Środowiskowe Studia Doktoranckie
z Nauk Matematycznych

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Józef Banaś

Katedra Matematyki
Politechnika Rzeszowska

Wariacje Funkcji, Ich Własności i Zastosowania

Lublin 2014

Spis treści

Wstęp

Celem przedkładanego skryptu jest przedstawienie podstawowych faktów dotyczących różnych rodzajów definicji pojęcia wariacji (wahania) funkcji. Główny nacisk zostanie położony na podanie podstawowych faktów dotyczących klasycznej wariacji funkcji. Pojęcie to zostało wprowadzone do matematyki przez znakomitego francuskiego matematyka C. Jordana pod koniec XIX wieku. Jordan odkrył też podstawową własność funkcji o wariacji ograniczonej. Własność ta pozwala każdą funkcję o wariacji ograniczonej na zadanym przedziale $[a, b]$ przedstawić jako różnicę dwóch funkcji rosnących na tym przedziale.

Odkrycie tej własności pozwoliło na znaczne uproszczenie teorii funkcji o wariacji ograniczonej, a przede wszystkim na zbudowanie poręcznej teorii całki Riemanna-Stieltjesa. To ostatnie pojęcie okazało się niezwykle użyteczne w teorii prawdopodobieństwa oraz w pewnych działach mechaniki [2,3,5].

W przedkładanym opracowaniu wskażemy również na pewne uogólnienie wspomnianego, klasycznego pojęcia wariacji i funkcji o wariacji ograniczonej. Mianowicie, przedstawimy pojęcie wariacji funkcji w sensie Wienera, w sensie Wienera-Younga i w sensie Watermana. Oczywiście uogólnienia te nie wyczerpują listy wszystkich, obecnie znanych uogólnień pojęcia wariacji funkcji. Tym niemniej, przedstawiają one najważniejsze z tych uogólnień, które mają najwięcej własności, najwięcej zastosowań i których teoria jest obecnie najbardziej rozwinięta.

Niniejszy skrypt został opracowany głównie na podstawie monografii [1], która całkowicie poświęcona jest przedstawieniu pojęcia wariacji funkcji w różnym ujęciu oraz omówieniu ich własności i zastosowań. Ponadto, wykorzystane zostały również pozycje [6,7,8,9]. W pozycjach tych omawia się również pojęcie wariacji funkcji i wskazuje na różnorakie zastosowania tego pojęcia.

1. Funkcje monotoniczne i regularne

Niech D będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ oraz niech dana będzie funkcja $f : D \to \mathbb{R}$. Dalej, niech dany będzie zbiór $A \subset D$, $A \neq \emptyset$.

Definicja 1.1. Mówimy, że funkcja f jest na zbiorze A:

a) **rosnąca**, jeżeli $\forall_{x_1,x_2 \in A}[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)]$; piszemy wtedy, że $f \,\underline{\nearrow}\, A$

b) **ściśle rosnąca**, jeżeli $\forall_{x_1,x_2 \in A}[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$; piszemy wtedy: $f \nearrow A$

c) **malejąca**, jeżeli $\forall_{x_1,x_2 \in A}[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)]$; piszemy, że $f \,\overline{\searrow}\, A$

d) **ściśle malejąca**, jeżeli $\forall_{x_1,x_2 \in A}[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$; piszemy wtedy, że $f \searrow A$

Funkcję f nazywa się funkcją **monotoniczną** (**ściśle monotoniczną**) na zbiorze A, jeżeli f jest rosnąca na zbiorze A lub malejąca na zbiorze A (ściśle rosnąca lub ściśle malejąca na zbiorze A).
Oczywiście, każda funkcja ściśle monotoniczna na zbiorze A jest na tym zbiorze monotoniczna.

Zauważmy, że suma dwóch funkcji rosnących (malejących) na zbiorze A jest funkcją rosnącą (malejącą) na zbiorze A. Ponadto, iloczyn funkcji rosnącej (malejącej) na zbiorze A przez stałą $c \geqslant 0$ jest funkcją rosnącą (malejącą) na zbiorze A. Zauważmy, że jeżeli f jest rosnąca (malejąca) na zbiorze A oraz $c < 0$ to cf jest malejąca (rosnąca) na zbiorze A. Stąd np. wynika, że jeżeli oznaczymy przez S_A zbiór wszystkich funkcji rosnących (malejących) na zbiorze A, to zbiór ten ma własność:

$$f \in S_A, \ -f \in S_A \Rightarrow f \equiv 0 \text{ na zbiorze } A\ .$$

Oznacza to, że zbiór S_A funckji rosnących (albo malejących) na zbiorze A, będący podzbiorem przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^A$ *, ma strukturę **stożka**. Niestety, nie jest to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^A$. Podobnie, zbiór M_A funckji monotonicznych na zbiorze A **nie ma nawet struktury stożka!**

Później pokażemy, jak tą niedogodną sytuację można obejść (w pewnien sposób).

*Jeżeli X, Y są zbiorami niepustymi, to symbolem Y^X oznaczamy zbiór wszystkich funkcji $f : X \to Y$.

W dalszym ciągu załóżmy, że I jest przedziałem (otwartym, domkniętym, jednostronnie otwartym, ograniczonym lub nieograniczonym). Symbolem $\mathring{I}$ będziemy oznaczać wnętrze przedziału I, np. jeżeli $I = (a, b]$, to $\mathring{I} = (a, b)$ itd.

Mamy następujące, ważne twierdzenie.

Twierdzenie 1.2. *Załóżmy, że f jest funkcją monotoniczną na przedziale $I (f : I \to \mathbb{R})$. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathring{I}$ istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie x (skończone), tzn. istnieją*

$$f(x-) = \lim_{y \to x-} f(y) \ ,$$

$$f(x+) = \lim_{y \to x+} f(x) \ .$$

Ponadto, jeżeli f jest rosnąca na przedziale I, to

$$f(x-) \leqslant f(x) \leqslant f(x+) \ ,$$

natomiast, jeżeli f jest malejąca na I, to

$$f(x-) \geqslant f(x) \geqslant f(x+) \ .$$

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f jest rosnąca na przedziale I. Pokażemy, że

$$f(x-) = \sup\{f(y) : \ y < x, y \in I\}$$

$$f(x+) = \inf\{f(y) : \ y > x, y \in I\} \ .$$

Załóżmy najpierw, że $y \in I$, $y < x$. Wtedy z założenia mamy, że

$$f(y) < f(x)$$

a to oznacza, że zbiór $\{f(y) : \ y \in I, y < x\}$ jest ograniczony z góry i jedną z jego majorant jest $f(x)$. Zatem zbiór ten ma kres górny - oznaczmy ten kres górny przez $f_*(x)$, tzn. kładziemy:

$$f_*(x) = \sup\{f(y) : \ y \in I, y < x\} \ .$$

Ponieważ $f(x)$ jest majorantą zbioru $\{f(y) : \ y \in I, y < x\}$, więc mamy

$$f_*(x) \leqslant f(x) \ . \tag{1.1}$$

Przy okazji otrzymujemy, że $f_*(x) \in \mathbb{R}$.

W dalszym ciągu pokażemy, że $f(x-)$ istnieje oraz, że

$$f(x-) = f_*(x) \ . \tag{1.2}$$

W tym celu ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje liczba w zbiorze $\{f(y) : \ y \in I, y < x\}$ - tzn. istnieje liczba $\overline{y} < x$, $\overline{y} \in I$ taka, że

$$f_*(x) - \varepsilon < f(\overline{y}) \leqslant f_*(x) \ . \tag{1.3}$$

Weźmy teraz dowolny ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\{x_n\} \subset I$, $x_n < x$ dla $n = 1, 2, ...$ oraz $x_n \to x$. Stąd: i z definicji granicy ciągu wynika, że istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, zachodzi, że

$$\overline{y} < x_n \leqslant x \ .$$

Stąd i z (1.3) mamy:

$$f_*(x) - \varepsilon < f(\overline{y}) \leqslant f(x_n) \leqslant f_*(x) \ , \tag{1.4}$$

przy czym ostatnia nierówność (po prawej stronie) w (1.4) wynika z definicji kresu górnego, bowiem $\{x_n\} \subset \{y \in I : \ y < x\}$.
Z nierówności (1.4) otrzymujemy, że

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f_*(x) \ .$$

Ponieważ tak jest dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ (byle tylko $x_n < x$, $x_n \to x$, $x_n \in \{y \in I : \ y < x\}$), więc stąd mamy, że

$$\lim_{y \to x_-} f(x) = f(x-) = f_*(x) \ ,$$

co dowodzi (1.2).

Dowód, że $f(x+) = f^*(x) = \inf\{f(y) : \ y \in I, y > x\}$ przebiega podobnie. Mamy również, że

$$f(x+) \geqslant f(x) \ .$$

Koniec dowodu. $\square$

Uwaga 1.3. Jeżeli x jest lewym (prawym) końcem przedziału I, mamy podobne stwierdzenia. Np. gdy przedział I ma postać

$$I = (a, b) \ \text{ lub } \ I = [a, b) \ \text{ itp. }, \quad b \leqslant +\infty \ ,$$

to mamy, że $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ istnieje, oraz

$$f(a+) = \lim_{x \to a+} f(x) \geqslant f(a)$$

(oczywiście dla funkcji rosnącej).

Twierdzenie 1.4. *Rodzina przedziałów otwartych i rozłącznych jest co najwyżej przeliczalna.*

Dowód. Wiadomo, że w każdym przedziale otwartym znajduje się przynajmniej jedna liczba wymierna.
Załóżmy, że $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ jest rodziną przedziałów otwartych i rozłącznych. Weźmy odwzorowanie $f : \Lambda \to Q$ (Q oznacza zbiór liczb wymiernych) określone w ten sposób, że każdemu wskaźnikowi $\lambda \in \Lambda$ przyporządkowujemy dokładnie jedną liczbę wymierną z przedziału U_λ. Jest to funkcja różnowartościowa, bowiem dla $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, przedziały U_{λ_1} i U_{λ_2} są rozłączne, więc liczby wymierne $f(\lambda_1)$ i $f(\lambda_2)$ są różne. Zatem $f : \Lambda \to f(\Lambda) \subset Q$ jest bijekcją. Ponieważ $f(\Lambda)$, jako podzbiór zbioru przeliczalnego Q, jest skończony lub przeliczalny, więc zbiór Λ, a co zatem idzie rodzina $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, jest co najwyżej przeliczalna. $\square$

Sformułujemy teraz i udowodnimy kilka lematów o funkcjach monotonicznych.

Lemat 1.5. *Niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą (malejącą) na przedziale I. Niech $x, y, z \in I$ będą takie, że $x < z < y$ (wtedy oczywiście $z \in \mathring{I}$). Wtedy zachodzą nierówności*

$$f(x+) \leqslant f(z) \leqslant f(y-)\ , \qquad \text{gdy } f \nearrow \mathrm{I}$$

$$f(x+) \geqslant f(z) \geqslant f(y-)\ , \qquad \text{gdy } f \searrow \mathrm{I}\ .$$

Dowód. Załóżmy np., że f jest rosnąca na I. Wtedy, z dowodu poprzedniego Twierdzenia 1.2 mamy, że

$$f(x+) = \inf_{u \in (x, +\infty) \cap I} f(u) \leqslant f(z)$$

(bo $z \in (x, +\infty) \cap I$), oraz

$$f(z) \leqslant \sup_{v \in (-\infty, y) \cap I} f(v)$$

(bo $z \in (-\infty, y) \cap I$). Koniec dowodu. $\square$

Lemat 1.6. *Niech $x \in \mathring{I}$ będzie punktem nieciągłości funkcji rosnącej f. Wtedy przedział $(f(x-), f(x+))$ jest przedziałem niepustym (i otwartym). Podobnie, gdy x jest punktem nieciągłości funkcji malejącej f, to przedział $(f(x+), f(x-))$ jest niepusty.*

Dowód. Załóżmy np., że $f \nearrow I$. Jeżeli x jest punktem nieciągłości funkcji f, to z poprzednio ustalonych własności mamy, że albo $f(x-) \leqslant f(x) < f(x+)$, albo $f(x-) < f(x) \leqslant f(x+)$ albo $f(x-) < f(x) < f(x+)$. W każdym z trzech przypadków mamy, że $f(x-) < f(x+)$, więc przedział $(f(x-), f(x+))$ jest niepusty. $\square$

Lemat 1.7. *Niech $x, y \in \mathring{I}$, $x < y$. Załóżmy, że x, y są punktami nieciągłości funkcji f, rosnącej na przedziale I. Wtedy przedziały $(f(x-), f(x+))$, $(f(y-), f(y+))$ są niepuste i rozłączne. Podobne stwierdzenie ma miejsce dla funkcji malejącej.*

Dowód. Tak jak poprzednio, dla ustalenia uwagi załóżmy, że $f \nearrow I$. Wtedy, z Lematu 1.5 mamy, że $f(x+) \leqslant f(y-)$, więc przedziały otwarte $(f(x-), f(x+))$, $(f(y-), f(x+))$ są rozłączne i niepuste. $\square$

Twierdzenie 1.8. *Zbiór punktów nieciągłości funkcji $f : I \to \mathbb{R}$, która jest monotoniczna na przedziale I, jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Oznaczmy przez D_I zbiór wszystkich punktów nieciągłości funkcji f na przedziale I. Wtedy $\mathring{I}$ jest oczywiście też przedziałem i mamy, że $D_I = D_{\mathring{I}} \cup \{a\}$ lub $D_I = D_{\mathring{I}} \cup \{b\}$ lub $D_I = D_{\mathring{I}} \cup \{a, b\}$ lub $D_I = D_{\mathring{I}}$. Wystarczy pokazać, że zbiór $D_{\mathring{I}}$ jest co najwyżej przeliczalny.
Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $f \nearrow I$. Weźmy odwzorowanie T, które każdemu punktowi $x \in D$ przyporządkowuje przedział niepusty i otwarty $(f(x-), f(x+))$. Z Lematu 1.7 wynika, że odwzorowanie T jest injektywne. Zatem $T(D)$ złożone jest z przedziałów otwartych, niepustych i rozłącznych oraz $T : D \to T(D)$ jest bijekcją. Na podstwie Twierdzenia 1.4 wiemy, że $T(D)$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Ponieważ $T : D \to T(D)$ jest bijekcją, więc D jest co najwyżej przeliczalny. Koniec dowodu. $\square$

W dalszym ciągu wskażemy na pewne istotne uogólnienie zarówno funkcji monotonicznych jak i ciągłych. W tym celu wprowadzimy najpierw pewne oznaczenia.

I tak, zbiór wszystkich funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, które są ograniczone na przedziale $[a, b]$, oznaczać będziemy symbolem $B([a, b])$. Wiadomo, że ten zbiór tworzy przestrzeń Banacha z normą supremum, tzn. dla $f \in B([a,b])$ przyjmujemy, że

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\} \ . \tag{1.5}$$

Ważną w wielu rozważaniach przestrzenią jest przestrzeń $C([a,b])$ złożona z funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, które są ciągłe na $[a,b]$. Przestrzeń tę również wyposażamy w normę (1.5). Oczywiście, ze znanych własności funkcji ciągłych wynika, że normę (1.5) można zastąpić normą maksimum

$$||f||_\infty = \max\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\} \ . \tag{1.6}$$

Można pokazać, że $C([a,b])$ jest domknietą podprzestrzenią przestrzeni $B([a,b])$, a więc jest przestrzenią Banacha. Przestrzeń ta nazywa się przestrzenią funkcji ciągłych z normą (metryką) zbieżności jednostajnej, ponieważ zbieżność względem normy (1.6) pokrywa się ze zbieżnością jednostajną.

Oczywiście na funkcje monotoniczne na przedziale $[a,b]$, tzn. na zbiór $M_{[a,b]}$, możemy patrzeć jako na zbiór w przestrzeni $B([a,b])$.

Jak udowodniliśmy to wyżej, każda funkcja monotoniczna $f \in B([a,b])$ ma w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ (skończone) granice jednostronne. Punkt nieciągłości takiej funkcji jest to tzw. **skok**.
Na ogół przyjęto mówić, że jeżeli funkcja $f \in B([a,b])$ ma w punkcie x_0 granice jednostronne oraz jest w tym punkcie nieciągła, to taka nieciągłość jest nazywana **nieciągłością I-tego rodzaju**.

Żeby nasze rozważania ujednolicić, wprowadzimy dalej pewne definicje i oznaczenia.

Definicja 1.9. Funkcję $f \in B([a,b])$ będziemy nazywać **funkcją regularną**, jeżeli w każdym punkcie $x \in [a,b]$ funkcja f ma granice jednostronne (skończone). Oczywiście w punkcie $x = a$ ma granicę prawostronną, natomiast w punkcie $x = b$ granicę lewostronną.

Zbiór wszystkich funkcji regularnych na przedziale $[a,b]$ będziemy oznaczać symbolem $R([a,b])$. Oczywiście $R([a,b]) \subset B([a,b])$.

Jeżeli $f \in R([a,b])$, to w dowolnie ustalonym punkcie $x \in [a,b]$ funkcja f może być ciągła lub nieciągła. Jeżeli w punkcie x funkcja f jest nieciągła, to w przypadku, gdy granice jednostronne $f(x-) = \lim\limits_{y \to x-} f(y)$, $f(x+) = \lim\limits_{y \to x+} f(y)$ są różne ($f(x-) \neq f(x+)$), punkt x nazywamy **skokiem**. Jeżeli $f(x-) = f(x+)$, to liczbę x nazywamy **nieciągłością usuwalną**.

Dla $f \in R([a,b])$ wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$D(f) = \{x \in [a,b] : \ f \ \text{ jest nieciągła w punkcie } \ x\} \ , \tag{1.7}$$

$$D_0(f) = \{x \in [a,b] : \ f \ \text{ ma nieciągłość usuwalną w } \ x\} \ , \tag{1.8}$$

$$D_1(f) = \{x \in [a,b] : \ f \ \text{ ma skok w punkcie } x\} \ . \tag{1.9}$$

Mamy, że:

$$D(f) = D_0(f) \cup D_1(f)$$

dla $f \in R([a,b])$. Jeżeli f jest monotoniczna na $[a,b]$ to

$$D(f) = D_1(f), \quad D_0(f) = \emptyset \ .$$

Chociaż wydaje się, że klasa funkcji regularnych jest bardzo odległa od klasy funkcji monotonicznych, to jednak funkcje regularne zachowują jedną bardzo ważną własność funkcji monotnicznych. Mamy bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.10. *Zbiór punktów nieciągłości funkcji regularnej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Rozważmy "uśrednienie" $\overline{f}$ funkcji f określone wzorem

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) & \text{dla} \quad x \in D_1(f) \\ f(x) & \text{dla} \quad x \text{ pozostałych} \ . \end{cases}$$

Oczywiście mamy, że $D(\overline{f}) = D(f)$, $D_0(\overline{f}) = D_0(f)$, $D_1(\overline{f}) = D_1(f)$, więc wystarczy pokazać, że zbiór $D(\overline{f})$ jest co najwyżej przeliczalny.

Załóżmy najpierw, że $x_0 \in D_0(f) \cap (a,b)$. Wtedy $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$. Załóżmy np., że $f(x_0-) = f(x_0+) < f(x_0)$ i połóżmy $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(x_0) - f(x_0+)) > 0$. Dobierzmy liczbę $\delta > 0$ tak, żeby dla $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ zachodziła nierówność $f(x) < f(x_0) - \varepsilon$. Stąd wynika, że koło w $\mathbb{R}^2$ o środku w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i promieniu $\min\{\delta, \varepsilon\}$ nie zawiera innych punktów wykresu funkcji f (lub $\overline{f}$) za wyjątkiem środka $(x_0, f(x_0))$.

Załóżmy dalej, że $x_0 \in D_1(f) \cap (a,b)$. Wtedy $f(x_0-) \neq f(x_0+)$. Niech np. będzie, że $f(x_0-) < f(x_0+)$. Połóżmy $\varepsilon = \frac{1}{3}(f(x_0+) - f(x_0-)) > 0$ i dobierzmy liczbę $\delta > 0$ taką, żeby

$$f(x) < f(x_0-) + \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

oraz

$$f(x) > f(x_0+) - \varepsilon \ \text{ dla } \ x \in (x_0, x_0 + \delta) \ .$$

Stąd wynika, że koło o środku w punkcie $(x_0, \overline{f}(x_0))$ i promieniu $\min\{\varepsilon, \delta\}$ nie zawiera innych punktów wykresu funkcji $\overline{f}$ poza punktem $(x_0, \overline{f}(x_0))$.

Ostatecznie widzimy, że zbiór tych wszystkich punktów wykresu funkcji $\overline{f}$, które są środkami kół wyżej opisanych, składa sie wyłącznie z punktów izolowanych. Z faktów zawartych w niżej podanych zadaniach (zad. 1 i 2) łatwo wywnioskować, że zbiór ten jest co najwyżej przeliczalny. Stąd wynika, że zbiór $D(\overline{f})$ jest co najwyżej przeliczalny. □

Ważne twierdzenie, charakteryzujące funkcje regularne, udowodnił w 1933 roku Wacław Sierpiński. Przytoczymy to twierdzenie bez dowodu (por. [1]).

Twierdzenie 1.11. *Funkcja f należy do zbioru $R([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci złożenia $f = g \circ \tau$, gdzie $\tau : [a,b] \to [c,d]$ jest funkcją ściśle rosnącą, natomiast $g \in C([a,b])$.*

Zauważmy na zakończenie tego rozdziału, że zbiór $R([a,b])$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$.
Pozostawiamy Czytelnika z problemem: Czy $R([a,b])$ jest domknietą podprzestrzenią przestrzeni $B([a,b])$? Inaczej: Czy $R([a,b])$ jest przestrzenią Banacha z normą (1.5)?

Zadania

1. Pokazać, że jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ściśle rosnąca na przedziale $[a,b]$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła na zbiorze $f([a,b])$.

2. Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}([\alpha,\beta])$ jest przedziałem dla każdego przedziału $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$.
Czy twierdzenie to jest prawdziwe w przypadku, gdy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$?

3. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej X z metryką d. Zbiór A nazywać będziemy *zbiorem izolowanym*, jeżeli każdy punkt zbioru A jest punktem izolowanym tego zbioru.
Pokazać, że zbiór wszystkich punktów izolowanych zbioru A jest zbiorem izolowanym.

4. Niech X będzie przestrzenią metryczną ośrodkową. Pokazać, że każdy podzbiór A przestrzeni X, który jest zbiorem izolowanym, jest co najwyżej przeliczalny.

5. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że jeżeli istnieje zbiór A ($A \subset X$), który jest nieprzeliczalny oraz jeżeli istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in A$, $x \neq y$ zachodzi, że $d(x, y) \geqslant \varepsilon$, to przestrzeń X nie jest ośrodkowa.

6. Pokazać, że przestrzeń l^∞ złożona ze wszystkich ciągów rzeczywistych ograniczonych, z normą supremum, nie jest ośrodkowa.

7. Udowodnić Twierdzenie 1.11 (Sierpińskiego).

8. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie zadaną funkcją ograniczoną. Rodzinę $\{I_n\}$ (skończoną lub nie) nie zachodzących na siebie podprzedziałów przedziału $[a, b]$ będziemy nazywać *f-uporządkowaną*, jeżeli $|f(I_n)| \geqslant |f(I_{n+1})|$ dla każdego $n = 1, 2, ...$, przy czym symbol $|A|$ (dla A będącego ograniczonym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$) oznacza długość zbioru A, tzn. $|A| = \sup A - \inf A$. Pokazać, że jeżeli f jest funkcją regularną na przedziale $[a, b]$, to każdy ciąg nie zachodzących na siebie podprzedziałów przedziału $[a, b]$ można f-uporządkować.

Uwaga. Jeżeli U i V są podzbiorami przestrzeni metrycznej X, to mówimy, że zbiory U, V *nie zachodzą na siebie*, jeżeli $\mathring{U} \cap \mathring{V} = \emptyset$.

2. Wariacja funkcji w sensie Jordana

W rozdziale tym omówimy pojęcie wariacji funkcji w sensie klasycznym, które zostało wprowadzone pod koniec XIX wieku przez znakomitego matematyka francuskiego Camile Jordana (por. [1]). Warto w tym miejscu wspomnieć, że C. Jordan odkrył fundamentalną własność funkcji o wariacji ograniczonej na przedziale, mówiącą, że taką funkcję można przedstawić jako różnicę dwóch funkcji rosnących na tym przedziale.

W celu wprowadzenia pojęcia wariacji (wahania) funkcji załóżmy, że f jest funkcją rzeczywistą określoną na przedziale $[a, b]$ (tzn. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$), ograniczoną. Skończony zbiór $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\}$ złożony z puntów przedziału $[a, b]$ takich, że

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$$

będziemy nazywać **podziałem** przedziału $[a, b]$. Występująca w tej definicji liczba m jest dowolną liczbą naturalną, $m \geqslant 2$.
Zbiór wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{P}([a, b])$.
Liczbę określoną równością

$$\mu(P) = \max\{t_j - t_{j-1} : \ j = 1, 2, ..., m\}$$

nazywać będziemy **rozmiarem** podziału P. Jeżeli

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_m - t_{m-1}$$

to podział P nazywamy **równoodległym**.

Definicja 2.1. Dla zadanej dowolnie funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ograniczonej na $[a, b]$ oraz dla zadanego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$, liczbę nieujemną $\mathrm{Var}(f, P)$, określoną wzorem

$$\mathrm{Var}(f, P) = \mathrm{Var}(f, P; [a, b]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \tag{2.1}$$

będziemy nazywać **wariacją (w sensie Jordana) funkcji f na przedziale $[a, b]$ względem podziału P** .
Natomiast wielkość (możliwie nieskończoną) $\mathrm{Var}(f)$, określoną równością

$$\mathrm{Var}(f) = \mathrm{Var}(f; [a, b]) = \sup\{\mathrm{Var}(f, P; [a, b]) : \ P \in \mathcal{P}([a, b])\} \tag{2.2}$$

będziemy nazywać **wariacją całkowitą** (Jordana) funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Zauważmy, że zamiast nazwy *wariacja* używa się też nazwy *wahanie*. Ponadto, w miejsce nazwy *wariacja całkowita* będziemy używać terminu *wariacja*.

Definicja 2.2. Jeżeli $\mathrm{Var}(f;[a,b]) < \infty$, to wtedy mówimy, że f jest funkcją o **wariacji ograniczonej** (lub funkcją o **ograniczonej wariacji Jordana**) na $[a,b]$.

Zbiór wszystkich funkcji o wariacji ograniczonej na przedziale $[a,b]$ oznaczać będziemy symbolem $BV([a,b])$.

Podamy teraz twierdzenie przedstawiające podstawowe własności wariacji funkcji.

Twierdzenie 2.3. *Wielkości określone wzorami (2.1) i (2.2) mają następujące własności:*

(a) Wariacja (2.2) jest podaddytywna ze względu na funkcje, tzn. dla dowolnych funkcji $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$Var(f+g;[a,b]) \leqslant Var(f;[a,b]) + Var(g;[a,b]) \ .$$

(b) Wariacja (2.2) jest dodatnio jednorodna ze względu na funkcje, tzn.

$$Var(\lambda f;[a,b]) = |\lambda|\, Var(f;[a,b])$$

dla $\lambda\in\mathbb{R}$.

(c) Dla dowolnych $x,y\in[a,b]$ takich, że $x<y$ ma miejsce nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant Var(f;[x,y]) \ .$$

(d) Jeżeli $f\in BV([a,b])$, to f jest ograniczona oraz ma miejsce nierówność

$$||f||_\infty \leqslant |f(a)| + Var(f;[a,b]) \ ,$$

gdzie norma $||\cdot||_\infty$ zadana jest wzorem (1.5).

(e) Każda funkcja monotoniczna $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ należy do zbioru $BV([a,b])$ oraz

$$Var(f;[a,b]) = |f(b)-f(a)| \ .$$

(f) Wariacja (2.1) jest monotoniczna ze względu na podziały, tzn. jeżeli $P,Q\in\mathcal{P}([a,b])$ oraz $P\subset Q$ to

$$Var(f,P;[a,b]) \leqslant Var(f,Q;[a,b]) \ .$$

(g) Wariacja (2.2) jest addytywna ze względu na przedziały, tzn.

$$Var(f;[a,b]) = Var(f;[a,c]) + Var(f;[c,b])$$

dla $a < c < b$.

Dowód. Ustalmy dowolnie funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ oraz liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$. Weźmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Wtedy otrzymujemy:

$$\mathrm{Var}(f+g,P) = \sum_{j=1}^{m} |(f+g)(t_j) - (f+g)(t_{j-1})|$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |[f(t_j) - f(t_{j-1})] + [g(t_j) - g(t_{j-1})]|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})|$$

$$= \mathrm{Var}(f,P) + \mathrm{Var}(g,P) \leqslant \mathrm{Var}(f) + \mathrm{Var}(g) \ .$$

Stąd otrzymujemy

$$\mathrm{Var}(f+g) \leqslant \mathrm{Var}(f) + \mathrm{Var}(g) \ ,$$

co dowodzi nierówności z punktu (a).
Dla dowodu (b) napiszmy:

$$\mathrm{Var}(\lambda f,P) = \sum_{j=1}^{m} |(\lambda f)(t_j) - (\lambda f)(t_{j-1})|$$

$$= |\lambda| \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = |\lambda| \mathrm{Var}(f,P) \ .$$

Stąd i z własności kresu górnego otrzymujemy równość z punktu (b).

Żeby udowodnić (c) wystarczy wziąć podział $\{x,y\} \in \mathcal{P}([x,y])$.
Wtedy mamy

$$|f(x) - f(y)| = \mathrm{Var}(f,P;[x,y]) \leqslant \mathrm{Var}(f;[x,y])$$

i otrzymujemy żądaną nierówność.

Dalej, zakładając, że $a < x < b$ i biorąc podział $P_x = \{a,x,b\} \in \mathcal{P}([a,b])$, otrzymujemy

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| = \mathrm{Var}(f,P_x;[a,b]) \ .$$

Stąd dostajemy

$$|f(x)| - |f(a)| \leqslant ||f(x)| - |f(a)|| \leqslant |f(x) - f(a)| \leqslant \mathrm{Var}(f; [a, b])$$

i dalej mamy

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + \mathrm{Var}(f; [a, b]) \tag{2.3}$$

dla dowolnego $x \in (a, b)$. Powyższa nierówność jest również w sposób trywialny prawdziwa dla $x = a$.
Biorąc dalej w nierówności z punktu (c) $x = a$, $y = b$, otrzymujemy:

$$|f(b)| - |f(a)| \leqslant ||f(b)| - |f(a)|| \leqslant |f(b) - f(a)|$$

$$= |f(a) - f(b)| \leqslant \mathrm{Var}(f; [a, b])$$

Stąd

$$|f(b)| \leqslant |f(a)| + \mathrm{Var}(f; [a, b]) \ .$$

Łącząc powyższą nierówność z nierównością (2.3) wnioskujemy o prawdziwości nierówności z (d).

Załóżmy teraz, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną na $[a, b]$. Rozważmy przypadek, gdy f jest rosnąca. Wtedy, dla dowolnie ustalonego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$ otrzymujemy:

$$\mathrm{Var}(f, P; [a, b]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{m} [f(t_j) - f(t_{j-1})]$$

$$= f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)| \ .$$

Stąd wnioskujemy, że

$$\mathrm{Var}(f; [a, b]) = |f(b) - f(a)| \ .$$

Dowód w przypadku, gdy f jest malejąca, przebiega podobnie. Dowodzi to punktu (e).

Dla dowodu (f) załóżmy, że $P = \{t_0, t_1, ...t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$. Niech $Q \in \mathcal{P}([a, b])$ będzie takim podziałem, że $P \subset Q$. Załóżmy najpierw, że podział Q powstaje z podziału P przez dołączenie jednego punktu c. Wtedy istnieje $i \in \{1, 2, ..., m\}$ takie, że $t_{i-1} < c < t_i$. Dalej mamy:

$$\mathrm{Var}(f, P) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{j=i+1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{i-1} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |f(t_i) - f(c)| + |f(c) - f(t_{i-1})|$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \mathrm{Var}(f;Q) \ .$$

Teraz, stosując zasadę indukcji matematycznej łatwo dowodzimy nierówności z punktu (f) dla dowolnego skończonego podziału Q takiego, że $P \subset Q$.

Dla dowodu (g) weźmy dowolny podział $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Jeżeli istnieje takie $j \in \{1, 2, ..., m-1\}$, że $t_j = c$, to wtedy mamy, że $P_1 = \{t_0, t_1, ..., t_j\} \in \mathcal{P}([a,c])$ oraz $Q_1 = \{t_j, t_{j+1}, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([c,b])$. Zatem:

$$\sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{j} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{i=j+1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$\leqslant \mathrm{Var}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}(f;[c,b]) \tag{2.4}$$

Jeżeli natomiast tak nie jest, to istnieje $j \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ takie, że

$$t_j < c < t_{j+1} \ .$$

Wtedy mamy:

$$P \cup \{c\} = \{t_0, t_1, ..., t_{j-1}, t_j, c, t_{j+1}, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b]) \ .$$

Dalej, dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{j} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{i=j+1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{j} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_{j+1} - f(t_j))| + \sum_{i=j+2}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{j} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_{j+1} - f(c))| + |f(c) - f(t_j)| + \sum_{i=j+2}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{j} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(c) - f(t_j)|\right\} + \left\{|f(t_{j+1}) - f(c)| + \sum_{i=j+2}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|\right\}$$

$$\leqslant \mathrm{Var}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}(f;[c,b]) \ . \tag{2.5}$$

Z (2.4) i (2.5) otrzymujemy, że

$$\mathrm{Var}(f;[a,b]) \leqslant \mathrm{Var}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}(f;[c,b]) \ . \tag{2.6}$$

Dla dowodu nierówności przeciwnej do nierówności (2.6) ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$ i dobierzmy takie podziały $P_1 = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\} \in \mathcal{P}([a,c])$ oraz $Q_1 = \{t_n, t_{n+1}, ..., t_{m-1}, t_m\} \in \mathcal{P}([c,b])$, że

$$\mathrm{Var}(f;[a,c]) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \ ,$$

$$\mathrm{Var}(f;[c,b]) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \ .$$

Mamy oczywiście, że $t_0 = a$, $t_n = c$, $t_m = b$.
Zauważmy, że wtedy $P = P_1 \cup Q_1 \in \mathcal{P}([a,b])$ i stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}(f;[c,b]) - \varepsilon &\leqslant \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \mathrm{Var}(f,P;[a,b]) \ . \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności dostajemy:

$$\mathrm{Var}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}(f;[c,b]) - \varepsilon \leqslant \mathrm{Var}(f;[a,b]) \ .$$

Ze względu na dowolność ε otrzymujemy stąd nierówność:

$$\mathrm{Var}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}(f;[c,b]) \leqslant \mathrm{Var}(f;[a,b]) \ . \tag{2.7}$$

Łącząc teraz (2.6) i (2.7) otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Wniosek 2.4. *Funkcja $x \to Var(f;[a,x])$ jest rosnąca na przedziale $[a,b]$.*

Rzeczywiście, biorąc $x, y \in [a,b]$ takie, że $x < y$ i korzystając z Twierdzenia 2.3(g), mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(f;[a,y]) &= \mathrm{Var}(f;[a,x]) + \mathrm{Var}(f;[x,y]) \\ &\geqslant \mathrm{Var}(f;[a,x]) \ . \end{aligned}$$

□

Rozważmy teraz zbiór $BV([a,b])$ złożony ze wszystkich funkcji o wariacji ograniczonej na $[a,b]$. Oczywiście mamy, że

$$BV([a,b]) \subset \mathbb{R}^{[a,b]} \ .$$

Zauważmy, że z naszego twierdzenia wynika, że suma dwóch funkcji o wariacji ograniczonej na $[a,b]$ jest funkcją o wariacji ogarniczonej na $[a,b]$ oraz iloczyn funkcji f o wariacji ograniczonej na $[a,b]$ przez liczbę rzeczywistą jest również funkcją o wariacji ograniczonej na $[a,b]$. Stąd wynika, że zbiór $BV([a,b])$ z działaniami dodawania funkcji i ich mnożenia przez liczby rzeczywiste tworzy podprzestrzeń przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{[a,b]}$ (z tymi samymi działaniami), więc **ma strukturę przestrzeni liniowej**.

Można jednak udowodnić coś więcej, bowiem mamy twierdzenie:

Twierdzenie 2.5. *Niech $f, g \in BV([a,b])$. Wtedy:*

(i) $f \cdot g \in BV([a,b])$

(ii) Jeżeli istnieje stała $\sigma > 0$ taka, że $\forall_{x\in[a,b]} |g(x)| \geqslant \sigma$, to $\frac{f}{g} \in BV([a,b])$.

Dowód (i). Ustalmy dowolny podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Z punktu (d) poprzedniego twierdzenia wynika, że f, g są funkcjami ograniczonymi na $[a,b]$. Zatem istnieją stałe $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ takie, że $|f(x)| \leqslant M_1$, $|g(x)| \leqslant M_2$ dla $x \in [a,b]$.
Mamy dalej:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |(fg)(t_i) - (fg)(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{m} |f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |f(t_i)g(t_i) - f(t_i)g(t_{i-1}) + f(t_i)g(t_{i-1}) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} [|f(t_i)||g(t_i) - g(t_{i-1})| + |g(t_{i-1})||f(t_i) - f(t_{i-1})|] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} |f(t_i)||g(t_i) - g(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{m} |g(t_{i-1})||f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leqslant M_1 \sum_{i=1}^{m} |g(t_i) - g(t_{i-1})| + M_2 \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leqslant M_1 \mathrm{Var}(g; [a,b]) + M_2 \mathrm{Var}(f, [a,b]) \ .
\end{aligned}$$

Stąd

$$\mathrm{Var}(fg;[a,b]) \leqslant M_1\mathrm{Var}(g;[a,b]) + M_2\mathrm{Var}(f;[a,b]) < \infty \ ,$$

co dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Dowód (ii). Zauważmy, że biorąc ten sam podział P mamy:

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{f(t_i)}{g(t_i)} - \frac{f(t_{i-1})}{g(t_{i-1})}\right| = \sum_{i=1}^{m}\frac{|f(t_i)g(t_{i-1}) - g(t_i)f(t_{i-1})|}{|g(t_i)||g(t_{i-1})|}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\frac{|f(t_i)g(t_{i-1}) - f(t_{i-1})g(t_{i-1}) + f(t_{i-1})g(t_{i-1}) - g(t_i)f(t_{i-1})|}{|g(t_{i-1})||g(t_i)|}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{|g(t_{i-1})||f(t_i) - f(t_{i-1})|}{|g(t_{i-1})||g(t_i)|} + \frac{|f(t_{i-1})||g(t_{i-1}) - g(t_i)|}{|g(t_{i-1})||g(t_i)|}\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{|g(t_i)|} + \sum_{i=1}^{m}\frac{|f(t_{i-1})|}{|g(t_{i-1})||g(t_i)|}|g(t_i) - g(t_{i-1})|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}|f(t_i) - f(t_{i-1})| + \frac{M_1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}|g(t_i) - g(t_{i-1})|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma}\mathrm{Var}(f;[a,b]) + \frac{M_1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(g;[a,b]) < \infty \ .$$

Otrzymana nierówność dowodzi (ii). □

Zauważmy, że z punktu (i) powyższego twierdzenia wynika, że przestrzeń $BV([a,b])$ **jest algebrą** ze zwykłymi działaniami na funkcjach.

Przejdziemy teraz do przedstawienia zapowiadanego wcześniej fundamentalnego twierdzenia Jordana charakteryzującego funkcje o wariacji ograniczonej przy pomocy funkcji rosnących. Twierdzenie to nazywa się **twierdzeniam o rozkładzie Jordana**.

Twierdzenie 2.6. *Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ma wariację ograniczoną na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy ta funkcja może być przedstawiona w postaci różnicy dwóch funkcji rosnących na przedziale $[a,b]$ tzn. istnieją funkcje p_f, n_f, które są określone i rosnące na $[a,b]$ i takie, że $f(x) = p_f(x) - n_f(x)$ dla $x \in [a,b]$.*

Dowód. Jeżeli funkcja f daje się przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcji rosnących na przedziale $[a,b]$, to z Twierdzenia 2.3 (a), (b) i (e) wynika, że $f \in BV([a,b])$.

Załóżmy teraz, że f jest funkcją o wariacji ograniczonej na przedziale $[a,b]$.

Rozważmy funkcję $V_f : [a,b] \to \mathbb{R}$ określoną równością

$$V_f(x) = \mathrm{Var}(f;[a,x]) \ .$$

Z Wniosku 2.4 wynika, że funkcja V_f jest rosnąca na przedziale $[a,b]$. Połóżmy $p_f = V_f$ a następnie zdefiniujmy funkcję $n_f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kładąc

$$n_f(x) = p_f(x) - f(x)$$

dla $x \in [a,b]$.

Pokażemy, że funkcja n_f jest rosnąca na przedziale $[a,b]$. W tym celu ustalmy dowolne $x, y \in [a,b]$ takie, że $x < y$. Wtedy mamy

$$n_f(y) - n_f(x) = p_f(y) - f(y) - p_f(x) + f(x)$$

$$= V_f(y) - V_f(x) - f(y) + f(x)$$

$$= \mathrm{Var}(f;[a,y]) - \mathrm{Var}(f;[a,x]) - [f(y) - f(x)] \ .$$

Stąd i z Twierdzenia 2.3(g) dostajemy:

$$n_f(y) - n_f(x) = \mathrm{Var}(f;[x,y]) - [f(y) - f(x)] \ .$$

Z powyższej równości oraz z Twierdzenia 2.3(c) otrzymujemy:

$$n_f(y) - n_f(x) \geqslant \mathrm{Var}(f;[x,y]) - |f(y) - f(x)| \geqslant 0 \ .$$

Oznacza to, że funkcja n_f jest rosnąca na przedziale $[a,b]$ i tym samym kończy dowód naszego twierdzenia. $\square$

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia możemy otrzymać następujący wniosek.

Wniosek 2.7. *Przestrzeń $BV([a,b])$ jest przestrzenią rozpiętą na zbiorze $M_{[a,b]}$ złożonym ze wszystkich funkcji monotonicznych na przedziale $[a,b]$.*

Twierdzenie Jordana pozwala również wyciągnąć inny, bardzo ważny wniosek. W celu sformułowania tego wniosku przypomnijmy najpierw, że każda funkcja monotoniczna na przedziale $[a,b]$ ma tylko nieciągłości I-tego rodzaju (skoki), więc zgodnie z Definicją 1.9 jest funkcją regularną na tym przedziale. Zatem zbiór $M_{[a,b]}$ funkcji monotonicznych na $[a,b]$ jest podzbiorem przestrzeni funkcji regularnych $\mathcal{R}([a,b])$. Stąd i z Wniosku 2.7 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.8. *Przestrzeń $BV([a,b])$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{R}([a,b])$.*

Innymi słowy, każda funkcja o wariacji ograniczonej na przedziale $[a,b]$ jest funkcją regularną na tym przedziale.

Przypomnijmy, że podane ostatnio twierdzenie Jordana mówiło, że jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ to $f\in BV([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy f może być przedstawione w postaci $f(x)=p_f(x)-n_f(x)$, gdzie p_f i n_f są funkcjami rosnącymi na przedziale $[a,b]$.

Dowód twierdzenia polegał na tym, że określaliśmy funkcję $V_f:[a,b]\to\mathbb{R}$ przyjmując, że

$$V_f(x)=\mathrm{Var}(f;[a,x]) \tag{2.8}$$

dla dowolnego $x\in[a,b]$. Następnie przyjmowaliśmy, że

$$p_f(x)=V_f(x) \tag{2.9}$$

oraz

$$n_f(x)=V_f(x)-f(x) \tag{2.10}$$

dla $x\in[a,b]$. O funkcjach p_f oraz n_f pokazywaliśmy, że są to funkcje rosnące na przedziale $[a,b]$. Oczywiście mamy, że

$$f(x)=p_f(x)-n_f(x)$$

dla $x\in[a,b]$.

Okazuje się, że rozkład funkcji f o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a,b]$ na różnicę dwóch funkcji rosnących na tym przedziale (tzn. rozkład Jordana) nie jest jednoznaczny. Co więcej, można ten rozkład zrobić tak, że jest on z pewnego punktu widzenia najlepszy. Rzeczywiście, załóżmy, że $f\in BV([a,b])$. Określmy funkcje $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ przyjmując:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[V_f(x)+f(x)] \tag{2.11}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[V_f(x)-f(x)]\ . \tag{2.12}$$

Wtedy zachodzi twierdzenie.

Twierdzenie 2.9. *Funkcje φ i ψ są funkcjami rosnącymi na przedziale $[a,b]$ oraz*

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(y)$$

dla $x \in [a,b]$. Ponadto, funkcje φ i ψ są możliwie najsłabiej rosnące na przedziale $[a,b]$ w tym sensie, że jeżeli f jest przedstawiona w postaci

$$f(x) = \overline{\varphi}(x) - \overline{\psi}(x) \tag{2.13}$$

dla $x \in [a,b]$, gdzie $\overline{\varphi}$ i $\overline{\psi}$ są rosnące na $[a,b]$, to

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant \overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)\ , \tag{2.14}$$

$$\psi(y) - \psi(x) \leqslant \overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x) \tag{2.15}$$

dla wszystkich $x, y \in [a,b]$, $x < y$.

Oprócz tego, ma miejsce równość

$$Var(f;[x,y]) = Var(\varphi;[x,y]) + Var(\psi;[x,y])$$

dla dowolnych $x, y \in [a,b]$, $x < y$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $x, y \in [a,b]$, $x < y$. Korzystając z nierówności udowodnionej w Twierdzeniu 2.3(c), otrzymujemy

$$f(x) - f(y) \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{Var}(f;[x,y])\ . \tag{2.16}$$

Mamy teraz:

$$\begin{aligned}
\varphi(y) - \varphi(x) &= \frac{1}{2}[V_f(y) + f(y)] - \frac{1}{2}[V_f(x) + f(x)] \\
&= \frac{1}{2}[V_f(y) - V_f(x) + f(y) - f(x)] \\
&= \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(f;[a,y]) - \mathrm{Var}(f;[a,x]) + f(y) - f(x)] \\
&= \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(f;[a,x] \cup [x,y]) - \mathrm{Var}(f;[a,x]) + f(y) - f(x)] \\
&= \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(f;[a,x]) + \mathrm{Var}(f;[x,y]) - \mathrm{Var}(f;[a,x]) + f(y) - f(x)] \\
&= \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(f;[x,y]) + f(y) - f(x)] \geqslant 0\ ,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z (2.16).

Podobnie, otrzymujemy teraz z (2.12):

$$\psi(y) - \psi(x) = \frac{1}{2}[V_f(y) - f(y)] - \frac{1}{2}[V_f(x) - f(x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(f;[x,y]) - (f(y) - f(x))] \geqslant 0 \ , \tag{2.18}$$

przy czym ta nierówność również wynika z (2.16).

Nierówności (2.17) i (2.18) dowodzą, że funkcje φ, ψ są rosnące na przedziale $[x, y]$. Oczywiście, jak łatwo sprowadzić bezpośrednim rachunkiem, zachodzi równość $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ dla $x \in [a, b]$, co dowodzi pierwszej części naszego twierdzenia.

Dla dowodu drugiej części załóżmy, że ma miejsce przedstawienie (2.13), gdzie $\overline{\varphi}, \overline{\psi} : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami rosnącymi na $[a, b]$. Dalej, weźmy dowolne $x, y \in [a, b]$, $x < y$. Wtedy mamy, na podstawie (2.17), (2.13), (2.11) oraz własności wahania funkcji:

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(f;[x,y]) + f(y) - f(x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(f;[x,y]) + [\overline{\varphi}(y) - \overline{\psi}(y)] - [\overline{\varphi}(x) - \overline{\psi}(x)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(\overline{\varphi} - \overline{\psi};[x,y]) + [\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] - [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)]\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(\overline{\varphi};[x,y]) + \mathrm{Var}(\overline{\psi};[x,y]) + [\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] - [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] + [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)] + [\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] - [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)]\right\}$$

$$= \overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x) \ .$$

Dowodzi to nierówności (2.14).

Dowód nierówności (2.15) prowadzimy podobnie. Mamy, z (2.18), (2.13), (2.12) oraz z własności wahania funkcji:

$$\psi(y) - \psi(x) = \frac{1}{2}\{\mathrm{Var}(f;[x,y]) - (f(y) - f(x))\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(f;[x,y]) - \left\{[\overline{\varphi}(y) - \overline{\psi}(y)] - [\overline{\varphi}(x) - \overline{\psi}(x)]\right\}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(\overline{\varphi} - \overline{\psi};[x,y]) - \left\{[\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] - [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)]\right\}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(\overline{\varphi} - \overline{\psi};[x,y]) - [\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] + [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)]\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(\overline{\varphi};[x,y]) + \mathrm{Var}(\overline{\psi};[x,y]) - [\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] + [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] + [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)] - [\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] + [\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x)]\right\}$$

$$= \overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(x) \ .$$

Zauważmy dalej, że z (2.17) i (2.18) otrzymujemy dla $x, y \in [a,b]$ takich, że $x < y$:

$$(\varphi(y) - \varphi(x)) + (\psi(y) - \psi(x)) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Var}(f;[x,y]) + [f(y) - f(x)] + \mathrm{Var}(f;[x,y]) - [f(y) - f(x)]\right\}$$

$$= \mathrm{Var}(f;[x,y]) \ .$$

Stąd i z własności wahania, dostajemy ostatecznie

$$\mathrm{Var}(f;[x,y]) = \mathrm{Var}(\varphi;[x,y]) + \mathrm{Var}(\psi;[x,y])$$

i koniec dowodu. $\square$

Jako bezpośrednią konsekwencję twierdzenia Jordana otrzymujemy następujący wniosek, który sformułujemy tutaj jako twierdzenie.

Twierdzenie 2.10. *Jeżeli $f \in BV([a,b])$, to f ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości.*

Funkcja $V_f(x) = \mathrm{Var}(f;[a,x])$ używana w dowodach ostatnich twierdzeń, ma wiele interesujących własności i jest ściśle związana z funkcją f. Prześledzimy to w naszych dalszych rozważaniach i twierdzeniach.
Rozpoczniemy od następującego prostego twierdzenia, zwanego **zasadą majoranty**.

Twierdzenie 2.11. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funkcja f ma wahanie ograniczone na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, która jest rosnąca na przedziale $[a,b]$ i taka, że*

$$|f(y) - f(x)| \leqslant g(y) - g(x) \tag{2.19}$$

dla dowolnych $x, y \in [a,b]$, $x < y$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że istnieje funkcja g o żądanych własnościach. Wtedy, z nierówności (2.19), dla dowolnego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ mamy:

$$\mathrm{Var}(f,P;[a,b]) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{m} [g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

$$= g(b) - g(a) \ .$$

Stąd, wobec dowolności podziału P, otrzymujemy:

$$\mathrm{Var}(f;[a,b]) \leqslant g(b) - g(a) < \infty \ .$$

Na odwrót, jeżeli $f \in BV([a,b])$ to biorąc funkcję $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, określoną wzorem

$$g(x) = V_f(x) = \mathrm{Var}(f;[a,x])$$

dla $x \in [a,b]$ (funkcja ta jest rosnąca na podstawie twierdzenia opisującego własności wahania), na postawie nierówności (2.16) dostajemy dla $x, y \in [a,b]$, $x < y$:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \mathrm{Var}(f;[x,y]) = \mathrm{Var}(f;[a,y]) - \mathrm{Var}(f;[a,x])$$

$$= V_f(y) - V_f(x) = g(y) - g(x) \ ,$$

co kończy dowód. □

Okazuje się, że między funkcją $f \in BV([a,b])$ a jej funkcją wahania $V_f(x) = \mathrm{Var}(f;[a,x])$ istnieje bardzo ścisła współzależność. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.12. *Niech $f \in BV([a,b])$ i niech x_0 będzie dowolnie ustalonym punktem przedziału $[a,b]$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja V_f jest ciągła w punkcie x_0*

Dowód. Załóżmy najpierw, że f jest ciągła w punkcie x_0, przy czym $x_0 < b$. Weźmy $x \in (x_0, b)$ tzn. $x_0 < x < b$. Rozważmy różnicę $V_f(x) - V_f(x_0)$. Korzystając z definicji kresu górnego dobierzmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([x_0, b])$ taki, że

$$\mathrm{Var}(f;[x_0,b]) - \varepsilon < \mathrm{Var}(f,P;[x_0,b])$$

lub, równoważnie

$$\mathrm{Var}(f;[x_0,b]) < \mathrm{Var}(f,P;[x_0,b]) + \varepsilon \ . \tag{2.20}$$

Następnie, wykorzystując fakt, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, dobierzmy δ takie, że $0 < \delta < t_1 - x_0$ oraz $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dla $0 < x - x_0 < \delta$. Wtedy, dla takich właśnie x (tzn. $x \in (x_0, x_0 + \delta)$) mamy:

$$V_f(x) - V_f(x_0) = \mathrm{Var}(f;[a,x]) - \mathrm{Var}(f;[a,x_0]) = \mathrm{Var}(f;[x_0,x])$$

$$= \mathrm{Var}(f;[x_0,b]) - \mathrm{Var}(f;[x,b]) < \mathrm{Var}(f,P;[x_0,b]) + \varepsilon - \mathrm{Var}(f;[x,b]) \ .$$

Ale $\delta < t_1 - x_0$, $x - x_0 < \delta \Rightarrow x - x_0 < t_1 - x_0 \Rightarrow x < t_1$ więc $x_0 < x < t_1$. Stąd i z powyższego oszacowania dostajemy:

$$V_f(x) - V_f(x_0) < |f(x) - f(x_0)| + |f(t_1) - f(x)| + \sum_{j=2}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

$$- \ \mathrm{Var}(f;[x,b]) + \varepsilon \leqslant |f(x) - f(x_0)| + \varepsilon < 2\varepsilon \ ,$$

ponieważ $\mathrm{Var}(f;[x,b]) \geqslant |f(t_1) - f(x)| + \sum\limits_{j=2}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$.
Z ostatniej nierówności wynika, że funkcja V_f jest ciągła prawostronnie w punkcie x_0. W podobny sposób pokazujemy, że V_f jest ciągła z lewej strony w punkcie x_0, co ostatecznie dowodzi ciągłości funkcji V_f w punkcie x_0 (włączając przypadki $x_0 = a$ i $x_0 = b$).

Na odwrót, załóżmy, że V_f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a,b]$. Wtedy, dla $x \geqslant x_0$ mamy:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \mathrm{Var}(f;[x_0,x]) = \mathrm{Var}(f;[a,x]) -$$

$$- \ \mathrm{Var}(f;[a,x_0]) = V_f(x) - V_f(x_0) \to 0$$

przy $x \to x_0+$.
Natomiast, dla $x \leqslant x_0$ otrzymujemy

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \mathrm{Var}(f;[x,x_0]) = \mathrm{Var}(f;[a,x_0]) -$$

$$- \ \mathrm{Var}(f;[a,x]) = V_f(x_0) - V_f(x) \to 0$$

przy $x \to x_0-$.
W konkluzji dostajemy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i koniec dowodu. □

Zauważmy teraz, że rozkład Jordana funkcji $f \in BV([a,b])$ na różnicę dwóch funkcji rosnących na przedziale $[a,b]$ pozwala nie tylko uzyskać informacje o tym, że funkcja f ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości. Tych konsekwencji jest więcej. Np. z analizy matematycznej wiadomo, że funkcja monotoniczna na przedziale $[a,b]$ jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna. Stąd i z twierdzenia Jordana wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.13. *Jeżeli $f \in BV([a,b])$ to f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$.*

Mimo, że funkcja o wariacji ograniczonej na przedziale ma na tym przedziale co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości, to implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Mało tego, istnieją funkcje ciągłe, które mają wariację nieograniczoną.

Przykład 2.14. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \in (0,1] \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Oczywiście $f(0) = 0$ oraz $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, a więc funkcja f jest ciągła w punkcie $x = 0$. Ciągłość funkcji f na przedziale $(0,1]$ jest konsekwencją twierdzeń o ciągłości funkcji złożonej i o ciągłości iloczynu funkcji ciągłych. Zatem f jest ciągła na przedziale $[0,1]$. Pokażemy, że $f \notin BV([0,1])$.

W tym celu weźmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([0,1])$ taki, że

$$t_0 = 0,\ t_k = \frac{2}{[2m - (2k-1)]\pi} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, ..., m-1 \quad \text{oraz} \quad t_m = 1 \ .$$

I tak, mamy na przykład:

$$t_1 = \frac{2}{(2m-1)\pi} \ , \quad t_2 = \frac{2}{(2m-3)\pi} \ , \quad t_3 = \frac{2}{(2m-5)\pi} \ , \ ...$$

$$... \ , t_{m-2} = \frac{2}{\{2m - [2(m-2) - 1]\}\pi} = \frac{2}{[2m - (2m-5)]\pi} = \frac{2}{5\pi} \ ,$$

$$t_{m-1} = \frac{2}{\{2m - [2(m-1) - 1]\}\pi} = \frac{2}{[2m - (2m-3)]\pi} = \frac{2}{3\pi} \ .$$

Ustalmy teraz $j, 2 \leqslant j \leqslant m-1$. Wtedy kolejne punkty t_{j-1}, t_j naszego podziału są takie, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_j} - \frac{1}{t_{j-1}} &= \frac{[2m - (2j-1)]\pi - \{2m - [2(j-1) - 1]\}\pi}{2} \\ &= \frac{(2m - 2j + 1)\pi - (2m - 2j + 3)\pi}{2} = \frac{-2\pi}{2} = -\pi \end{aligned}$$

więc funkcja $x \to \sin \frac{1}{x}$ przyjmuje w tych punktach na przemian wartości 1 i -1. Rzeczywiście mamy:

$$\sin \frac{1}{t_j} = \sin \left[(2m - 2j + 1)\frac{\pi}{2} \right] = \sin (2p+1)\frac{\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + p\pi \right) \ .$$

Dalej mamy:

$$|f(t_j) - f(t_{j-1})| = \left| t_j \sin \frac{1}{t_j} - t_{j-1} \sin \frac{1}{t_{j-1}} \right| = |t_j + t_{j-1}|$$

$$\geqslant 2t_{j-1} \ .$$

Zatem:

$$\operatorname{Var}(f, P; [0,1]) \geqslant \sum_{j=2}^{m-1} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

$$\geqslant 2(t_1 + t_2 + ... + t_{m-2}) = 2\left(\frac{2}{5\pi} + \frac{2}{7\pi} + \cdots + \frac{2}{(2m-1)\pi}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2m-1}\right)$$

Z faktu, że szereg harmoniczny jest rozbieżny wynika, że

$$\operatorname{Var}(f; [0,1]) = \infty \ .$$

Następne twierdzenie, które podamy, mówić będzie o możliwości przechodzenia do granicy przy zbieżności punktowej ciągu funkcji o wariacji ograniczonej.

Twierdzenie 2.15. *Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym takim, że $f_n \in BV([a,b])$ dla każdego $n = 1, 2, ...$. O ciągu tym zakładamy, że jest punktowo zbieżny do pewnej funkcji f, tzn. istnieje funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla dowolnego $x \in [a,b]$. Wtedy*

$$\operatorname{Var}(f; [a,b]) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \operatorname{Var}(f_n; [a,b]) \ . \tag{2.21}$$

W szczególności, jeżeli (f_n) jest ciągiem funkcji rzeczywistych, określonych na przedziale $[a,b]$, o wariacjach wspólnie ograniczonych na $[a,b]$, zbieżnym punktowo do pewnej funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, to $f \in BV([a,b])$.

Dowód. Jeżeli wielkość po prawej stronie nierówności (2.21) jest równa $+\infty$, to oczywiście nierówność (2.21) jest spełniona. Przypuśćmy więc, że tak nie jest, tzn. istnieje stała $L > 0$ taka, że

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{Var}(f_n; [a,b]) = L \ .$$

Ustalmy dalej dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$.

Wtedy, biorąc pod uwagę definicję granicy dolnej ciągu liczbowego wnioskujemy, że istnieje podciąg (f_{k_n}) ciągu (f_n) taki, że

$$\operatorname{Var}(f_{k_n}; [a,b]) \leqslant L + \varepsilon$$

dla $n = 1, 2, ...$.

Ustalmy teraz dowolny podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Wtedy dostajemy:

$$\mathrm{Var}(f_{k_n}, P; [a,b]) = \sum_{j=1}^{m} |f_{k_n}(t_j) - f_{k_n}(t_{j-1})| \leqslant L + \varepsilon \ .$$

Przechodząc teraz z $n \to \infty$ otrzymujemy stąd

$$\mathrm{Var}(f, P; [a,b]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leqslant L + \varepsilon \ .$$

Ponieważ ta nierówność zachodzi dla każdego podziału $P \in \mathcal{P}([a,b])$, więc stąd wynika, że

$$\mathrm{Var}(f; [a,b]) \leqslant L + \varepsilon \ .$$

Stąd, ze względu na dowolność liczby ε otrzymujemy, że

$$\mathrm{Var}(f; [a,b]) \leqslant L \ ,$$

co dowodzi nierówności (2.21).
Druga część twierdzenia jest bezpośrednią konsekwencją pierwszej części. □

Jak już wcześniej zauważyliśmy, zbiór $BV([a,b])$ tworzy przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.
Teraz, dla dowolnie zadanej funkcji $f \in BV([a,b])$ połóżmy:

$$||f||_{BV} = |f(a)| + \mathrm{Var}(f; [a,b]) \ . \tag{2.22}$$

Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.16. *Wielkość $||\cdot||_{BV}$ zadana wzorem (2.22) jest normą w przestrzeni $BV([a,b])$. Norma ta jest zupełna, tzn. przestrzeń $BV([a,b])$ z tą normą jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Z definicji wielkości $||\cdot||_{BV}$ widzimy, że w przestrzeni $BV([a,b])$ przyjmuje ona wartości rzeczywiste nieujemne.
Warunek $||f||_{BV} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ na $[a,b]$ jest łatwy do sprawdzenia i jest on konsekwencją faktu, że jeżeli $\mathrm{Var}(f; [a,b]) = 0$ to funkcja f jest stała na przedziale $[a,b]$.
Warunek $||\lambda f||_{BV} = |\lambda| ||f||_{BV}$ wynika z dodatniej jednorodności wariacji funkcji. Natomiast warunek trójkąta dla $||\cdot||_{BV}$ jest prostą kosekwencją podaddytywności wariacji ze względu na funkcje.

Zatem wielkość $||\cdot||_{BV}$ spełnia warunki normy w przestrzeni liniowej $BV([a,b])$. Pokażemy teraz, że ta norma jest zupełna.

W tym celu załóżmy, że (f_n) jest ciągiem funkcyjnym z $BV([a,b])$ spełniającym warunek Cauchy'ego względem normy $||\cdot||_{BV}$. Oznacza to, że dla ustalonego dowolnie $\varepsilon > 0$ znajdziemy liczbę naturalną n_0 taką, że dla $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geqslant n_0$ mamy, że

$$||f_n - f_m||_{BV} = |f_n(a) - f_m(a)| + \mathrm{Var}(f_n - f_m; [a,b]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{2.23}$$

Z powyższej nierówności wynika w szczególności, że

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.24}$$

dla $n,m \geqslant n_0$, a to oznacza, że ciąg liczbowy $(f_n(a))$ jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem ten ciąg jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczymy przez $f(a)$.
Biorąc teraz $m \to \infty$ w nierówności (2.24) i korzystając z ciągłości bezwzględnej wartości, otrzymujemy

$$|f_n(a) - f(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.25}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$.

Dalej, z nierówności (2.23), dla $n,m \in \mathbb{N}$, $n,m \geqslant n_0$ otrzymujemy:

$$\mathrm{Var}(f_n - f_m;\ [a,b]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{2.26}$$

Ustalmy dalej dowolnie $x \in (a,b]$. Wtedy, z (2.26) i z własności wariacji wnioskujemy, że

$$\mathrm{Var}(f_n - f_m;\ [a,x]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Zatem, biorąc podział $\{a,x\}$ przedziału $[a,x]$, z powyższej nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &|f_n(x) - f_m(x)| - |f_n(a) - f_m(a)| \\ &\leqslant |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(a) - f_m(a)]| \\ &= \mathrm{Var}(f_n - f_m,\ \{a,x\};\ [a,x]) \\ &\leqslant \mathrm{Var}(f_n - f_m;\ [a,x]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ . \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy, że

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(a) - f_m(a)| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon \tag{2.27}$$

dla $x \in [a,b]$.
Nierówność (2.27) implikuje, że dla każdego $x \in [a,b]$ ciąg liczbowy $(f_n(x))$ jest ciągiem Cauchy'ego, więc ten ciąg jest zbieżny do liczby, którą oznaczymy przez $f(x)$.
Mamy zatem określoną funkcję $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ taką, że ciąg (f_n) jest punktowo zbieżny do tej funkcji.
Pokażemy teraz, że ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f w sensie normy (2.22).

W tym celu odnotujmy najpierw, że ciąg (f_n) jest ograniczony w normie $||\cdot||_{BV}$, jako ciąg Cauchy'ego tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$||f_n||_{BV} \leqslant M$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd w szczególności otrzymujemy, że

$$\operatorname{Var}(f_n;\ [a,b]) \leqslant M$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem wariacje $\operatorname{Var}(f_n;\ [a,b])$ są wspólnie ograniczone, co na podstawie Twierdzenia 2.15 pozwala wywnioskować, że $f \in BV([a,b])$.
Dalej zauważmy, że z (2.26), po przejściu z $m \to \infty$, na podstawie Twierdzenia 2.15 otrzymujemy

$$\operatorname{Var}(f_n - f;\ [a,b]) \leqslant \liminf_{m\to\infty} \operatorname{Var}(f_n - f_m;\ [a,b]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n \geqslant n_0$. Stąd i z (2.25) wynika, że

$$||f_n - f||_{BV} \leqslant \varepsilon$$

a to oznacza, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny w przestrzeni $BV([a,b])$ do funkcji f i kończy dowód. $\square$

Jak to wcześniej zauważyliśmy omawiając własności funkcji o wariacji ograniczonej, iloczyn dwóch funkcji o wariacji ograniczonej jest funkcją o wariacji ograniczonej.
Oznacza to, że przestrzeń liniowa (Banacha) $BV([a,b])$ z działaniem mnożenia funkcji ma algebraiczną strukturę algebry Banacha (tzn. określone jest mnożenie jako operacja wewnętrzna, asocjatywna i mająca dodatkowo jedynkę - funkcja tożsamościowo równa 1 na przedziale $[a,b]$ - oraz operacja ta jest przemienna). Zatem $BV([a,b])$ (z operacjami dodawania funkcji, ich mnożenia przez liczby rzeczywiste oraz z operacją mnożenia) jest przemienną algebrą z jednością.

Ogólnie przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 2.17. Niech V będzie algebrą nad ciałem K ($K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$), która jest dodatkowo przestrzenią Banacha z normą $||\cdot||$ określoną na V. Algebrę V będziemy nazywać **algebrą Banacha**, jeżeli istnieje $c > 0$ takie, że

$$||x \cdot y|| \leqslant c||x|| \cdot ||y|| \tag{2.28}$$

dla dowolnych $x, y \in V$.
Jeżeli w nierówności (2.28) można przyjąć $c = 1$, tzn. jeżeli dla dowolnych $x, y \in V$ zachodzi nierówność:

$$||xy|| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \ ,$$

to algebrę V nazywamy **znormalizowaną algebrą Banacha**.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.18. *Algebra $BV([a, b])$ z normą określoną wzorem (2.22), tzn. z normą określoną dla dowolnej funkcji $f \in BV([a, b])$ wzorem*

$$||f||_{BV} = |f(a)| + Var(f; [a, b])$$

jest algebrą Banacha. Ponadto, dla dowolnych funkcji $f, g \in BV([a, b])$ ma miejsce nierówność:

$$Var(fg; [a, b]) \leqslant ||f||_\infty Var(g; [a, b]) + ||g||_\infty Var(f; [a, b]) \ , \tag{2.29}$$

gdzie symbol $||\cdot||_\infty$ oznacza normę w przestrzeni $B([a, b])$, określoną wzorem:

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a, b]\} \ .$$

Dowód. W dowodzie będziemy korzystać z faktu, że każda funkcja o wariacji ograniczonej na przedziale $[a, b]$ jest ograniczona na tym przedziale.
Weźmy dalej dowolnie ustalone funkcje $f, g \in BV([a, b])$. Następnie ustalmy dowolny podział $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m = b$, tzn. podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$. Wtedy mamy:

$$\mathrm{Var}(fg, P; [a, b]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j)g(t_j) - f(t_{j-1})g(t_{j-1})|$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j)g(t_j) - f(t_j)g(t_{j-1}) + f(t_j)g(t_{j-1}) - f(t_{j-1})g(t_{j-1})|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \{|f(t_j)||g(t_j) - g(t_{j-1})| + |g(t_{j-1})||f(t_j) - f(t_{j-1})|\}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \{||f||_\infty |g(t_j) - g(t_{j-1})| + ||g||_\infty |f(t_j) - f(t_{j-1})|\}$$

$$= ||f||_\infty \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})| + ||g||_\infty \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

$$= ||f||_\infty \mathrm{Var}(g, P; [a,b]) + ||g||_\infty \mathrm{Var}(f, P; [a,b])$$

$$\leqslant ||f||_\infty \mathrm{Var}(g; [a,b]) + ||g||_\infty \mathrm{Var}(f; [a,b]) \ .$$

Stąd otrzymujemy nierówność (2.29), co kończy dowód. □

W dalszym ciągu, dla dowolnej funkcji $f \in BV([a,b])$ połóżmy

$$||f||_{BV}^1 = ||f||_\infty + \mathrm{Var}(f; [a,b]) \ . \tag{2.30}$$

Wtedy, możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.19. *Wielkość $||\cdot||_{BV}^1$ określona wzorem (2.30) jest normą w przestrzeni $BV([a,b])$ równoważną normie $||\cdot||_{BV}$.*

Dowód. Fakt, że $||\cdot||_{BV}^1$ spełnia warunki normy w przestrzeni $BV([a,b])$ dowodzi się łatwo wykorzystując własności wariacji funkcji wykazane w Twierdzeniu 2.3 oraz to, że $||\cdot||_\infty$ jest normą w przestrzeni $B([a,b])$.
Ustalmy teraz dowolną funkcję $f \in BV([a,b])$. Wtedy dostajemy

$$||f||_{BV} = |f(a)| + \mathrm{Var}(f; [a,b]) \leqslant ||f||_\infty + \mathrm{Var}(f; [a,b])$$

$$= ||f||_{BV}^1 \ . \tag{2.31}$$

Z drugiej strony, korzystając z nierówności udowodnionej w Twierdzeniu 2.3(d), otrzymujemy

$$||f||_{BV}^1 = ||f||_\infty + \mathrm{Var}(f; [a,b])$$

$$\leqslant |f(a)| + \mathrm{Var}(f; [a,b]) + \mathrm{Var}(f; [a,b])$$

$$= |f(a)| + 2\mathrm{Var}(f; [a,b]) \leqslant 2|f(a)| + 2\mathrm{Var}(f; [a,b])$$

$$= 2||f||_{BV} \ . \tag{2.32}$$

Ostatecznie, z (2.31) i (2.32) wnioskujemy, że mają miejsce nierówności

$$\frac{1}{2}||f||_{BV}^{1} \leqslant ||f||_{BV} \leqslant ||f||_{BV}^{1} \ . \tag{2.33}$$

Powyższa nierówność oznacza, że norma $||\cdot||_{BV}^{1}$ jest równoważna normie $||\cdot||_{BV}$ i kończy dowód. □

Wniosek 2.20. *Przestrzeń $BV([a,b])$ z normą $||\cdot||_{BV}$ tworzy algebrę Banacha taką, że*

$$||fg||_{BV} \leqslant 4||f||_{BV}||g||_{BV} \tag{2.34}$$

dla dowolnych $f,g \in BV([a,b])$. Ponadto, $BV([a,b])$ z normą $||\cdot||_{BV}^{1}$ tworzy znormalizowaną algebrę Banacha.

Dowód. Zauważmy, że z faktu orzekającego, że $BV([a,b])$ jest przestrzenią Banacha z normą $||\cdot||_{BV}$ (por. Twierdzenie 2.16) oraz z Twierdzenia 2.19 wynika, że norma $||\cdot||_{BV}^{1}$ jest zupełna w przestrzeni $BV([a,b])$. Dalej, dla $f,g \in BV([a,b])$, korzystając z (2.29), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} ||fg||_{BV}^{1} &= ||fg||_{\infty} + \mathrm{Var}(fg;[a,b]) \\ &\leqslant ||f||_{\infty}\cdot||g||_{\infty} + ||f||_{\infty}\mathrm{Var}(g;[a,b]) + ||g||_{\infty}\mathrm{Var}(f;[a,b]) \\ &\leqslant ||f||_{\infty}\cdot||g||_{\infty} + ||f||_{\infty}\mathrm{Var}(g;[a,b]) + ||g||_{\infty}\mathrm{Var}(f;[a,b]) \\ &\quad + \mathrm{Var}(f;[a,b])\cdot\mathrm{Var}(g;[a,b]) \\ &= (||f||_{\infty} + \mathrm{Var}(f;[a,b]))(||g||_{\infty} + \mathrm{Var}(g;[a,b])) \\ &= ||f||_{BV}^{1}\cdot||g||_{BV}^{1} \ . \end{aligned}$$

Powyższa nierówność oznacza, że $BV([a,b])$ z normą $||\cdot||_{BV}^{1}$ jest znormalizowaną algebrą Banacha.

Teraz, wykorzystując wyżej ustalony fakt i (2.33), dla dowolnych $f,g \in BV([a,b])$ dostajemy:

$$\begin{aligned} ||fg||_{BV} &\leqslant ||fg||_{BV}^{1} \leqslant ||f||_{BV}^{1}\cdot||g||_{BV}^{1} \\ &\leqslant 2||f||_{BV}\cdot 2||g||_{BV} = 4||f||_{BV}||g||_{BV} \ , \end{aligned}$$

co dowodzi nierówności (2.34) i kończy dowód. □

Podamy teraz kilka uwag związanych z omawianą wyżej tematyką funkcji o wariacji ograniczonej.

Uwaga 2.21. Zauważmy, że każda funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, spełniająca warunek Lipschitza na przedziale $[a, b]$ (ze stałą L), jest funkcją o wariacji ograniczonej na $[a, b]$ oraz

$$\mathrm{Var}(f; [a, b]) \leqslant L(b - a) .$$

Pominiemy proste uzasadnienie tego faktu.

Uwaga 2.22. Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **spełnia warunek Höldera** na przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieją stałe $L > 0$ oraz $\alpha \in (0, 1]$ takie, że

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^\alpha$$

dla dowolnych $x, y \in [a, b]$.
Okazuje się, że funkcja spełniająca na przedziale $[a, b]$ warunek Höldera nie musi mieć wariacji ograniczonej na $[a, b]$. Przykład takiej funkcji można skonstruować w następujący sposób (por. [1]):
Ustalmy liczbę $\alpha \in (0, 1)$. Następnie, zdefiniujmy stałą γ i ciąg (t_n) w przedziale $[0, 1]$ kładąc:

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/\alpha}} ,$$

$$t_n = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1/\alpha}}$$

dla $n = 1, 2, ...$
Zauważmy, że $t_1 = 1$ oraz, że ciąg (t_n) jest malejący a także, że $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. Rozważmy dalej funkcję $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ dla } \ x = 0 \\ \frac{(-1)^n}{n} \ \text{ dla } \ x = t_n \\ \text{liniowa i łącząca kolejne punkty } \left(t_n, \frac{(-1)^n}{n}\right) \text{ odpowiednio} . \end{cases}$$

Biorąc teraz podział $P_n = \{0, t_n, t_{n-1}, ..., t_2, t_1\} \in \mathcal{P}([0, 1])$ łatwo zauważyć, że

$$\mathrm{Var}(f, P_n; [0, 1]) \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty$$

a więc $f \notin BV([0, 1])$.

Teraz, niech $0 < x < y \leqslant 1$. Dobierzmy $m, n \in \mathbb{N}$ tak, żeby $t_{n+1} \leqslant x \leqslant t_n$ oraz $t_{m+1} \leqslant y \leqslant t_m$. Wtedy mamy trzy przypadki.

(1) $n = m$.

W tym przypadku mamy, że

$$0 < y - x \leqslant t_n - t_{n+1} = \frac{1}{\gamma n^{1/\alpha}} \ ,$$

skąd

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = (y-x)\frac{|f(t_n) - f(t_{n+1})|}{t_n - t_{n+1}} &\leqslant (y-x)\frac{2\gamma n^{1/\alpha}}{n} \\ &= 2\gamma|x-y|^\alpha \cdot |x-y|^{1-\alpha} \cdot n^{(1-\alpha)/\alpha} \\ &\leqslant 2\gamma|x-y|^\alpha |t_n - t_{n+1}|^{1-\alpha} \cdot n^{(1-\alpha)/\alpha} \\ &\leqslant 2\gamma|x-y|^\alpha \cdot \frac{n^{(1-\alpha)/\alpha}}{\gamma^{1-\alpha} \cdot n^{(1-\alpha)/\alpha}} = 2\gamma^\alpha |x-y|^\alpha \ . \end{aligned}$$

(2) $n = m + 1$.

Wtedy $t_n = t_{m+1}$ i stąd dostajemy:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(t_n)| + |f(t_{m+1}) - f(y)|$$

$$\leqslant 2\gamma^\alpha(|x - t_n|^\alpha + |t_{m+1} - y|^\alpha) \leqslant 4\gamma^\alpha|x-y|^\alpha$$

Zauważmy, że w dowodzie powyższej nierówności skorzystaliśmy z oczywistej nierówności

$$x^\alpha + y^\alpha \leqslant (x+y)^\alpha + (x+y)^\alpha = 2(x+y)^\alpha \ .$$

(3) $n \geqslant m + 2$.

Wtedy możemy znaleźć punkty $s \in [t_n, t_{n-1}]$, $t \in [t_{m+2}, t_{m+1}]$ takie, że $f(s) = f(t) = 0$. Stąd mamy:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(s)| + |f(s) - f(t)| + |f(t) - f(y)|$$

$$\leqslant 4\gamma^\alpha(|x-s|^\alpha + |t-y|^\alpha) \leqslant 8\gamma^\alpha|x-y|^\alpha \ .$$

Podsumowując widzimy, że w każdym z trzech możliwych rozważanych przypadków funkcja f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α i ze stałą $L = 8\gamma^\alpha$ dla $0 < x < y \leqslant 1$. "Dołączenie" sytuacji $x = 0$ nie przedstawia trudności (ciągłość funkcji f w punkcie $x = 0$).

Uwaga 2.23. Bardzo ważną podklasę klasy funkcji o wariacji ograniczonej na ustalonym przedziale $[a, b]$ stanowi klasa tzw. funkcji bezwzględnie ciągłych. Przedstawimy kilka faktów dotyczących tej właśnie klasy.

Zaczniemy od wprowadzenia pewnych oznaczeń. Mianowicie, symbolem $\sum([a, b])$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich skończonych zbiorów $S = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]\}$ złożoną z parami niezachodzących na siebie podprzedziałów przedziału $[a, b]$. Podobnie, symbolem $\sum_\infty([a, b])$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich nieskończonych i przeliczalnych zbiorów $S_\infty = \{[a_n, b_n] : \ n \in \mathbb{N}\}$ złożonych z niezachodzących na siebie podprzedziałów przedziału $[a, b]$.

Definicja 2.24. Funkcję $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będziemy nazywać **bezwzględnie ciągłą**, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego zbioru $S = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]\} \in \sum([a, b])$ takiego, że

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant \delta \tag{2.35}$$

spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \ . \tag{2.36}$$

Zauważmy, że równoważnie możemy zażądać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego nieskończonego zbioru $S_\infty = \{[a_n, b_n] : \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a, b])$ takiego, że

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leqslant \delta \tag{2.37}$$

mamy, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \ . \tag{2.38}$$

Rzeczywiście, zauważmy najpierw, że definicja, w której występuje $\sum_\infty([a, b])$ implikuje Definicję 2.24. W tym celu ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ zgodnie z (2.37)-(2.38). Dalej, weźmy dowolny zbiór

$$S = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]\} \in \sum([a, b])$$

taki, że spełniona jest nierówność (2.35). Zastąpmy przedział $[a_n, b_n]$ zbiorem

$$S_\infty = \{[\alpha_i, \alpha_{i+1}] : \ i \in \mathbb{N}, i \geqslant n\} \in \textstyle\sum_\infty([a_n, b_n]) \ ,$$

gdzie $\alpha_n = a_n$, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + b_n)$, $\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + b_n), ...$.

Wtedy

$$b_n - a_n = \sum_{i=n}^{\infty}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \ ,$$

a zatem zbiór

$$\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_{n-1}, b_{n-1}], [\alpha_n, \alpha_{n+1}], [\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}], ...\}$$

tworzy nieskończony ciąg niezachodzących na siebie przedziałów takich, że

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n-1}(b_i - a_i) + \sum_{i=n}^{\infty}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \leqslant \delta \ .$$

Stąd, zgodnie z założeniem, dostajemy

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}|f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{i=n}^{\infty}|f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| \leqslant \varepsilon \ .$$

Dowodzi to bezwzględnej ciągłości funkcji w sensie Definicji 2.24.

Na odwrót, załóżmy, że funkcja f jest bezwzględnie ciągła w sensie Definicji 2.24. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ zgodnie z tą definicją. Weźmy dowolny nieskończony ciąg $\{[a_i, b_i] : \ i \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a, b])$ taki, że spełniona jest nierówność (2.37). Wtedy, dla każdego dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że zbiór $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]\} \in \sum([a, b])$ oraz $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant \delta$. Wtedy, zgodnie z Definicją 2.24 spełniona jest nierówność (2.36). Stąd wynika, że

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

a to oznacza, że funkcja f jest bezwzględnie ciągła na przedziale $[a, b]$ w sensie sformułowanej wyżej definicji równoważnej Definicji 2.24.

Zbiór wszystkich funkcji bezwzględnie ciągłych na przedziale $[a, b]$ będziemy dalej oznaczać symbolem $AC([a, b])$.

Zauważmy dalej, że bezwzględna ciągłość implikuje ciągłość (jednostajną) na przedziale $[a, b]$. Ponadto, prawdziwe jest również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.25. *Każda funkcja bezwzględnie ciągła na przedziale $[a, b]$ jest na tym przedziale funkcją o wariacji ograniczonej.*

Dowód. Niech f będzie funkcją bezwzględnie ciągłą na $[a, b]$. Wtedy np. do liczby $\varepsilon = 1$ możemy dobrać taką liczbę $\delta > 0$, że nierówność (2.35) implikuje, że

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| \leqslant 1 \ . \tag{2.39}$$

Rozważmy dalej równoodległy podział $P_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ przedziału $[a, b]$, gdzie n jest tak duże, że $n\delta \geqslant b - a$. Wtedy, zgodnie z doborem δ, na każdym przedziale $[t_{i-1}, t_i]$ takim, że $t_{i-1}, t_i \in P_n$, po uwzględnieniu (2.39) mamy

$$\mathrm{Var}(f; [t_{i-1}, t_i]) \leqslant 1 \ .$$

Stąd, biorac pod uwagę addytywność wariacji ze względu na przedziały, otrzymujemy

$$\mathrm{Var}(f; [a, b]) \leqslant n < \infty \ ,$$

co kończy dowód. □

Zwróćmy uwagę na to, że z powyższego twierdzenia wynika, że $AC([a, b]) \subset BV([a, b])$. Nietrudno również pokazać, że zbiór $AC([a, b])$ tworzy podprzestrzeń przestrzeni liniowej $BV([a, b])$ a więc ma strukturę przetrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Przestrzeń $AC([a, b])$ odgrywa bardzo ważną rolę w teorii funkcji rzeczywistych (w teorii miary i całki) oraz w analizie funkcjonalnej.

Uwaga 2.26. Zwrócimy teraz uwagę na dość istotne twierdzenie dotyczące funkcji o wariacji ograniczonej. Twierdzenie to nazywa się **twierdzeniem Helly'ego** lub **zasadą wyboru** Helly'ego. Dotyczy ono zbieżności punktowej podciągów wybieranych z ciągu funkcji o wariacji ograniczonej.

Twierdzenie 2.27. *Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym złożonym z funkcji o wariacji ograniczonej na przedziale $[a, b]$. Zakładamy, że ciąg ten jest ograniczony względem normy $||\cdot||_{BV}$ zdefiniowanej wzorem (2.22). Wtedy z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny punktowo na przedziale $[a, b]$ do funkcji $f \in BV([a, b])$.*

Dowód. Korzystając z twierdzenia Jordana (Twierdzenie 2.6) możemy sprowadzić rozważany problem do funkcji monotonicznych w następujący sposób. Połóżmy

$$g_n(x) = V_{f_n}(x) = \mathrm{Var}(f_n; [a, x]) \ ,$$

$$h_n(x) = g_n(x) - f_n(x)$$

dla $x \in [a, b]$. Wiemy, że g_n i h_n są rosnące i ograniczone oraz $f_n = g_n - h_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wspólna ograniczoność wariacji funkcji g_n oraz h_n wynika z Twierdzenia 2.9. Pokażemy, że ciągi (g_n) i (h_n) zawierają podciągi, które są zbieżne punktowo na przedziale $[a, b]$ do pewnych funkcji rosnących g i h, odpowiednio. Wtedy funkcja $f = g - h$ będzie miała żądane własności.

Zatem, niech $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą oraz niech $|g_n(x)| \leqslant c < \infty$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [a, b]$.
Załóżmy, że $E = \{r_1, r_2, ...\}$ jest pewnym przeliczalnym zbiorem gęstym w przedziale $[a, b]$ takim, że $r_1 = a$ oraz $r_2 = b$. Ponieważ $|g_n(r_1)| \leqslant c$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa możemy znaleźć podciąg $(g_n^{(1)})$ ciągu (g_n), który jest zbieżny w punkcie r_1. Podobnie, ponieważ $|g_n^{(1)}(r_2)| \leqslant c$ dla $n \in \mathbb{N}$, to możemy znaleźć podciąg $(g_n^{(2)})$ ciągu $(g_n^{(1)})$, który jest zbieżny w punktach r_1 i r_2. Mając skonstruowany ciąg $(g_n^{(k-1)})$ w taki właśnie sposób, możemy wybrać podciąg $(g_n^{(k)})$ ciągu $(g_n^{(k-1)})$, który jest zbieżny w punktach $r_1, r_2, ..., r_k$. Zatem, ciąg przekątniowy (g_{n_k}) określony wzorem $g_{n_k}(x) = g_k^{(k)}(x)$ jest zbieżny w każdym punkcie $r_j \in E$.
Teraz, określmy funkcję $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kładąc

$$g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(x) & \text{jeżeli} \quad x = r_j \in E \\ \sup\limits_{r_j < x} \lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(r_j) & \text{dla} \quad x \ \text{ pozostałych} \end{cases},$$

gdzie supremum bierzemy po wszystkich elementach $r_j \in E$ takich, że $r_j < x$. Z konstrukcji wynika, że funkcja g jest ograniczona i rosnąca oraz $g_{n_k}(x) \to g(x)$ punktowo na zbiorze E, przy $k \to \infty$.

Ponieważ zbiór D punktów nieciągłości funkcji g jest co najwyżej przeliczalny, więc zbiór $D \cup E$ jest przeliczalny. Ustalmy $x \in [a, b] \setminus (D \cup E)$. Dla zadanego $\varepsilon > 0$ możemy dobrać r_i, r_j takie, że

$$r_i < x < r_j \tag{2.40}$$

oraz

$$g(r_j) - g(r_i) < \varepsilon \ , \tag{2.41}$$

ponieważ funkcja g jest ciągła w punkcie x. Ponadto, korzystając z punktowej zbieżności ciągu (g_{n_k}) do g na zbiorze E, znajdziemy $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|g_{n_k}(r_i) - g(r_i)| < \varepsilon \ , \tag{2.42}$$

$$|g_{n_k}(r_j) - g(r_j)| < \varepsilon \tag{2.43}$$

dla $k \geqslant k_0$. Dalej, łącząc (2.40), (2.41), (2.42) i (2.43) otrzymujemy

$$\begin{aligned} g(x) - \varepsilon < g(r_i) &\leqslant g_{n_k}(r_i) + \varepsilon \leqslant g_{n_k}(x) + \varepsilon \\ &\leqslant g_{n_k}(r_j) + \varepsilon < g(r_j) + 2\varepsilon \leqslant g(x) + 2\varepsilon \ , \end{aligned} \tag{2.44}$$

ponieważ $r_i < x < r_j$ i funkcje występujące w (2.44) są rosnące. Pokazuje to, że $g_{n_k}(x) \to g(x)$ punktowo na zbiorze $[a, b] \setminus D$ gdy $k \to \infty$. Jednakże zbiór D jest co najwyżej przeliczalny i ciąg (g_{n_k}) jest wspólnie ograniczony. Możemy więc użyć jeszcze raz procedury przekątniowej opisanej wyżej aby znaleźć jeszcze jeden podciąg, który jest zbieżny punktowo na całym przedziale $[a, b]$. Funkcja graniczna g otrzymana tą drogą jest, jak można pokazać, funkcją rosnącą. Koniec dowodu. $\square$

Uwaga 2.28. Twierdzenie Jordana (Twierdzenie 2.6) jest twierdzeniem charakteryzującym funkcje o wariacji ograniczonej poprzez różnicę dwóch funkcji rosnących, a więc twierdzenie to ma charakter liniowy. Przedstawimy teraz inne twierdzenie, zwane **twierdzeniem Federera**, które charakteryzuje funkcje o wariacji ograniczonej poprzez złożenie funkcji rosnącej i funkcji spełniającej warunek Lipschitza. Jest to więc twierdzenie w pewnym sensie analogiczne do twierdzenia Sierpińskiego (Twierdzenie 1.11).

Twierdzenie 2.29. *Funkcja f należy do przestrzeni $BV([a, b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci złożenia $f = g \circ \tau$, gdzie $\tau : [a, b] \to [c, d]$ jest rosnąca oraz funkcja $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ spełnia na przedziale $[c, d]$ warunek Lipschitza ze stałą $L = 1$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $f = g \circ \tau$, gdzie g oraz τ mają wspomniane własności. Weźmy dowolny podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$. Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(f, P) = \sum_{j=1}^{m} |g(\tau(t_j)) - g(\tau(t_{j-1}))| &\leqslant \sum_{j=1}^{m} |\tau(t_j) - \tau(t_{j-1})| \\ &= |\tau(b) - \tau(a)| \ . \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $f \in BV([a, b])$.
Na odwrót załóżmy, że $f \in BV([a, b])$. Niech $\tau = V_f$ będzie rosnącą funkcją wahania funkcji f. Wtedy funkcja ta odwzorowuje przedział $[a, b]$ w pewien przedział $[c, d]$, gdzie $c = 0$ oraz $d = \mathrm{Var}(f; [a, b])$. Oczywiście, funkcja τ nie musi być odwzorowaniem na. Jeżeli teraz określimy funkcję g na zbiorze wartości $\tau([a, b]) \subset [c, d]$ przez położenie

$$g(\tau(x)) = f(x)$$

to otrzymamy rozkład $f = g \circ \tau$ zgodnie z konstrukcją.
Mamy
$$|g(\tau(s)) - g(\tau(t))| = |f(s) - f(t)| \leqslant \mathrm{Var}(f;[s,t])$$
$$= |\tau(s) - \tau(t)|$$
dla $a \leqslant s < t \leqslant b$. Oznacza to, że funkcja g spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1 na zbiorze $\tau([a,b]) \subset [c,d]$.

W celu przedłużenia funkcji g ze zbioru $\tau([a,b])$ na cały przedział $[c,d]$ do funkcji $\overline{g}$ spełniającej warunek Lipschitza ze stałą 1 na przedziale $[c,d]$ (a nawet na całej prostej $\mathbb{R}$) użyjemy metody "uwypuklania". Mianowicie, dla ustalonego dowolnie $\lambda \in [0,1]$ definiujemy funkcją $\overline{g}$, kładąc
$$\overline{g}(y) = \begin{cases} (1-\lambda)g(x-) + \lambda g(x) & \text{jeżeli} \quad y = (1-\lambda)\tau(x-) + \lambda\tau(x) \\ (1-\lambda)g(x) + \lambda g(x+) & \text{jeżeli} \quad y = (1-\lambda)\tau(x) + \lambda\tau(x+)\ . \end{cases}$$
Można łatwo sprawdzić, że funkcja $\overline{g}$ spełnia na przedziale $[c,d]$ warunek Lipschitza ze stałą 1. Koniec dowodu. $\square$

Zadania

1. Znaleźć funkcje $f, g \in BV([0,1])$ takie, że $g(x) > 0$ dla $x \in [0,1]$ oraz $f/g \notin BV([0,1])$.

2. Pokazać, że jeżeli $f \in BV([a,b])$ to $|f| \in BV([a,b])$ oraz $\mathrm{Var}(|f|;[a,b]) \leqslant \mathrm{Var}(f;[a,b])$.

3. Znaleźć funkcję $f \notin BV([0,1])$ tak, że $|f| \in BV([0,1])$.

4. Załóżmy, że $f \in C([a,b])$ i $|f| \in BV([a,b])$. Pokazać, że $f \in BV([a,b])$.

5. Niech $f \in BV([a,b])$. Pokazać, że
$$V_f(x_0+) - V_f(x_0) = |f(x_0+) - f(x_0)|$$
dla każdego $x_0 \in [a,b)$, oraz
$$V_f(x_0) - V_f(x_0-) = |f(x_0) - f(x_0-)|$$
dla każdego $x_0 \in (a,b]$.

6. Udowodnić następujące twierdzenie, zwane **zasadą lokalizacji**: Jeżeli $f \notin BV([a,b])$, to istnieje punkt $x_0 \in [a,b]$ taki, że: 1^o Jeżeli $x_0 \in (a,b)$ to $f \notin BV([c,d])$ dla każdego przedziału $[c,d] \subset [a,b]$ takiego, że $c < x_0 < d$. 2^o Jeżeli $x_0 = a$ to $f \notin BV([a,c])$ dla każdego przedziału $[a,c] \subset [a,b]$ takiego, że $a < c$. 3^o Jeżeli $x_0 = b$ to $f \notin BV([c,b])$ dla każdego przedziału $[c,b] \subset [a,b]$ takiego, że $c < b$.

7. Dla ustalonych liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rozważmy funkcję $f_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbb{R}$ określoną w następujący sposób:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Pokazać, że dla $\beta > 0$ funkcja $f_{\alpha,\beta}$ należy do $BV([0,1])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha + \beta \geqslant 0$.

8. Pokazać, że funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{x}$ jest bezwzględnie ciągła na $[0,1]$.

3. Funkcje o wariacji ograniczonej w sensie Wienera

C. Jordan wprowadził pojęcie funkcji o wariacji ograniczonej w sensie klasycznym pod koniec XIX w. W roku 1924 amerykański matematyk N. Wiener wprowadził uogólnienie tego pojęcia, które teraz przytoczymy.

Definicja 3.1. Niech $p \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą oraz niech dana będzie funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ograniczona na $[a, b]$.
Dla dowolnie zadanego podziału $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$ zdefiniujmy liczbę nieujemną $\mathrm{Var}_p^W(f, P)$ przyjmując

$$\mathrm{Var}_p^W(f, P) = \mathrm{Var}_p^W(f, P; [a, b]) = \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \ . \tag{3.1}$$

Liczbę tę nazywać będziemy **wariacją (wahaniem) Wienera funkcji $\boldsymbol{f}$** na przedziale $[a, b]$ względem podziału P.
Natomiast wielkość

$$\mathrm{Var}_p^W(f) = \mathrm{Var}_p^W(f; [a, b]) = \sup\{\mathrm{Var}_p^W(f, P; [a, b]) : \ P \in \mathcal{P}([a, b])\} \tag{3.2}$$

nazywa się (całkowitą) **wariacją Wienera funkcji $\boldsymbol{f}$ na przedziale $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$** .

Jeżeli $\mathrm{Var}_p^W(f; [a, b]) < \infty$ to mówimy, że funkcja f jest **funkcją o wahaniu skończonym (ograniczonym) w sensie Wienera**.

Zbiór wszystkich funkcji o wahaniu ograniczonym w sensie Wienera oznaczać będziemy symbolem $WBV_p([a, b])$.

Odnotujmy najpierw, że ma miejsce następujące twierdzenie podające własności wariacji w sensie Wienera jak również własności funkcji o wahaniu ograniczonym w sensie Wienera.

Twierdzenie 3.2. *Wielkości $Var_p^W(f, P)$ oraz $Var_p^W(f)$ mają następujące własności:*

(a) Wielkość $(Var_p^W(f; [a, b]))^{1/p} = Var_p^W(f; [a, b])^{1/p}$ jest podaddytywna ze względu na funkcje:

$$Var_p^W(f + g; [a, b])^{1/p} \leqslant Var_p^W(f; [a, b])^{1/p} + Var_p^W(g; [a, b])^{1/p} \ ,$$

dla dowolnych funkcji ograniczonych $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(b) Wielkość $Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}$ *jest dodatnio jednorodna, tzn.*

$$Var_p^W(\lambda f;[a,b])^{1/p} = |\lambda|\, Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}$$

dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Dla dowolnych $t,s \in [a,b]$, $s < t$, *ma miejsce nierówność*

$$|f(s) - f(t)| \leqslant Var_p^W(f;[s,t])^{1/p}\ .$$

(d) Każda funkcja o wahaniu ograniczonym w sensie Wienera na przedziale $[a,b]$ *jest ograniczona, tzn. jeżeli* $f \in WBV_p([a,b])$ *to* $f \in BV([a,b])$ *oraz ma miejsce nierówność:*

$$||f||_\infty \leqslant |f(a)| + Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}\ .$$

(e) Zbiór $WBV_p([a,b])$ *jest przestrzenią liniową nad ciałem* $\mathbb{R}$ *natomiast wielkość* $||\cdot||_{WBV_p}$ *określona wzorem*

$$||f||_{WBV_p} = |f(a)| + Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}$$

jest normą na przestrzeni $WBV_p([a,b])$. *Norma ta jest zupełna.*

Dowód. Przeprowadzimy dowody niektórych, wyżej wymienionych podpunktów. W dowodzie (a) będziemy wykorzystywać tzw. **nierówność Minkowskiego**, która mówi, że dla dowolnych ciągów skończonych $(a_1, a_2, ..., a_m)$, $(b_1, b_2, ..., b_m)$ liczb rzeczywistych, spełniona jest nierówność

$$\left(\sum_{j=1}^m |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p}\ , \tag{3.3}$$

dla dowolnego $p \in [1,\infty)$.

Ustalmy dalej dowolny podział $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Wtedy dostajemy:

$$\mathrm{Var}_p^W(f+g,P;[a,b])^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^m |f(t_j) + g(t_j) - f(t_{j-1}) - g(t_{j-1})|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m |[f(t_j) - f(t_{j-1})] + [g(t_j) - g(t_{j-1})]|^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{m}[|f(t_j)-f(t_{j-1})|+|g(t_j)-g(t_{j-1})|]^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{m}|g(t_j)-g(t_{j-1})|^p\right)^{1/p}$$

$$= \mathrm{Var}_p^W(f;P;[a,b])^{1/p}+\mathrm{Var}_p^W(g,P;[a,b])^{1/p}$$

$$\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])^{1/p}+\mathrm{Var}_p^W(g;[a,b])^{1/p} \ .$$

Stąd, biorac po lewej stronie powyższej nierówności kres górny ze względu na wszystkie podziały należące do $\mathcal{P}([a,b])$ otrzymujemy naszą nierówność z (a).

Dowód (b) jest natychmiastowy i go pominiemy.

Dla dowodu (c) ustalmy dowolnie liczby $t,s\in[a,b]$ takie, że $s<t$. Weźmy podział $P=\{s,t\}\in\mathcal{P}([s,t])$.
Wtedy dostajemy:

$$\mathrm{Var}_p^W(f,P;[s,t])=|f(t)-f(s)|^p\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[s,t]) \ ,$$

skąd

$$|f(t)-f(s)|\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[s,t])^{1/p} \ .$$

Dowodzi to (c).

Dla dowodu (d) weźmy dowolną liczbę $x\in(a,b)$ i rozważmy podział $P_x=\{a,x,b\}$. Wtedy mamy

$$\mathrm{Var}_p^W(f,P_x;[a,b])=|f(b)-f(x)|^p+|f(x)-f(a)|^p$$

$$\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,b]) \ .$$

Stąd dostajemy

$$|f(x)-f(a)|^p\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])$$

więc

$$|f(x)-f(a)|\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])^{1/p} \ . \tag{3.4}$$

Ale

$$|f(x)|-|f(a)|\leqslant ||f(x)|-|f(a)||\leqslant |f(x)-f(a)| \ . \tag{3.5}$$

Z (3.4) i (3.5) otrzymujemy:

$$|f(x)|\leqslant |f(a)|+\mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])^{1/p} \ . \tag{3.6}$$

Powyższa nierówność jest również w sposób trywialny spełniona dla $x = a$.
Następnie, biorąc podział $P = \{a, b\} \in \mathcal{P}([a, b])$, mamy

$$\mathrm{Var}_p^W(f, P; [a, b]) = |f(b) - f(a)|^p \leqslant \mathrm{Var}_p^W(f; [a, b]) \ .$$

Stąd otrzymujemy

$$|f(b)| - |f(a)| \leqslant |f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{Var}_p^W(f; [a, b])^{1/p} \ ,$$

więc

$$|f(b)| \leqslant |f(a)| + \mathrm{Var}_p^W(f; [a, b]) \ .$$

Łącząc powyższą nierówność z nierównością (3.6) otrzymujemy nierówność z (d).

Zauważmy w końcu, że z (a) i (b) wynika, że zbiór $WBV_p([a, b])$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Nietrudno również sprawdzić, że wielkość zdefiniowana w punkcie (e) spełnia warunki normy w przestrzeni liniowej $WBV_p([a, b])$. Można pokazać, że ta norma jest zupełna, co tutaj pominiemy. □

Okazuje się, że pewne własności wariacji funkcji w sensie klasycznym (Jordana) nie przenoszą się na analogiczne własności w sensie Wienera. W niżej podanych przykładach wskażemy na dwie takie własności.

Przykłada 3.3. Rozważmy funkcję $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ określoną w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x = 1 \\ 2 & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2 \ . \end{cases}$$

Następnie weźmy podziały $P = \{0, 2\}$ i $Q = \{0, 1, 2\}$ przedziału $[0, 2]$. Wtedy oczywiście $P \subset Q$ i mamy dla dowolnie ustalonej liczby p, $p > 1$:

$$\mathrm{Var}_p^W(f, P; [0, 2]) = 2^p \ ,$$

$$\mathrm{Var}_p^W(f, Q; [0, 2]) = 2 \ .$$

Stąd widoczne jest, że wariacja w sensie Wienera względem podziału nie jest monotoniczna ze względu na podziały (por. Twierdzenie 2.3(f)).

Przykład 3.4. Weźmy znowu pod uwagę funkcję f zdefiniowaną w poprzednim Przykładzie 2.3 oraz rozważmy wariacje Wienera tej funkcji na przedziałach $[0,1]$, $[1,2]$ i $[0,2]$, dla ustalonego p, $p > 1$. Proste rachunki dają następujące wyniki:

$$\mathrm{Var}_p^W(f;[0,1]) = \mathrm{Var}_p^W(f;[1,2]) = 1 \ ,$$

$$\mathrm{Var}_p^W(f;[0,2]) = 2^p \ .$$

Oznacza to, że wariacja w sensie Wienera nie jest addytywna ze względu na przedziały (por. Twierdzenie 2.3(g)).

Pokażemy później w nieco ogólniejszej sytuacji, że wariacja funkcji w sensie Wienera jest superaddytywna (nadaddytywna) ze względu na przedziały w tym sensie, że dla dowolnie ustalonej liczby $p > 1$ ma miejsce nierówność

$$\mathrm{Var}_p^W(f;[a,b]) \geqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,c]) + \mathrm{Var}_p^W(f;[c,b])$$

dla $a < c < b$.

W celu znalezienia zależności w formie inkluzji między przestrzeniami $WBV_p([a,b])$ i $WBV_q([a,b])$ dla np. $p < q$, przytoczymy kilka faktów pomocniczych dotyczących funkcji wypukłych.
W tym celu załóżmy, że dana jest funkcja $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Rozważmy funkcję $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t} \ .$$

Lemat 3.5. *Jeżeli φ jest wypukła na przedziale $[0,\infty)$ oraz $\varphi(0) \leqslant 0$, to funkcja ψ jest rosnąca na przedziale $(0,\infty)$.*

Dowód. Przypomnijmy, że to, że φ jest wypukła na przedziale $[0,\infty)$ oznacza, że dla dowolnych $s,t \in [0,\infty)$ oraz dla dowolnego $\lambda \in [0,1]$ spełniona jest nierówność:

$$\varphi(\lambda s + (1-\lambda)t) \leqslant \lambda\varphi(s) + (1-\lambda)\varphi(t) \ . \tag{3.7}$$

Weźmy teraz $x_1, x_2 \in (0,\infty)$ takie, że $x_1 < x_2$. Kładąc w nierówności (3.7) $s = x_2$, $t = 0$, $\lambda = x_1/x_2$, otrzymujemy:

$$\varphi(x_1) \leqslant \lambda\varphi(x_2) + (1-\lambda)\varphi(0) \leqslant \lambda\varphi(x_2) = \frac{x_1}{x_2}\varphi(x_2) \ .$$

Stąd mamy:

$$\frac{\varphi(x_1)}{x_1} \leqslant \frac{\varphi(x_2)}{x_2}$$

więc $\psi(x_1) \leqslant \psi(x_2)$ i koniec dowodu. □

Lemat 3.6. *Załóżmy, że funkcja* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *jest wypukła oraz* $\varphi(0) = 0$*. Wtedy* φ *jest rosnąca oraz superaddytywna na przedziale* $[0, \infty)$*, tzn.*

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \leqslant \varphi(\alpha + \beta) \tag{3.8}$$

dla $\alpha, \beta \geqslant 0$*.*

Dowód. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że φ nie jest rosnąca na przedziale $[0, \infty)$, tzn. istnieją $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, $x_1 < x_2$ takie, że $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$.
Jeżeli $x_1 = 0$, to wtedy mielibyśmy, że $\varphi(x_2) < 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem możemy założyć, że $0 < x_1 < x_2$. Stąd

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

i dalej mamy:

$$\frac{\varphi(x_1)}{x_1} \geqslant \frac{\varphi(x_1)}{x_2} > \frac{\varphi(x_2)}{x_2} \tag{3.9}$$

ponieważ z założenia $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$.
Jednakże nierówność (3.9) stoi w sprzeczności z Lematem 3.5. Zatem φ jest rosnąca na przedziale $[0, \infty)$.

Ustalmy dalej dowolne $\alpha, \beta \in [0, \infty)$.
Jeżeli $\alpha = 0$, to wtedy z założenia mamy, że $\varphi(0) = 0$, więc

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(0) + \varphi(\beta) = \varphi(\beta) = \varphi(0 + \beta) = \varphi(\alpha + \beta) \ .$$

Przypadek $\beta = 0$ rozpatrujemy analogicznie.

Załóżmy więc, że $\alpha > 0$ i $\beta > 0$. Wtedy $\alpha < \alpha + \beta$ oraz $\beta < \alpha + \beta$. Z udowodnionej już części twierdzenia mamy:

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \leqslant \frac{\varphi(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} \ , \quad \frac{\varphi(\beta)}{\beta} \leqslant \frac{\varphi(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} \ .$$

Stąd

$$\varphi(\alpha) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \varphi(\alpha + \beta) \ ,$$

$$\varphi(\beta) \leqslant \frac{\beta}{\alpha+\beta}\varphi(\alpha+\beta)\ .$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy:

$$\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) \leqslant \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha+\beta)$$

i koniec dowodu. $\square$

Najprostrzym przykładem funkcji, która spełnia założenia Lematów 3.5 i 3.6 jest funkcja $\varphi(t) = t^p$ gdzie p jest dowolnie ustaloną liczbą, $p \geqslant 1$.
Rzeczywiście, $\varphi'(t) = pt^{p-1}$, $\varphi''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$ dla $p > 1$ (przypadek $p = 1$ jest trywialny). Zatem funkcja ta jest wypukła na przedziale $[0,\infty)$ oraz $\varphi(0) = 0$.
Stąd i z Lematu 3.6 wynika, że dla dowolnych $t, s \geqslant 0$ spełniona jest nierówność

$$t^p + s^p \leqslant (t+s)^p \tag{3.10}$$

dla dowolnego $p \geqslant 1$.

Udowodnimy teraz, zapowiadane wcześniej twierdzenie.

Twierdzenie 3.7. *Niech $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Wtedy ma miejsce nierówność*

$$Var_q^W(f;[a,b])^{1/q} \leqslant Var_p^W(f;[a,b])^{1/p}\ . \tag{3.11}$$

Ponadto mamy, że

$$BV([a,b]) = WBV_1([a,b]) \subset WBV_p([a,b]) \subset WBV_q([a,b]) \subset B([a,b])\ . \tag{3.12}$$

Dowód. Ustalmy dowolny podział $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Wtedy, z nierówności (3.10) dostajemy:

$$\sum_{j=1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|^q = \sum_{j=1}^{m}(|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p)^{q/p}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p\right)^{q/p} \leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])^{q/p}$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$\mathrm{Var}_q^W(f;[a,b]) \leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])^{q/p}$$

która implikuje, że

$$\mathrm{Var}_q^W(f;[a,b])^{1/q} \leqslant \mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])^{1/p} \ ,$$

a więc otrzymujemy nierowność (3.11).
Inkluzje (3.12) wynikają teraz już łatwo z wyżej udowodnionej nierówności (3.11), przy czym ostatania inkluzja po prawej stronie (3.12) jest prostą konsekwencją Twierdzenia 3.2(d). □

Podamy teraz przykład wskazujący na pewne istotne fakty związane zarówno z samym pojęciem wariacji funkcji w sensie Wienera jak również z inkluzjami (3.12).

Przykład 3.8. Ustalmy dowolnie liczbę p, $1 \leqslant p$, i weźmy zbiór $A = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$. Następnie, określmy funkcję $f_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ w następujący sposób.

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^p} & \text{dla} \quad x = \frac{1}{n} \in A \\ 0 & \text{dla} \quad x \text{ pozostałych} \ . \end{cases}$$

Dalej, weźmy podziały $P_1 = \{0, \frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}, ..., \frac{1}{2}, 1\} \in \mathcal{P}([0,1])$ oraz $P_2 = \{0, x_1, x_2, ..., x_m, 1\} \in \mathcal{P}([0,1])$, gdzie $x_1, x_2, ..., x_m$ są dowolnie ustalonymi liczbami takimi, że $0 < x_1 < \frac{1}{m}$ oraz

$$\frac{1}{m-(i-2)} < x_i < \frac{1}{m-(i-1)}$$

dla $i = 2, ..., m$. Następnie, weźmy podział $P = P_1 \cup P_2$, tzn.

$$P = \{0, x_1, \frac{1}{m}, x_2, \frac{1}{m-1}, ..., \frac{1}{2}, x_m, 1\} \ .$$

Oczywiście $P \in \mathcal{P}([0,1])$.

Teraz, dla dowolnie ustalonej liczby q, $q \geqslant 1$, dostajemy:

$$\mathrm{Var}_q^W(f_p, P; [0,1]) = \sum_{i=1}^{m} 2 \cdot \frac{1}{i^{q/p}} = 2\left(1 + \frac{1}{2^{q/p}} + \cdots + \frac{1}{m^{q/p}}\right) \ .$$

Zatem, na podstawie dobrze znanych faktów dotyczących szeregu harmonicznego dowolnego rzędu, mamy:

$$\mathrm{Var}_q^W(f_p; [0,1]) = \infty \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant q \leqslant p \ ,$$

$$\mathrm{Var}_q^W(f_p; [0,1]) < \infty \quad \text{dla} \quad p < q \ .$$

Zatem $f_p \notin WBV_q([0,1])$ dla $q \leqslant p$, natomiast $f_p \in WBV_q([0,1])$ dla $p < q$. W szczególności mamy, że $f_1 \notin WBV_1([0,1])$ ale $f_1 \in WBV_p([0,1])$ dla $p > 1$.

Powyższy przykład pokazuje, że inkluzje (3.12) są ostre dla $1 < p < q$, a z drugiej strony wskazuje na to, że pojęcie wariacji ograniczonej w sensie Wienera jest uogólnieniem klasycznego pojęcia wariacji ograniczonej (w sensie Jordana).

Następujące twierdzenie będzie wskazywać na pewien związek między spełnianiem przez funkcję warunku Höldera a przynależnością tej funkcji do przestrzeni funkcji o wariacji ograniczonej w sensie Wienera.

Twierdzenie 3.9. *Niech $p \geqslant 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spełnia na przedziale $[a,b]$ warunek Höldera z wykładnikiem $1/p$, to $f \in WBV_p([a,b])$.*

Dowód. Załóżmy, że f spełnia warunek Höldera na przedziale $[a,b]$ z wykładnikiem $1/p$ tzn., istnieje stała $L > 0$ taka, że

$$|f(t) - f(s)| \leqslant L|t-s|^{1/p}$$

dla $t, s \in [a,b]$. Ustalmy dowolny podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Wtedy dostajemy

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_p^W(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} (L|t_j - t_{j-1}|^{1/p})^p = L^p \sum_{j=1}^{m} |t_j - t_{j-1}| \\ &= L^p(b-a) \ . \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathrm{Var}_p^W(f; [a,b]) \leqslant L^p(b-a) < \infty \ ,$$

co kończy dowód. $\square$

Zauważmy, że powyższe twierdzenie w szczególnym przypadku orzeka, że funkcja spełniająca na przedziale $[a,b]$ warunek Lipschitza jest funkcją o wariacji ograniczonej (w klasycznym sensie) na przedziale $[a,b]$ (por. Uwagę 2.21).

W dalszym ciągu podamy twierdzenie charakteryzujące funkcje o wariacji ograniczonej w sensie Wienera. Twierdzenie to będzie stanowić szczególny przypadek twierdzenia

Sierpińskiego (Twierdzenie 1.11) a zarazem będzie "równoległe" do twierdzenia Federera (Twierdzenie 2.29).

Twierdzenie 3.10. *Funkcja f należy do przestrzeni $WBV_p([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy może być przedstawiona jako złożenie $f = g \circ \tau$, gdzie $\tau : [a,b] \to [c,d]$ jest rosnąca na przedziale $[a,b]$ natomist funkcja g spełnia na przedziale $[c,d]$ warunek Höldera z wykładnikiem $1/p$ i ze stałą $L = 1$.*

Dowód. Ponieważ dowód tego twierdzenia jest bardzo podobny do dowodu Twierdzenia 2.29 (Federera), podamy tylko jego szkic.
Załóżmy najpierw, że $f = g \circ \tau$, gdzie g i τ mają własności wymienione w naszym twierdzeniu. Niech zadany będzie dowolnie ustalony podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in P([a,b])$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_p^W(f, P; [a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} |g(\tau(t_j)) - g(\tau(t_{j-1}))|^p \\ \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left(|\tau(t_j) - \tau(t_{j-1})|^{1/p}\right)^p &= \sum_{j=1}^{m} |\tau(t_j) - \tau(t_{j-1})| \\ &= |\tau(b) - \tau(a)| \ ,\end{aligned}$$

a to oznacza, że $f \in WBV_p([a,b])$.
Na odwrót załóżmy, że $f \in WBV_p([a,b])$. Niech funkcja $\tau = \tau(t)$ będzie określona na przedziale $[a,b]$ w następujący sposób

$$\tau(t) = V_{f,p}(t) = \mathrm{Var}_p^W(f; [a,t]) \ .$$

Korzystając z własności wariacji w sensie Wienera można pokazać, że funkcja τ jest rosnąca na przedziale $[a,b]$ oraz $c = 0$ i $d = \mathrm{Var}_p^W(f; [a,b])$. Następnie, określmy funkcję g na zbiorze wartości funkcji τ, tzn. na zbiorze $\tau([a,b]) \subset [c,d]$, kładąc $g(\tau(x)) = f(x)$. Wtedy oczywiście mamy, że $f = g \circ \tau$ oraz

$$\begin{aligned}|g(\tau(s)) - g(\tau(t))| = |f(s) - f(t)| &\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f; [s,t])^{1/p} \\ &\leqslant |\tau(s) - \tau(t)|^{1/p}\end{aligned}$$

dla $a \leqslant s < t \leqslant b$. Powyższa nierówność oznacza, że na zbiorze $\tau([a,b])$ funkcja g spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $1/p$ i ze stałą 1.

Teraz, przy użyciu twierdzenia McShane możemy przedłużyć funkcję g ze zbioru $\tau([a,b])$ na cały przedział $[c,d]$ otrzymując funkcje $\overline{g}$ spełniającą na przedziale $[c,d]$ warunek Höldera z wykładnikiem $1/p$ i ze stałą $L=1$ a ponadto taką, że $f=\overline{g}\circ\tau=g\circ\tau$.
Koniec dowodu. $\square$

Uwaga 3.11. Przytoczymy teraz, wraz z dowodem, wspomniane wyżej **twierdzenie McShane'a**. Twierdzenie to odgrywa poważną rolę w teorii funkcji rzeczywistych [1].

Twierdzenie 3.12. *Niech $M\subset\mathbb{R}$ będzie zadanym zbiorem niepustym oraz niech $f: M\to\mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą na zbiorze M warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha\in(0,1]$. Wtedy istnieje funkcja $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca na zbiorze $\mathbb{R}$ warunek Höldera z wykładnikiem α, która jest przedłużeniem funkcji f.*

Dowód. Z założenia, funkcja f spełnia na zbiorze M warunek Höldera z wykładnikiem α i z pewną stałą $L>0$. Oznaczmy symbolem $H_\alpha(f)$ najlepszą z możliwych stałą L, którą można zdefiniować następująco:

$$H_\alpha(f)=\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}:\quad x,y\in M,\quad x\neq y\right\}\ .$$

Następnie, określmy funkcję $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kładąc

$$\hat{f}(x)=\sup\{f(z)-H_\alpha(f)|x-z|^\alpha:\quad z\in M\}\ , \tag{3.13}$$

dla $x\in\mathbb{R}$. Fakt, że funkcja $\hat{f}$ jest poprawnie określona, wynika z niżej podanego ciągu nierówności

$$|f(z)|-|f(x)|\leqslant|f(z)-f(x)|\leqslant H_\alpha(f)|z-x|^\alpha=H_\alpha(f)|x-z|^\alpha\ ,$$

skąd

$$|f(z)|-H_\alpha(f)|x-z|^\alpha\leqslant|f(x)|\ .$$

Teraz, dla dowolnie ustalonych $x,y\in\mathbb{R}$, z określenia (3.13) i z własności kresów funkcji, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x)-\hat{f}(y)| &= \Big|\sup_{z\in M}[f(z)-H_\alpha(f)|x-z|^\alpha]\\ &\quad -\sup[f(z)-H_\alpha(f)|y-z|^\alpha]\Big|\\ &\leqslant \sup_{z\in M}\{H_\alpha(f)||x-z|^\alpha-|y-z|^\alpha|\}\leqslant H_\alpha(f)|x-y|^\alpha\ .\end{aligned}$$

Powyższa nierówność pokazuje, że funkcja $\hat{f}$ spełnia na zbiorze $\mathbb{R}$ warunek Höldera z wykładnikiem α oraz ma miejsce nierówność $H_\alpha(\hat{f}) \leqslant H_\alpha(f)$. Nierówność przeciwna jest prawdziwa w sposób trywialny, bowiem $\hat{f}$ jest przedłużeniem funkcji f.
Koniec dowodu. $\square$

Uwaga 3.13. Zauważmy, że z Twierdzenia 3.10 oraz z twierdzenia Sierpińskiego (Twierdzenie 1.11) wynika, że każda funkcja o wariacji ograniczonej w sensie Wienera na przedziale $[a,b]$ jest funkcją regularną na $[a,b]$. Biorąc pod uwagę oznaczenie $R([a,b])$ wprowadzone dla przestrzeni liniowej funkcji regularnych na przedziale $[a,b]$, fakt ten możemy zapisać w postaci inkluzji

$$WBV_p([a,b]) \subset R([a,b]) \ .$$

Zatem, ciąg inkluzji (3.12) możemy poszerzyć w następujący sposób

$$\begin{aligned} BV([a,b]) &= WBV_1([a,b]) \subset WBV_p([a,b]) \\ &\subset WBV_q([a,b]) \subset R([a,b]) \subset B([a,b]) \end{aligned} \tag{3.14}$$

dla dowolnych p, q takich, że $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$.

Zadania

1. Niech $f \in WBV_p([a,b])$. Pokazać, że funkcja $x \to \mathrm{Var}_p^W(f;[a,x])$ jest rosnąca na przedziale $[a,b]$.

2. Niech α, β będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi i niech $f_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną następująco

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Pokazać, że dla każdego ustalonego $p \geqslant 1$ funkcja $f_{\alpha,\beta}$ należy do przestrzeni $WBV_p([0,1])$ wtedy i tylko wtedy gdy albo $\beta > 0$ i $p\alpha + \beta \geqslant 0$ albo $\beta \leqslant 0$ i $p\alpha + \beta > 0$.

3. Skonstruować funkcję $f \in WBV_p([0,1])$, która nie spełnia warunku Höldera z wykładnikiem $1/p$.

4. Dla ustalonego przedziału $[a,b]$ oznaczmy symbolem $\mathrm{Lip}([a,b])$ zbiór wszystkich funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, które spełniają warunek Lipschitza na przedziale $[a,b]$.

(a) Pokazać, że zbiór $\mathrm{Lip}([a,b])$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$ ze zwykłymi działaniami dodawania funkcji i ich mnożenia przez liczby rzeczywiste.

(b) Pokazać, że wielkość $||\cdot||_{\mathrm{Lip}}$ określona dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{Lip}([a,b])$ wzorem

$$||f||_{\mathrm{Lip}} = |f(a)| + \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : \quad x,y \in [a,b], \quad x \neq y\right\}$$

jest normą w przestrzeni $\mathrm{Lip}([a,b])$.

(c) Pokazać, że przestrzeń $\mathrm{Lip}([a,b])$ z normą określoną w punkcie (b) jest przestrzenią Banacha.

5. Ustalmy liczbę $\alpha \in (0,1]$ i symbolem $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ oznaczmy zbiór wszystkich funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, które spełniają warunek Höldera z wykładnikiem α na przedziale $[a,b]$.

(a) Pokazać, że zbiór $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ z działaniami dodawania funkcji i ich mnożenia przez liczby rzeczywiste.

(b) Pokazać, że wielkość $||\cdot||_{\mathrm{Lip}_\alpha}$ określona dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ wzorem

$$||f||_{\mathrm{Lip}_\alpha} = |f(a)| + \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} : \quad x,y \in [a,b], \quad x \neq y\right\}$$

jest normą w przestrzeni $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$.

(c) Pokazać, że przestrzeń $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ z normą $||\cdot||_{\mathrm{Lip}_\alpha}$ określoną w punkcie (b) jest przestrzenią Banacha.

4. Wariacja funkcji w sensie Wienera-Younga

Rozdział ten poświęcony jest omówieniu kolejnego uogólnienia pojęcia wariacji funkcji. Jest to uogólnienie pojęcia wariacji funkcji w sensie Wienera, które było dyskutowane w poprzednim rozdziale. Oznacza to automatycznie, że jest to również uogólnienie pojęcia wariacji funkcji w klasycznym sensie Jordana, które było przedstawione w Rozdziale 2.

Pojęcie wariacji funkcji w sensie Wienera-Younga zostało wprowadzone w 1937 roku przez L.C. Younga (por. [1]). W celu przedstawienia tego pojęcia omówimy najpierw pojęcie tzw. **funkcji Younga**, które odgrywać będzie podstawową rolę przy definiowaniu zapowiedzianego pojęcia wariacji.

Definicja 4.1. Funkcję $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ będziemy nazywać funkcją Younga, jeżeli jest ona ciągła i wypukła na $\mathbb{R}_+$, $\phi(0) = 0$, $\phi(t) > 0$ dla $t > 0$ oraz $\phi(t) \to \infty$ przy $t \to \infty$.

Uwaga 4.2. Zwróćmy uwagę na to, że przyjęte w powyższej definicji założenia mówiące, że $\phi(t) \to \infty$ przy $t \to \infty$, jest prostą konsekwencją pozostałych założeń.

Typowymi przykładami funkcji Younga są funkcje $\phi(t) = t^p$ dla $1 \leqslant p < \infty$, $\phi(t) = e^t - 1$, $\phi(t) = t \ln(t+1)$, $\phi(t) = (t+1)\ln(t+1)$.

Definicja 4.3. Załóżmy, że dana jest funkcja Younga $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ oraz funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ograniczona. Dla ustalonego dowolnie podziału $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$ nieujemną liczbę rzeczywistą zdefiniowaną wzorem

$$\mathrm{Var}_\phi^W(f, P) = \mathrm{Var}_\phi^W(f, P; [a, b]) = \sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \tag{4.1}$$

będziemy nazywać **wariacją (wahaniem) Wienera-Younga** funkcji f na przedziale $[a, b]$ względem podziału P.
Natomiast wielkość zdefiniowaną następująco

$$\mathrm{Var}_\phi^W(f) = \mathrm{Var}_\phi^W(f; [a, b]) = \sup\left\{\mathrm{Var}_\phi^W(f, P; [a, b]) : \ P \in \mathcal{P}([a, b])\right\} \tag{4.2}$$

będziemy nazywać **(całkowitą) wariacją Wienera-Younga** funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Jeżeli $\mathrm{Var}_\phi^W(f) < \infty$, to mówimy, że f jest funkcją o wariacji Wienera-Younga ograniczonej na przedziale $[a, b]$ (o wariacji ograniczonej w sensie Wienera-Younga na przedziale

$[a,b])$. Zbiór wszystkich funkcji o ograniczonej wariacji Wienera-Younga na przedziale $[a,b]$ oznaczamy symbolem $V_\phi^W([a,b])$.
Zauważmy, że dla $\phi(t) = t^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ zbiór $V_\phi^W([a,b])$ pokrywa się z przestrzenią $WBV_p([a,b])$ omówioną w Rozdziale 3.

Okazuje się, że zbiór $V_\phi^W([a,b])$ nie zawsze jest przestrzenią liniową tzn. nie dla każdej funkcji Younga ϕ jest to przestrzeń liniowa.

Przykład 4.4. Weźmy pod uwagę funkcję $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ określoną następująco

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t = 0 \\ e^{-1/t} & \text{dla} \quad 0 < t < \frac{1}{2} \\ \frac{2t+1}{2e^2} & \text{dla} \quad t \geqslant \frac{1}{2} \ . \end{cases}$$

Łatwo sprwadzić, że ϕ jest funkcją Younga w sensie Definicji 4.1. Pokażemy teraz, że związany z tą funkcją zbiór $V_\phi^W([0,1])$ nie jest przestrzenią liniową.
W tym celu rozważmy funkcję $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ określoną w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\ln n} & \text{dla} \quad x = \frac{1}{n} \ (n = 2, 3, ...) \\ 0 & \text{dla} \quad x \ \text{ pozostałych} \ . \end{cases}$$

Dla obliczenia wariacji $V_\phi^W(f;[0,1])$ weźmy optymalny podział

$$P_n = \{0, s_n, t_n, s_{n-1}, t_{n-1}, ..., s_2, t_2, s_1\}$$

$(n = 1, 2, ...)$, gdzie $s_k = 1/k$ oraz $t_k \in (s_k, s_{k-1})$ i t_k jest dowolnie wybrane. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\phi^W(f;[0,1]) &= 2\sum_{k=2}^{\infty} \phi\left[f\left(\frac{1}{k}\right)\right] = 2\sum_{k=2}^{\infty} e^{-2\ln k} \\ &= 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \ , \end{aligned}$$

skąd wynika, że $f \in V_\phi^W([0,1])$. Z drugiej strony, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\phi^W(2f;[0,1]) &\geqslant 2\sum_{k=2}^{\infty} \phi\left[2f\left(\frac{1}{k}\right)\right] = 2\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\ln k} \\ &= 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \ , \end{aligned}$$

co implikuje, że $2f \notin V_\phi^W([0,1])$. Zatem zbiór $V_\phi^W([0,1])$, dla rozważanej tutaj funkcji Younga, nie jest przestrzenią liniową.

Jak później pokażemy, istnieją funkcje Younga ϕ, dla których zbiór $V_\phi^W([a,b])$ jest przestrzenią liniową. Żeby sformułować warunek, charakteryzyjący takie właśnie funkcje Younga, potrzebne nam będzie pewne pojęcie, które niżej zdefiniujemy.

Definicja 4.5. Będziemy mówić, że funkcja Younga $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunek δ_2 jeżeli istnieją stałe $M > 0$ i $T > 0$ takie, że

$$\phi(2t) \leqslant M\phi(t) \tag{4.3}$$

dla $0 \leqslant t \leqslant T$.

Uwaga 4.6. Sformułowany wyżej warunek δ_2 jest "równoległy" do warunku Δ_2 występującego w teorii przestrzeni Orlicza [4]. Można powiedzieć, że warunek δ_2 jest sformułowany dla małych wartości t podczas gdy warunek Δ_2 funkcjonuje dla dużych wartości zmiennej t.

Uwaga 4.7. Odnotujmy, że $M \geqslant 1$, gdzie M jest stałą występującą w (4.3). Rzeczywiście, ponieważ ϕ jest rosnąca, to dla $0 < t \leqslant T$ mamy

$$\phi(t) \leqslant \phi(2t) \leqslant M\phi(t) \ ,$$

skąd $M \geqslant 1$.

Podamy teraz trzy lematy mające charakter techniczny i dotyczące funkcji Younga spałniających warunek δ_2.

Lemat 4.8. *Funkcja Younga ϕ spełnia warunek δ_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $T' > 0$ istnieje liczba $M(T') \geqslant 1$ taka, że*

$$\phi(2t) \leqslant M(T')\phi(t)$$

dla $0 < t \leqslant T'$.

Dowód. Oczywiście, jeżeli funkcja ϕ spełnia wspomniany w naszym twierdzeniu warunek to spełnia warunek δ_2.
Na odwrót załóżmy, że funkcja ϕ spełnia warunek δ_2. Ustalmy dowolnie liczbę T' taką, że $T' > T/2$, gdzie $T > 0$ jest stałą występującą w sformułowaniu warunku δ_2. Wtedy,

korzystając z założenia, dla $t = T/2$ mamy

$$\phi(T) \leqslant M(T)\phi(T/2) \ ,$$

skąd dla $t \in [T/2, T']$ otrzymujemy

$$\phi(t) \geqslant \frac{\phi(T)}{M(T)\phi(T/2)}\phi(t) = \frac{1}{M(T)} \cdot \frac{\phi(T)}{\phi(2t)} \cdot \frac{\phi(t)}{\phi(T/2)} \cdot \phi(2t) \ . \tag{4.4}$$

Z drugiej strony, biorąc pod uwagę fakt, że ϕ jest rosnąca, z nierówności $T/2 \leqslant t \leqslant T'$ oraz $2t \leqslant 2T'$, dostajemy

$$\frac{\phi(2t)}{\phi(2T')} \leqslant 1 \leqslant \frac{\phi(t)}{\phi(T/2)} \ .$$

Stąd i z (4.4) wnioskujemy, że

$$\phi(t) \geqslant \frac{1}{M(T)} \cdot \frac{\phi(T)}{\phi(2t)} \cdot \frac{\phi(2t)}{\phi(2T')}\phi(2t) = \frac{1}{M(T)}\frac{\phi(T)}{\phi(2T')}\phi(2t) \ . \tag{4.5}$$

Połóżmy teraz

$$M(T') = M(T)\frac{\phi(2T')}{\phi(T)} \ .$$

Biorąc pod uwagę nierówności $\phi(T) \leqslant \phi(2T')$ i $M(T) \geqslant 1$ wnioskujemy, że $M(T') \geqslant 1$. Stąd i z (4.5) widzimy, że ma miejsce teza naszego twierdzenia, co kończy dowód. $\square$

Na podstawie Lematu 4.8 każdej funkcji Younga ϕ spełniającej warunek δ_2 (będziemy wtedy pisać: $\phi \in \delta_2$) możemy przyporządkować funkcję $M : (0, \infty) \to [1, \infty)$ określoną w następujący sposób

$$M(T) = \sup\left\{\frac{\phi(2t)}{\phi(t)} : \ 0 < t \leqslant T\right\} \ .$$

Funkcja ta jest poprawnie określona i rosnąca na przedziale $(0, \infty)$.

Lemat 4.9. *Niech $\phi \in \delta_2$. Wtedy*

$$\phi(s + t) \leqslant M(T)[\phi(s) + \phi(t)]$$

dla $s, t \in (0, T]$.

Dowód. Załóżmy np., że $s < t$. Wtedy mamy

$$\phi(s + t) = \phi\left(2\frac{s + t}{2}\right) \leqslant M(T)\phi\left(\frac{s + t}{2}\right) \leqslant M(T)\phi(t)$$

$$\leqslant M(T)[\phi(s) + \phi(t)] ,$$

gdzie wykorzystaliśmy określenie funkcji $M = M(t)$ oraz fakt, że ϕ jest rosnąca. $\square$

Uwaga 4.10. Stosując zasadę indukcji matematycznej można pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dla dowolnych liczb t_i takich, że $0 < t_i \leqslant T$ $(i = 1, 2, ..., n)$, ma miejsce nierówność

$$\phi(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \leqslant M^{n-1}((n-1)T)[\phi(t_1) + \phi(t_2) + \cdots + \phi(t_n)] .$$

Zauważmy dalej, że z Lematu 4.9 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 4.11. *Niech $\phi \in \delta_2$ i niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi na przedziale $[a, b]$. Wtedy ma miejsce nierówność*

$$Var_\phi^W(f + g) \leqslant M(2K)[Var_\phi^W(f) + Var_\phi^W(g)] ,$$

gdzie $K = \max\{||f||_\infty, ||g||_\infty\}$ oraz symbol $||\cdot||_\infty$ oznacza normę supremum w przestrzeni $B([a, b])$. Ponadto, dla $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy

$$Var_\phi^W(\lambda f) \leqslant (m + 1)M^m(2m||f||_\infty) Var_\phi^W(f) ,$$

gdzie $m = [|\lambda|]$ oznacza część całkowitą liczby $|\lambda|$. Zatem, jeżeli $\phi \in \delta_2$ to $V_\phi^W([a, b])$ jest przestrzenią liniową.

W dalszym ciągu zajmiemy się porównaniem klas funkcji V_ϕ^W i V_ψ^W dla dwóch różnych funkcji Younga ϕ i ψ
W tym celu wprowadzimy najpierw pewne określenie.

Definicja 4.12. Niech dane będą dwa ciągi liczbowe (α_n) i (β_n) o wyrazach dodatnich. Mówimy, że ciąg (β_n) jest **podporządkowany** ciągowi (α_n), jeżeli zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty \beta_n$.

Podany niżej lemat będzie odgrywał istotną rolę w naszych dalszych rozważaniach.

Lemat 4.13. *Niech ϕ i ψ będą dwoma funkcjami Younga. Wtedy, dla każdego nieujemnego ciągu liczbowego (t_n), ciąg $(\psi(t_n))$ jest podporządkowany ciągowi $(\phi(t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $A > 0$ i $B > 0$ takie, że*

$$\psi(t) \leqslant B\phi(t) \tag{4.6}$$

dla $0 < t \leqslant A$.

Dowód. Oczywiście warunek (4.6) implikuje, że ciąg $(\psi(t_n))$ jest podporządkowny ciągowi $(\phi(t_n))$.

Na odwrót przypuśćmy, że warunek (4.6) nie jest spełniony. Wtedy, dla każdych $A > 0$ i $B > 0$ możemy znaleźć liczbę $t \in (0, A]$ taką, że $\psi(t) > B\phi(t)$. W szczególności, weźmy $B = n$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $A > 0$ takie, że $\phi(A) = \frac{1}{n^2}$. Następnie, dobierzmy $t_n \in (0, A]$ tak, żeby $\psi(t_n) > n\phi(t_n)$. Stąd wnioskujemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(t_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \ .$$

Dalej, oznaczmy przez k_n najmniejszą liczbę naturalną taką, że

$$\frac{1}{n^2} \leqslant k_n \phi(t_n) \leqslant \frac{2}{n^2} \ .$$

Dla $m \in \mathbb{N}$ dobierzmy $n = n(m) \in \mathbb{N}$ takie, że

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1} < n \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_m \ .$$

Wtedy, dla ciągu (t_m) mamy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \phi(t_m) < \infty \ , \quad \sum_{m=1}^{\infty} \psi(t_m) = \infty \ ,$$

co przeczy temu, że ciąg $(\psi(t_n))$ jest podporządkowany ciągowi $(\phi(t_n))$.

Koniec dowodu. □

Uwaga 4.14. Założenia tej części Lematu 4.13, które dotyczą liczb A i B, mogą być równoważnie sformułowane w następujący sposób: Dla każdego $A' > 0$ istnieje stała $B(A') > 0$ taka, że dla $0 < t \leqslant A'$ spełniona jest nierówność

$$\psi(t) \leqslant B(A')\phi(t) \ . \tag{4.7}$$

Dowód tego faktu jest podobny do dowodu Lematu 4.8.

W dalszym ciągu podamy kilka ważnych rezultatów dotyczących klas funckji $V_\phi^W([a, b])$.

Twierdzenie 4.15. *Niech ϕ i ψ będą dwiema funkcjami Younga. Wtedy mają miejsce następujące stwierdzenia.*

(a) Inkluzja $V_\phi^W([a,b]) \subset V_\psi^W([a,b])$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (4.6).

(b) Zbiór $V_\phi^W([a,b])$ jest przestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \in \delta_2$.

Dowód. (a) Załóżmy, że spełniony jest warunek (4.6) a więc i (4.7).
Weźmy funkcję $f \in V_\phi^W([a,b])$. Ponieważ f jest ograniczona możemy wziąć w (4.7) $A' = 2||f||_\infty$. Wtedy dostaniemy

$$\psi(|f(s)-f(t)|) \leqslant B(2||f||_\infty)\phi(|f(s)-f(t)|) \ ,$$

dla dowlonych $s,t \in [a,b]$. Stąd otrzymujemy, że

$$\mathrm{Var}_\psi^W(f) \leqslant B(2||f||_\infty)\mathrm{Var}_\phi^W(f) \ ,$$

skąd wynika, że $V_\phi^W([a,b]) \subset V_\psi^W([a,b])$.

Na odwrót przypuśćmy, że (4.6) nie zachodzi tzn. dla każdych $A > 0$ i $B > 0$ istnieje $t \in (0,A]$ takie, że $\psi(t) > B\phi(t)$. Wtedy, podobnie jak w dowodzie Lematu 4.13 możemy znaleźć ciąg (t_m) taki, że

$$\sum_{m=1}^{\infty} \phi(t_m) < \infty \ , \quad \sum_{m=1}^{\infty} \psi(t_m) = \infty \ .$$

Następnie, ustalmy rosnący ciąg liczbowy (y_n) taki, że $y_n \in (a,b)$ i określmy funkcję $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} t_m & \text{dla} \quad x = y_m \\ 0 & \text{dla} \quad x \ \ \text{pozostałych} \ . \end{cases}$$

Twierdzimy, że $f \in V_\phi^W([a,b])$ ale $f \notin V_\psi^W([a,b])$. Rzeczywiście, biorąc dowolny podział $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$, otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(x_j) - f(x_{j-1})|) \leqslant 2\sum_{j=1}^{m} \phi(t_j) + \sum_{j=1}^{m} \phi(|t_j - t_{j-1}|) \leqslant 4\sum_{j=1}^{\infty} \phi(t_j) \ .$$

Stąd $\mathrm{Var}_\phi^W(f) < \infty$ a więc $f \in V_\phi^W([a,b])$.
Z drugiej strony, rozważamy podział $P = \{x_0, x_1, ..., x_{2m}\}$, gdzie

$$x_{2i+1} = y_i \ \ (i = 0,1,2,...,m-2) \ , \quad x_{2i} = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i) \ \ (i = 1,2,...,m-1) \ .$$

Dla tego podziału, otrzymujemy

$$\mathrm{Var}_{\psi}^{W}(f,P)=\sum_{j=1}^{2m}\psi(|f(x_j)-f(x_{j-1})|)\geqslant\sum_{j=0}^{m-2}\psi(t_j)$$

i stąd $\mathrm{Var}_{\psi}^{W}(f)=\infty$ a zatem $f\notin V_{\psi}^{W}([a,b])$.

(b) Fakt, że $V_{\phi}^{W}([a,b])$ jest przestrzenią liniową w przypadku, gdy $\phi\in\delta_2$ był udowodniony we Wniosku 4.11.

Na odwrót, jeżeli $V_{\phi}^{W}([a,b])$ jest przestrzenią liniową, to wtedy stąd, że $f\in V_{\phi}^{W}([a,b])$ wynika, że $2f\in V_{\phi}^{W}([a,b])$. Zatem, kładąc $\psi(t)=\phi(2t)$ wnioskujemy, że $V_{\phi}^{W}([a,b])\subset V_{\psi}^{W}([a,b])$. Jednakże, na podstawie udowodnionej już części (a) mamy, że

$$\phi(2t)=\psi(t)\leqslant B\phi(t)$$

dla $t\in(0,A]$. Stąd $\phi\in\delta_2$ i koniec dowodu. $\square$

Zauważmy, że funkcja Younga $\phi(t)=t^p$ spełnia warunek δ_2 dla $1\leqslant p<\infty$. Rzeczywiście, dla tej funkcji zachodzi nierówność (4.3) dla $M=2^p$ i dla dowolnego $T>0$. Funkcja Younga $\phi(t)=t\ln(t+1)$ również spełnia warunek δ_2 ponieważ na podstawie reguły de l'Hospitala mamy

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\phi(2t)}{\phi(t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{4(t+1)}{2t+1}=4\ .$$

Rozważmy teraz funkcję Younga $\phi(t)=e^t-1$. Dla tej funkcji mamy

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\phi(2t)}{\phi(t)}=\lim_{t\to0^+}2e^t=2\ ,$$

a więc $\phi\in\delta_2$.

Weźmy jeszcze pod uwagę funkcję Younga z Przykładu 4.4. Wtedy mamy

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\phi(2t)}{\phi(t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^{-1/2t}}{e^{-1/t}}=\lim_{t\to0^+}e^{1/2t}=\infty\ ,$$

a więc $\phi\notin\delta_2$. W świetle Twierdzenia 4.15(b) wyjaśnia to, dlaczego zbiór $V_{\phi}^{W}([0,1])$ rozpatrywany w Przykładzie 4.4 nie jest przestrzenią liniową.

Zwróćmy teraz uwagę na to, że zbiór $V_{\phi}^{W}([a,b])$ jest zawsze (dla każdej funkcji Younga) zbiorem symetrycznym, pochłaniającym, zbalansowanym i wypukłym. Stąd, podobnie jak się to robi w przypadku teorii przestrzeni Orlicza, możemy rozważyć zbiór

$$B^{W}(\phi)=\{f\in B([a,b]):\ \mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,b])\leqslant1\}\tag{4.8}$$

i związany z tym zbiorem tzw. funkcjonał Minkowskiego

$$||f||_{WBV_\phi} = |f(a)| + \inf\{\lambda > 0 : \ f/\lambda \in B^W(\phi)\} \ . \tag{4.9}$$

Można pokazać, że funkcjonał Minkowskiego określony przez (4.9) jest normą na zbiorze $WBV_\phi([a,b]) = \mathrm{span} V_\phi^W([a,b])$.
Ponadto, jednostkowa kula domknięta w przestrzeni $WBV_\phi([a,b])$ z normą (4.9) pokrywa się ze zbiorem $B^W(\phi)$ określonym w (4.8).

W podanym w dalszym ciągu twierdzeniu zebrane będą pewne własności wariacji Wienera-Younga (4.1) i (4.2) oraz przestrzeni $WBV_\phi([a,b])$ z normą $||f||_{WBV_\phi}$.

Twierdzenie 4.16. *Wielkości (4.1) i (4.2) mają następujące własności:*

(a) Wariacja Wienera-Younga (4.2) jest superaddytywna ze względu na przedziały tzn.

$$Var_\phi^W(f;[a,b]) \geqslant Var_\phi^W(f;[a,c]) + Var_\phi^W(f;[c,b])$$

dla $a < c < b$.

(b) Jeżeli ϕ spełnia warunek δ_2, to

$$Var_\phi^W(f;[a,b]) \leqslant M(2||f||_\infty)[Var_\phi^W(f;[a,c]) + Var_\phi^W(f;[c,b])] \ ,$$

dla $a < c < b$, gdzie $||\cdot||_\infty$ oznacza normę supremum w przestrezni $B([a,b])$ oraz funkcja M była poprzednio określona:

$$M(T) = \sup\left\{\frac{\phi(2f)}{\phi(t)} : \ 0 \leqslant t \leqslant T\right\} \ .$$

(c) Jeżeli ϕ spełnia warunek δ_2, to

$$Var_\phi^W(f+g;[a,b]) \leqslant M(2K)\left[Var_\phi^W(f;[a,b]) + Var_\phi^W(g;[a,b])\right] \ ,$$

gdzie $K = \max\{||f||_\infty, ||g||_\infty\}$. Oznacza to, że wariacja Wienera-Younga jest częściowo podaddytywna ze względu na funkcje.

(d) Jeżeli $\phi \in \delta_2$ to

$$Var_\phi^W(\lambda f;[a,b]) \leqslant (m+1)M^m(2m||f||_\infty)\,Var_\phi^W(f;[a,b]) \ ,$$

gdzie $m = [|\lambda|]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

(e) Ma miejsce oszacowanie

$$Var_{\phi}^{W}(f;[a,b]) \leqslant \phi(\,Var(f;[a,b]))\ ,$$

gdzie symbol $Var(f;[a,b])$ oznacza wariację w sensie klasycznym funkcji f na przedziale $[a,b]$. W szczególności, jeżeli f jest monotoniczna na przedziale $[a,b]$, to

$$Var_{\phi}^{W}(f;[a,b]) = \phi(|f(b)-f(a)|)\ .$$

(f) Przestrzeń $WBV_{\phi}([a,b])$ jest zupełna ze względu na normę (4.9).

Dowód. Dla dowodu (a) możemy założyć, że obie wariacje $\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,c])$ i $\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[c,b])$ są skończone.
Zadajmy dowolne $\varepsilon > 0$ i dobierzmy podziały

$$\{t_0,t_1,...,t_k\} \in \mathcal{P}([a,c])\ ,\quad \{t_k,t_{k+1},...,t_m\} \in \mathcal{P}([c,b])$$

takie, że $t_k = c$ oraz

$$\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,c]) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \phi(|f(t_j)-f(t_{j-1})|)\ ,$$

$$\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[c,b]) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=k+1}^{m} \phi(|f(t_j)-f(t_{j-1})|)\ .$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{gathered}\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[c,b]) - \varepsilon \\ \leqslant \sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j)-f(t_{j-1})|) \leqslant \mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,b])\ .\end{gathered}$$

Ze względu na dowolność liczby ε dowodzi to punktu (a).

Dla dowodu (b) weźmy dowolny podział $\{t_0,t_1,...,t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Załóżmy najpierw, że pewien punkt tego podziału, powiedzmy t_k, pokrywa się z liczbą c. Wtedy dostajemy:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j)-f(t_{j-1})|) &\leqslant \sum_{j=1}^{k} \phi(|f(t_j)-f(t_{j-1})|) + \sum_{j=k+1}^{m} \phi(|f(t_j)-f(t_{j-1})|) \\ &\leqslant \mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,c]) + \mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[c,b])\ .\end{aligned}$$

Teraz, biorąc pod uwagę fakt, że funkcja M spełnia nierówność $M(T) \geqslant 1$ dla wszystkich $T > 0$ (Lemat 4.8), dedukujemy następujące oszacowanie

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \leqslant M(2||f||_\infty) \left[\mathrm{Var}_\phi^W(f;[a,c]) + \mathrm{Var}_\phi^W(f;[c,b])\right] . \tag{4.10}$$

Załóżmy teraz, że liczba c nie pokrywa się z żadnym punktem podziału $\{t_0, t_1, ..., t_m\}$. Wtedy istnieje $k \in \{1, 2, ..., m\}$ takie, że $t_{k-1} < c < t_k$. Wówczas otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) = \sum_{j=1}^{k-1} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) + \phi(|f(t_k) - f(t_{k-1})|)$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) + \phi(|f(t_k) - f(c)| + |f(c) - f(t_{k-1})|)$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) .$$

Z powyższego oszacowania i z Lematu 4.8, dostajemy

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|)$$

$$+ M(2||f||_\infty)\phi(|f(c) - f(t_{k-1})|) + M(2||f||_\infty)\phi(|f(t_k) - f(c)|)$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) .$$

Stąd

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \leqslant M(2||f||_\infty) \left[\mathrm{Var}_\phi^W(f;[a,c]) + \mathrm{Var}_\phi^W(f;[c,b])\right] . \tag{4.11}$$

Teraz, łącząc (4.10) i (4.11) otrzymujemy nierówność z punktu (b).

Zauważmy dalej, że nierówności z (c) i (d) zostały udowodnione we Wniosku 4.11.

Dla dowodu (e) ustalmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Wtedy mamy

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \leqslant \phi\left(\sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})|\right) \leqslant \phi(\mathrm{Var}(f;[a,b])) ,$$

ponieważ, na podstawie Lematu 3.6, funkcja ϕ jest rosnąca oraz superaddytywna. Z powyższej nierówności otrzymujemy oszacowanie

$$\mathrm{Var}_\phi^W(f;[a,b]) \leqslant \phi(\mathrm{Var}(f;[a,b])) .$$

Oczywiście, w przypadku gdy funkcja f jest monotoniczna, mamy, że $\mathrm{Var}(f;[a,b]) = |f(b)-f(a)|$, więc

$$\mathrm{Var}_\phi^W(f;[a,b]) \leqslant \phi(|f(b)-f(a)|) \ .$$

Z drugiej strony, biorąc specjalny podział $\overline{P} = \{a,b\}$, dostajemy

$$\phi(|f(b)-f(a)|) = \mathrm{Var}_\phi^W(f,\overline{P};[a,b]) \leqslant \mathrm{Var}_\phi^W(f;[a,b]) \ ,$$

co ostatecznie dowodzi (e).

Przeprowadzimy teraz dowód (f). W tym celu załóżmy, że (f_n) jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $WBV_\phi([a,b])$ względem normy (4.9). Oznacza to, że dla ustalonego dowolnie $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że

$$||f_n - f_m||_{WBV_\phi} \leqslant \varepsilon$$

dla $m,n \geqslant n_0$. Z określenia normy (4.9) wynika, że

$$|f_n(a)-f_m(a)| \leqslant \varepsilon \ , \quad \mathrm{Var}_\phi^W\left(\frac{f_n - f_m}{\varepsilon};[a,b]\right) \leqslant 1 \ , \tag{4.12}$$

dla $m,n \geqslant n_0$.

Z pierwszej nierówności w (4.12) wnioskujemy, że ciąg liczbowy $(f_n(a))$ jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczymy przez $f(a)$. Natomiast druga nierówność w (4.12) implikuje, że dla każdego podziału $\{t_0,t_1,...,t_k\} \in \mathcal{P}([a,b])$ ma miejsce nierówność

$$\sum_{j=1}^{k} \phi\left(\frac{|[f_n(t_j)-f_m(t_j)] - [f_n(t_{j-1})-f_m(t_{j-1})]|}{\varepsilon}\right) \leqslant 1 \ . \tag{4.13}$$

Biorąc w szczególności podział $\{a,x,b\}$ (z ustaloną liczbą x, $x \in (a,b)$), z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\phi\left(\frac{|[f_n(x)-f_m(x)] - [f_n(a)-f_m(a)]|}{\varepsilon}\right) \leqslant 1 \ ,$$

skąd

$$\frac{|[f_n(x)-f_m(x)] - [f_n(a)-f_m(a)]|}{\varepsilon} \leqslant \phi^{-1}(1) \ ,$$

i dalej

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leqslant |f_n(a)-f_m(a)| + \varepsilon\phi^{-1}(1) \ .$$

Powyższa nierówność jest w trywialny sposób spełniona dla $x = a$. Można również pokazać, że jest ona spełniona dla $x = b$. Zatem, na podstawie tejże nierówności i pierwszej nierówności w (4.12) wnioskujemy, że ma miejsce oszacowanie

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon(1 + \phi^{-1}(1))$$

dla $m, n \geqslant n_0$ i dla dowolnego $x \in [a, b]$.
Z oszacowania tego wynika, że ciąg (f_n) jest na przedziale $[a, b]$ zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f w przestrzeni $B([a, b])$.

Teraz, weźmy ponownie pod uwagę nierówność (4.13). Traktując n jako ustalone i przechodząc z $m \to \infty$, otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{k} \phi\left(\frac{|[f_n(t_j) - f(t_j)] - [f_n(t_{j-1}) - f(t_{j-1})]|}{\varepsilon}\right) \leqslant 1$$

skąd wynika, że

$$\mathrm{Var}_{\phi}^{W}\left(\frac{f_n - f}{\varepsilon}; [a, b]\right) \leqslant 1$$

dla $n \geqslant n_0$. Zatem $||f_n - f||_{WBV_\phi} \leqslant 2\varepsilon$, a więc $f_n \to f$ w przestrzeni $WBV_\phi([a, b])$. Koniec dowodu. □

Zwróćmy teraz uwagę na przypadek szczególny funkcji Younga $\phi(t) = t^p$ dla $1 < p < \infty$ oraz na przestrzeń $WBV_p([a, b])$ rozważaną w poprzednim rozdziale. W Przykładzie 3.4 zapowiedzieliśmy, że wariacja w sensie Wienera (szczególny przypadek wariacji Wienera-Younga dla $\phi(t) = t^p$) jest superaddytywna ze względu na przedziały. Oczywiście wynika to z Twierdzenia 4.16(a) dla $\phi(t) = t^p$. Co więcej, z punktów (a) i (b) wspomnianego twierdzenia otrzymujemy nierówności

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_p^W(f; [a, c]) + \mathrm{Var}_p^W(f; [c, b]) &\leqslant \mathrm{Var}_p^W(f; [a, b]) \\ &\leqslant \ 2^p \left[\mathrm{Var}_p^W(f; [a, c]) + \mathrm{Var}_p^W(f; [c, b])\right] \ , \end{aligned}$$

przy czym nierówność po prawej stronie wynika z faktu, że $M(T) = 2^p$ w definicji $M = M(T)$ dla $\phi(t) = t^p$.

Zajmiemy się teraz ustaleniem zależności pomiędzy przestrzeniami WBV_ϕ i WBV_ψ dla dowolnych funkcji Younga ϕ i ψ. Uogólnimy tym samym Twierdzenie 3.7.

Twierdzenie 4.17. *Niech ϕ i ψ będą funkcjami Younga takimi, że funkcja $\psi \circ \phi^{-1}$ jest wypukła. Wtedy ma miejsce nierówność*

$$\psi^{-1}\left(Var_{\psi}^{W}(f;[a,b])\right) \leqslant \phi^{-1}\left(Var_{\phi}^{W}(f;[a,b])\right) . \tag{4.14}$$

Ponadto

$$WBV_{\phi}([a,b]) \subset WBV_{\psi}([a,b]) \tag{4.15}$$

dla takich funkcji Younga ϕ i ψ.

Dowód. Żeby udowodnić nierówność (4.14) możemy przyjąć, że wariacja $\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,b])$ jest skończona. Dalej, ustalmy dowolny podział $\{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Wtedy, mając na uwadze fakt, że funkcje ψ i ϕ^{-1} są rosnące (por. Lemat 3.6) oraz fakt, że funkcja $\psi\circ\phi^{-1}$ jest funkcją Younga - więc jest superaddytywna, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\psi}^{W}(f,P;[a,b]) &= \sum_{j=1}^{m} \psi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi)(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\psi \circ \phi^{-1})(\phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|)) \\
&\leqslant (\psi \circ \phi^{-1}) \left(\sum_{j=1}^{m} \phi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|) \right) \\
&= (\psi \circ \phi^{-1}) \left(\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f,P;[a,b])\right) \leqslant (\psi \circ \phi^{-1}) \left(\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,b])\right) .
\end{aligned}$$

Biorąc po lewej stronie supremum ze względu na wszystkie podziały, otrzymujemy nierówność

$$\mathrm{Var}_{\psi}^{W}(f;[a,b]) \leqslant \psi\left(\phi^{-1}\left(\mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f;[a,b])\right)\right) ,$$

skąd, po obłożeniu obydwu stron funkcją ściśle rosnącą ψ^{-1} otrzymujemy nierówność (4.14). Inkluzja (4.15) jest bezpośrednią konsekwencją nierówności (4.14), co kończy dowód. $\square$

Biorąc w nierówności (4.14) $\phi(t) = t$ otrzymujemy, że wypukłość funkcji $\psi = \psi \circ \phi^{-1}$ implikuje następujący wniosek.

Wniosek 4.18. *Niech ψ będzie funkcją Younga. Wtedy dla każdej funkcji ograniczonej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ma miejsce nierówność*

$$\psi^{-1}\left(Var_{\psi}^{W}(f;[a,b])\right) \leqslant Var(f;[a,b]) \ .$$

Zatem spełniona jest inkluzja

$$BV([a,b]) \subset WBV_{\psi}([a,b]) \ .$$

Zwróćmy uwagę na to, że z ostatniej inkluzji wynika, że każda funkcja o wariacji ograniczonej w sensie klasycznym ma wariację ograniczoną w sensie Wienera-Younga dla każdej funkcji Younga ϕ. Ponadto, biorąc w (4.14) i (4.15) $\phi(t) = t^p$, $\psi(t) = t^q$ przy $1 \leqslant p \leqslant q$, otrzymujemy Twierdzenie 3.7.

Zadania

1. Niech $1 \leqslant p < \infty$. Mówimy, że funkcja Younga $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełnia warunek ∞_p, jeżeli

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t^p} = \infty$$

(piszemy wtedy, że $\phi \in \infty_p$). Pokazać, że funkcja $\phi(t) = t^q$ spełnia warunek ∞_p dla $q > p$ oraz funkcja $\phi(t) = e^t - 1$ spełnia warunek ∞_p dla każdego $p \geqslant 1$. Rozstrzygnąć podobne pytanie odnośnie funkcji Younga $\phi(t) = t\ln(t+1)$.

2. Niech $1 \leqslant p < \infty$ i niech $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją Younga. Mówimy, że $\phi \in 0_p$ (funkcja ϕ spełnia warunek 0_p) jeżeli

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{t^p} = \infty \ .$$

Sprawdzić, czy $\phi \in 0_p$ dla funkcji Younga wymienionych w Zad. 1.

3. Pokazać, że

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{Var}_{\phi}^{W}(f/\lambda;[a,b]) = 0$$

dla dowolnej funkcji Younga ϕ i dla każdej funkcji $f \in WBV_{\phi}([a,b])$.

4. Udowodnić, że

$$\bigcup_{\phi} WBV_{\phi}([a,b]) = R([a,b]) \ ,$$

gdzie sumowanie rozciąga się po wszystkich funkcjach Younga i gdzie $R([a,b])$ oznacza przestrzeń funkcji regularnych na przedziale $[a,b]$.

5. Podać przykład funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ takiej, że ma ona nieograniczoną wariację Wienera $\mathrm{Var}_p^W(f;[a,b])$ dla każdego $p\geqslant 1$ ale dla której istnieje funkcja Younga ϕ taka, że $f\in WBV_\phi([a,b])$.

5. Wariacja funkcji w sensie Watermana

Rozdział ten rozpoczniemy od przypomnienia wcześniej wprowadzonych oznaczeń. Mianowicie, dla zadanego przedziału $[a,b]$ symbolem $\sum([a,b])$ oznaczamy rodzinę wszystkich skończonych zbiorów $S = \{[a_1,b_1],[a_2,b_2],...,[a_n,b_n]\}$ złożonych z niezachodzacych na siebie podprzedziałów przedziału $[a,b]$, podczas gdy symbol $\sum_\infty([a,b])$ oznacza rodzinę wszystkich nieskończonych przeliczalnych zbiorów $S_\infty = \{[a_n,b_n]:\ n\in\mathbb{N}\}$ złożonych z niezachodzących na siebie podprzedziałów przedziału $[a,b]$.

Definicja 5.1. Ciągiem Watermana będziemy nazywać malejący ciąg liczbowy $\Lambda = (\lambda_n)$ złożony z liczb dodatnich takich, że $\lambda_n \to 0$ przy $n\to\infty$ oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty\ .$$

Prostym przykładem ciągu Watermana jest tzw. ciąg harmoniczny rzędu α postaci $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, gdzie $0<\alpha\leqslant 1$.

Załóżmy teraz, że zadana jest funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, zbiór $S_\infty = \{[a_n,b_n]:\ n\in\mathbb{N}\}\in \sum_\infty([a,b])$ oraz ciąg Watermana $\Lambda=(\lambda_n)$. Liczbę rzeczywistą określoną następująco

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f,S_\infty) = \mathrm{Var}_\Lambda(f,S_\infty;[a,b]) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| \tag{5.1}$$

będziemy nazywać **wariację Watermana funkcji** f **na przedziale** $[a,b]$ **względem** S_∞. Natomiast wielkość zdefiniowaną w następujący sposób.

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f) = \mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,b]) = \sup\left\{\mathrm{Var}_\Lambda(f,S_\infty;[a,b]):\ S_\infty\in\textstyle\sum_\infty([a,b])\right\}\ , \tag{5.2}$$

nazywamy **wariacją (całkowitą) Watermana** funkcji f na $[a,b]$.

Jeżeli $\mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,b])<\infty$ to mówimy, że f jest funkcją o **ograniczonej wariacji Watermana** (o ograniczonej Λ-wariacji w sensie Watermana) na przedziale $[a,b]$. Zbiór wszystkich funkcji o ograniczonej Λ-wariacji Watermana na przedziale $[a,b]$ oznaczać będziemy symbolem $\Lambda BV([a,b])$.

Zauważmy, że jeżeli zrezygnowalibyśmy z żądania $\lambda_n\to 0$, to biorąc $\lambda_n=1$ ($n\in\mathrm{N}$) dostaniemy przestrzeń $\Lambda BV([a,b])$ pokrywającą się z klasyczną przestrzenią $BV([a,b])$. Zauważmy również, że te przestrzenie pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (λ_n) jest odseparowany od zera. Wyjaśnia to powód, dla którego żądamy, żeby $\lambda_n\to 0$.

Udowodnimy teraz pewnien fakt pomocniczy, który będzie używany w dalszym ciągu.

Twierdzenie 5.2. *Załóżmy, że* $f \notin \Lambda BV([a,b])$. *Wtedy istnieje punkt* $x_0 \in [a,b]$ *taki, że:* 1^o *Jeżeli* $x_0 \in (a,b)$, *to* $f \notin \Lambda BV([c,d])$ *dla każdego przedziału* $[c,d] \subset [a,b]$ *takiego, że* $x_0 \in (c,d)$. 2^o *Jeżeli* $x_0 = a$ *to* $f \notin \Lambda BV([a,d])$ *dla każdego przedziału* $[a,d] \subset [a,b]$. 3^o *Jeżeli* $x_0 = b$ *to* $f \notin \Lambda BV([c,b])$ *dla każdego przedziału* $[c,b] \subset [a,b]$.

Dowód. Dzielimy kolejno przedział $[a,b]$ na dwie połowy. Przypuśćmy, że szereg występujący w (5.1) jest jednostajnie ograniczony przez stałą $M > 0$ dla przedziałów $I_n = [a_n, b_n]$ znajdujących się w lewej połowie przedziału $I = [a,b]$ lub w prawej połowie tego przedziału. Wtedy mamy, że $\mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,b]) \leqslant 2M$, co przeczy naszemu założeniu. Dlatego zbiór takich szeregów musi być nieograniczony na jednej połowie przedziału I. Kontynuując to postępowanie znajdziemy zstępujący ciąg przedziałów (I_n) zbieżny (w sensie części wspólnej) do pewnego punktu x_0. Teraz, jeżeli x_0 jest punktem wewnętrznym pewnego podprzedziału $J \subset I$, to $I_n \subset J$ dla n odpowiednio dużego. Stąd wynika teza naszego twierdzenia w rozważanym przypadku. Jeżeli $x_0 = a$ lub $x_0 = b$, rozumujemy podobnie otrzymując tezę twierdzenia. $\square$

Powyższe twierdzenie nosi nazwę **zasady lokalizacji**.

Przytoczymy teraz twierdzenie zawierające podstawowe własności wariacji Watermana (5.1) i (5.2).

Twierdzenie 5.3. *Wielkości (5.1) i (5.2) mają następujące własności:*

(a) *Wariacja Watermana (5.1) jest monotoniczna ze względu na zbiory podprzedziałów, tzn. jeżeli* $S_\infty \subset T_\infty$, *to*

$$Var_\Lambda(f, S_\infty) \leqslant Var_\Lambda(f, T_\infty) \ .$$

(b) *Wariacja całkowita w sensie Watermana (5.2) jest podaddytywna ze względu na przedziały, tzn.*

$$Var_\Lambda(f;[a,b]) \leqslant Var_\Lambda(f;[a,c]) + Var_\Lambda(f;[c,b]) \ .$$

(c) *Wariacja całkowita Watermana (5.2) jest dodatnio jednorodna tzn. ma miejsce równość*

$$Var_\Lambda(\mu f;[a,b]) = |\mu|\, Var_\Lambda(f;[a,b])$$

dla $\mu \in \mathbb{R}$.

(d) Wariacja całkowita (5.2) jest podaddytywna ze względu na funkcje, tzn.

$$Var_\Lambda(f+g;[a,b]) \leqslant Var_\Lambda(f;[a,b]) + Var_\Lambda(g;[a,b]) \ .$$

Ponadto

$$|Var_\Lambda(f;[a,b]) - Var_\Lambda(g;[a,b])| \leqslant Var_\Lambda(f-g;[a,b]) \ .$$

(e) Jeżeli f jest funkcją o wariacji ograniczonej na przedziale $[a,b]$, to $f \in \Lambda BV([a,b])$ dla każdego ciągu Watermana Λ.

(f) Jeżeli $f \in \Lambda BV([a,b])$, to f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$.

Dowód. Własność (a) jest oczywista. Dla dowodu (b) ustalmy dowolny zbiór $S_\infty = \{[a_n,b_n]: \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$. Następnie określmy dwa zbiory indeksów $N_1, N_2 \subset \mathbb{N}$ w następujący sposób:

$$N_1 = \{k \in \mathbb{N}: \ [a_k,b_k] \subset [a,c]\} \ , \quad N_2 = \{k \in \mathbb{N}: \ [a_k,b_k] \subset [c,b]\} \ .$$

Oczywiście zbiory N_1 i N_2 są rozłączne. Ponadto, istnieje co najwyżej jedna liczba naturalna k_0 taka, że $c \in (a_{k_0}, b_{k_0})$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| &= \sum_{k\in N_1\cup N_2\cup\{k_0\}} \lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| \\
&= \sum_{k\in N_1} \lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| \\
&\quad + \sum_{k\in N_2} \lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| + \lambda_{k_0}|f(b_{k_o})-f(a_{k_0})| \\
&\leqslant \left\{\sum_{k\in N_1} \lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| + \lambda_{k_0}|f(b_{k_0})-f(c)|\right\} \\
&\quad + \left\{\sum_{k\in N_2} \lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| + \lambda_{k_0}|f(c)-f(a_{k_0})|\right\} \\
&\leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,c]) + \mathrm{Var}_\Lambda(f;[c,b]) \ .
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy nierówność z (b). Dowód własności (c) jest trywialny i dlatego go pomijamy.

Dla dowodu (d) ustalmy nieskończony zbiór $S_\infty = \{[a_n, b_n] : \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$. Wtedy mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f(b_n) + g(b_n) - f(a_n) + g(a_n)|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f(b_n) - f(a_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |g(b_n) - g(a_n)| \ .$$

Stąd

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f+g) \leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f) + \mathrm{Var}_\Lambda(g) \ .$$

W przypadku, gdy $f, g \in \Lambda BV([a,b])$, z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f) = \mathrm{Var}_\Lambda[(f-g)+g] \leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f-g) + \mathrm{Var}_\Lambda(g) \ ,$$

i stąd

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f) - \mathrm{Var}_\Lambda(g) \leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f-g) \ .$$

W podobny sposób, wykorzystując własność (c) dla $\mu = -1$, dostajemy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(g) - \mathrm{Var}_\Lambda(f) \leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f-g) \ .$$

Dowodzi to w pełni własności (d).

Dla dowodu (e), znowu ustalmy nieskończony zbiór $S_\infty = \{[a_n, b_n] : \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$. Ponieważ $\Lambda = (\lambda_n)$ jest malejący, dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f(b_n) - f(a_n)| \leqslant \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| \leqslant \lambda_1 \mathrm{Var}(f; [a,b]) \ .$$

Z oszacowania tego wynika własność (e). Dla dowodu (f) załóżmy, że $f \in \Lambda BV([a,b])$ ale f nie jest ograniczona na przedziale $[a,b]$. Wtedy istnieje ciąg $(u_n) \subset [a,b]$ taki, że $|f(u_n)| \to \infty$. Ponieważ (u_n) jest ograniczony, to można wybrać podciąg (v_n) ciągu (u_n) taki, że $v_n \to x$ dla pewnego $x \in [a,b]$. Oczywiście wtedy $|f(v_n)| \to \infty$ gdy $n \to \infty$. Następnie, z ciągu (v_n) można wybrać ciąg monotoniczny (w_n), gdzie $|f(w_n)| \to \infty$ oraz $w_n \to x$. Dalej, z ciągu (w_n) wybieramy podciąg (z_n) taki, żeby $|f(z_{n+1})| \geqslant 1 + |f(z_n)|$ dla $n = 1, 2, ...$

Weźmy teraz pod uwagę ciąg przedziałów $[z_1, z_2], [z_2, z_3], ...$, który tworzy zbiór $S_\infty \in \sum_\infty([a,b])$. Obliczając wariację Watermana (5.1) ze względu na S_∞, otrzymujemy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f, S_\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f(z_{n+1}) - f(z_n)|$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n[|f(z_{n+1})| - |f(z_n)|] \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \ .$$

Ale przeczy to faktowi, że na podstawie przyjętego założenia $f \in \Lambda BV([a,b])$ i kończy dowód. □

Zwróćmy teraz uwagę na to, że własności (e) i (f) z powyższego twierdzenia mogą być zapisane w postaci następujących inkluzji

$$BV([a,b]) \subset \bigcap_{\Lambda} \Lambda BV([a,b]) \ , \quad \bigcup_{\Lambda} \Lambda BV([a,b]) \subset B([a,b]) \ , \tag{5.3}$$

gdzie przecięcie i sumę bierzemy po wszystkich ciągach Watermana Λ. Do zależności (5.3) wrócimy później.

Twierdzenie 5.4. *Następujące trzy warunki są równoważne*

(a) Funkcja f należy do $\Lambda BV([a,b])$.

(b) Istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$Var_{\Lambda}(f, S_{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant M$$

dla każdego zbioru nieskończonego $S_{\infty} = \{[a_k, a_k] : \ k \in \mathbb{N}\} \in \sum_{\infty}([a,b])$.

(c) Istnieje stała $N > 0$ taka, że

$$Var_{\Lambda}(f, S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant N$$

dla każdego zbioru skończonego $S = \{[a_1, b_1], ..., [a_n, b_n]\} \in \sum([a,b])$.

Dowód. Równoważność (a) i (b) jest prostą konsekwencją przyjętej definicji.
Fakt, że (c) implikuje (b) wynika z warunku koniecznego i wystarczającego zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych. Zatem, należy tylko udowodnić, że (b) implikuje (c).

Załóżmy więc, że spełniony jest warunek (b) ale nie jest spełniony warunek (c). Oznacza to, że dla każdej liczby $N > 0$ istnieje skończony zbiór $S = \{[a_1, b_1], ..., [a_n, b_n]\} \in \sum([a,b])$ taki, że

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f(b_i) - f(a_i)| > N \ .$$

Biorąc $N = 2M$, gdzie M jest stałą występującą w (b), znajdziemy skończony zbiór $S_M = \{[a_1, b_1], ..., [a_n, b_n]\} \in \sum([a, b])$ taki, że

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f, S_M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f(b_i) - f(a_i)| > 2M \ .$$

Teraz, rozróżnimy dwa możliwe przypadki.
Załóżmy najpierw, że

$$[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup ... \cup [a_n, b_n] = [a, b] \ .$$

Rozważmy nieskończony zbiór $S^*_\infty = \{[\alpha_i, \beta_i] : \ i = n, n+1, n+2, ...\} \in \sum_\infty([a_n, b_n])$, gdzie pierwszy przedział jest taki, że

$$\alpha_n = a_n \ , \quad \beta_n = \frac{a_n + b_n}{2} \ .$$

Dołączając do tego zbioru zredukowany zbiór $S'_M = \{[a_1, a_2], ..., [a_{n-1}, b_{n-1}]\}$, otrzymamy nieskończony zbiór

$$S'_M \cup S^*_\infty = \{[a_1, b_1], ..., [a_{n-1}, b_{n-1}], [\alpha_n, \beta_n], [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}], ...\} \in \textstyle\sum_\infty([a, b]) \ .$$

Na podstawie założenia (b), mamy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f, S'_M \cup S^*_\infty) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |f(b_k) - f(b_{k-1})|$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant M \ .$$

Stąd, uwzględniając tylko pierwsze n składników w ostatniej sumie, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| + \lambda_n |f((a_n + b_n)/2) - f(a_n)| \leqslant M \ . \tag{5.4}$$

Podobnie, możemy rozważyć nieskończony zbiór $S^{**}_\infty = \{[\gamma_i, \delta_i] : \ i = n, n+1, n+2, ...\} \in \sum_\infty([a, b])$, gdzie pierwszy składnik $[\gamma_n, \delta_n]$ ma końce określone równościami

$$\gamma_n = \frac{a_n + b_n}{2} \ , \quad \delta_n = b_n \ .$$

Dodając znowu do tego zbioru zredukowany zbiór S'_M, otrzymujemy zbiór nieskończony postaci

$$S'_M \cup S^{**}_\infty = \{[a_1, b_1], ..., [a_{n-1}, b_{n-1}], [\gamma_n, \delta_n], [\gamma_{n+1}, \delta_{n+1}], ...\} \in \textstyle\sum_\infty([a, b]) \ .$$

Stosując podobne rozumowanie jak wcześniej, otrzymujemy oszacowanie

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| + \lambda_n |f(b_n) - f((a_n + b_n)/2)| \leqslant M \ . \tag{5.5}$$

Łącząc oszacowania (5.4) i (5.5) i kładąc $c_n = (a_n + b_n)/2$, dostajemy

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| + \lambda_n |f(b_n) - f(a_n)|$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| + \lambda_n |f(b_n) - f(c_n)| + \lambda_n |f(c_n) - f(a_n)|$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| + \lambda_n |f(b_n) - f(c_n)|$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| + \lambda_n |f(c_n) - f(a_n)| \leqslant 2M \ ,$$

co jest sprzeczne z naszym doborem S_M.

Teraz załóżmy, że mamy ścisłą inkluzję

$$[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup ... \cup [a_n, b_n] \subsetneqq [a, b] \ .$$

Wybierzmy przedział $[\alpha, \beta]$ taki, że

$$\alpha, \beta \subset [a, b] \setminus ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup ... \cup [a_n, b_n])$$

a następnie weźmy ciąg $[a_{n+1}, b_{n+1}], [a_{n+2}, b_{n+2}], ...$ niezachodzących na siebie przedziałów takich, że $S_\infty = \{[a_j, b_j] : \ j = n+1, n+2, ...\} \in \sum_\infty([\alpha, \beta])$. Wtedy dla sumy

$$S_M \cup S_\infty = \{[a_k, b_k] : \ k \in \mathbb{N}\} \in \textstyle\sum_\infty([a, b])$$

otrzymujemy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f, S_M \cup S_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant M \ .$$

Stąd wynika, że

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f, S_M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant M \ ,$$

co jest sprzeczne z doborem S_M.

Zatem w obydwu rozważanych przypadkach dowód jest zakończony. $\square$

Z Twierdzenia 5.4 wynika, że całkowita wariacja Watermana (5.2) może być zdefiniowana następująco

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f) = \mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,b]) = \sup\{\mathrm{Var}_\Lambda(f,S;[a,b]):\ S \in \sum([a,b])\}\ . \tag{5.6}$$

Twierdzenie 5.5. *Zbiór $\Lambda BV([a,b])$ jest przestrzenią liniową. Wielkość*

$$||f||_{\Lambda BV} = |f(a)| + Var_\Lambda(f;[a,b]) \tag{5.7}$$

określona na $\Lambda BV([a,b])$ jest normą oraz $\Lambda BV([a,b])$ z tą normą jest przestrzenią Banacha.

Dowód. Fakt, że zbiór $\Lambda BV([a,b])$ jest przestrzenią liniową jest konsekwencją Twierdzenia 5.3(c) i (d). Sprawdzenie, że wielkość (5.7) jest normą w $\Lambda BV([a,b])$ jest łatwe i opiera się o wspomniane własności (c) i (d) Twierdzenia 5.3.

Pokażemy, że norma (5.7) jest zupełna. W tym celu załóżmy, że (f_n) jest ciągiem Cauchy'ego względem normy (5.7). Dla zadanej liczby $\varepsilon > 0$ dobierzmy $n_o \in \mathbb{N}$ tak, żeby

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \varepsilon \tag{5.8}$$

oraz

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f_n - f_m) \leqslant \varepsilon \tag{5.9}$$

dla $m, n \geqslant n_0$. Z (5.8) wnioskujemy, że ciąg $(f_n(a))$ jest zbieżny do pewnej liczby, którą oznaczymy przez $f(a)$. Z drugiej strony, z (5.9) wynika, że dla każdego nieskończonego zbioru $S_\infty = \{[a_n, b_n]:\ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$ mamy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f_n - f_m, S_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f_n(b_k) - f_m(b_k) - f_n(a_k) + f_m(a_k)| \leqslant \varepsilon\ .$$

W szczególności, dla każdej liczby $x \in [a,b]$, spełniona jest nierówność

$$\lambda_1|f_n(x) - f_m(x)| - \lambda_1|f_n(a) - f_m(a)|$$

$$\leqslant \lambda_1|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(a) - f_m(a)]| \leqslant \varepsilon\ .$$

Łacząc powyższą nierówność z (5.8), otrzymujemy oszacowanie

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\ ,$$

które pokazuje, że ciąg funkcyjny (f_n) jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji ograniczonej f na przedziale $[a,b]$. Dalej zauważmy, że z nierówności (5.9) oraz z nierówności zawartej w punkcie (d) Twierdzenia 5.3 wynika, że

$$|\mathrm{Var}_\Lambda(f_n) - \mathrm{Var}_\Lambda(f_m)| \leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f_n - f_m) \leqslant \varepsilon$$

dla $n, m \geqslant n_0$, a zatem ciąg $(\mathrm{Var}_\Lambda(f_n))$ ma granicę w $\mathbb{R}$.

Teraz, ustalmy dowolnie skończony zbiór $S = \{[a_1, b_1], ..., [a_p, b_p]\} \in \sum([a,b])$. Z definicji funkcji f wnioskujemy, że dla n odpowiednio dużych, mamy

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i |f_n(b_i) - f_n(a_i)| + \varepsilon \leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f_n) + \varepsilon \ .$$

Stąd, przechodząc z $n \to \infty$, otrzymujemy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\Lambda(f_n) \ ,$$

a więc $f \in \Lambda BV([a,b])$.
Odwołując się jeszcze raz do własności Cauchy'ego (5.9) ciągu (f_n), do liczby $\varepsilon > 0$ dobieramy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego nieskończonego zbioru $S_\infty = \{[a_k, b_k] : \ k \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$, mamy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f_n - f_m, S_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f_n(b_k) - f_m(b_k) - f_n(a_k) + f_m(a_k)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

dla $n, m \geqslant n_0$. Przechodząc z $m \to \infty$ i biorąc supremum ze względu na zbiory S_∞, dostajemy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f_n - f) \leqslant \varepsilon \ .$$

Z drugiej strony, przechodząc z $m \to \infty$ w (5.8) również otrzymujemy $|f_n(a) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, co w połączeniu z powyższą nierównością pozwala wywnioskować, że $||f_n - f||_{\Lambda BV} \to 0$ przy $n \to \infty$ i kończy dowód. □

Jak już wcześniej zapowiadaliśmy, inkluzje (5.3) między przestrzeniami $BV([a,b])$, $\Lambda BV([a,b])$ i $R([a,b])$ można "doprecyzować". Rzeczywiście, w dalszym ciągu pokażemy, że mają miejsce równości

$$\bigcap_\Lambda \Lambda BV([a,b]) = BV([a,b]) \ , \quad \bigcup_\Lambda \Lambda BV([a,b]) = R([a,b]) \ . \tag{5.10}$$

Najpierw jednak koniecznym będzie podanie szeregu lematów o charakterze technicznym.

Lemat 5.6. *Niech (α_n) będzie ciągiem liczb dodatnich zmierzającym do zera. Wtedy istnieje ciąg Watermana $\Lambda = (\lambda_n)$ taki, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n < \infty \ . \tag{5.11}$$

Dowód. Oznaczmy $n_0 = 0$ i wybierzmy liczbę naturalną n_1 tak, żeby $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2}$ dla $n \geqslant n_1$. Połóżmy $\lambda_n = 1/n$ dla $n_0 < n \leqslant n_1$. Załóżmy, że wybraliśmy liczby naturalne $n_1, n_2, ..., n_k$ w taki sposób, że $n_1 < n_2 < ... < n_k$, $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2^k}$ dla $n \geqslant n_k$ oraz $\lambda_n = 1/(n_k - n_{k-1})$ dla $n_{k-1} < n \leqslant n_k$. Wtedy wybieramy następną liczbę naturalną n_{k+1} tak, że $n_{k+1} \geqslant n_k + k$, $n_{k+1} - n_k \geqslant 1/\lambda_{n_k}$ i $\alpha_n < 1/2^{k+1}$ dla $n \geqslant n_{k+1}$. Ponadto przyjmujemy, że

$$\lambda_n = \frac{1}{n_{k+1} - n_k}$$

dla $n_k < n \leqslant n_{k+1}$.
Z konstrukcji wynika, że dla $n_k < n \leqslant n_{k+1}$ mamy

$$\lambda_n = \frac{1}{n_{k+1} - n_k} < \lambda_{n_k} \ , \quad \lambda_n \leqslant \frac{1}{k} \ .$$

Zatem (λ_n) jest ciągiem malejącym i zbieżnym do zera. Ponadto mamy

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \lambda_n = 1 \ .$$

co pokazuje, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \ .$$

Z drugiej strony, mamy

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_n \lambda_n \leqslant \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{2^k} \lambda_n = \frac{1}{2^k} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \lambda_n = \frac{1}{2^k}$$

co pokazuje, że ma miejsce (5.11) i kończy dowód. $\square$

Dla zilustrowania przeprowadzonej w powyższym dowodzie konstrukcji weźmy ciąg $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Wtedy ciąg Watermana $\Lambda = (\lambda_n)$ skonstruowany w dowodzie Lematu 5.6 ma postać

$$\Lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ... \right) \ .$$

Ponadto, mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty \ .$$

Lemat 5.7. *Niech (λ_n) będzie malejącym ciągiem liczb dodatnich. Jeżeli (δ_n) jest ciągiem liczb dodatnich zmierzającym do zera oraz $(\hat{\delta}_n)$ oznacza ciąg (δ_n) uporządkowany w kierunku malejącym, to*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \hat{\delta}_k$$

dla $n = 1, 2, ...$

Dowód. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy zbiór $\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Niech $\delta_1' \geqslant \delta_2' \geqslant ... \geqslant \delta_n'$ oznacza elementy tego zbioru uporządkowane w kierunku malejącym. Wtedy, z dobrze znanego lematu kombinatorycznego otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_k \leqslant \sum_{k=1} \lambda_k \delta_k' \ .$$

Oczywiście $\delta_k' \leqslant \hat{\delta}_k$ dla $k = 1, 2, ..., n$. Stąd otrzymujemy nierówność z tezy lematu. □

Twierdzenie 5.8. *Niech $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ będzie zadaną funkcją i niech $\tau : [a, b] \to [c, d]$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą oraz taką, że $\tau(a) = c$, $\tau(b) = d$. Wtedy $g \circ \tau \in \Lambda BV([a, b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in \Lambda BV([c, d])$.*

Dowód. Załóżmy, że $g \in \Lambda BV([c, d])$ i weźmy $S_\infty = \{[a_n, b_n] : \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a, b])$. Z założenia dotyczącego τ mamy, że $\tau(S_\infty) = \{[\tau(a_n), \tau(b_n)] : \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([c, d])$. Ponieważ $g \in \Lambda BV([c, d])$, więc mamy

$$\mathrm{Var}_\Lambda(g \circ \tau, S_\infty; [a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |(g \circ \tau)(b_n) - (g \circ \tau)(a_n)|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |g(\tau(b_n)) - g(\tau(a_n))| = \mathrm{Var}_\Lambda(g, \tau(S_\infty); [c, d]) < \infty \ ,$$

co pokazuje, że $g \circ \tau \in \Lambda BV([a, b])$ po przejściu do kresu górnego względem $S_\infty \in \sum_\infty([a, b])$. Stosując to samo rozumowanie do funkcji $\tau^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ dowodzimy implikacji odwrotnej. □

Następne twierdzenie będzie pokazywać, że każda funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ należy do pewnej przestrzeni Watermana $\Lambda BV([a, b])$.

Twierdzenie 5.9. *Każda funkcja $f \in C([a,b])$ należy do przestrzeni $\Lambda BV([a,b])$ dla pewnego ciągu Watermana Λ.*

Dowód. Niech $f \in C([a,b])$. Dla dowolnej liczby $\delta > 0$ oznaczymy przez $\omega_\infty(f;\delta)$ **moduł ciągłości** funkcji f zdefiniowany następująco:

$$\omega_\infty(f;\delta) = \omega_\infty(f,[a,b];\delta) = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \{|f(x+h) - f(x)| : \ a \leqslant x \leqslant b-h\} \ . \tag{5.12}$$

Oczywiście moduł ciągłości $\omega_\infty(f;\delta)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $[0, b-a]$ i $\omega_\infty(f;\delta) \to 0$ przy $\delta \to 0$, ponieważ f jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$.

Niech $I_n = [a_n, b_n]$ będzie ciągiem niezachodzących na siebie podprzedziałów przedziału $[a,b]$. Będziemy używać oznaczenia:

$$|f(I_n)| = |f(b_n) - f(a_n)| \ .$$

Dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$E_m = \left\{ I_k : \ \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{m+1}\right) < |f(I_k)| \leqslant \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{m}\right) \right\} \ .$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $|b_k - a_k| \leqslant (b-a)/m$, mamy

$$|f(I_k)| = |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \omega_\infty(f; |b_k - a_k|) \leqslant \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{m}\right) \ ,$$

więc $I_k \in E_m$ tylko wtedy, gdy $b_k - a_k > (b-a)/(m+1)$. Ponieważ przedziały I_k są niezachodzące i zawarte w $[a,b]$, więc stąd wnioskujemy, że E_m może zawierać co najwyżej m przedziałów.
Ponadto, jeżeli $I_p \in E_r$ i $I_q \in E_{r+s}$, to wtedy

$$|f(I_q)| \leqslant \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{r+s}\right) \leqslant \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{r+1}\right) < |f(I_q)| \ .$$

Zatem, krok po kroku, możemy wybrać ciąg (J_n) przedziałów $J_k \in E_k$ takich, że

$$|f(J_1)| \geqslant |f(J_2)| \geqslant \cdots \geqslant |f(J_n)| \geqslant \quad \to 0$$

przy $n \to \infty$.
Pokażemy teraz, że

$$|f(J_n)| \leqslant \omega_\infty\left(f; \frac{b-1}{n}\right) \tag{5.13}$$

dla $n = 1, 2, ...$ W tym celu załóżmy, że dla $m \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$|f(J_m)| > \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{m}\right) .$$

Wtedy

$$|f(J_1)| \geqslant |f(J_2)| \geqslant \cdots \geqslant |f(J_m)| > \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{m}\right) .$$

Stąd wynika, że $|J_k| > (b-a)/m$ dla $k = 1, 2, ..., m$, co jest niemożliwe, ponieważ wszystkie przedziały $J_1, J_2, ..., J_m$ są niezachodzące na siebie i zawarte w przedziale $[a, b]$. Dowodzi to nierówności (5.13). Dalej, uwzględniając to, że $\omega_\infty(f; (b-a)/k) \to 0$ przy $k \to \infty$, możemy zastosować Lemat 5.6, żeby dla ciągu

$$\alpha_n = \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, ...)$$

znaleźć malejący ciąg $\Lambda = (\lambda_n)$ liczb dodatnich, zmierzający do zera i taki, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{n}\right) < \infty .$$

Teraz, stosując Lemat 5.7 do ciągu $\delta_n = |f(I_n)|$, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f(I_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f(J_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \omega_\infty\left(f; \frac{b-a}{n}\right) < \infty .$$

Oznacza to jednak, że $f \in \Lambda BV([a, b])$ dla $\Lambda = (\lambda_n)$, co kończy dowód. □

Zauważmy, że rezultat zawarty w powyższym twierdzeniu możemy zapisać następująco:

$$C([a, b]) \subset \bigcup_{\Lambda} BV([a, b]) , \tag{5.14}$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie ciągi Watermana.

Udowodnimy teraz anonsowane wcześniej równości (5.10).

Twierdzenie 5.10. *Mają miejsce równości (5.10).*

Dowód. Zauważmy, że mając na uwadze inkluzje (5.3), dla dowodu pierwszej równości w (5.10) wystarczy pokazać, że

$$BV([a, b]) \supset \bigcap_{\Lambda} \Lambda BV([a, b]) .$$

W tym celu ustalmy dowolny ciąg Watermana $\Lambda = (\lambda_n)$ i weźmy funkcję $f \in \Lambda BV([a,b])$. Wiemy, że wtedy f jest ograniczona.
Oznaczmy:

$$m(f) = \inf\{f(x) : \ x \in [a,b]\} \ , \quad M(f) = \sup\{f(x) : \ x \in [a,b]\} \ .$$

Oczywiście $m(f)$, $M(f)$ są skończone. Połóżmy

$$F(x) = \frac{f(x) - m(f)}{M(f) - m(f)} \quad (a \leqslant x \leqslant b) \ .$$

Mamy, że $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Oczywiście, tak jak funkcja f, również funkcja F należy do przestrzeni $\Lambda BV([a,b])$. W związku z tym możemy założyć, że

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad (x \in [a,b]) \ .$$

Przypuśćmy, że $f \notin BV([a,b])$. Wtedy, na podstawie *zasady lokalizacji* (por. Zad. 6, Rozdz. 2) znajdziemy punkt $x \in [a,b]$ taki, że f ma nieograniczoną wariację w każdym otoczeniu punktu x (zrelatywizowanym do przedziału $[a,b]$).
Wybierzmy teraz skończony podział P_1 przedziału $[a,b]$ taki, że

$$\sum_{I \in P_1} |f(I)| \geqslant 3 \ . \tag{5.15}$$

Punkt x znajdzie się we wnętrzu pojedynczego przedziału podziału P_1 albo jest końcem dwóch przedziałów z P_1 albo też początkiem lub końcem jednego przedziału z P_1. Jeżeli usuniemy te pojedyncze przedziały lub dwa przedziały z P_1 i oznaczymy przez Q_1 zbiór pozostałych przedziałów, to wtedy na podstawie (5.15) mamy

$$\sum_{I \in Q_1} |f(I)| \geqslant 1 \ .$$

Jeżeli podział Q_1 zawiera q_1 przedziałów, będziemy pisać $Q_1 = \{I_k^1 : \ k = 1, 2, ..., q_1\}$. Teraz, zdefiniujmy

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{q_1} = 1 \ .$$

Wtedy

$$\sum_{k=1}^{q_1} \lambda_k |f(I_k^1)| \geqslant 1 \ .$$

Kończy to pierwszy krok w naszej definicji.

Załóżmy dalej, że skonstruowaliśmy P_n i Q_n w taki właśnie sposób. Wtedy, stosując zasadę indukcji matematycznej, postępujemy dalej w następujący sposób: Przede wszystkim zauważmy, że jeden lub dwa przedziały usunięte z P_n dla utworzenia Q_n tworzą otoczenie U_n liczby x. Ponieważ f ma nieograniczoną wariację na U_n, wnosimy, że istnieje skończony podział P_{n+1} zbioru U_n taki, że

$$\sum_{I \in P_{n+1}} |f(I)| \geqslant 3 \ .$$

Odnotujmy następnie, że i tym razem punkt x jest albo punktem wewnętrznym pojedynczego przedziału zawartego w P_{n+1} albo punktem końcowym dwóch przedziałów w P_{n+1} albo $x = a$ lub $x = b$ dla pewnego przedziału w P_{n+1}. Jeżeli teraz odrzucimy z P_{n+1} ten pojedynczy przedział lub wspomniane dwa przedziały i oznaczymy przez Q_{n+1} zbiór pozostałych przedziałów, to wykorzystując znowu (5.15) otrzymamy, że

$$\sum_{I \in Q_{n+1}} |f(I)| \geqslant 1 \ .$$

Jeżeli Q_{n+1} zawiera q_{n+1} przedziałów, to piszemy, że $Q_{n+1} = \{I_k^{n+1} : \ k = 1, 2, ..., q_{n+1}\}$ a następnie definiujemy

$$\lambda_{r_n+1} = \lambda_{r_n+2} = \cdots = \lambda_{r_n+q_n} = \frac{1}{n+1} \ ,$$

gdzie $r_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ i $q_0 = 0$. Wtedy mamy

$$\sum_{k=1}^{q_{n+1}} \lambda_{r_n+k} |f(I_k^{n+1})| \geqslant \frac{1}{n+1} \ .$$

Teraz zauważmy, że wszystkie przedziały z Q_{n+1} zawarte w U_n są parami niezachodzące na siebie. Stąd wnioskujemy, że

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{q_i} \lambda_{r_{i-1}+k} |f(I_k^i)| \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \ .$$

W ten sposób skonstruowaliśmy liczby rzeczywiste $\{\lambda_k : \ k = 1, 2, 3, ...\}$ i niezachodzące na siebie podprzedziały $\{I_k^n : \ k = 1, 2, ..., q_n; \ n = 1, 2, ...\}$ przedziału $[a, b]$ takie, że (λ_k) jest ciągiem malejącym i zmierzającym do zera oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty \ , \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_i} \lambda_{r_{i-1}+k} |f(I_k^i)| = \infty \ .$$

To jednak oznacza, że $\Lambda = (\lambda_k)$ jest ciągiem Watermana i f nie należy do odpowiedniej przestrzeni $\Lambda BV([a,b])$. Jest to sprzeczne z założeniem i kończy dowód pierwszej równości w (5.10).

Udowodnimy teraz drugą równość. Dokładniej, pokażemy, że każda funkcja $f \in \Lambda BV([a,b])$ ma granicę lewostronną w każdym punkcie przedziału (a,b). Dowód dla granicy prawostronnej jest analogiczny.

Niech więc $f \in \Lambda BV([a,b])$. Załóżmy, że istnieje punkt $x \in (a,b)$ taki, że f nie ma w x granicy lewostronnej. Oznacza to, że

$$l = \liminf_{t \to x^-} f(t) < \limsup_{t \to x^-} f(x) = L \ .$$

Niech $\delta = (L-l)/3$ i wybierzmy ciągi (p_n) i (P_n) takie, że $P_1 < P_2 < \cdots \to x$, $p_1 < p_2 < \cdots \to x$ oraz

$$f(p_n) \to l \ , \quad f(P_n) \to L \ , \quad f(p_n) \leqslant l + \delta \ , \quad f(P_n) \geqslant L - \delta \ .$$

Następnie, wybierzmy podciąg (Q_n) ciągu (P_n) i podciąg (q_n) ciągu (p_n) tak, że $q_1 < Q_1 < q_2 < Q_2 < \cdots$. Wtedy przedziały $[q_m, Q_m]$ i $[q_n, Q_n]$ są rozłączne dla $m \neq n$ oraz spełniają nierówności

$$|f(Q_n) - f(q_n)| \geqslant f(Q_n) - f(q_n) \geqslant (L-\delta) - (l+\delta) \geqslant 3\delta - 2\delta = \delta \ .$$

Stąd wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f(Q_n) - f(q_n)| \geqslant \delta \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \ .$$

Pokazuje to, że $f \notin \Lambda BV([a,b])$ i przeczy naszemu założeniu.

Pozostało do pokazania, że każda regularna funkcja należy do $\Lambda BV([a,b])$ dla odpowiedniego ciągu Watermana $\Lambda = (\lambda_n)$. W tym celu, skorzystamy z twierdzenia Sierpińskiego (Twierdzenie 1.11). Zgodnie z tym twierdzeniem istnieją ściśle rosnąca funkcja $\tau : [a,b] \to [c,d]$ oraz ciągła funkcja $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ takie, że $f = g \circ \tau$. Zauważmy, że funkcja afiniczna zadana wzorem

$$l(t) = \frac{b-a}{d-c}(t-c) + a$$

jest ściśle rosnącym homeomorfizmem między przedziałami $[c,d]$ i $[a,b]$. Dlatego złożenie $l \circ \tau : [a,b] \to [a,b]$ jest także ściśle rosnące oraz $g \circ l^{-1} : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Z Twierdzenia 5.9 wnioskujemy, że $g \circ l^{-1} \in \Lambda BV([a,b])$ dla pewnego ciągu Watermana Λ.

Z drugiej strony, z Twierdzenia 5.8 wynika, że $f = (g \circ l^{-1}) \circ (l \circ \tau)$ należy do przestrzeni $\Lambda BV([a, b])$. To kończy dowód. $\square$

W dalszym ciągu zajmiemy się pokazaniem, że w definicji wariacji całkowitej Watermana możemy ograniczyć się do dość szczególnych zbiorów $S_\infty \in \sum_\infty([a, b])$.
W tym celu oznaczmy symbolem $\sum_\infty^d([a, b])$ rodzinę wszystkich nieskończonych zbiorów $S_\infty^d = \{[a_n, b_n] : \ n \in \mathbb{R}\}$ niezachodzących na siebie podprzedziałów przedziału $[a, b]$ z dodatkową własnością, że ciąg (δ_n) określony równością

$$\delta_n = |f(b_n) - f(a_n)| \quad (n = 1, 2, ...) \tag{5.16}$$

jest malejący i zbieżny do zera.
Do dowodu tego faktu będziemy potrzebować pewnego lematu pomocniczego dotyczącego funkcji regularnych.

Lemat 5.11. *Niech $S_\infty = \{[a_n, b_n] : \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a, b])$ będzie (skończonym lub nieskończonym) zbiorem przedziałów i niech $f \in R([a, b])$. Wtedy można przedziały $[a_n, b_n]$ uporządkować w taki sposób, że $|f(b_n) - f(a_n)| \geqslant |f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})|$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Ponieważ f jest regularna, to stosując twierdzenie Sierpińskiego (Twierdzenie 1.11) można znaleźć funkcję ściśle rosnącą $\tau : [a, b] \to [c, d]$ (gdzie $c = \tau(a)$, $d = \tau(b)$) i funkcją ciągłą $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ takie, że $f = g \circ \tau$. Rozważmy teraz zbiór przedziałów $\tau(S_\infty) = \{[\tau(a_n), \tau(b_n)] : \ n \in \mathrm{N}\}$, który należy do $\sum_\infty([c, d])$. Zauważmy, że ciąg $(\tau(b_n) - \tau(a_n))$ jest zbieżny do zera. Zatem ciąg ten można ustawić w kolejności malejącej, tzn. można znaleźć ciąg (n_k) liczb nauralnych takich, że ciąg $(\tau(b_{n_k}) - \tau(a_{n_k}))$ jest malejący (i oczywiście zbieżny do zera).

Teraz, rozważmy ciąg (η_k) określony równością

$$\eta_k = |f(b_{n_k}) - f(a_{n_k})| = |g(\tau(b_{n_k})) - g(\tau(a_{n_k}))| \ .$$

Z ciągłości funkcji g wynika, że $\eta_k \to 0$ gdy $k \to \infty$.
Stosując teraz dalsze przenumerowanie, możemy znaleźć ciąg (k_m) liczb naturalnych taki, że (η_{k_m}) jest malejący. Odpowiadający mu ciąg przedziałów ma własności żądane w tezie lematu. $\square$

Sformułujemy teraz własności wariacji Watermana w terminach zdefiniowanej wcześniej rodziny $\sum_\infty^d([a, b])$.

Twierdzenie 5.12. *Niech* $f \in \Lambda BV([a,b])$. *Wtedy*

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,b]) = \sup\{\mathrm{Var}_\Lambda(f,S^d_\infty;[a,b]) : \ S^d_\infty \in \textstyle\sum^d_\infty([a,b])\} \ . \tag{5.17}$$

Dowód. Oznaczmy symbolem $\mathrm{Var}^d_\Lambda(f;[a,b])$ wyrażenie po prawej stronie równości (5.17). Nierówność

$$\mathrm{Var}^d_\Lambda(f;[,b]) \leqslant \mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,b])$$

wynika stąd, że $\sum^d_\infty([a,b]) \subset \sum_\infty([a,b])$. Zatem wystarczy udowodnić nierówność przeciwną do tej wyżej napisanej.
W tym celu ustalmy dowolnie zbiór $S_\infty = \{[a_n,b_n] : \ n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$. Następnie rozważmy ciąg (δ_n) zdefiniowany równością (5.16). Stosując Lemat 5.11 przedstawimy ciąg (δ_n) w porządku malejącym. W ten sposób, otrzymujemy ciąg $(\hat{\delta}_n)$, który na podstawie Lematu 5.7 spełnia nierówność

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k|f(b_k)-f(a_k)| \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k\hat{\delta}_k$$

dla $n = 1,2,....$ Stąd wynika, że $\mathrm{Var}_\Lambda(f;[a,b]) \leqslant \mathrm{Var}^d_\Lambda([a,b])$. Koniec dowodu. □

W dalszym ciągu porównamy przestrzenie $\Lambda BV([a,b])$ i $MBV([a,b])$ dla różnych ciągów Watermana $\Lambda = (\lambda_n)$ oraz $M = (\mu_n)$. Rozpoczniemy od odpowiedniej definicji.

Definicja 5.13. Dla zadanych dwóch rosnących ciągów liczb dodatnich (L_n) i (M_n) będziemy pisać, że $(L_n) \preceq (M_n)$, jeżeli istnieje stała $c > 0$ taka, że $L_n \leqslant cM_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli zarówno $(L_n) \preceq (M_n)$ jak i $(M_n) \preceq (L_n)$, to będziemy pisać $(L_n) \sim (M_n)$.

Załóżmy, że $\Lambda = (\lambda_n)$ i $M = (\mu_n)$ są dwoma ciągami Watermana. Dla uproszczenia oznaczeń, jeżeli $m,n \in \mathbb{N}$ i $m \leqslant n$, to w dalszym ciągu będziemy używać skrótowych oznaczeń

$$\lambda[m,n] = \sum_{k=m}^n \lambda_k \ , \quad \mu[m,n] = \sum_{k=m}^n \mu_k \ . \tag{5.18}$$

Zauważmy, że np. własność $\sum\limits_{n=1}^\infty \lambda_n = \infty$ ciągu Watermana (λ_n) może być zapisana w postaci $\lambda[1,n] \to \infty$ przy $n \to \infty$.

Twierdzenie 5.14. *Niech* $\Lambda = (\lambda_n)$ *i* $M = (\mu_n)$ *będą dwoma ciągami Watermana. Wtedy prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

(a) $MBV([a,b]) \subset \Lambda BV([a,b])$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $(\lambda[1,n]) \preceq (\mu[1,n])$.

(b) $MBV([a,b]) = \Lambda BV([a,b])$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $(\lambda[1,n]) \sim (\mu[1,n])$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$\lambda[1,n] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} \mu_k = c\mu[1,n] \tag{5.19}$$

dla $n = 1, 2, \dots$.
Ustalmy dowolnie funkcję $f \in MBV([a,b])$ i nieskończony zbiór $S_\infty = \{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$. Połóżmy $\delta_n = |f(b_n) - f(a_n)|$. Mając na uwadze Twierdzenie 5.12 możemy bez straty ogólności założyć, że ciąg (δ_n) jest malejący i zmierza do zera. Uwzględniając tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda[1,k](\delta_k - \delta_{k+1}) + \delta_n \lambda[1,n]$$

i korzystając z założeń i (5.19), otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_k \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu[1,k](\delta_k - \delta_{k+1}) + \delta_n \mu[1,n] \right) = c \sum_{k=1}^{n} \delta_k \mu_k \ .$$

Pokazuje to, że $f \in \Lambda BV([a,b])$ i kończy dowód pierwszej implikacji w (a).

Dla dowodu drugiej implikacji załóżmy, że $(\lambda[1,n]) \npreceq (\mu[1,n])$. Wtedy istnieje ściśle rosnący podciąg (n_k) ciągu liczb naturalnych takich, że

$$\lambda[n_k + 1, n_{k+1}] \geqslant 2^k \mu[n_k + 1, n_{k+1}] \ ,$$

gdzie $n_0 = 0$.
Dla zadanego zbioru $S_\infty = \{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\} \in \sum_\infty([a,b])$ weźmy funkcję $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ taką, że

$$\delta_i = |f(b_i) - f(a_i)| = \frac{1}{2^k \mu[n_k + 1, n_{k+1}]} \quad (i = n_k + 1, n_k + 2, \dots, n_{k+1}) \ .$$

Zauważmy, że wtedy ciąg (δ_n) jest malejący i zmierza do zera przy $n \to \infty$. Ponadto, mamy

$$\sum_{i=1}^{n_{k+1}} \delta_i \lambda_i = \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda[n_j + 1, n_{j+1}]}{2^\delta \mu[n_j + 1, n_{j+1}]} \geqslant \sum_{j=0}^{k} 2^{j-1}$$
$$= 2^{k+1} - 1 \to \infty \ \text{ przy } \ k \to \infty \ ,$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{n_{k+1}} \delta_i \mu_i = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^j} \leqslant 2 \ .$$

Pokazuje to, że $f \in MBV([a,b])$ ale $f \notin \Lambda BV([a,b])$ i tym samym kończy dowód (a). Stwierdzenie (b) jest bezpośrednią konsekwencją (a). □

Zadania

1. Niech $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją Younga oraz niech $\phi^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ będzie tzw. sprzężoną funkcją Younga określoną równością $\phi^*(t) = \sup\{st - \phi(s) : \ s \geqslant 0\}$.

(a) Pokazać, że $ab \leqslant \phi(a) + \phi^*(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}_+$.

(b) Udowodnić, że jeżeli $\Lambda = (\lambda_n)$ jest ciągiem Watermana takim, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi^*(\lambda_n) < \infty$$

to $WBV_\phi([a,b]) \subset \Lambda BV([a,b])$.

2. Znaleźć warunki nałożone na ciąg Watermana $\Lambda = (\lambda_n)$ i na funkcję Younga ϕ takie, żeby $\Lambda BV([a,b]) \subset WBV_\phi([a,b])$.

3. Niech $\Lambda = (\lambda_n)$ będzie ciągiem Watermana. Dla zadanej funkcji $f \in \Lambda BV([a,b])$ oznaczmy przez $V_{f,\Lambda}$ funkcję określoną na przedziale $[a,b]$ w następujący sposób:

$$V_{f,\Lambda}(x) = \mathrm{Var}_\Lambda(f; [a,x]) \ .$$

(a) Pokazać, że $V_{f,\Lambda}$ jest funkcją rosnącą na przedziale $[a,b]$.

(b) Pokazać, że jeżli f jest prawostronnie ciągła w punkcie a, to

$$\lim_{x \to a+} V_{f,\Lambda}(x) = 0 \ .$$

(c) Pokazać, że jeżeli f jest lewostronnie ciągła w punkcie b, to

$$\lim_{x \to b-} V_{f,\Lambda}(x) = \mathrm{Var}_\Lambda(f; [a,b]) \ .$$

(d) Pokazać, że funkcja $V_{f,\Lambda}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w x_0.

6. Całka Riemanna-Stieltjesa

Całka Riemanna-Stieltjesa znajduje szerokie zastosowania w teorii prawdopodobieństwa [3,5]. Jednak podstawowe znaczenie pojęcia całki Riemanna-Stieltjesa polega na tym, że stwarza ono możliwość bardzo ładnej charakteryzacji przestrzeni sprzężonej do klasycznej przestrzeni funkcji ciągłych z normą maksimum $C([a,b])$ [1].

Pojęcie całki Riemanna-Stieltjesa wprowadza się w oparciu o pojęcie funkcji o wariacji ograniczonej. Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt, że teoria całki Riemanna-Stieltjesa może opierać się bezpośrednio o funkcje o wariacji ograniczonej [6,7] albo też, dzięki twierdzeniu Jordana o rozkładzie funkcji o wariacji ograniczonej na różnicę dwóch funkcji rosnących, można wprowadzenie pojęcia całki Riemanna-Stieltjesa nieco uprościć rozpoczynając od wprowadzenia tej całki względem funkcji rosnącej [1,8].

W prezentacji pojęcia całki Riemanna-Stieltjesa opisywanej w tym rozdziale wybraliśmy właśnie tą drugą drogę tzn. zaczniemy od wprowadzenia pojęcia tej całki względem funkcji rosnącej.

Załóżmy zatem, że zadana jest funkcja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, która jest rosnąca na przedziale $[a,b]$. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Dla zadanego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ rozważmy liczby

$$m_j = \inf\{f(x) : \ t_{j-1} \leqslant x \leqslant t_j\}\ , \quad M_j = \sup\{f(x) : \ t_{j-1} \leqslant x \leqslant t_j\}$$

dla $j = 1, 2, ..., m$. Liczbę rzeczywistą określoną równością

$$L_\alpha(f, P; [a,b]) = \sum_{j=1}^{m} m_j(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \tag{6.1}$$

będziemy nazywać **dolną sumą Riemanna-Stieltjesa** (dolna RS-suma) funkcji f względem podziału P i funkcji α, podczas gdy liczbę

$$U_\alpha(f, P; [a,b]) = \sum_{j=1}^{m} M_j(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \tag{6.2}$$

będziemy nazywać **górną sumą Riemanna-Stieltjesa** (górna RS-suma) funkcji f względem podziału P i funkcji α.

Niżej podane twierdzenie zawiera własność monotoniczności zdefiniowanych sum względem podziałów.

Twierdzenie 6.1. *Dla $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ takich, że $P \subset Q$, mają miejsce nierówności:*

$$L_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant L_\alpha(f, Q; [a,b]) \leqslant U_\alpha(f, Q; [a,b]) \leqslant U_\alpha(f, P; [a,b]) \ . \tag{6.3}$$

Dowód. Niech dany będzie podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$ i niech $Q = \{t_0, ..., t_{i-1}, t_*, t_i, ..., t_m\}$ będzie podziałem zawierającym podział P i jeden dodatkowy punkt $t_* \in (t_{i-1}, t_i)$. Wtedy mamy

$$L_\alpha(f, Q; [a,b]) = \sum_{j=1}^{i-1} m_j(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) + m_{i-1}^*(\alpha(t_*) - \alpha(t_{i-1}))$$

$$+ \ m_i^*(\alpha(t_i) - \alpha(t_*)) + \sum_{j=i+1}^{m} m_j(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \ ,$$

gdzie

$$m_{i-1}^* = \inf\{f(x) : \ t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_*\} \ ,$$

$$m_i^* = \inf\{f(x) : \ t_* \leqslant x \leqslant t_i\} \ .$$

Oczywiście $m_{i-1}^* \geqslant m_i$ oraz $m_i^* \geqslant m_i$. Stąd otrzymujemy, że

$$L_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant L_\alpha(f, P \cup \{t_*\}; [a,b]) \ .$$

Stosując zasadę indukcji ze względu na liczbę dołączanych punktów, dowodzimy pierwszej nierówności w (6.3). Trzecią nierówność dowodzi się podobnie, podczas gdy druga nierówność jest trywialna. □

Definicja 6.2. Mówimy, że funkcja $f \in B([a,b])$ jest **całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa** (lub RS-całkowalna) względem funkcji rosnącej α na przedziale $[a,b]$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $P \in \mathcal{P}([a,b])$ taki, że

$$U_\alpha(f, P; [a,b]) - L_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant \varepsilon \ . \tag{6.4}$$

Zbiór wszystkich funkcji RS-całkowalnych względem funkcji rosnącej α na przedziale $[a,b]$ oznaczać będziemy przez $RS_\alpha([a,b])$.

Zauważmy, że (zgodnie z definicją) $f \in RS_\alpha([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość

$$\inf\{U_\alpha(f, P; [a,b]) : \ P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \sup\{L_\alpha(f, P; [a,b]) : \ P \in \mathcal{P}([a,b])\} \ . \tag{6.5}$$

Wspólną wartość w (6.5) będziemy oznaczać symbolem

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f d\alpha$$

i będziemy nazywać **całką Riemanna-Stieltjesa** (lub RS-całką) funkcji f względem funkcji α na przedziale $[a, b]$.
Oczywiście w przypadku $\alpha(x) = x$, Definicja 6.2 pokrywa się z definicją całki Riemanna. W tym przypadku będziemy pisać, że $f \in RS([a, b])$ (lub, że $f \in R([a, b])$).

W następnym twierdzeniu zebrane zostały pewne użyteczne własności RS-całki.

Twierdzenie 6.3. *Niech $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami rosnącymi na $[a, b]$, $\lambda \in R$ i niech $f, g \in RS_\alpha([a, b])$. Wtedy mają miejsce następujące własności:*

(a) Całka Riemanna-Stieltjesa jest addytywna ze względu na funkcje całkowane, tzn. $f + g \in RS_\alpha([a, b])$ oraz

$$\int_a^b (f + g)d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha \ .$$

(b) RS-całka jest addytywna ze względu na funkcje, względem których całkujemy, tzn. jeżeli $f \in RS_\alpha([a, b]) \cap RS_\beta([a, b])$ to $f \in RS_{\alpha+\beta}([a, b])$ i zachodzi równość

$$\int_a^b f d(\alpha + \beta) = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\beta \ .$$

(c) RS-całka jest jednorodna ze względu na całkowane funkcje, tzn.

$$\int_a^b (\lambda f)d\alpha = \lambda \int_a^b f d\alpha$$

dla $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) RS-całka jest jednorodna ze względu na funkcję względem której całkujemy, tzn.

$$\int_a^b f d(\lambda\alpha) = \lambda \int_a^b f d\alpha$$

dla $\lambda > 0$.

(e) RS-całka jest monotoniczna ze względu na funkcje całkowane tzn. jeżeli $f(x) \leqslant g(x)$ na $[a,b]$, to

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant \int_a^b g d\alpha \ .$$

W szczególności, mają miejsce nierówności

$$m(f)(\alpha(b) - \alpha(a)) \leqslant \int_a^b f d\alpha \leqslant M(f)(\alpha(b) - \alpha(a)) \ , \tag{6.6}$$

gdzie $m(f) = \inf\{f(x) : \ a \leqslant x \leqslant b\}$, $M(f) = \sup\{f(x) : \ a \leqslant x \leqslant b\}$.

Dowód. Celem odciążenia oznaczeń będziemy w (6.1) i (6.2) opuszczać przedział $[a,b]$.
(a) Zauważmy, że dla $P \in \mathcal{P}([a,b])$ mamy

$$L_\alpha(f,P) + L_\alpha(g,P) \leqslant L_\alpha(f+g,P) \leqslant U_\alpha(f+g,P)$$
$$\leqslant U_\alpha(f,P) + U_\alpha(g,P) \ . \tag{6.7}$$

Z faktu, że $f, g \in RS_\alpha([a,b])$ wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć podziały $P_f, P_g \in \mathcal{P}([a,b])$ takie, że

$$U_\alpha(f,P_f) - L_\alpha(f,P_f) \leqslant \varepsilon \ , \ \ U_\alpha(g,P_g) - L_\alpha(g,P_g) \leqslant \varepsilon \ .$$

Dodając powyższe nierówności stronami, otrzymujemy

$$U_\alpha(f,P_f) + U_\alpha(g,P_g) - L_\alpha(f,P_f) - L_\alpha(g,P_g) \leqslant 2\varepsilon \ .$$

Teraz, biorąc pod uwagę (6.7) i Twierdzenie 6.1, dostajemy

$$L_\alpha(f,P_f) + L_\alpha(g,P_g) \leqslant L_\alpha(f+g,P_f \cup P_g)$$
$$\leqslant U_\alpha(f+g,P_f \cup P_g) \leqslant U_\alpha(f,P_f) + U_\alpha(g,P_g) \ .$$

Stąd, oznaczając $P = P_f \cup P_g$, wnioskujemy, że

$$U_\alpha(f+g,P) - L_\alpha(f+g,P) \leqslant 2\varepsilon \ ,$$

a to pokazuje, że $f + g \in RS_\alpha([a,b])$. Dla tego samego podziału P, mamy dalej

$$U_\alpha(f,P) \leqslant \int_a^b f d\alpha + \varepsilon \ , \ \ U_\alpha(g,P) \leqslant \int_a^b g d\alpha + \varepsilon \ .$$

Stąd i z (6.7) otrzymujemy

$$\int_a^b (f+g)d\alpha \leqslant U_\alpha(f+g,P) \leqslant \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha + 2\varepsilon \ ,$$

skąd, wobec dowolności liczby ε, mamy

$$\int_a^b (f+g)d\alpha \leqslant \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha \ .$$

Zastępując f przez $-f$ oraz g przez $-g$ otrzymujemy nierówność odwrotną, co dowodzi (a).
Stwierdzenie (b) dowodzimy podobnie, bazując na nierównościach

$$L_\alpha(f,P) + L_\beta(f,P) \leqslant L_{\alpha+\beta}(f,P) \leqslant U_{\alpha+\beta}(f,P) \leqslant U_\alpha(f,P) + U_\beta(f,P) \ ,$$

dla każdego $P \in \mathcal{P}([a,b])$.

Dowód własności (c) wynika z równości

$$L_\alpha(\lambda f,P) = \lambda L_\alpha(f,P) \ , \quad U_\alpha(\lambda f,P) = \lambda U_\alpha(f,P) \ ,$$

podczas gdy stwierdzenie (d) jest konsekwencją równości

$$L_{\lambda\alpha}(f,P) = \lambda L_\alpha(f,P) \ , \quad U_{\lambda\alpha}(f,P) = \lambda U_\alpha(f,P) \ ,$$

które mają miejsce dla $\lambda > 0$.

Dla dowodu (e) wystarczy zauważyć, że nierówność $f(x) \leqslant g(x)$ w oczywisty sposób implikuje zarówno nierówność $L_\alpha(f,P) \leqslant L_\alpha(g,P)$ jak i nierówność $U_\alpha(f,P) \leqslant U_\alpha(g,P)$. Oczywiście, druga nierówność w (e) jest konsekwencją pierwszej nierówności z tego stwierdzenia. $\square$

Podamy teraz naturalne rozszerzenie Definicji 6.2 dla funkcji o wariacji ograniczonej. Twierdzenie 6.3(b) sugeruje, w jaki sposób to rozszerzenie należy zrobić. Mianowicie, jeżeli $\alpha \in BV([a,b])$, to bierzemy dowolny rozkład Jordana $\alpha = \beta - \gamma$ na różnicę dwóch funkcji rosnących $\beta, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ (np. mogą to być funkcje opisane w dowodzie klasycznego twierdzenia Jordana, tzn. Twierdzenia 2.6).
Wtedy, całkę Riemanna-Stieltjesa funkcji $f \in RS_\beta([a,b]) \cap RS_\gamma([a,b])$ definiujemy w następujący sposób

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\beta - \int_a^b f d\gamma \ . \tag{6.8}$$

Z Twierdzenia 6.3(b) wynka, że powyższa definicja nie zależy od wyboru funkcji β i γ.

Podamy teraz inną, równoważną definicję pojęcia całki Riemanna-Stieltjesa w której, podobnie jak to ma miejsce dla klasycznej całki Riemanna, używać będziemy tzw. punktów pośrednich.

Definicja 6.4. Niech $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą na przedziale $[a,b]$ i niech $f \in B([a,b])$. Dla zadanego dowolnie podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ wybierzmy dowolnie zbiór $\Pi = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\}$ złożony z punktów takich, że

$$a = t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{m-1} \leqslant \tau_m \leqslant t_m = b \ . \tag{6.9}$$

Wtedy sumę

$$S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b]) = \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \tag{6.10}$$

będziemy nazywać **sumą Riemanna-Stieltjesa** (lub RS-sumą).

W dalszym ciągu oznaczenie

$$A = \lim_{\mu(P)\to 0} S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b]) \ , \tag{6.11}$$

gdzie $\mu(P)$ oznacza rozmiar podziału P, będziemy rozumieć w następujący sposób: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|S_\alpha(f, P.\Pi; [a,b]) - A| \leqslant \varepsilon \tag{6.12}$$

dla każdego podziału P takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta$ i dla każdego zbioru punktów pośrednich spełniających nierówności (6.9).

Twierdzenie 6.5. *Jeżeli istnieje granica (6.11), to $f \in RS_\alpha([a,b])$ oraz*

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b]) = \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) \ .$$

Dowód. Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Wtedy, z (6.11), znajdziemy $\delta > 0$ takie, że

$$A - \varepsilon \leqslant S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b]) \leqslant A + \varepsilon \tag{6.13}$$

dla każdego podziału P takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta$. Jeżeli punkty pośrednie τ_j zmieniają się w przedziałach $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, 2, ..., m)$, to biorąc odpowiednio kres dolny i górny z wielkości $S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b])$, na podstawie (6.13) dostaniemy

$$A - \varepsilon \leqslant L_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant U_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant A + \varepsilon \ .$$

Zgodnie z Definicją 6.2 oznacza to, że $f \in RS_\alpha([a,b])$ oraz

$$\int\limits_a^b f(x) d\alpha(x) = A \ ,$$

ponieważ liczba A występująca w (6.11) jest określona jednoznacznie. □

Zauważmy, że implikacja odwrotna do stwierdzenia zawartego w Twierdzeniu 6.5 jest również prawdziwa: dla każdej funkcji $f \in RS_\alpha([a,b])$ granica (6.11) istnieje i jest równa RS-całce z funkcji f względem funkcji α.
Rzeczywiście, stwierdzenie to jest prostą konsekwencją nierówności

$$L_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b]) \leqslant U_\alpha(R, P; [a,b]) \ ,$$

które zachodzą dla każdej funkcji rosnącej α i dla wszystkich zbiorów punktów pośrednich Π, dla których ma miejsce (6.9).

Teraz, sformułujemy pewne użyteczne kryteria gwarantujące istnienie całki Riemanna-Stieltjesa. Niżej podane kryterium będzie konsekwencją Twierdzenia 6.5.

Wniosek 6.6. *Niech $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą na $[a,b]$. Funkcja $f \in RS_\alpha([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnych podziałów $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ takich, że $\mu(P_i) \leqslant \delta$ $(i = 1,2)$, mamy*

$$|S_\alpha(f, P_1, \Pi_1; [a,b]) - S_\alpha(f, P_2, \Pi_2; [a,b])| \leqslant \varepsilon \ , \tag{6.13}$$

gdzie Π_1 i Π_2 są dowolnymi zbiorami punktów pośrednich w podziałach P_1 i P_2, odpowiednio.

Dowód. Zawarte w powyższym wniosku stwierdzenie jest bezpośrednią konsekwencją kryterium Cauchy'ego dotyczącego istnienia granicy (6.11). □

Z Wniosku 6.6 możemy także wyprowadzić inną, użyteczną własność całki Riemanna-Stieltjesa.

Twierdzenie 6.7. *Jeżeli $f \in RS_\alpha([a,b])$ to $f \in RS_\alpha([a,c])$ oraz $f \in RS_\alpha([c,b])$ dla każdego $c \in (a,b)$. Ponadto, ma miejsce równość*

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = \int\limits_a^c f(x)d\alpha(x) + \int\limits_c^b f(x)d\alpha(x) \ . \tag{6.14}$$

Dowód. Dla zadanego $\varepsilon > 0$, na podstawie Wniosku 6.6, możemy znaleźć liczbę $\delta > 0$ taką, że nierówność (6.13) zachodzi dla dowolnych podziałów $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ takich, że $\mu(P_i) \leqslant \delta$ $(i = 1,2)$ i dla dowolnych zbiorów punktów pośrednich Π_1, Π_2 dla podziałów P_1, P_2, odpowiednio.

Weźmy podziały $P_1', P_2' \in \mathcal{P}([a,c])$ takie, że $\mu(P_1') \leqslant \delta$ i $\mu(P_2') \leqslant \delta$ oraz odpowiednie zbiory Π_1' i Π_2' punktów pośrednich. Ponadto, wybierzmy dowolny podział $P'' \in \mathcal{P}([c,b])$ taki, że $\mu(P'') \leqslant \delta$ i odpowiedni zbiór Π'' punktów pośrednich. Wtedy podział $P_i = P_i' \cup P'' \in \mathcal{P}([a,b])$ $(i = 1,2)$ jest taki, że $\mu(P_i) \leqslant \delta$ $(i = 1,2)$ i po zastosowaniu powyżej wspomnianego warunku, otrzymamy

$$|S_\alpha(f, P_1', \Pi_1'; [a,c]) - S_\alpha(f, P_2', \Pi_2'; [a,c])|$$
$$\leqslant |S_\alpha(f, P_1, \Pi_1; [a,b]) - S_\alpha(f, P_2, \Pi_2; [a,b])| \leqslant \varepsilon \ ,$$

gdzie $\Pi_i = \Pi_i' \cup \Pi''$ $(i = 1,2)$. Stąd wnosimy, że $f \in RS_\alpha([a,c])$.

Stwierdzenia, że $f \in RS_\alpha([c,b])$ dowodzi się analogicznie przez rozważenie podziałów $P' \in \mathcal{P}([a,c])$ i $P_1'', P_2'' \in \mathcal{P}([c,b])$.
Pozostaje udowodnić tylko równość (6.14). Jednakże, każda para podziałów $P' \in \mathcal{P}([a,c])$ i $P'' \in \mathcal{P}([c,b])$ prowadzi do podziału $P = P' \cup P'' \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) = \max\{\mu(P_1), \mu(P_2)\}$. Dla odpowiednich sum Riemanna-Stieltjesa (związanych ze zbiorami Π', Π'' i $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$) i dla całek Riemanna-Stieltjesa, mamy wtedy

$$S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b]) = S_\alpha(f, P', \Pi'; [a,c]) + S_\alpha(f, P'', \Pi''; [c,b]) \ .$$

Stąd, przechodząc do granicy przy $\mu(P) \to 0$, dostajemy

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = \int\limits_a^c f(x)d\alpha(x) + \int\limits_c^b f(x)d\alpha(x) \ ,$$

co kończy dowód. $\square$

Okazuje się, że Twierdzenia 6.7 nie można odwrócić w tym sensie, że jeżeli $f \in RS_\alpha([a,c])$ i $f \in RS_\alpha([c,b])$ to stąd nie musi wynikać, że $f \in RS_\alpha([a,b])$ dla $a < c < b$. Rozpatrzmy bowiem następujący przykład.

Przykład 6.8. Niech $f, \alpha\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in [-1,0] \\ 1 & \text{dla} \quad x \in (0,1] \ , \end{cases}$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in [-1,0] \\ 0 & \text{dla} \quad x \in (0,1] \ . \end{cases}$$

Oczywiście $f \in B([-1,1])$ i $\alpha \in BV([-1,1])$. Łatwo pokazać, że $f \in RS_\alpha([-1,0]) \cap RS_\alpha([0,1])$ oraz

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x) d\alpha(x) = \int\limits_{0}^{1} f(x) d\alpha(x) = 0 \ .$$

Zauważmy dalej, że funkcje f i α mają nieciągłość w tym samym punkcie $x = 0$. Pokażemy później, że to implikuje, że $f \notin RS_\alpha([-1,1])$.

Podamy teraz ważne kryterium na istnienie całki Riemanna-Stieltjesa.

Twierdzenie 6.9. *Niech $f \in B([a,b])$ i niech $\alpha : [a,b] \to R$ będzie funkcją rosnącą na $[a,b]$. Wówczas $f \in RS_\alpha([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że nierówność (6.4) zachodzi dla dowolnego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $f \in RS_\alpha([a,b])$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ tak, że ma miejsce stwierdzenie z Wniosku 6.6 dla tak dobranego δ. Ustalmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ taki, że $\mu(P) \leqslant \delta$, jak również dwa zbiory punktów pośrednich $\Pi_1 = \{\tau_1^1, \tau_2^1, ..., \tau_m^1\}$ i $\Pi_2 = \{\tau_1^2, \tau_2^2, ..., \tau_m^2\}$ odpowiadające podziałom $P_1 = P_2 = P$. Wtedy, stosując Wniosek 6.6, otrzymujemy

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j^1)(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) - \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j^2)(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \right|$$

$$= |S_\alpha(f, P, \Pi_1; [a,b]) - S_\alpha(f, P, \Pi_2; [a,b])| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{6.15}$$

Następnie, do każdego $i \in \{1, 2, ..., m\}$ dobieramy punkty $\tau_i^1, \tau_i^2 \in [t_{i-1}, t_i]$ w taki sposób, żeby

$$|f(\tau_i^2) - f(\tau_i^1)| = f(\tau_i^2) - f(\tau_i^1) \geqslant M_i - m_i - \frac{\varepsilon}{2m(\alpha(b) - \alpha(a))} ,$$

gdzie m_i, M_i oznaczają odpowiednio kres górny i kres dolny funkcji f na przedziale $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Oczywiście bez straty ogólności możemy tutaj założyć, że $\alpha(a) < \alpha(b)$. Wtedy, z (6.15) dostajemy

$$U_\alpha(f, P; [a, b]) - L_\alpha(f, P; [a, b]) = \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(f(\tau_i^2) - f(\tau_i^1) + \frac{\varepsilon}{2m(\alpha(b) - \alpha(a))} \right) (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (f(\tau_i^2) - f(\tau_i^1))(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{m(\alpha(b) - \alpha(a))} \leqslant \varepsilon$$

W ten sposób sprawdziliśmy, że nierówność (6.4) zachodzi dla każdej funkcji $f \in RS_\alpha([a, b])$.

Implikacja odwrotna jest oczywista. $\square$

Podane niżej twierdzenie opisuje dwie ważne klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna-Stieltjesa.

Twierdzenie 6.10.

(a) *Jeżeli $\alpha \in BV([a, b])$ to każda funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest RS-całkowalna względem funkcji α.*

(b) *Jeżeli $\alpha \in BV([a, b]) \cap C([a, b])$, to każda funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o wariacji ograniczonej na przedziale $[a, b]$ jest RS-całkowalna względem funkcji α i ma miejsce równość z Twierdzenia 6.5.*

Dowód. Biorąc pod uwagę wyżej poczynione obserwacje możemy bez straty ogólności założyć, że α jest rosnąca i nie jest stała.

(a) Funkcja f, jako funkcja ciągła na $[a, b]$, jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, b]$. Zatem, dla zadanego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $\delta > 0$ takie, że $|x - y| \leqslant \delta$ implikuje, że $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ dla $x, y \in [a, b]$.

Niech $P = \{t, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ będzie podziałem takim, że $\mu(P) \leqslant \delta$ i niech m_j, M_j będą zdefiniowane tak, jak wcześniej. Wtedy mamy:

$$U_\alpha(f, P; [a,b]) - L_\alpha(f, P; [a,b]) = \sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j)(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}))$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{m} (\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) = \varepsilon(\alpha(b) - \alpha(a)) \ ,$$

co pokazuje, że $f \in RS_\alpha([a,b])$
(b) Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ rozważmy podział $P_m = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ taki, że

$$\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{m} \quad (j = 1, 2, ..., m)$$

co jest możliwe ze względu na ciągłość funkcji α. Załóżmy, że f jest rosnąca. Wtedy, stąd że $M_j = f(t_j)$, $m_j = f(t_{j-1})$ otrzymujemy

$$U_\alpha(f, P; [a,b]) - L_\alpha(f, P; [a,b]) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{m} \sum_{j=1}^{m} (f(t_j) - f(t_{j-1}))$$

$$= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{m} [f(b) - f(a)] \leqslant \varepsilon \tag{6.16}$$

o ile wybierzemy m dostatecznie duże. To pokazuje, że $f \in RS_\alpha([a,b])$. Teraz, stąd że

$$L_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant S_\alpha(f, P, \Pi; [a,b]) \leqslant U_\alpha(f, P; [a,b])$$

dla każdego podziału $P \in \mathcal{P}([a,b])$, to szacowanie (6.16) pokazuje, że równość z Twierdzenia 6.5 jest także prawdziwa. Dla dowolnej funkcji α użyjemy znowu argumentacji związanej z rozkładem Jordana. □

Pokażemy teraz, że nieciągłość funkcji α w pewnym punkcie może być zrekompensowana poprzez ciągłość w tym punkcie funkcji f.
Dla większej wygody prowadzenia dalszych rozważań wprowadzimy teraz pewne pojęcie pomocnicze.

Definicja 6.11. Niech $M \subset \mathbb{R}$, $c \in M$ i niech f będzie funkcją określoną na pewnym otoczeniu liczby c. Wtedy granicę

$$\mathrm{osc}(f; c) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathrm{osc}(f; [c - \delta, c + \delta]) \ , \tag{6.17}$$

gdzie $\operatorname{osc}(f;A) = \sup_{t\in A} f(t) - \inf_{t\in A} f(t)$, nazywa się **lokalną oscylacją** funkcji f w punkcie c.

Zauważmy, że dla podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$, nierówność (6.4) może być zapisana w postaci

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f;[t_{j-1},t_j])(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \leqslant \varepsilon \ . \tag{6.18}$$

Twierdzenie 6.12. *Załóżmy, że $f \in RS_\alpha([a,b])$ dla pewnej funkcji $\alpha \in BV([a,b])$. Jeżeli α jest nieciągła w pewnym punkcie $c \in (a,b)$, to wtedy f jest ciągła w punkcie c.*

Dowód. Przypuśćmy, że zarówno α jak i f są nieciągłe w punkcie c. Oznacza to w szczególności, że $\operatorname{osc}(f;c) > 0$, gdzie symbol $\operatorname{osc}(f;c)$ jest zdefiniowany w (6.17). Dla funkcji α, możemy rozróżnić kilka rodzajów nieciągłości.

Załóżmy najpierw, że α ma nieciągłość pierwszego rodzaju (skok) w punkcie c, co oznacza, że $\alpha(c-) \neq \alpha(c+)$. Wtedy możemy znaleźć $\eta > 0$ takie, że dla każdego $\delta > 0$ istnieją punkty $\sigma \in [a,c)$ i $\tau \in (c,b]$ takie, że $0 < \tau - \sigma < \delta$ i $|\alpha(\tau) - \alpha(\sigma)| \geqslant \eta$. Teraz, ustalmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ o tej własności, że $\mu(P) < \delta$ oraz $t_{i-1} = \sigma$ i $t_i = \tau$ dla pewnego $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Dalej, wybieramy zbiory $K = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ i $H = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m\}$ złożone z punktów przedziału $[a,b]$ takich, że $\xi_j = \eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$ dla $j \neq i$ oraz $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i] = [\sigma, \tau]$. Dodatkowo możemy żądać, żeby

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f;c) \ .$$

Wtedy z konstrukcji mamy

$$\begin{aligned}|S_\alpha(f,P,K;[a,b]) - S_\alpha(f,P,H;[a,b])| &= (\alpha(\tau) - \alpha(\sigma))|f(\xi_i) - f(\eta_i)| \\ &\geqslant \frac{\eta}{2}\operatorname{osc}(f;c) > 0\end{aligned}$$

dla odpowiednich sum Riemanna-Stieltjesa. Ponieważ $\delta > 0$ było wybrane dowolnie, to z Wniosku 6.6 otrzymujemy, że $f \notin RS_\alpha([a,b])$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem.

Załóżmy teraz, że α ma nieciągłość usuwalną w punkcie c, co oznacza, że $\alpha(c-) = \alpha(c+) \neq \alpha(c)$. Wtedy możemy powtórzyć powyższe rozumowanie biorąc $\sigma = c$ lub $\tau = c$. Następnie otrzymamy taką samą sprzeczność jak poprzednio i to zakończy nasz dowód.

□

Zauważmy dalej, że wyżej przeprowadzone rozumowanie jest symetryczne względem α i f. Stąd otrzymujemy następującą wersję poprzedniego twierdzenia.

Twierdzenie 6.13. *Niech $f \in RS_\alpha([a,b])$ dla pewnego $\alpha \in BV([a,b])$. Wtedy, w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ przynajmniej jedna z funkcji α i f jest ciągła.*

Zauważmy teraz, że z Twierdzenia 6.3(a) i (c) oraz z równości (6.8) wynika, że zbiór $RS_\alpha([a,b])$ jest przestrzenią liniową. W dalszym ciągu pokażemy, że $RS_\alpha([a,b])$ jest także algebrą oraz wskażemy na inne, użyteczne własności.

Twierdzenie 6.14. *Niech $\alpha \in BV([a,b])$. Wtedy prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

(a) Jeżeli $f \in RS_\alpha([a,b])$ oraz $f([a,b]) \subset [c,d]$ i $h \in C([c,d])$, to $h \circ f \in RS_\alpha([a,b])$.

(b) Jeżeli $f, g \in RS_\alpha([a,b])$, to $fg \in RS_\alpha([a,b])$.

(c) Jeżeli $f \in RS_\alpha([a,b])$, to $|f| \in RS_\alpha([a,b])$.

Dowód. (a) Niech zadana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Ponieważ h jest jednostajnie ciągła na $[c,d]$, więc istnieje $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, takie, że $|h(u) - h(v)| \leqslant \varepsilon$ dla wszystkich $u, v \in [c,d]$ takich, że $|u - v| \leqslant \delta$. Na podstwie założenia możemy znaleźć podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ taki, że

$$U_\alpha(f, P; [a,b]) - L_\alpha(f, P; [a,b]) \leqslant \delta^2 \ . \tag{6.19}$$

Korzystając z wcześniej wprowadzonych oznaczeń na m_j oraz M_j i oznaczając przez k_j i K_j analogiczne liczby dla $h \circ f$, tzn.

$$k_j = \inf\{h(f(x)) : t_{j-1} \leqslant x \leqslant t_j\} \ ,$$

$$K_j = \sup\{h(f(x)) : t_{j-1} \leqslant x \leqslant t_j\} \ ,$$

możemy podzielić zbiór liczb $\{1, 2, 3, ..., m\}$ na dwie rozłączne części I oraz J wliczając j do zbioru I wtedy, jeśli $M_j - m_j \leqslant \delta$ i wliczając j do J, jeżeli $M_j - m_j > \delta$.

Jeżeli $j \in I$, to wtedy z doboru δ wynika, że $K_j - k_j \leqslant \varepsilon$ a więc dostaniemy

$$\sum_{j \in I} (K_j - k_j)(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \leqslant \varepsilon \sum_{j \in I} (\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \leqslant \varepsilon \mathrm{Var}(\alpha; [a,b]) \ . \tag{6.20}$$

Z drugiej strony, dla $j \in J$ mamy, że $K_j - k_j \leqslant 2||h||_C$. Stąd i z (6.19) dostajemy

$$\delta \sum_{j \in J} (\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) < \sum_{j \in J} (M_j - m_j)(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}))$$

$$\leqslant U_\alpha(f,P;[a,b]) - L_\alpha(f,P;[a,b]) \leqslant \delta^2 \ .$$

Stąd

$$\sum_{j\in J}(K_j - k_j)(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})) \leqslant 2||h||_C \sum_{j\in J}(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))$$
$$\leqslant 2||h||_c\delta \leqslant 2||h||_C\varepsilon \ . \tag{6.21}$$

Teraz, z (6.20) i (6.21) wnioskujemy, że

$$U_\alpha(h\circ f,P;[a,b]) - L_\alpha(h\circ f,P;[a,b]) \leqslant [\mathrm{Var}(\alpha;[a,b]) + 2||h||_C]\,\varepsilon \ ,$$

co oznacza, że $h\circ f \in RS_\alpha([a,b])$.
(b) Zauważmy, że

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2] \ .$$

Jeżeli teraz wybierzemy $h(u) = u^2$ i skorzystamy z Twierdzenia 6.3(a) i (c), dostaniemy tezę naszego stwierdzenia.
(c) Stwierdzenie to wynika z (a), jeżeli weźmiemy $h(u) = |u|$. □

Następnie twierdzenie omawia sytuację, gdy całka Riemanna-Stieltjesa może być zredukowana do całki Riemanna.

Twierdzenie 6.15. *Niech $\alpha \in C^1([a,b])$ i niech $f \in RS([a,b])$. Wtedy $f \in RS_\alpha([a,b])$ i ma miejsce równość:*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(t) = \int_a^b f(t)\alpha'(t)dt \ , \tag{6.22}$$

gdzie całkę po prawej stronie rozumiemy jak zwykłą całkę Riemanna.

Dowód. Zauważmy najpierw, że $f\alpha' \in RS([a,b])$, co jest bezpośrednią konsekwencją własności całki Riemanna. Weźmy dalej dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy znajdziemy $\delta_1 > 0$ takie, że

$$\left|\sum_{j=1}^m f(\tau_j)\alpha'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx\right| \leqslant \varepsilon \tag{6.23}$$

dla każdego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta_1$ i dla każdego naboru punktów pośrednich $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Podobnie, możemy znaleźć liczbę $\delta_2 > 0$ taką, że

$$\left|\sum_{j=1}^m \alpha'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - \int_a^b \alpha'(x)dx\right| \leqslant \varepsilon$$

dla każdego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta_2$ i dla każdego naboru punktów pośrednich $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Jeżeli $\sigma_j \in [t_{j-1}, t_j]$ jest innym punktem pośrednim ($j = 1, 2, ..., m$), to wtedy mamy

$$\sum_{j=1}^{m} |\alpha'(\tau_j) - \alpha'(\sigma_j)|(t_j - t_{j-1}) \leqslant 2\varepsilon \tag{6.24}$$

o ile $\mu(P) \leqslant \delta_2$, ponieważ α' jest ciągła na $[a,b]$.

W dalszym ciągu, ustalmy dowolny podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ taki, że $\mu(P) \leqslant \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej, znajdziemy punkty $\sigma_j \in [t_{j-1}, t_j]$ takie, że

$$\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) = \alpha'(\sigma_j)(t_j - t_{j-1}) \ ,$$

dla $j = 1, 2, ..., m$.

Stąd mamy

$$\sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] = \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)\alpha'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)[\alpha'(\sigma_j) - \alpha'(\tau_j)](t_j - t_{j-1}) \tag{6.25}$$

Jednakże, z (6.23), (6.24) i (6.25) otrzymujemy

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] - \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \right| \leqslant (2||f||_\infty + 1)\varepsilon \ .$$

To pokazuje, że

$$\lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] = \lim_{\mu(P)\to 0} S_\alpha(f, P; [a,b])$$

$$= \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \ ,$$

jeżeli skorzystamy z Twierdzenia 6.5. Koniec dowodu. □

Udowodnimy teraz twierdzenie uogólniające wyniki zawarte w Twierdzeniu 6.9.

Twierdzenie 6.16. *Niech $f \in B([a,b])$ oraz $\alpha \in BV([a,b])$. Wtedy następujące stwierdzenia są równoważne:*

(a) $f \in RS_\alpha([a,b])$.

(b) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta$ zachodzi nierówność

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| \leqslant \varepsilon \ . \tag{6.26}$$

(c) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta$ spełniona jest nierówność

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])\, Var(\alpha; [t_{j-1}, t_j]) \leqslant \varepsilon \ . \tag{6.27}$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że z (a) wynika (b). W tym celu załóżmy, że $f \in RS_\alpha([a,b])$. Ponieważ $\alpha \in BV([a,b])$, to zgodnie z twierdzeniem Jordana (Twierdzenie 2.6), możemy funkcję α przedstawić jako różnicę $\alpha = \beta - \gamma$ dwóch funkcji $\beta, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, które są rosnące na przedziale $[a,b]$. Daje to możliwość skorzystania z definicji całki Riemanna-Stieltjesa wyrażonej wzorem (6.8). Następnie, dla zadanego $\varepsilon > 0$, zgodnie z Twierdzeniem 6.9, możemy znaleźć $\delta > 0$ takie, że dla dowolnego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta$, mamy:

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])(\beta(t_j) - \beta(t_{j-1})) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Mając na uwadze powyższe oszacowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])|[\beta(t_j) - \gamma(t_j) - \beta(t_{j-1}) + \gamma(t_{j-1})]| \\
&= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])|[\beta(t_j) - \beta(t_{j-1})] - [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])[|\beta(t_j) - \beta(t_{j-1})| + |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f; [t_{j-1}, t_j])(\beta(t_j) - \beta(t_{j-1}))
\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f;[t_{j-1},t_j])(\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})) \leqslant \varepsilon \ .$$

Powyższe oszacowanie pokazuje, że spełniony jest warunek (b) i tym samym kończy dowód pierwszej implikacji.

Pokażemy teraz, że (b) implikuje (c).
W tym celu pokażemy najpierw, że przy założeniu (b) dla każdego punktu $x \in [a,b]$ przynajmniej jedna z funkcji f lub α jest ciągła w punkcie x. Zatem, dla zadanego $\varepsilon > 0$ znajdźmy $\delta > 0$ zgodnie z warunkiem (b). Ustalmy punkt $x_0 \in [a,b]$ i załóżmy na przykład, że α jest nieciągła w x_0. Wtedy mamy

$$\lim_{x\to x_0+} \alpha(x) \neq \alpha(x_0)$$

lub

$$\lim_{x\to x_0-} \alpha(x) \neq \lim_{x\to x_0+} \alpha(x) \ .$$

Dalej, weźmy liczbę $h > 0$ taką, że $h < \min\{\delta, b - x_0\}$ i rozważmy dowolny podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ taki, że $\mu(P) \leqslant \delta$. Dodajmy do podziału P dwa punkty x_h i $x_0 + h$, gdzie $x_h = x_0$ lub $x_h = x_0 - h$ i oznaczmy przez P' rozszerzony podział $P \cup \{x_h, x_0 + h\}$. Oczywiście mamy, że $\mu(P') \leqslant \delta$ a także, na mocy (6.26), otrzymujemy

$$|f(x_0+h) - f(x_0)||\alpha(x_0+h) - \alpha(x_h)| \leqslant \varepsilon \ .$$

Stąd, przy $h \to 0$ dostajemy, że $f(x_0+h) \to f(x_0)$, co oznacza, że f jest prawostronnie ciągła w punkcie x_0. Podobnie możemy pokazać lewostronną ciągłość funkcji f w punkcie x_0, co pozwala nam wywnioskować, że f jest ciągła w x_0.

Powtarzając powyższe rozumowanie przy założeniu, że funkcja f jest nieciągła w pewnym punkcie x_0, możemy udowodnić, że funkcja α jest ciągła w punkcie x_0.

Dalej, ustalmy $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $\delta > 0$ zgodnie z warunkiem (b) do liczby $\varepsilon/3$. Niech $M = \operatorname{osc}(f;[a,b])$ i niech $P = \{z_0, z_1, ..., z_k\} \in \mathcal{P}([a,b])$ będzie podziałem takim, że

$$\operatorname{Var}(\alpha;[a,b]) - \frac{\varepsilon}{3M} \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\alpha(z_j) - \alpha(z_{j-1})| \ . \tag{6.28}$$

Oczywiście, jeżeli weźmiemy dowolny podział P' taki, że $P \subset P'$, wtedy nierówność (6.28) zachodzi także dla P'. Tak, jak to pokazaliśmy wcześniej, warunek (b) implikuje, że w każdym punkcie przedziału $[a,b]$, przynajmniej z funkcji α lub f jest ciągła. Wykorzystując własności funkcji wahania ustalone w Rozdziale 2 wnioskujemy stąd, że przynajmniej jedna z funkcji V_α lub f, jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a,b]$. Ponieważ te funkcje są ograniczone, możemy znaleźć $\delta_1 > 0$ takie, że

$$\operatorname{osc}(f;[x',x])\operatorname{Var}(\alpha;[x',x]) \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \tag{6.29}$$

o ile $|x-x'| \leqslant \delta_1$ i $x' < z_j < x$ dla $j = 1,2,...,k$.

Następnie, niech $P_1 = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$ będzie takim podziałem, że $\mu(P_1) \leqslant \delta = \min\{\delta_1, \delta\}$. Oczywiście, nierówność (6.29) zachodzi dla podziału P_1. Rozszerzając podział P_1 przez włączenie tych punktów z_j, które są różne od punktów podziału P_1, otrzymujemy nowy podział $P_2' = \{x_0', x_1', ..., x_p'\}$ taki, że

$$\operatorname{Var}(\alpha;[a,b]) - \frac{\varepsilon}{3M} \leqslant \sum_{j=1}^{p} |\alpha(x_j') - \alpha(x_{j-1}')| \ .$$

Stąd otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{p} [\operatorname{Var}(\alpha;[x_{j-1}', x_j]) - |\alpha(x_j') - \alpha(x_{j-1})|] \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \ .$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{j=1}^{p} \operatorname{osc}(f;[x_{j-1}', x_j'])\operatorname{Var}(\alpha;[x_{j-1}', x_j]) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{p} \operatorname{osc}(f;[x_{j-1}', x_j'])\{\operatorname{Var}(\alpha;[x_{j-1}', x_j']) - |\alpha(x_j') - \alpha(x_{j-1}')|\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p} \operatorname{osc}(f;[x_{j-1}', x_j'])|\alpha(x_j') - \alpha(x_{j-1}')| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon \ . \end{aligned}$$

W końcu zauważmy, że możemy napisać

$$S = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f;[x_{j-1}, x_j])\operatorname{Var}(\alpha;[x_{j-1}, x_j]) = S' + S'' \ ,$$

gdzie S'' oznacza sumę tych wszystkich składników, dla których istnieje k takie, że $x_{j-1} < z_k < x_j$, natomiast S' oznacza pozostałą część sumy S, będącą sumą częściową sumy S_0. Oczywiście mamy, że $S' \leqslant S_0 \leqslant 2\varepsilon/3$. Dalej, z (6.29) wiemy, że $S'' \leqslant \varepsilon/3$, a więc $S \leqslant \varepsilon$.

Pozostało do pokazania, że (c) implikuje (a). Dla realizacji tego celu przedstawmy znowu funkcję α w postaci $\alpha = \beta - \gamma$, gdzie

$$\beta(x) = \frac{1}{2}[V_\alpha(x) + \alpha(x)] \ , \quad \gamma(x) = \frac{1}{2}[V_\alpha(x) - \alpha(x)]$$

(por. Twierdzenie 2.9), gdzie V_α oznacza funkcję variacji funkcji α. Oczywiście mamy

$$\mathrm{Var}(\alpha;[x,y]) = \mathrm{Var}(\beta;[x,y]) + \mathrm{Var}(\gamma,[x,y]) \tag{6.30}$$

dla dowolnego przedziału $[x,y] \subset [a,b]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $\delta > 0$ zgodnie z warunkiem (c). Wtedy, biorąc pod uwagę (6.27), dla dowolnego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$ takiego, że $\mu(P) \leqslant \delta$, otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{osc}(f;[t_{j-1},t_j])\mathrm{Var}(\alpha;[t_{j-1},t_j]) \leqslant \varepsilon \ .$$

Z (6.30), otrzymamy wtedy nierówność

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{osc}(f;[t_{j-1},t_j])\{\mathrm{Var}(\beta;[t_{j-1},t_j]) + \mathrm{Var}(\gamma;[t_{j-1},t_j])\} \leqslant \varepsilon \ ,$$

i stąd mamy, że

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \mathrm{osc}(f;[t_{j-1},t_j])(\beta(t_j) - \beta(t_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{osc}(f;[t_{j-1},t_j])\mathrm{Var}(\beta;[t_{j-1},t_j]) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \mathrm{osc}(f;[t_{j-1},t_j])(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{osc}(f;[t_{j-1},t_j])\mathrm{Var}(\gamma;[t_{j-1},t_j]) \leqslant \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Z powyższych oszacowań oraz z Twierdzenia 6.9 wnioskujemy, że zarówno $f \in RS_\beta([a,b])$ jak i $f \in RS_\gamma([a,b])$, a zatem, zgodnie z definicją RS-całki względem funkcji o wariacji ograniczonej to implikuje, że $f \in RS_\alpha([a,b])$. Koniec dowodu. □

Twierdzenie 6.16 ma bardzo użyteczne konsekwencje związane z całkowalnością w sensie Riemanna-Stieltjesa funkcji f względem funkcji α oraz względem jej funkcji wariacji V_α.

Wniosek 6.17. *Niech $f \in B([a,b])$ i niech $\alpha \in BV([a,b])$. Przy tych założeniach $f \in RS_\alpha([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in RS_{V_\alpha}([a,b])$, gdzie V_α oznacza funkcję wahania funkcji α.*

Dowód. Ponieważ funkcja $V_\alpha(x) = \mathrm{Var}(\alpha; [a, x])$ jest rosnąca na przedziale $[a, b]$, więc ma wariację ograniczoną na $[a, b]$. Załóżmy dalej, że $f \in RS_\alpha([a, b])$. Wtedy, zgodnie z Twierdzeniem 6.16, spełnione są nierówności (6.26) i (6.27). Z drugiej strony, ze względu na równość

$$\mathrm{Var}(\alpha; [t_{j-1}, t_j]) = V_\alpha(t_j) - V_\alpha(t_{j-1}) \ ,$$

po zastosowaniu Twierdzenia 6.16(b) otrzymujemy, że $f \in RS_{V_\alpha}([a, b])$. Ponieważ powyższe rozumowanie jest symetryczne względem funkcji α i V_α, otrzymujemy stąd tezę twierdzenia. □

Podamy teraz twierdzenie o pewnej nierówności dla całki Riemanna-Stieltjesa, która ma ważne zastosowania w teorii równań całkowych.

Twierdzenie 6.18. *Jeżeli $\alpha \in BV([a, b])$ i $f \in RS_\alpha([a, b])$, to ma miejsce nierówność*

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dV_\alpha(x) \ . \tag{6.31}$$

Dowód. Z Wniosku 6.17 dedukujemy, że $f \in RS_{V_\alpha}([a, b])$, a więc całka występująca po prawej stronie (6.31) jest poprawnie zdefiniowana.
Dalej, weźmy dowolny podział $\{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$ i wybierzmy zbiór punktów pośrednich $\Pi = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\}$ dla tego podziału. Wtedy mamy

$$\left| \sum_{j=1}^m f(\tau_j)(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \right| \leqslant \sum_{j=1}^m |f(\tau_j)||\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^m |f(\tau_j)| \mathrm{Var}(\alpha; t_{j-1}, t_j) = \sum_{j=1}^m |f(\tau_j)|(V_\alpha(t_j) - V_\alpha(t_{j-1})) \ ,$$

gdzie wykorzystaliśmy wcześniej podane własności wariacji funkcji. Ponieważ powyższa nierówność jest spełniona dla dowolnego podziału $P \in \mathcal{P}([a, b])$ i dla dowolnego zbioru punktów pośrednich Π, więc wykorzystując Twierdzenie 6.5, ciągłość funkcji $u \to |u|$ i Twierdzenie 6.14(c), wnioskujemy o prawdziwość nierówności (6.31). □

W następnym twierdzeniu zebrane są pewne stwierdzenia będące w zasadzie wnioskami z Twierdzenia 6.18.

Twierdzenie 6.19. *Całka Riemanna-Stieltjesa ma następujące własności:*

(a) Dla $\alpha \in BV([a,b])$ oraz $f \in RS_\alpha([a,b])$ spełniona jest nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leqslant ||f||_\infty Var(\alpha;[a,b]) \ .$$

(b) Jeżeli $f_n \in RS_\alpha([a,b])$ dla $n = 1,2,...$ oraz $f \in RS_\alpha([a,b])$ a ponadto jeżeli $||f_n - f||_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$, wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

dla $\alpha \in BV([a,b])$.

(c) Jeżeli (α_n) jest ciągiem złożonym z funkcji $\alpha_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ o wariacji ograniczonej oraz $\alpha \in BV([a,b])$ a także $Var(\alpha_n - \alpha;[a,b]) \to 0$ przy $n \to \infty$, to wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

dla wszystkich funkcji $f \in RS_{\alpha_n}([a,b])$ i $f \in RS_\alpha([a,b])$.

Dowód.

(a) Na podstawie Twierdzenia 6.18 oraz Twierdzenia 6.3(e) otrzymujemy

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dV_\alpha(x) \leqslant \int_a^b ||f||_\infty dV_\alpha(x)$$

$$= ||f||_\infty \int_a^b dV_\alpha(x) = ||f||_\infty \mathrm{Var}(\alpha;[a,b]) \ .$$

Dowodzi to punktu (a).

(b) Korzystając znowu z Twierdzenia 6.18 i Twierdzenia 6.3(e), dostajemy:

$$\left|\int_a^b f_n(x)d\alpha(x) - \int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dV_\alpha(x)$$

$$\leqslant ||f_n - f||_\infty \mathrm{Var}(\alpha;[a,b]) \ ,$$

co dowodzi punktu (b).

(c) Stosując Twierdzenie 6.18 z α zamienionym na $\alpha_n - \alpha$, otrzymujemy

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| = \left|\int_a^b f(x)d(\alpha_n(x) - \alpha(x))\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)|dV_{\alpha_n-\alpha}(x) \leqslant ||f||_\infty \mathrm{Var}(\alpha_n - \alpha; [a,b]) \ .$$

Stąd wynika stwierdzenie z punktu (c). □

Zadania

1. Wyznaczyć całkę

$$\int_0^\Pi (x-1)d\alpha(x) \ ,$$

gdzie $\alpha(x) = \cos x \cdot \mathrm{sgn} x$.

2. Znaleźć przykład funkcji $f \in B([a,b])$ oraz $\alpha \in BV([a,b])$ takich, że $f^2 \in RS_\alpha([a,b])$ i $|f| \in RS_\alpha([a,b])$ ale $f \notin RS_\alpha([a,b])$.

3. Pokazać, że

$$\int_0^3 x d\alpha(x) = \frac{3}{2} \ ,$$

gdzie $\alpha(x) = x - [x]$.

4. Niech f oznacza funkcję Dirichleta określoną na przedziale $[0,1]$ i niech $\alpha \in BV([0,1])$. Pokazać, że $f \in RS_\alpha([0,1])$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest stała.

5. Niech $f, g \in ([a,b])$ i niech $\alpha \in BV([a,b])$. Określmy funkcję $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ przyjmując

$$\beta(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t) \ .$$

Pokazać, że

$$\int_a^b g(t)d\beta(t) = \int_a^b f(t)g(t)d\alpha(t) \ .$$

6. Niech $\alpha \in BV([a,b]) \cap C([a,b])$ i niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą na przedziale $[a,b]$. Pokazać, że istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = f(a)(\alpha(\xi) - \alpha(a)) + f(b)(\alpha(b) - \alpha(\xi)) \ .$$

7. Niech $f \in C^1([a,b])$ i niech $g \in C([a,b])$. Udowodnić, że istnieje $c \in (a,b)$ takie, że

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^c g(x)dx + f(b)\int\limits_c^b g(x)dx \ .$$

8. Niech $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe i dodatkowo, niech α będzie ściśle rosnąca na $[a,b]$. Określmy funkcję $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ przyjmując

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)d\alpha(t) \ .$$

Wtedy możemy zdefiniować tzw. α-pochodną funkcji F w następujący sposób

$$\frac{dF}{d\alpha}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{\alpha(x+h) - \alpha(x)} \ .$$

Pokazać, że

$$\frac{dF}{d\alpha}(x) = f(x)$$

dla każdego $x \in [a,b]$.

9. Niech $f \in BV([a,b]) \cap C([a,b])$. Udowodnić, że

$$\int\limits_a^b f(x)df(x) = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2} \ .$$

10. Znaleźć funkcje $\alpha \in BV([a,b])$ i $f \in RS_\alpha([a,b])$ takie, że

$$\left| \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) \right| > \int\limits_a^b |f(x)|d\alpha(x) \ .$$

Bibliografia

1. J. Appell, J. Banaś, N. Merentes: *Bounded Variation and Around*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis 17, Walter de Gruyter, Berlin/Boston 2014.

2. G.M. Fichtenholz: *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.

3. J. Jakubowski, R. Sztencel: *Wstęp do Teorii Prawdopodobieństwa*, Wyd. SCRiPT, Warszawa 2004.

4. M.A. Krasnosel'skii, Y.B. Rutickii: *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen 1961.

5. M. Loeve: *Probability Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York 1963.

6. S. Łojasiewicz: *Wstęp do Teorii Funkcji Rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1973.

7. I.P. Natanson: *Theory of Functions of a Real Variable*, Ungar, New York 1960.

8. W. Rudin: *Podstawy Analizy Matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.

9. R. Sikorski, *Funkcje Rzeczywiste*, PWN, Warszawa 1958.