{\Gamma'}$ oznacza nakrycie CW kompleksu X stowarzyszone z podgrupą Γ'. *Liczbę końców* pary (Γ, Γ') definiujemy przyjmując

$$e(\Gamma, \Gamma') = e\big((\tilde{X}_{\Gamma'})^{(1)}\big).$$

Twierdzenie B.6 ([30, Proposition 13.5.11]). *Niech* Γ *będzie skończenie generowaną grupą. Jeśli* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *jest podgrupą normalną, to* $e(\Gamma, \Gamma') = e(\Gamma/\Gamma')$.

Wniosek B.7 ([56, Theorem 5.4]). *Załóżmy, że skończenie generowana grupa* Γ *działa w sposób właściwie dyskretny na spójnym CW kompleksie* X. *Jeśli przestrzeń orbit* X/Γ *jest skończonym CW kompleksem, to* $e(\Gamma) = e(X)$.

Dowód. Z długiego ciągu dokładnego grup homotopii stowarzyszonego z nakryciem $X \to X/\Gamma$ otrzymujemy krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to \pi_1(X) \to \pi_1(X/\Gamma) \to \Gamma \to 1.$$

Grupa podstawowa skończonego CW kompleksu jest skończenie generowana, a więc na mocy Twierdzenia B.6 wnioskujemy, że $e\big(\pi_1(X/\Gamma), \pi_1(X)\big) = e(\Gamma)$. Ponieważ nakrycie skończonego CW kompleksu jest silnie lokalnie skończonym CW kompleksem, z definicji liczby końców pary grup i Stwierdzenia B.3 wynika, że $e\big(\pi_1(X/\Gamma), \pi_1(X)\big) = e(X)$. □

Dodatek C

Kohomologie Farrella

Ustalmy grupę Γ. Niech $\mathcal{A}$ będzie acyklicznym kompleksem łańcuchowym projektywnych Γ-modułów, zaś $\mathcal{P} \to \mathbb{Z}$ rezolwentą projektywną trywialnego Γ-modułu $\mathbb{Z}$. Parę $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ nazywamy *rezolwentą zupełną* grupy Γ, o ile $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{P}$ pokrywają się w odpowiednio wysokich wymiarach:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & & A_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_0 \arrow[r] & A_{-1} \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] & A_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\ & & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Stwierdzenie C.1 ([14, Chapter X, Proposition 2.1])**.** *Niech* Γ *będzie grupą o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Wówczas istnieje rezolwenta zupełna* $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ *grupy* Γ *taka, że* $\mathcal{A}$ *oraz* $\mathcal{P}$ *pokrywają się począwszy od wymiaru* $\operatorname{vcd}\Gamma$.

Do końca dodatku zakładamy, że grupa Γ ma skończony wirtualny wymiar kohomologiczny. Definiujemy k-tą *grupę kohomologii Farrella* $\hat{H}^k(\Gamma, M)$ grupy Γ o współczynnikach w Γ-module M, $k \geq 0$, przyjmując

$$\hat{H}^k(\Gamma, M) = H^k(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathcal{A}, M)),$$

gdzie $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ jest rezolwentą zupełną grupy Γ. Można pokazać, że definicja nie zależy od wyboru rezolwenty $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Uwaga C.2. Ze Stwierdzenia C.1 wynika, że jeśli Γ jest grupą skończoną, to $\hat{H}^k(\Gamma, -) \cong H^k(\Gamma, -)$ dla dowolnej liczby $k > 0$.

Mówimy, że grupa Γ ma *okresowe kohomologie*, o ile istnieje liczba $n \neq 0$ oraz element $u \in \hat{H}^n(\Gamma, \mathbb{Z})$, który jest odwracalny w pierścieniu $\hat{H}^*(\Gamma, \mathbb{Z})$. Wtedy $\smile$-iloczyn wyznacza izomorfizm

$$u \smile -\colon \hat{H}^k(\Gamma, M) \to \hat{H}^{n+k}(\Gamma, M)$$

dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{Z}$ oraz dowolnego Γ-modułu M.

Stwierdzenie C.3 ([14, Chapter X, Proposition 6.7])**.** *Jeśli grupa o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym ma okresowe kohomologie, to każda jej elementarna abelowa podgrupa jest cykliczna.*

Dowód. Jeśli grupa Γ ma okresowe kohomologie, to samo jest prawdą dla jej dowolnej podgrupy Γ': inkluzja $\Gamma' \to \Gamma$ indukuje homomorfizm pierścieni $\hat{H}^*(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \hat{H}^*(\Gamma', \mathbb{Z})$, który przeprowadza elementy odwracalne na elementy odwracalne. W szczególności dowolna elementarna abelowa podgrupa grupy Γ ma okresowe kohomologie. Jednakże z twierdzenia Künnetha wynika, że $\hat{H}^k(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{Z}_p)^{k+1}$ dla dowolnej liczby $k \geq 1$, co oczywiście wyklucza okresowość grupy $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. □

Odnotujmy, że prawdziwa jest również implikacja odwrotna do tej z powyższego stwierdzenia: jeśli każda elementarna abelowa podgrupa grupy Γ o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym jest cykliczna, to Γ ma okresowe kohomologie. W rozprawie nie robimy jednak z niej użytku.

Najważniejsza z naszego punktu widzenia własność kohomologii Farrella wyrażona jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie C.4 ([19, Corollary 1.4])**.** *Grupa Γ o skończonym wirtualnym wymiarze kohomologicznym działa w sposób właściwie dyskretny na $S^n \times \mathbb{R}^m$ dla pewnych liczb $m, n \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy Γ jest grupą przeliczalną oraz ma okresowe kohomologie.*

Bibliografia

[1] P. Ackermann, B. Fine oraz G. Rosenberger, On surface groups: Motivating examples in Combinatorial Group Theory, *Groups St Andrews 2005, Volume 1*, London Mathematical Society Lecture Note Series 339, Cambridge University Press, 2007, 96–129. (23)

[2] A. Adem, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-actions on $(S^n)^k$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 300 (1987), 791–809. (27, 49, 51)

[3] A. Adem oraz W. Browder, The free rank of symmetry of $(S^n)^k$, *Invent. Math.* 92 (1988), 431–440. (7, 48)

[4] A. Adem, J. F. Davis oraz Ö. Ünlü, Fixity and free group actions on products of spheres, *Comment. Math. Helv.* 79 (2004), 758–778. (55)

[5] A. Adem oraz J. H. Smith, Periodic complexes and group actions, *Ann. of Math.* 154 (2001), 407–435. (8, 32, 51, 55)

[6] M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 10, Cambridge University Press, 2000. (63)

[7] L. Auslander oraz M. Kuranishi, On the holonomy group of locally Euclidean spaces, *Ann. of Math.* 65 (1957), 411–415. (62)

[8] I. Belegradek, Aspherical manifolds, relative hyperbolicity, simplicial volume and assembly maps, *Algebr. Geom. Topol.* 6 (2006), 1341–1354. (39)

[9] D. Benson oraz J. Carlson, Complexity and multiple complexes, *Math. Zeitschrift* 195 (1987), 221–238. (7)

[10] J. S. Birman oraz D. R. J. Chillingworth, On the homeotopy group of a non-orientable surface, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 71 (1972), 437–448. (65)

[11] Z. Błaszczyk, On the non-existence of free $\mathcal{A}_d$-actions on products of spheres, *Math. Nachr.* 285 (2012), 613–618. (8)

[12] Z. Błaszczyk, Free properly discontinuous actions on homotopy surfaces, ukaże się w *J. Pure Appl. Algebra*, doi: 10.1016/j.jpaa.2012.12.006. (8)

[13] M. R. Bridson oraz A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319, Springer–Verlag, 1999. (39)

[14] K. S. BROWN, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics 87, Springer–Verlag, 1982. (18, 19, 20, 21, 22, 44, 71)

[15] J. W. CANNON, W. J. FLOYD oraz W. R. PARRY, Introductory notes on Richard Thompson's groups, *Enseign. Math.* 42 (1996), 215–256. (38)

[16] G. CARLSSON, On the rank of abelian groups acting freely on $(S^n)^k$, *Invent. Math.* 69 (1982), 393–400. (7)

[17] C. CID oraz T. SHULZ, Computation of five- and six-dimensional Bieberbach groups, *Experiment. Math.* 10 (2001), 109–115. (63)

[18] P. E. CONNER, On the action of a finite group on $S^n \times S^n$, *Ann. of Math.* 66 (1957), 586–588. (7)

[19] F. X. CONNOLLY oraz S. PRASSIDIS, On groups which act freely on $\mathbb{R}^m \times S^{n-1}$, *Topology* 28 (1989), 133–148. (8, 72)

[20] C. W. CURTIS oraz I. REINER, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Pure and Applied Mathematics XI, Interscience Publishers, 1962. (26, 27)

[21] J. F. DAVIS oraz P. KIRK, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics 35, American Mathematical Society, 2001. (14)

[22] J. F. DAVIS oraz R. J. MILGRAM, *A Survey of the Spherical Space Form Problem*, Mathematical Reports 2, Harwood Academic Publishers, 1984. (29)

[23] B. ECKMANN oraz H. MÜLLER, Poincaré duality groups of dimension two, *Comment. Math. Helv.* 55 (1980), 510–520. (23)

[24] A. L. EDMONDS oraz R. LEE, Compact Lie groups which act on Euclidean spaces without fixed points, *Proc. Amer. Math. Soc* 55 (1976), 416–418. (15)

[25] B. FARB oraz D. MARGALIT, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton Mathematical Series 49, Princeton University Press, 2012. (65)

[26] F. T. FARRELL, The Borel Conjecture, *Topology of High-Dimensional Manifolds*, ICTP Lecture Notes Series 9, Abdus Salam Int. Cent. Theo. Phys., 2002, 225–298. (17)

[27] K. FUJII, A note on finite groups which act freely on closed surfaces, *Hiroshima Math. J.* 5 (1975), 261–267. (29, 30, 31)

[28] K. FUJII, A note on finite groups which act freely on closed surfaces II, *Hiroshima Math. J.* 6 (1976), 457–463. (29, 31)

[29] W. FULTON oraz J. HARRIS, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer–Verlag, 1991. (26)

[30] R. GEOGHEGAN, *Topological Methods in Group Theory*, Graduate Texts in Mathematics 243, Springer–Verlag, 2008. (67, 68)

[31] M. Golasiński, D. L. Gonçalves oraz R. Jimenéz, Properly discontinuous actions of groups on homotopy $2n$-spheres, złożona do druku. (8, 32, 61)

[32] M. Golasiński, D. L. Gonçalves oraz R. Jimenéz, Properly discontinuous actions of groups on homotopy circles, złożona do druku. (8, 32, 35, 55)

[33] H. B. Griffiths, The fundamental group of a surface, and a theorem of Schreier, *Acta Math.* 110 (1963), 1–17. (23)

[34] B. Hanke, The stable free rank of symmetry of products of spheres, *Invent. Math.* 178 (2009), 265–298. (7)

[35] J. L. Harer, The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface, *Invent. Math.* 84 (1986), 157–176. (39)

[36] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002. (16)

[37] A. Heller, A note on spaces with operators, *Illinois J. Math.* 3 (1959), 98–100. (7)

[38] J. Hempel, Free cyclic actions on $S^1 \times S^1 \times S^1$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 48 (1975), 221–227. (53)

[39] G. Hochschild, *The Structure of Lie Groups*, Holden–Day, 1965. (21)

[40] G. Hope oraz U. Tillmann, On the Farrell cohomology of the mapping class group of non-orientable surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 137 (2009), 393–400. (65)

[41] H. Hopf, Zum Clifford–Kleinschen Raumproblem, *Math. Ann.* 95 (1926), 313–329. (7)

[42] G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Lecture Notes in Mathematics 682, Springer–Verlag, 1978. (24, 25)

[43] D. L. Johnson, *Presentations of Groups*, Cambridge University Press, 1997. (35)

[44] J. B. Lee, Transformation groups on $S^n \times \mathbb{R}^m$, *Topology Appl.* 53 (1993), 187–204. (8, 35)

[45] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 202, Springer–Verlag, 2000. (16)

[46] I. Madsen, C. B. Thomas oraz C. T. C. Wall, The topological spherical space form problem II, *Topology* 15 (1978), 375–382. (7, 48)

[47] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer–Verlag, 1984. (16)

[48] J. Milnor, Groups which act on S^n without fixed points, *Amer. J. Math.* 79 (1957), 623–630. (7, 60, 61)

[49] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Annals of Mathematics Studies 72, Princeton University Press, 1971. (28)

[50] G. Mislin oraz O. Talelli, On groups which act freely and properly on finite-dimensional homotopy spheres, *Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra*, London Mathematical Society Lecture Note Series 275, Cambridge University Press, 2000, 208–228. (8)

[51] G. D. Mostow, Factor spaces of solvable groups, *Ann. of Math.* 60 (1954), 1–27. (16)

[52] R. Oliver, Free compact group actions on products of spheres, *Algebraic Topology: Aarhus, Denmark 1978*, Lecture Notes in Mathematics 763, Springer–Verlag, 1979, 539–548. (7, 47, 50, 54)

[53] L. P. Płachta, Restrictions on free actions of the alternating group $\mathcal{A}_6$ on products of spheres, *Ukraïn. Math. Zh.* 48 (1996), 1431–1434. (8, 48, 51)

[54] M. M. Postnikow, Three-dimensional spherical forms, *Discrete Geometry and Topology*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 196, Nauka, 1991, 114–141. (7)

[55] S. Prassidis, Groups with infinite virtual cohomological dimension which act freely on $\mathbb{R}^m \times S^{n-1}$, *J. Pure Appl. Algebra* 78 (1992), 85–100. (8, 41)

[56] P. Scott oraz C. T. C. Wall, Topological methods in Group Theory, *Homological Group Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series 36, Cambridge University Press, 1979, 137–203. (68)

[57] J.-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets, *Ann. of Math. Studies* 70 (1971), 77–169. (22)

[58] J. R. Stallings, On torsionfree groups with infinitely many ends, *Ann. of Math.* 88 (1968), 312–334. (20)

[59] E. Stein, Free actions on products of spheres, *Michigan Math. J.* 26 (1979), 187–193. (7)

[60] M. Suzuki, On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes, *Amer. J. Math.* 77 (1955), 657–691. (7)

[61] R. G. Swan, Periodic resolutions of finite groups, *Ann. of Math.* 72 (1960), 267–291. (7, 34)

[62] R. G. Swan, Groups of cohomological dimension one, *J. Algebra* 12 (1969), 585–601. (20)

[63] A. Szczepański, Problems on Bieberbach groups and flat manifolds, *Geometriae Dedicata* 120 (2006), 111–118. (62)

[64] J. L. Tollefson, The compact 3-manifolds covered by $S^2 \times \mathbb{R}$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 45 (1974), 461–462. (61)

[65] W. C. Waterhouse, Two generators for the general linear group over finite fields, *Linear and Multilinear Algebra* 24 (1989), 227–230. (41)

[66] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics 61, Springer–Verlag, 1978. (52)

[67] E. Yalçin, Group actions and group extensions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 2689–2700. (7)

[68] H. Zassenhaus, Über endliche Fastkörper, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 11 (1935), 187–220. (7)

[69] H. Zassenhaus, Über einen Algorithmus, zur Bestimmung der Raumgruppen, *Comment. Math. Helv.* 21 (1948), 117–141. (7)

Skorowidz

Nota biograficzna

Urodziłem się 19 października 1985 roku w Lipnie. W latach 1992–2000 uczęszczałem do Szkoły Podstawowej nr 5 w Lipnie, następnie w latach 2000–2004 do Liceum Ogólnokształcącego im. Romualda Traugutta w Lipnie, do klasy o profilu matematyczno-fizycznym. W roku 2004 złożyłem egzamin maturalny.

W roku 2004 rozpocząłem studia na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu na kierunku matematyka. Począwszy od III roku studiów realizowałem indywidualny program nauczania pod kierunkiem dra hab. Marka Golasińskiego. W roku akademickim 2007/2008 otrzymałem stypendium marszałka województwa kujawsko-pomorskiego oraz zostałem wybrany najlepszym studentem Wydziału Matematyki i Informatyki UMK, zaś w roku akademickim 2008/2009 byłem stypendystą ministra nauki i szkolnictwa wyższego. W roku 2009 odbyłem tygodniowe wizyty na Uniwersytecie Lwowskim i Narodowym Uniwersytecie im. Tarasa Szewczenki w Kijowie.

Pod kierunkiem dra hab. Marka Golasińskiego przygotowałem pracę magisterską poświęconą strukturom komórkowym klasycznych grup topologicznych i ich przestrzeni jednorodnych. W roku 2009 uzyskałem tytuł magistra w zakresie matematyki teoretycznej, a następnie podjąłem studia doktoranckie na UMK w ramach Środowiskowych Studiów Doktoranckich z Nauk Matematycznych. Semestr zimowy roku akademickiego 2010/2011 spędziłem na stażu na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Uzyskane wyniki naukowe prezentowałem m. in. w trakcie konferencji *Israeli–Polish Mathematical Meeting* w Łodzi (wrzesień 2011) oraz *6th European Congress of Mathematics* w Krakowie (lipiec 2012).

Toruń, grudzień 2012