Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Środowiskowe Studia Doktoranckie
z Nauk Matematycznych

Analiza harmoniczna na grupach jednorodnych na przykładzie grupy Heisenberga

Paweł Głowacki

Uniwersytet Wrocławski
Pawel.Glowacki@math.uni.wroc.pl

Publikacja współfinansowana ze środków Uni Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Informacje wstępne

Grupa jednorodna to nilpotentna grupa Liego, którą jako rozmaitość można utożsamić z przestrzenią $\boldsymbol{R}^n$, w taki sposób że działania grupowe wyrażają się przez funkcje wielomianowe. Dodatkowo zakłada się istnienie grupy automorfizmów zwanych dylatacjami o własnościach podobnych do jednokładności $x \mapsto tx$ w $\boldsymbol{R}^n$. Jeśli w $\boldsymbol{R}^3$ wprowadzimy działanie

$$(x, y) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

otrzymamy najprostszą nieabelową strukturę grupy nilpotentnej, a po zdefiniowaniu dylatacji

$$\delta_t(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, t^2x_3), \quad t > 0,$$

grupę jednorodną zwaną grupą Heisenberga. Ten modelowy przykład grupy jednorodnej nie tylko pozwala zademonstrować szereg zjawisk charakterystycznych dla analizy harmonicznej na grupach jednorodnych, ale i sam w sobie jest ciekawym obiektem o wieloaspektowych związkach z szeroko rozumianą analizą w $\boldsymbol{R}^n$.

Analiza harmoniczna na grupach jednorodnych zajmuje się zagadnieniami podobnymi do tych, które są przedmiotem badań analizy w $\boldsymbol{R}^n$. Występuje tu cała gama przestrzeni funkcyjnych, takich jak przestrzenie L^p, przestrzenie Hardy'ego, Höldera, Sobolewa, i mnogość charakterystycznych operatorów liniowych i nieliniowych. Często są to operatory splotu, a więc przemienne z translacjami grupowymi lub też operatory jednorodne względem automorficznych dylatacji. Wiedza o tych klasach operatorów przydaje się do badania bardziej złożonych operacji, które nie są już ani niezmiennicze, ani jednorodne. Często celem jest opis własności pewnego nieograniczonego operatora różniczkowego ważnego z punktu widzenia teorii równań różniczkowych cząstkowych lub teorii funkcji holomorficznych wymagający wzięcia pod uwagę całych rodzin liniowych operatorów ograniczonych. Dlatego pytanie o ograniczoność, np. na przestrzeniach L^p, wielu pojawiających się operacji jest jednym z najważniejszych.

Jako że cała ta analiza odbywa się na grupie Liego, poświęcimy też trochę czasu na naszkicowanie podstaw teorii grup Liego i teorii reprezentacji unitarnych, ilustrując je przykładem grupy Heisenberga.

Wykład ma charakter mieszany. Obok fragmentów prowadzonych metodą szkolną z pełnym wyprowadzeniem i ścisłymi dowodami, będą też podawane informacje dotyczące szerszego kontekstu omawianych zagadnień.

Plan wykładu

1. **Analiza harmoniczna w $\boldsymbol{R}^n$:** dystrybucje, transformata Fouriera, operatory splotu i mnożenia, funkcje maksymalne i zbieżność prawie wszędzie, całki osobliwe, teoria Calderóna-Zygmunda.
2. **Grupa Heisenberga I:** elementy teorii Liego, pola wektorowe, algebra Liego, reprezentacje unitarne, reprezentacje Schrödingera, wzór Plancherela, lemat Riemanna-Lebesgue'a, splot skręcony.

3. Grupa Heisenberga II: podlaplasjan, hipoeliptyczność, asymptotyka jądra ciepła, przestrzenie funkcyjne, rachunek symboliczny, kwantyzacja.

4. Grupy nilpotentne: grupy jednorodne, reprezentacje, operatory Rocklanda, nieróżniczkowe operatory modelowe, rachunek symboliczny Melina.

Wykład będzie się odbywał się co miesiąc w czterech 8-godzinnych częściach. Przed każdą kolejną częścią udostępnione zostaną notatki wykładowcy zawierające cały przeznaczony do wyłożenia w tej części materiał. Za każdym razem podana też zostanie odpowiednia literatura obejmująca ten materiał.

Każda część wykładu kończy się zadaniem domowym ściśle związanym z wyłożonym materiałem i mającym charakter uzupełniający jego treść. Rozwiązanie jednego z tych zadań i przedstawienie rozwiązania w pliku PDF w terminie do 31 grudnia jest warunkiem zaliczenia wykładu.

Od słuchaczy oczekuje się znajomości analizy funkcjonalnej, teorii równań różniczkowych cząstkowych, rozmaitości różniczkowalnych, teorii dystrybucji i analizy Fouriera w elementarnym zakresie przewidzianym w typowych kursach uniwersyteckich.

Część I: Analiza harmoniczna w $\boldsymbol{R}^n$

Polecana literatura:

1. L. Grafakos, Classical Fourier analysis, rozdziały 2 i 4,
2. L. Hörmander, Analysis of differential operators, tom I, rozdziały 1–4,
3. W. Rudin, Analiza funkcjonalna, rozdziały 6 i 7,
4. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, rozdziały 1 i 2,
5. Stein, Harmonic analysis, rozdziały 1 i 2,
6. Stein-Weiss, Fourier analysis on Euclidean spaces, rozdział 1.

1. Dystrybucje temperowane na $\boldsymbol{R}^n$

1. Funkcja $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ nazywa się *szybko malejąca*, jeśli dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ istnieje stała $C_N > 0$, taka że

$$|f(x)| \leqslant C_n(1+|x|)^{-N}.$$

Funkcja $F\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$ nazywa się *wolno rosnąca*, jeśli istnieją stałe $C > 0$ i $N > 0$, takie że

$$|F(x)| \leqslant C(1+|x|)^{N}.$$

Miara borelowska μ na $\boldsymbol{R}^n$ nazywa się *wolno rosnąca*, jeśli istnieje $N > 0$, takie że

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+|x|)^{-N} \mu(dx) < \infty.$$

2. Mówimy, że f jest funkcją Schwartza i piszemy $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, jeśli $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ i każda z pochodnych $D^\alpha f$ jest funkcją szybko malejącą.

3. Przestrzeń $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ jest przestrzenią liniową, a wyposażona w rodzinę półnorm

$$\|f\|_{(N)} = \max_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{x\in\boldsymbol{R}^n} (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)|$$

staje się lokalnie wypukłą przestrzenią Frechéta.

4. *Dystrybucją temperowaną* nazywamy ciągły funkcjonał liniowy na przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$.

5. Przykłady. Przykładami dystrybucji temperowanych są a) wolno rosnące funkcje lokalnie całkowalne, b) miary wolno rosnące, c) w szczególności delty Diraca.

6. Przykład (dystrybucja Hilberta). Niech

$$\langle H, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{f(x)\,dx}{x}, \quad f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}).$$

Granica ta zawsze istnieje i definiuje dystrybucję temperowaną na $\boldsymbol{R}$, która nie jest miarą wolno rosnącą.

7. Niech będzie dana dystrybucja T na $\boldsymbol{R}^n$ i funkcja lokalnie całkowalna F na otwartym zbiorze $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$. Mówimy, że dystrybucja T zgadza się z F na $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$, jeśli

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega F(x)f(x)\,dx, \quad f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n),\ \operatorname{supp} f\subset\Omega.$$

Zauważmy, że dystrybucja H z Przykładu 6 zgadza się z funkcją $F(x)=1/x$ na zbiorze $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

8. *Nośnikiem dystrybucji* T na $\boldsymbol{R}^n$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty S, taki że T znika (zgadza się z funkcją zerową) na $\boldsymbol{R}^n\setminus S$.

9. Jedynymi dystrybucjami o nośniku punktowym $S=\{p\}$ są dystrybucje postaci

$$\langle T_\alpha, f\rangle = D^\alpha f(p)$$

i ich kombinacje liniowe.

10. Twierdzenie. Niech $k\colon \boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ będzie ciągłą funkcją jednorodną stopnia $-n$. Załóżmy jeszcze, że

$$\int_{1\leqslant|x|\leqslant 2} k(x)\,dx = 0. \tag{*}$$

Wtedy wzór

$$\langle K, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)k(x)\,dx$$

definiuje dystrybucję jednorodną stopnia $-n$, która na otwartym zbiorze $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ zgadza się z funkcją k.

Przypuśćmy na odwrót, że dana jest dystrybucja K jednorodna stopnia $-n$, która na $\boldsymbol{R}^n$ pokrywa się z pewną funkcją ciągłą k. Wtedy funkcja k jest jednorodna stopnia

$-n$ i spełnia warunek (*). Co więcej, sama dystrybucja zadana jest wzorem

$$\langle K, f\rangle = c\delta + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)k(x)\,dx$$

dla pewnej stałej c.

11. Dowód: Jeśli $f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$|f(x)-f(0)|\leqslant\|f\|_{(1)},\quad |x||f(x)|\leqslant\|f\|_{(1)}.$$

Dlatego

$$|\langle K,f\rangle|\leqslant\|f\|_{(1)}\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-n+1}\,dx+\|f\|_{(1)}\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-n-1}\,dx\leqslant C\|f\|_{(1)},$$

co pokazuje że K jest dystrybucją.
Aby udowodnić drugą część twierdzenia, zdefiniujmy pomocniczą dystrybucję

$$\langle K_0,f\rangle=\int_{|x|\leqslant 1}(f(x)-f(0))k(x)\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}f(x)k(x)\,dx,$$

która, jak nietrudno spostrzec, także zgadza się z funkcją k poza zerem. Zatem $K = K_0+T$, gdzie T ma nośnik punktowy $S=\{0\}$. Stosując K do funkcji $f^t(x)=f(tx)$ dla $0<t<1$ i korzystając z tożsamości

$$\langle K,f^t\rangle-\langle K,f\rangle=0,$$

otrzymujemy

$$f(0)\int_{1\leqslant|x|\leqslant 2}k(x)\,dx=\langle T,f^t\rangle-\langle T,f\rangle.$$

Prawa strona dąży do zera, gdy $t\to 0$, a więc warunek (*) musi być spełniony. Co więcej, lewa strona nie zależy od t, więc $T=c\delta_0$.

12. *Splotem* dystrybucji T z funkcją f klasy Schwartza nazywamy funkcję

$$T\star f(x)=\langle T,\widetilde{f}_x\rangle=\int T(y)f(x-y)\,dy.$$

Taki splot jest zawsze funkcją klasy C^∞, a jeśli f ma nośnik zwarty, to nawet klasy Schwartza.

13. Splot dystrybucji Hilberta (Przykład 6) z funkcją $f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ to funkcja

$$H\star f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{f(x-y)\,dy}{y}.$$

Przekształcenie $f\mapsto Hf=H\star f$ nazywamy transformatą Hilberta. Zauważmy, że $H(f_a)=(Hf)_a$, a więc H jest przemienne z translacjami (translacyjnie niezmiennicze).

14. Niech T będzie dystrybucją temperowaną. Wtedy odwzorowanie

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n) \ni f \mapsto T \star f \in C^\infty(\boldsymbol{R}_n)$$

jest ciągłe i translacyjnie niezmiennicze. Zbieżność w $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ to zbieżność niemal jednostajna wszystkich pochodnych.

2. Transformata Fouriera

1. *Transformatą Fouriera* funkcji $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ nazywamy funkcję

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

2. Lemat Riemanna-Lebesgue'a. Jeśli $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, to $\widehat{f} \in C_0(\boldsymbol{R}^n)$.

3. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$.

4. Jeśli $f, g \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$\int f(x)\widehat{g}(x)\, dx = \int \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi.$$

5. Wzór na odwrócenie. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$f(x) = \int \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

6. Twierdzenie Plancherela. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$\int |f(x)|^2\, dx = \int |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

7. Transformata Fouriera jest izomorfizmem przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$. Jest także izometrią przestrzeni Hilberta $L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

8. Jeśli $f, g \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, to

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

9. Jeśli T jest dystrybucją temperowaną, to wzór

$$\langle S, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle$$

definiuje nową dystrybucję temperowaną, którą będziemy oznaczać przez $S = \widehat{T}$ i nazywać transformatą Fouriera T. Mamy więc

$$\langle \widehat{T}, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle.$$

10. Przykład. Niech
$$\langle H, f\rangle = \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{f(x)\,dx}{x}$$
będzie dystrybucją Hilberta. Wtedy
$$\begin{aligned}
\langle \widehat{H}, f\rangle = \langle H, \widehat{f}\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1/\varepsilon} \frac{\widehat{f}(x)\,dx}{x}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{1}{x}\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1/\varepsilon} e^{-ix\xi} f(\xi)\,d\xi\,dx\\
&= \frac{1}{i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int f(\xi)\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1/\varepsilon} \frac{\sin x\xi}{x}\,dx\,d\xi\\
&= \int f(\xi)h(\xi)\,d\xi,
\end{aligned}$$
gdzie $h(\xi) = \frac{\pi}{2i}\sigma(\xi)$. Zatem transformatę Fouriera dystrybucji H można utożsamić z funkcją ograniczoną h.

3. Funkcje maksymalne i zbieżność prawie wszędzie

1. Lemat Wienera. Niech X będzie przestrzenią metryczną z miarą σ-skończoną. Jeśli rodzina $\mathcal{B}$ kul $B_\alpha = B(a_\alpha, r_\alpha)$ stanowi pokrycie zbioru $E \subset X$ i $R_0 = \sup_\alpha r_\alpha < \infty$, to istnieje przeliczalna podrodzina parami rozłącznych kul $B_k = B_k(a_k, r_k)$, taka że
$$|E|^\star \leqslant \sum_k |B'_k|,$$
gdzie $B'_k = B(a_k, 4r_k)$.

2. Dowód: Kulę B_1 wybieramy tak, by $r_1 \geqslant 2R_0/3$. Przypuśćmy, że kule $B_1, B_2, \ldots, B_k$ już zostały wybrane. Niech
$$\mathcal{B}_k = \{B \in \mathcal{B} : B \cap B_s = \emptyset \text{ dla } 1 \leqslant s \leqslant k\}.$$
Jeśli $\mathcal{B} = \emptyset$, to kończymy proces wyboru. Jeśli nie, to wybieramy kulę $B_{k+1} = B(a_{k+1}, r_{k+1})$ tak, aby
$$r_{k+1} \geqslant 2R_k/3, \quad R_k = \sup\{r : B(a,r) \in \mathcal{B}_k\}.$$
W ten sposób zdefiniowaliśmy (skończony lub nieskończony) ciąg kul (B_k) parami rozłącznych. Jeśli $\sum_k |B_k| = \infty$, to teza jest spełniona w sposób trywialny. Jeśli zaś
$$\sum_k |B_k| < \infty,$$
to $|B_k| \to 0$, a więc i $r_k \to 0$. Pokażemy, że wtedy $E \subset \cup_k B'_k$.
Jeśli $x \in E$, to $x \in B$ dla pewnej kuli $B \in \mathcal{B}$. Wystarczy pokazać, że $B \subset \bigcup_k B'_k$. W tym celu wystarczy rozpatrzeć kule $B = B(a, r)$, które nie wchodzą w skład ciągu (B_k). Istnieje wtedy najmniejsze k, takie że $r_{k+1} < 2r/3$ (bo ciąg r_k dąży do zera).

Wtedy też B musi przecinać, B_s dla pewnego $s < k$, bo inaczej $B \in \mathcal{B}_k$ i

$$r > 3r_{k+1}/2 \geqslant R_k,$$

a to jest sprzeczność. Co więcej, $r \leqslant 3r_s/2$. W takim razie

$$B \subset B(a_s, r_s + 2r) \subset B(a_s, 4r_s) = B'_s,$$

co było do okazania.

3. Niech $\mathcal{M}(\boldsymbol{R}^n)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych. Mówimy, że odwzorowanie $T\colon L^p(\boldsymbol{R}^n) \to \mathcal{M}(\boldsymbol{R}^n)$ jest słabego typu (p,p), jeśli istnieje stała $C > 0$, taka że dla każdego $\alpha > 0$

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}|^{1/p} \leqslant \frac{C\|f\|_p}{\alpha}.$$

Warto w tym miejscu warto przypomnieć nierówność Kołmogorowa: Dla $f \geqslant 0$

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^n : f(x) > \alpha\}|^{1/p} \leqslant \frac{\|f\|_p}{\alpha}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Nierówność Kołmogorowa mówi, że odwzorowanie tożsamościowe jest słabego typu (p,p) dla $1 \leqslant p < \infty$.

4. Operator

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \int_B |f(y)|\,dy$$

nazywamy *operatorem maksymalnym Hardy'ego–Littlewooda.*

5. Twierdzenie. Operator maksymalny Hardy'ego–Littlewooda jest słabego typu $(1,1)$.

6. Dowód: Niech $\alpha > 0$ i niech

$$E = \{x \in \boldsymbol{R}^n : Mf(x) > \alpha\}.$$

Z definicji, dla każdego $x \in E$ istnieje kula $B(x)$, taka że

$$|B(x)| < \alpha^{-1} \int_{B(x)} |f(y)|\,dy, \quad |B(x)| \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_1.$$

Kule te stanowią pokrycie zbioru E. Na mocy lematu Wienera można wybrać spośród nich ciąg parami rozłącznych kul B_k, taki że

$$|E| \leqslant 4^n \sum_k |B_k|,$$

skąd

$$|E| \leqslant 4^n \sum_k \alpha^{-1} \int_{B_k} |f| \leqslant \frac{4^n\|f\|_1}{\alpha}.$$

7. Twierdzenie Lebesgue'a. Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na $\boldsymbol{R}^n$. a) Jeśli B_k jest ciągiem kul zawierających 0 o promieniach dążących do zera, to

$$\lim_{k\to 0} |B_k|^{-1} \int_{B_k} f(x+y)\,dy = f(x)$$

prawie wszędzie. b) Jeśli Q_k jest ciągiem kostek zawierających 0 o promieniach dążących do zera, to

$$\lim_{k\to 0} |Q_k|^{-1} \int_{Q_k} f(x+y)\,dy = f(x)$$

prawie wszędzie.

8. Dowód: Przez wybór odpowiedniej normy możemy ograniczyć się do przypadku kul. Niech

$$\Omega f(x) = \limsup_k |B|^{-1} \int_{B_k} |f(y) - f(x)|\,dy.$$

Chcemy udowodnić, że $\Omega f(x) = 0$ p.w. dla $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Zauważmy, że tak jest, gdy f pochodzi z podprzestrzeni $C_c(\boldsymbol{R}^n)$, która jest gęsta w $L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Zauważmy też, że

$$\Omega f(x) \leqslant Mf(x) + |f(x)|,$$

a więc jest operatorem słabego typu $(1,1)$. Dla zadanego $\varepsilon > 0$ i $N > 0$ niech $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ i $\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon/N$. Wtedy

$$\begin{aligned} |\{x \in \boldsymbol{R}^n : \Omega f(x) > 1/N\} &= |\{x \in \boldsymbol{R}^n : \Omega(f-\varphi)(x) > 1/N\}| \\ &\leqslant CN\|f-\varphi\|_1 < C\varepsilon, \end{aligned}$$

co wobec dowolności ε i N pokazuje, że $\Omega f(x) = 0$ prawie wszędzie.

9. Interpolacja Marcinkiewicza. Niech $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Niech $T\colon L^p(\boldsymbol{R}^n) + L^q(\boldsymbol{R}^n) \to \mathcal{M}(\boldsymbol{R}^n)$ będzie odwzorowaniem podaddytywnym, tzn. spełniającym warunek $|T(f+g)| \leqslant |Tf| + |Tg|$. Jeśli T jest jednocześnie słabego typu (p,p) i (q,q), to dla każdego $p < r < q$ istnieje stała C_r, taka że

$$\|Tf\|_r \leqslant C_r \|f\|_r.$$

Innymi słowy, T jest mocnego typu (r,r).

10. Wniosek. Operator maksymalny Hardy'ego–Littlewooda jest mocnego typu (p,p) dla każdego $1 < p \leqslant \infty$.

4. Całki osobliwe. Teoria L^2

1. Niech $k\colon \boldsymbol{R}_n \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$ będzie funkcją o własnościach:

a) $k(tx) = t^{-n}k(x), \qquad x \neq 0,\ t > 0,$

b) $\int_{1 \leqslant |x| \leqslant 2} k(x)\,dx = 0,$

c) k jest różniczkowalna w sposób ciągły.

Niech

$$\langle K, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} k(y)f(y)\,dy$$

będzie dystrybucją wyznaczoną przez funkcję k. Dla $\varepsilon > 0$ niech

$$k_\varepsilon(x) = k(x)\chi_{|y|\geqslant\varepsilon}(x).$$

Jak widać, $k_\varepsilon \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Mamy też

$$Kf = K\star f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} k_\varepsilon \star f(x)$$

dla $f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ i $x\in\boldsymbol{R}^n$. Operatory tej postaci stanowią podstawowy model wszystkiego, co obejmuje się nazwą *osobliwych operatorów całkowych*. Będziemy się zajmować następującymi pytaniami:

1) Czy istnieje stała C, taka że

$$\|K\star f\| \leqslant C\|f\|_2, \quad f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)\ ?$$

2) Czy istnieje stała C, taka że

$$\|K\star f\| \leqslant C\|f\|_p, \quad f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$$

dla $1 < p < \infty$?

3) Czy zachodzą zbieżności

$$k_\varepsilon\star f \to Kf, \quad \varepsilon\to 0,$$

w normie L^p, gdy $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$?

4) Czy zachodzą zbieżności

$$k_\varepsilon\star f \to Kf, \quad \varepsilon\to 0,$$

p.w., gdy $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$?

2. Z warunków a) i c) wynika *warunek Hörmandera*: Istnieje stała $B > 0$, taka że

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|} |k_\varepsilon(x+y) - k_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant B, \quad y\in\boldsymbol{R}^n,\ \varepsilon > 0.$$

Rzeczywiście,

$$|k_\varepsilon(x) - k_\varepsilon(x-y)| \leqslant C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}, \quad |x|\geqslant 2|y|.$$

3. Twierdzenie. Operator liniowy $f\mapsto K\star f$ zadany początkowo na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ przedłuża się jednoznacznie do ciągłego operatora na przestrzeni $L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

4. Dowód: Jako pierwszy krok dowodu pokażemy, że dla $f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$

$$K\star f = \lim_{\varepsilon\to 0} k_\varepsilon\star f$$

w normie przestrzeni $L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Istotnie, niech $0 < \varepsilon < \eta$. Niech

$$g_{\varepsilon,\eta}(x) = k_\varepsilon \star f(x) - k_\eta \star f(x) = \int_{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant \eta} k(y) f(x-y)\, dy.$$

Oszacowanie dla $g_{\varepsilon,\eta}$ wyniknie z warunku skracania b). Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon,\eta}(x) &= \int_{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant \eta} k(y)(f(x-y) - f(x))\, dy \\ &= -\int_0^1 \int_{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant \eta} k(y) f'(x-ty) \cdot y\, dy dt, \end{aligned}$$

skąd

$$\|g_{\varepsilon,\eta}\|_2 \leqslant C\|f\|_2 \int_{|y| \leqslant \eta} |y||k(y)|\, dy \to 0, \quad \eta \to 0.$$

Widzimy zatem, ze ciąg $k_\varepsilon \star f$ jest fundamentalny, a zatem zbieżny w $L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Jako że ciąg ten jest zbieżny punktowo do $K \star f$, cel został osiągnięty.

5. W tym punkcie przeprowadzimy drugą część dowodu. Pokażemy mianowicie, że transformaty Fouriera wszystkich funkcji k_ε są ograniczone w sposób niezależny od ε. Aby to udowodnić, ustalmy $\xi \neq 0$. Wtedy

$$\widehat{k_\varepsilon}(\xi) = \int_{|x| \leqslant 2\pi|\xi|^{-1}} e^{-ix\xi} k_\varepsilon(x)\, dx + \int_{|x| \geqslant 2\pi|\xi|^{-1}} e^{-ix\xi} k_\varepsilon(x)\, dx = I_1(\xi) + I_2(\xi).$$

Oszacujmy najpierw całkę I_1. Korzystając z własności b), mamy

$$\begin{aligned} |I_1(\xi)| &\leqslant \left| \int_{|x| \leqslant 2\pi|\xi|^{-1}} (e^{ix\xi} - 1) k_\varepsilon(x)\, dx \right| \\ &\leqslant C|\xi| \int_{|x| \leqslant 2\pi|\xi|^{-1}} |x|^{-n+1}\, dx \leqslant C_1, \end{aligned}$$

gdzie stała C_1 nie zależy ani od ξ, ani od ε.
Aby oszacować drugą całkę, skorzystamy z tożsamości

$$\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx - \int e^{-ix\xi} f(x - z_\xi)\, dx \right),$$

gdzie $z_\xi = \pi|\xi|^{-2} \cdot \xi$. Zauważmy, że $|z_\xi| = \pi|\xi|^{-1}$. Mamy

$$|I_2(\xi)| \leqslant \frac{1}{2} \left| \int_{|x| \geqslant 2\pi|\xi|^{-1}} e^{-ix\xi}(k_\varepsilon(x) - k_\varepsilon(x - z_\xi))\, dx \right|$$

więc na mocy warunku Hörmandera

$$|I_2(\xi)| \leqslant B/2 = C_2,$$

co kończy dowód jednostajnej ograniczoności transformat Fouriera $\widehat{k_\varepsilon}$.
Widzimy więc, że operatory

$$K_\varepsilon f = k_\varepsilon \star f$$

są wspólnie ograniczone w normie na przestrzeni $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ i jednocześnie zbieżne mocno do operatora $Kf = K \star f$ na pewnej gęstej podprzestrzeni. Stąd wynika nasza teza.

5. Całki osobliwe. Teoria Calderóna–Zygmunda

1. Lemat Calderóna–Zygmunda. Niech $f \geqslant 0$ będzie funkcją całkowalną i niech $\alpha > 0$. Istnieje wówczas domknięty podzbiór $F \subset \boldsymbol{R}^n$, taki że

$$f(x) \leqslant \alpha, \quad x \in F,$$

oraz ciąg parami rozłącznych kostek Q_k, taki że

$$\alpha < |Q_k|^{-1} \int_{Q_k} f(x)\, dx \leqslant 2^n \alpha, \quad \boldsymbol{R}^n \setminus F = \bigcup Q_k.$$

2. Dowód: Niech $Q_0 = [0,1)^n$ będzie kostką jednostkową i niech $\mathcal{Q}$ oznacza rodzinę wszystkich kostek postaci $a + 2^k Q_0$, gdzie $a \in \boldsymbol{Z}^n$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Oznaczmy

$$f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x)\, dx.$$

Niech

$$\Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \exists\, Q \in \mathcal{Q} : x \in Q \;\&\; f_Q > \alpha\}.$$

Ω jest zbiorem otwartym. Ponadto, dla każdego $x \in \Omega$ istnieje maksymalna kostka $Q = Q(x)$ o własności $f_Q > \alpha$, bo

$$|Q| \leqslant \alpha^{-1} \int_Q |f| \leqslant \alpha^{-1} \|f\|_1.$$

Oczywiście $Q(x) \subset \Omega$ i każde dwie takie kostki są albo identyczne, albo rozłączne. Zatem

$$\Omega = \bigcup Q_j, \quad Q_j = Q(x_j),$$

gdzie suma jest rozłączna. Dla $Q = a + 2^k Q_0$ niech $Q' = a + 2^{k+1} Q_0$. Ponieważ dla danego $x \in Q_j$ kostka Q_j jest maksymalna,

$$\alpha \geqslant f_{Q_j'} \geqslant 2^{-n} f_{Q_j},$$

skąd nierówność

$$f_{Q_j} \leqslant 2^n \alpha.$$

Pozostaje zauważyć, że dla $x \in F = \boldsymbol{R}^n \setminus \Omega$

$$|Q|^{-1} \int f(y)\, dy \leqslant \alpha$$

dla wszystkich $Q \in \mathcal{Q}$ zawierających x, więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a

$$f(x) \leqslant \alpha$$

dla p.w. $x \in F$.

3. Rozkład C–Z funkcji całkowalnej. Niech $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Dla każdej liczby $\alpha > 0$ istnieje ciąg parami rozłącznych kostek (Q_k), takich że

$$\sum_k |Q_k| \leqslant \alpha^{-1} \|f\|_1,$$

oraz przedstawienie

$$f = g + \sum_k b_k, \quad g, b_k \in L^1(R^n),$$

gdzie $\|g\|_1 \leqslant \|f\|_1$ i $|g| \leqslant 2^n \alpha$, a funkcje b_k mają nośniki w rozłącznych kostkach Q_k i następujące własności:

$$\|b_k\|_1 \leqslant 2^{n+1} \alpha |Q_k|, \qquad \int b_k = 0.$$

4. Dowód: Rzeczywiście, definiujemy

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ f_{Q_k}, & x \in Q_k, \end{cases}$$

oraz

$$b_k(x) = \begin{cases} f(x) - f_{Q_k}, & x \in Q_k, \\ 0, & x \notin Q_k, \end{cases}$$

zgodnie z rozkładem C-Z dla liczby α.

5. Nadal rozważamy dystrybucję

$$\langle K, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1/\varepsilon} k(y) f(y)\, dy$$

wyznaczoną przez funkcję $k \colon \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$ o własnościach:

a) $k(tx) = t^{-n} k(x)$,

b) $\int_{1 \leqslant |x| \leqslant 2} k(x)\, dx = 0$,

c) k jest różniczkowalna w sposób ciągły.

6. Twierdzenie. Dla każdego $\varepsilon > 0$ operator liniowy $f \mapsto K_\varepsilon f = k_\varepsilon \star f$ jest słabego typu $(1,1)$ ze stałą niezależną od ε.

7. Dowód: Niech $\alpha > 0$ i niech $f = g + b$ będzie rozkładem C-Z funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. Jeśli

$$E_\alpha(f) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |K_\varepsilon f(x)| > \alpha\},$$

to

$$E_\alpha(f) \subset E_{\alpha/2}(g) \cup E_{\alpha/2}(b),$$

więc wystarczy oszacować miary składników. W pierwszym przypadku wynika to łatwo z jednakowej ograniczoności K_ε na L^2. Rzeczywiście,

$$|E_{\alpha/2}| \leqslant 4\alpha^{-2}\|K_\varepsilon g\|_2^2 \leqslant 4C\alpha^{-1}\|g\|_1 \leqslant 4C\alpha^{-1}||f\|_1,$$

gdzie C jest wspólnym ograniczeniem norm K_ε. W drugim przypadku wystarczy oszacować miarę zbioru

$$E' = E_{\alpha/2}(b) \setminus \Omega', \quad \Omega' = \bigcup_k Q'_k,$$

bo

$$|\Omega'| = |\bigcup_k Q'_k| \leqslant 4^n\alpha^{-1}\|f\|_1.$$

Zatem

$$|E'| = |\{x \notin \Omega' : |K_\varepsilon b(x)| > \alpha/2\}| \leqslant 2\alpha^{-1}\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus\Omega'} |K_\varepsilon b(x)|\,dx.$$

Jeśli teraz y_k jest środkiem kostki Q_k, to dzięki $\int b_k = 0$ i warunkowi Hörmandera spełnianemu jednostajnie przez k_ε

$$\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus\Omega'} |K_\varepsilon b(x)|\,dx \leqslant \sum_k \int_{\boldsymbol{R}^n\setminus Q'_k} \int |k_\varepsilon(x-y) - k_\varepsilon(x-y_k)||b_k(y)|\,dy\,dx.$$

Jako że $|x - y_k| \geqslant 2|y - y_k|$ dla $x \notin Q'_k$ i $y, y_k \in Q_k$,

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus\Omega'} |K_\varepsilon b(x)|\,dx &\leqslant \sum_k \int \int_{|x|\geqslant 2|y|} |k_\varepsilon(x-y) - k_\varepsilon(x)||b_k(y+y_k)|\,dx\,dy \\ &\leqslant B\sum_k \|b_k\|_1 \leqslant 2^{n+1}B\|f\|_1,\end{aligned}$$

co daje

$$|E'| \leqslant 2^{n+2}B\alpha^{-1}\|f\|_1.$$

8. Wniosek. Operatory liniowy $Kf = K \star f$ zadany początkowo na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ jest ograniczony w normie $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$, a zatem przedłuża się jednoznacznie do ciągłego operatora liniowego na tej przestrzeni.

6. Operatory liniowe translacyjnie niezmiennicze

1. Niech $L\colon \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n) \to C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ będzie ciągłym odwzorowaniem translacyjnie niezmienniczym. Istnieje wtedy dystrybucja T, taka że $Lf = T \star f$.
Rzeczywiście, prosty rachunek pokazuje, że jeśli

$$\langle T, f\rangle = Lf(0),$$

to

$$Lf(x) = \widetilde{T} \star f(x), \quad \langle \widetilde{T}, f \rangle = \int f(-x) T(dx).$$

2. Jeśli μ jest miarą borelowską ograniczoną, to odwzorowanie $L^1(\boldsymbol{R}^n) \ni f \mapsto \mu \star f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ jest ciągłe. Każde ciągłe odwzorowanie liniowe translacyjnie niezmiennicze przestrzeni $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ jest tej postaci.

3. Jeśli K jest dystrybucją, taką że $\widehat{K} \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, to odwzorowanie $L^2(\boldsymbol{R}^n) \ni f \mapsto T\star f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ jest ciągłe. Każde ciągłe odwzorowanie liniowe translacyjnie niezmiennicze $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ jest tej postaci.

4. W ogólnym przypadku $1 \leqslant p < \infty$ dysponujemy łatwym warunkiem koniecznym: Jeśli L jest translacyjnie niezmienniczym odwzorowaniem liniowym $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla pewnego $1 \leqslant p < \infty$, to L jest splotem z dystrybucją o ograniczonej transformacie Fouriera. Wszelkie warunki dostateczne są już trudne.

5. **Twierdzenie mnożnikowe Hörmandera.** Jeśli T jest dystrybucją temperowaną, taką, że $\widehat{T}(\xi) = m(\xi)$ jest funkcją różniczkowalną k-krotnie, gdzie $k > n/2$, i spełniającą oszacowania

$$|D_\xi^\alpha m(\xi)| \leqslant C|\xi|^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| \leqslant k,$$

to operator liniowy $f \mapsto T \star f$ jest ograniczony na $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$.

6. **Twierdzenie mnożnikowe Marcinkiewicza.** Jeśli T jest dystrybucją temperowaną, taką, że $\widehat{T}(\xi) = m(\xi)$ jest funkcją klasy C^1 spełniającą oszacowania

$$|D_\xi^\alpha m(\xi)| \leqslant C \prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{-\alpha_j}, \quad \alpha \in \{0,1\}^n,$$

to operator liniowy $f \mapsto T \star f$ jest ograniczony na $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$.

7. Jeśli $n = 1$, to twierdzenie Marcinkiewicza i twierdzenie Hörmandera mówią to samo. Klasycznym przykładem mnożnika m spełniającego założenia obu twierdzeń jest transformata Fouriera dystrybucji Hilberta. W tym przypadku jednak prawdziwa jest mocniejsza wersja twierdzenia Marcinkiewicza:

Twierdzenie. Jeśli $|m(\xi)| \leqslant B$ oraz $\int_{2^k \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}} |dm(\xi)| \leqslant B$ niezależnie od $k \in \boldsymbol{Z}$, to operator

$$Tf(x) = \int e^{ix\xi} m(\xi) \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

jest ograniczony na $L^p(\boldsymbol{R})$ dla $1 < p < \infty$.

8. **Przykład.** Funkcja charakterystyczna odcinka jednostkowego $[-1,1] \subset \boldsymbol{R}$ jest mnożnikiem Marcinkiewicza. Tymczasem twierdzenie Feffermana mówi, że funkcja charakterystyczna koła jednostkowego $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant 1$ w $\boldsymbol{R}^2$ nie jest mnożnikiem dla żadnego $L^p(\boldsymbol{R}^2)$, $1 \leqslant p < \infty$ (patrz Stein [5], X.2.5).

9. ZADANIE DOMOWE. Korzystając z wyłożonej teorii i podanej literatury, udowodnij że operator maksymalny

$$K^\star f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |k_\varepsilon \star f(x)|$$

jest słabego typu $(1,1)$. Wyciągnij stąd wniosek o istnieniu granicy $\lim_{\varepsilon\to 0} k_\varepsilon \star f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \boldsymbol{R}^n$, jeśli $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Paweł Głowacki

Paweł Głowacki jest profesorem na Uniwersytecie Wrocławskim, autorem około 20 publikacji m.in. w *Inventiones Math.*, *J. Functional Anal.*, *Duke Math. J.*, *Studia Math.* Zajmuje się abstrakcyjną analizą harmoniczną, grupami Lie i cząstkowymi równaniami różniczkowymi. W 1980 roku doktoryzował się w Instytucie Matematycznym PAN na podstawie rozprawy *Calculus of Symbols and Convolution Semigroups on the Heisenberg Group* napisanej pod kierunkiem profesora A. Hulanickiego. Był profesorem wizytującym w *Scuola Normale Superiore* w Pizie (Włochy) oraz *University of Washington* (USA). Jest znany jako bardzo dobry wykładowca.