Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Środowiskowe Studia Doktoranckie
z Nauk Matematycznych

Geometria Dużej Skali

Piotr W. Nowak

Uniwersytet Warszawski, Polska Akademia Nauk

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana ze środków Uni Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

1. Intuicje

Geometria dużej skali to sposób patrzenia na własności geometryczne, które są globalne. Na przykład, prosta rzeczywista i płaszczyzna różnią się nie tylko strukturą lokalną (wymiar topologiczny), ale także są istotnie różnymi przestrzeniami z globalnego punktu widzenia. Z drugiej strony prosta rzeczywista i jej podzbiór dyskretny $\mathbb{Z}$, złożony z liczb całkowitych z metryką odziedziczoną ze zbioru licz rzeczywistych, mają pewne wspólne cechy geometryczne. Zadaniem geometrii dużej skali jest sformalizowanie tego typu ideologii.

Zacznijmy od przestrzeni $\mathbb{Z}$, wspomnianej powyżej. Załóżmy, że zaczynamy się oddalać od niej i patrzymy na nią z coraz odleglejszych punktów obserwacyjnych. Z powodu perspektywy, punkty przestrzeni $\mathbb{Z}$ z daleka wyglądają jakby się do siebie zbliżały – tym są bliższe, im dalej się odsuniemy. Gdy odsuniemy się w nieskończoność, obserwowane punkty $\mathbb{Z}$ zleją się w prostą rzeczywistą.

Wykonując podobny procedurę w przypadku przestrzeni metrycznej ograniczonej, patrząc z punktu obserwacyjnego w nieskończoności będziemy widzieć jedynie punkt.

Geometria dużej skali zajmuje się badaniem obiektów geometrycznych obserwowanych z nieskończoności. Przestrzenie metryczne są równoważne w tej geometrii, gdy obserwowane z nieskończoności są (metrycznie) równoważne. Tak więc w geometrii dużej skali, $\mathbb{Z}$ jest tym samym co prosta $\mathbb{R}$, a każda przestrzeń metryczna zwarta jest równoważna z punktem. Celem wykładu będzie sformalizowanie tych intuicji i omówienie pewnych aspektów i niezmienników geometrii dużej skali przestrzeni metrycznych

2. Quasi-izometrie i zgrubne równoważności

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

(1) X jest dyskretna jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że $d(x, x') \geq C$ dla wszystkich $x, x' \in X$, $x \neq x'$;
(2) X jest lokalnie skończona jeśli dla każdego $x \in X$, kula $B(x, R)$ jest skończonym zbiorem;
(3) X ma ograniczoną geometrię, jeśli dla każdego $R \geq 0$ istnieje $N_R \geq 0$ takie, że dla każdego $x \in X$, kula $B(x, R)$ ma co najwyżej N_R elementów.

Niech $D \geq 0$. Mówimy, że $N \subseteq X$ jest D-siecią, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje $x' \in N$ takie, że $d(x, x') \leq D$. N jest siecią w X jeśli jest D-siecią dla pewnego $D \geq 0$. (Dokładna wartość D zazwyczaj nie jest istotna).

Przykład 1. – *$\mathbb{Z}$ jest siecią w $\mathbb{R}$;*
– *dowolny punkt jest siecią w przestrzeni metrycznej ograniczonej;*
– *M – zamknięta rozmaitość. Orbita dowolnego punktu $\pi_1(M)$ jest siecią w nakryciu uniwersalnym M.*

Definicja 2. *Niech X, Y przestrzenie metryczne. $f\colon X \to Y$ jest*

(1) *metrycznie właściwie jeśli przeciwobraz każdej kuli jest ograniczony;*
(2) *zgrubnie Lipschitzowskie jeśli istnieją stałe $L, C \geq 0$ takie, że*

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x'),$$

oraz f jest metrycznie właściwe;
(3) *zgrubne jeśli istnieje niemalejąca funkcja $\rho_+\colon [0, \infty) \to [\infty)$ taka, że*

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, y)),$$

oraz f jest metrycznie właściwe.

Na przykład, przekształcenie przestrzeni ograniczonej w punkt spełnia wszystkie warunki, ale przekształcenie prostej w punkt nie jest metrycznie właściwe.

Następna definicja mówi które przekształcenia uznamy za równoważne.

Definicja 3. *Dwa przekształcenia $f, g\colon X \to Y$ są bliskie, jeśli istnieje stała $C \geq 0$ taka, że $d_Y(f(x), g(x)) \leq C$.*

Definicja 4. *Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi. Przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest quasi-izometrią jeśli istnieją stałe $L \geq 1$, $C \geq 0$, takie że*

$$\frac{1}{L} d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') + C,$$

dla wszystkich $x, x' \in X$ oraz $f(X)$ jest siecią w Y.

Gdy ostatni warunek nie jest spełniony, mówimy że f jest quasi-izometrycznym zanurzeniem X w Y.

Obiekty quasi-izometryczne to takie które są „takie same gdy patrzymy na nie z dużej odległości".

Przykład 5. (1) *włożenie $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ jest quasi-izometrią;*
(2) *funkcja „podłogi" $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ jest quasi-izometrią (nie jest ciągła ani różnowartościowa!);*
(3) *włożenie punktu w przestrzeń metryczną ograniczoną jest quasi-izometrią;*
(4) *przekształcenie przestrzeni ograniczonej w punkt jest quasi-izometrią;*
(5) *ogólniej: inkluzja dowolnej sieci w przestrzeń metryczną jest quasi-izometrią.*

Uwaga 6. *Quasi-izometria nie musi być ciągła, jeden do jednego ani „na"!*

Definicja 7. *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest zgrubną równoważnością jeśli istnieją dwie niemalejące funkcje $\rho_-, \rho_+ \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, spełniające $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$, takie, że*

$$\rho_-(d_X(x,x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x,x')),$$

dla wszystkich $x, x' \in X$, oraz $f(X)$ jest siecią w Y.

Gdy ostatni warunek nie jest spełniony mówimy, że f jest zgrubnym zanurzeniem X w Y.

Lemat 8. (1) *Złożenie quasi-izometrii (quasi-izometrycznych zanurzeń) jest quasi-izometrią (quasi-izometrycznym zanurzeniem);*
(2) *złożenie zgrubnych równoważności (zgrubnych zanurzeń) jest zgrubną równoważnością (zgrubnym zanurzeniem).*

Lemat 9. *Przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest quasi-izometrią (zgrubną równoważnością) jeśli jest zgrubnie Lipschitzowskie (zgrubne) i istnieje zgrubnie Lipschitzowskie (zgrubne) przekształcenie $g\colon Y \to X$ takie, że $f \circ g$ jest bliskie Id_Y oraz $g \circ f$ jest bliskie Id_X.*

3. Grupy jako obiekty geometryczne

Niech $G = \langle\, S \,|\, R \,\rangle$ będzie grupą skończenie generowaną: S jest skończonym zbiorem generatorów a R jest przeliczalnym zbiorem relacji.

Przykład 10. – $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, \emptyset \rangle$ *to grupa wolna na n generatorach;*
– $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$.

Wybierzmy pewien skończony zbiór S generatorów. Wówczas możemy zdefiniować na G metrykę. Niech $g \in G$. Definiujemy długość G jako

$$|g|_S = \inf \left\{ \sum k_i \ :\ \gamma = s_{i_1}^{k_1} \cdot \cdots \cdot s_{i_m}^{k_m},\ \text{gdzie } s_j \in S \cup S^{-1} \right\}.$$

Czyli $|g|_S$ to długość najkrótszego słowa w S reprezentującego g. Przy pomocy długości na grupie możemy zdefiniować metrykę:

$$d_S(g,h) = |g^{-1}h|_S.$$

Uwaga 11. O funkcji długości $|\cdot|_S$ należy myśleć jak o „normie” na G, a o d_S jako o metryce indukowanej przez normę.

Stwierdzenie 12. *Metryka d_S jest lewo-niezmiennicza.*

Dowód. Mamy

$$d_S(\gamma g, \gamma h) = |(\gamma g)^{-1}\gamma h|_S = |g^{-1}\gamma^{-1}\gamma h|_S = |g^{-1}h|_S = d_S(g,h).$$

□

Uwaga 13. (1) Definiując $d_S(g,h) = |gh^{-1}|$ otrzymamy metrykę prawo-niezmienniczą;
(2) Mając daną metrykę d_S możemy „odzyskać” funkcję długości: $|g|_S = d_S(g,e)$.

Lemat 14. *Skończenie generowana grupa z metryką d_S jest dyskretną przestrzenią metryczną o ograniczonej geometrii.*

Metryki na grupie pozwalają badać je metodami geometrii dużej skali. Metryka d_S zdefiniowana powyżej zależy od wyboru zbioru S. Tym niemniej, z punktu widzenia geometrii dużej skali, takie zmiany nie mają znaczenia.

Stwierdzenie 15. *Niech G będzie skończenie generowaną grupą i niech S, T będą dwoma skończonymi zbiorami generatorów grupy G. Wówczas przestrzenie metryczny (G, d_S) i (G, d_T) są quasi-izometryczne.*

Dowód. Niech $g \in G$ będzie dane poprzez najkrótsze słowo w S:

$$g = \coprod \sigma_i, \qquad \sigma_i \in S \cup S^{-1}.$$

Zapiszmy każdy generator $s \in S$ jako słowo o najkrótszej możliwej długości w T. To pozwala oszacować długość g jako słowa w T. Podobnie robimy zamieniając S i T. Zatem identyczność na G jest szukaną quasi-izometrią. □

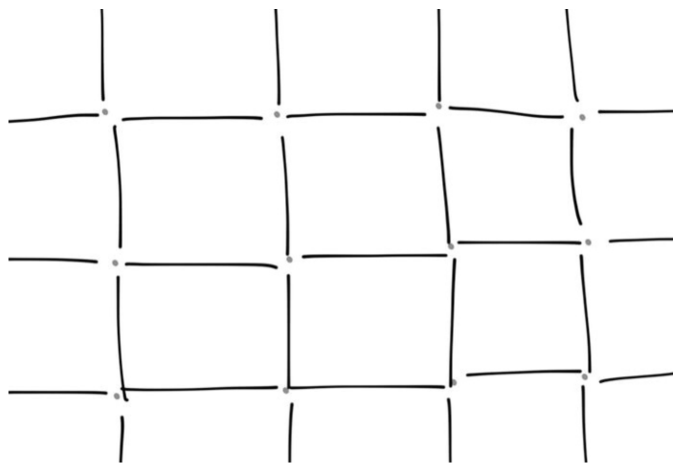
Istotnym pojęciem jest graf Cayley'a. Mając dany ustalony skończony zbiór generatorów grupy G definiujemy graf $\mathrm{Cay}(G,S)$ w następujący sposób:

– zbiór wierzchołków $V = G$;
– wierzchołki $g, h \in G$ są połączone krawędzią, jeśli $g^{-1}h \in S$.

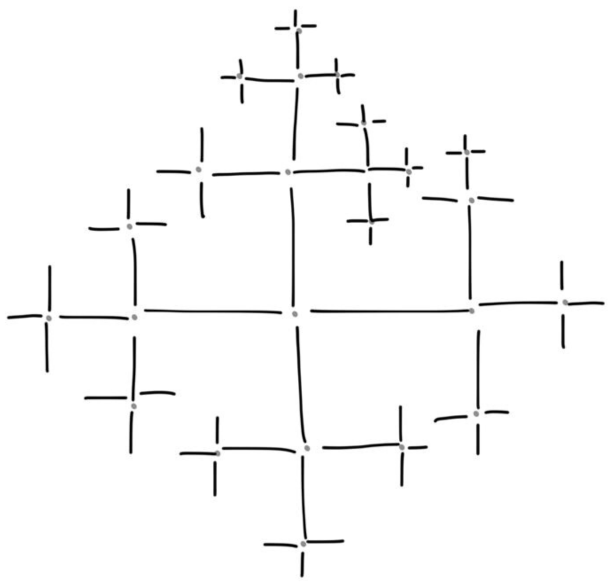
Wówczas metryka długości słowa d_S na G jest tym samym co metryka najkrótszej ścieżki na zbiorze wierzchołków grafu $\mathrm{Cay}(G,S)$.

Geometria dużej skali jest ważnym kierunkiem badania rozmaitości zwartych. Pozawala na to następujący fakt.

Twierdzenie 16 (Lemat Milnora–Schwartza)**.** *Niech M rozmaitość zwarta z metryką geodezyjną. Wówczas grupa podstawowa $\pi_1(M)$ z metryką długości słowa jest quasi-izometryczna z nakryciem podstawowym $\widetilde{M}$ z metryką podniesioną z M.*



Rysunek 1. Graf Cayley'a grupy $\mathbb{Z}^2$ ze zbiorem generatorów $(1,0)$ i $(0,1)$



Rysunek 2. Graf Cayley'a grupy wolnej na dwóch (wolnych) generatorach

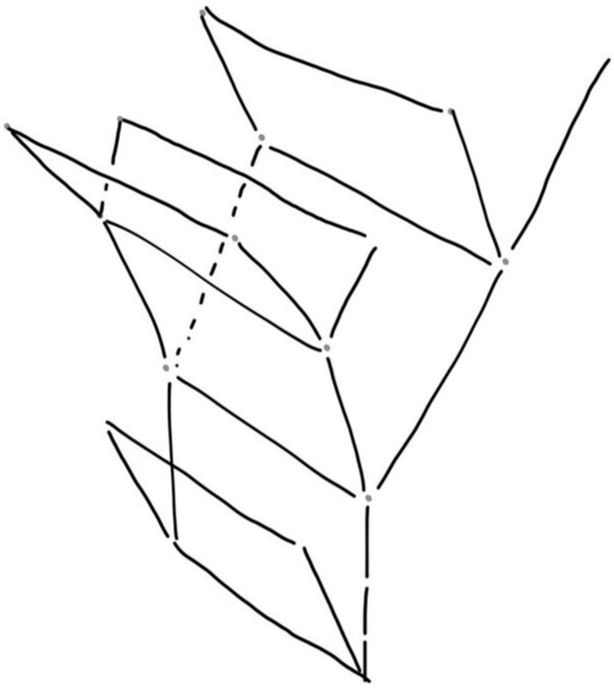
4. Wymiar asymptotyczny

Wymiar asymptotyczny jest jednym z najbardziej naturalnych niezmienników w geometrii dużej skali. Jest on asymptotyczną wersją wymiaru pokryciowego znanego z topologii.

Niech $\mathcal{U} = \{U_i\}$ pokrycie przestrzeni metrycznej X (nie zakładamy żadnych topologicznych własności zbiorów U_i).

(1) $\mathcal{U}$ jest jednostajnie ograniczone jeśli $\sup_i \operatorname{diam} U_i < \infty$;
(2) dla $R \geq 0$, R-krotność pokrycia $\mathcal{U}$ to najmniejsza taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że dla każdego $x \in X$, kula $B(x, R)$ przecina co najwyżej n zbiorów U_i.

Definicja 17 (Gromov, 1993)**.** *Mówimy, że przestrzeń metryczna X ma wymiar asymptotyczny co najwyżej n, jeśli dla każdego $R \geq 0$ istnieje jednostajnie ograniczone pokrycie $\mathcal{U}$ przestrzeni X o R-krotności co najwyżej $n+1$. Oznaczamy to przez* $\operatorname{asdim} X \leq n$.



Rysunek 3. Graf Cayley'a rozwiązalnej grupy Baumslaga–Solitara $BS(1,2) = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b\rangle$. Geometrycznym ciągłym modelem jest iloczyn kartezjański $T \times \mathbb{R}$, gdzie T jest nieskończonym drzewem binarnym, przy czym metryka na kopii $\mathbb{R}$ jest rozciągana w zależności od współrzędnej w T (tzw. „warped product"). Innymi słowy, „pionowe" płaszczyzny mają geometrię płaszczyzny hiperbolicznej $\mathbb{H}^2$ i są posklejane ze sobą wzdłuż drzewa T.

Wymiar asymptotyczny X to $\min\,\{k \in \mathbb{N} : \ \operatorname{asdim} X \leq k\}$.

Przykład 18. Wymiar asymptotyczny dowolnej przestrzeni metrycznej ograniczonej spełnia $\operatorname{asdim} X = 0$. Istotnie, wystarczy dla dowolnego $R > 0$ pokryć X jednym zbiorem: X.

Przykład 19. $\operatorname{asdim} \mathbb{R} = 1$. Mając dane $R > 0$ pokryjmy $\mathbb{R}$ rodziną kul $\{B(2nR, R)\}$. Jest to pokrycie jednostajnie ograniczone, którego R-krotność wynosi 2. Zatem dostajemy oszacowanie $\operatorname{asdim} \mathbb{Z} \leq 1$. Fakt, że $\operatorname{asdim} \mathbb{R} \geq 1$ zostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Przykład 20. $\operatorname{asdim} \mathbb{R}^2 \leq 2$.

Wystarczy rozważyć pokrycie $\mathbb{Z}^2$ „cegłami" jak na poniższym rysunku, przeskalowane liniowo aby zbiory były odpowiednio duże.

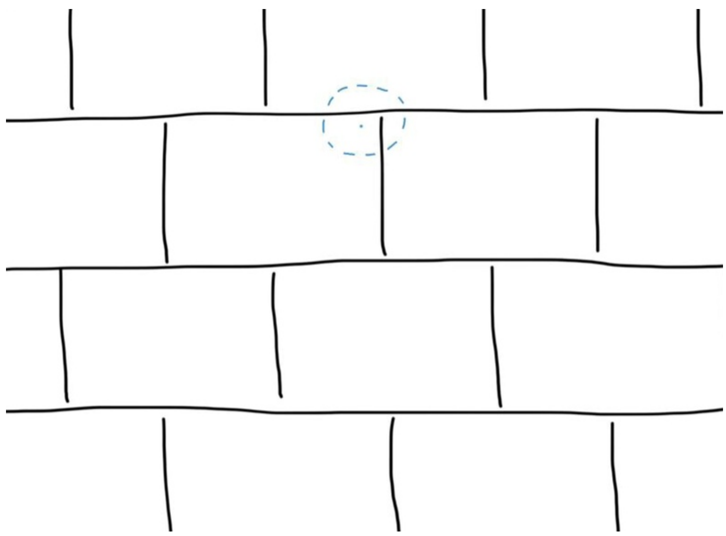
Wymiar asymptotyczny jest niezmiennikiem w geometrii dużej skali.

Twierdzenie 21 (Gromov)**.** *Niech X i Y będą zgrubnie równoważnymi przestrzeniami metrycznymi. Wówczas*

$$\operatorname{asdim} X = \operatorname{asdim} Y.$$

Dowód. Mając dane $R > 0$, bierzemy jednostajnie ograniczone pokrycie $\mathcal{U}$ o S-krotności $\leq \operatorname{asdim} Y + 1$ przestrzeni Y i zgrubną równoważność $f \colon X \to Y$ definiujemy pokrycie X,

$$V_i = f^{-1}(U_i),$$



Rysunek 4. $\operatorname{asdim} \mathbb{Z}^2 \leq 2$

$U_i \in \mathcal{U}$. Dobierając S do danego R otrzymujemy pokrycie $\mathcal{V} = \{V_i\}$ spełniające żądane warunki. □

Twierdzenie 22. *Niech T będzie lokalnie skończonym drzewem. Wówczas* $\operatorname{asdim} T = 1$.

Dowód. Wybierzmy wierzchołek $p \in T$ i dla $R > 0$ zdefiniujmy

$$A_n = \{x \in T : nR \leq d(p, x) \leq (n+1)R\}.$$

Pokrycie T zbiorami A_n ma R-krotność 2, ale nie jest jednostajnie ograniczone. Aby otrzymać pokrycie jednostajnie ograniczone wprowadzamy podpodział zbiorów A_n na mniejsze podzbiory o wspólnie ograniczonej średnicy. Korzystając z geometrycznych własności drzewa można to zrobić nie zmieniając R-krotności. □

Wniosek 23. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$,* $\operatorname{asdim} \mathbb{F}_n = 1$.

Trójkąt geodezyjny jest δ-cienki jeśli suma δ-otoczeń jego dwóch boków zawiera trzeci bok.

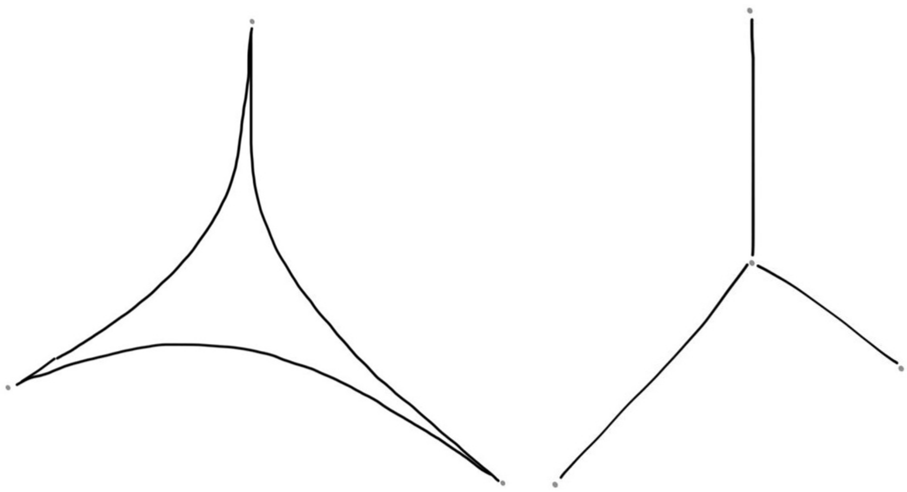
Definicja 24 (Gromov)**.** *Grupa jest δ-hiperboliczna jeśli każdy trójkąt geodezyjny w grafie Cayley'a jest δ-cienki.*

Na płaszczyźnie Euklidesowej łatwo znaleźć trójkąty, które nie są δ-cienkie dla ustalonego δ. W drzewie dowolny trójkąt geodezyjny jest „trójnogiem”, czyli jest 0-cienki. Zatem drzewa są 0-hiperboliczne.

Wniosek 25. *Grupa wolna $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$, jest hiperboliczna.*

Grupy hiperboliczne są jednym z podstawowych obiektów badań w geometrycznej teorii grup. Klasyczny przykład (tzw. „klasyczne grupy hiperboliczne”) to grupy podstawowe zwartych rozmaitości hiperbolicznych.

Ogólniej mamy następujący wynik.



Rysunek 5. δ-cienki trójkąt oraz 0-cienki trójkąt w drzewie

Twierdzenie 26 (Gromov, 1993)**.** *Niech G będzie grupą hiperboliczną. Wówczas* $\operatorname{asdim} G < \infty$.

Jeszcze jedna klasyczna klasa grup ma skończony wymiar asymptotyczny.

Twierdzenie 27 (Dranishnikov–Januszkiewicz, 1999)**.** *Grupy Coxetera mają skończony wymiar asymptotyczny.*

Niedawny wynik dotyczy mapping class grup powierzchni. Mapping class grupa powierzchni S to grupa homeomorfizmów S, modulo relacja izotopii.

Twierdzenie 28 (Bestvina, Bromberg, Fujiwara, 2011)**.** *Mapping class grupy mają skończony wymiar asymptotyczny.*

Na koniec podamy przykłady grup skończenie generowanych o nieskończonym wymiarze asymptotycznym. Niech G będzie jedną z grup:

- produkt wiankowy $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$;
- grupa Thompsona F;
- grupa Grigorchuka.

Każda z powyższych grup spełnia $\operatorname{asdim} G = \infty$. Dla $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ i grupy Thompsona mamy, że $\mathbb{Z}^n$ jest podgrupą dla dowolnego n. Zatem $\operatorname{asdim} G \geq \operatorname{asdim} \mathbb{Z}^n \geq n$ dla każdego n. Grupa Grigorchuka jest torsyjna, ale ma własność, że $G \times G$ jest podgrupą w G. Z tego można wyprowadzić, że $\mathbb{Z}^n$ zanurza się zgrubnie w G dla każdego n i reszta argumentu jest podobna.

5. Średniowalność

Niech X przestrzeń metryczna dyskretna. Dla $R > 0$ podzbioru $A \subseteq X$ definiujemy R-brzeg zbioru A jako

$$\partial_R A = \{x \in X \setminus A \, : \, d(x, A) \leq R\} \, .$$

Dla $R = 1$ stosujemy oznaczenie ∂A.

Definicja 29. *Grupa skończenie generowana G jest średniowalna jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór skończony A, taki, że*

$$\frac{\#\partial A}{\#A} \leq \varepsilon.$$

Powyższa definicja nie jest historycznie pierwszą definicją średniowalności, a raczej geometryczną charakteryzacją. Używamy jej właśnie ze względu na geometryczny aspekt. Oryginalna definicja von Neumanna, w terminach średnich niezmienniczych, jest przytoczona pod koniec tej sekcji.

Przykład 30. (1) *$\mathbb{Z}$ jest średniowalna: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wystarczy dobrać odpowiednio dużą kulę;*

(2) *podobnie w $\mathbb{Z}^n$*

(3) *grupa wolna $\mathbb{F}_2$ nie jest średniowalna*

Stwierdzenie 31. *Niech H – podgrupa skończenie generowana w skończenie generowanej grupie G. Jeśli G jest średniowalna, to H jest średniowalna.*

Dowód. Wybieramy skończone zbiory generatorów S_G i S_H takie, że $S_H \subseteq S_G$. Mając dany zbiór A dla $\varepsilon > 0$ spełniający warunki definicji dla G, bierzemy podzbiory $A_i = A \cap H_i$, gdzie H_i są warstwami podgrupy H. Można pokazać, że

$$\varepsilon \geq \frac{\#\partial_G A}{\#A} \geq \sum_i \frac{\#\partial_H A_i}{\#A_i}\frac{\#A_i}{\#A},$$

gdzie $\partial_H A_i$ oznacza brzeg w H. Ponieważ jest to kombinacja wypukła, musi istnieć indeks i dla którego

$$\frac{\#\partial_H A_i}{\#A_i} \leq \varepsilon.$$

□

Stwierdzenie 32. *Niech G i H skończenie generowane grupy, które są quasi-izometryczne. Jeśli G jest średniowalna to H też jest średniowalna.*

Dowód sprowadza się do „przeciągnięcia" zbiorów A z definicji średniowalności z G to H poprzez daną quasi-izometrię.

Stwierdzenie 33 (Følner, 1958)**.** *(Warunek Følnera) Niech G grupa generowana przez skończony zbiór S. G jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony podzbiór $F \subseteq G$, spełniający*

$$\frac{\#(F \triangle Fs)}{\#F} \leq \varepsilon,$$

dla każdego $s \in S$.

Dowód. Dowód wynika z prostych oszacowań i fakcie, że

$$\partial A = \bigcup_{s \in S} As \setminus A.$$

□

Zbiory F w powyższym stwierdzeniu nazywamy zbiorami Følnera, lub ciągiem zbiorów Følnera, gdy $\varepsilon \to 0$. Istnieje również wersja prawo-stronna.

Stwierdzenie 34. *Niech G grupa generowana przez skończony zbiór S. G jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony podzbiór $F \subseteq G$, spełniający*

$$\frac{\#(F \triangle sF)}{\#F} \leq \varepsilon,$$

dla każdego $s \in S$.

Dowód. Wykorzystujemy inwersję w grupie: $\varphi(g) = g^{-1}$. Mając dany lewo-stronny ciąg zbiorów Følnera F_n, zbiory $\varphi(F_n)$ tworzą prawo-stronny ciąg Følnera. □

Stwierdzenie 35 (Hulanicki, Reiter)**.** *(Warunek Hulanickiego–Reitera) G jak wcześniej. G jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $f\colon G \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:*

(1) *f ma skończony nośnik;*
(2) *$f \geq 0$ oraz $\sum_{g \in G} f(g) = 1$;*
(3) *$\|f - s \cdot f\|_1 \leq \varepsilon$, gdzie norma $\|\eta\|_1 = \sum_{x \in G} |\eta(x)|$.*

Niech X będzie zbiorem przeliczalnym. Przestrzeń $\ell_\infty(X)$ definiujemy jako przestrzeń funkcji ograniczonych $f\colon X \to \mathbb{R}$, czyli spełniających

$$\sup_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

Jest to przestrzeń liniowa, a z normą

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

jest przestrzenią Banacha.

Niech G będzie grupą. Średnią na grupie nazywamy liniowy funkcjonał ciągły m na przestrzeni $\ell_\infty(G)$, spełniający warunki

(1) $m(f) \geq 0$ jeśli $f \geq 0$;
(2) $m(1_X) = 1$;

Jeśli dodatkowo

$$m(g \cdot f) = m(f),$$

gdzie $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$, wówczas m nazywamy średnią (lewo-) G-niezmienniczą, albo po prostu (lewo-) niezmienniczą.

Twierdzenie 36 (von Neumann, 1929)**.** *G jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje średnia niezmiennicza na G.*

Szkic dowodu. Mając dany ciąg Følner F_n definiujemy $f_n = \frac{1_{F_n}}{\#F_n}$, otrzymujemy miary probabilistyczne na G o skończonych nośnikach. Są one w szczególności elementami $\ell_1(G)$. W $\ell_\infty(G)^* = \ell_1(G)^{**}$ bierzemy granice zbieżnej podsieci $\widehat{f_{n_\alpha}}$ w słabej-* topologii. Taka zbieżna podsieć istnieje z twierdzenia Banacha–Alaoglu. Ta granica jest średnią niezmienniczą.

W drugą stronę korzystamy twierdzenia Goldsteina wynika słaba-* gęstość kuli jednostkowej $\ell_1(G)$ w kuli jednostkowej $\ell_1(G)^{**}$ i ze średniej otrzymujemy sieć elementów f_n sfery jednostkowej w $\ell_1(G)$, taki że $f_n - sf_n$ zbiega słabo do 0 dla każdego generatora s. Korzystając z lematu Mazura możemy poprawić zbieżność do normowej. □

Wniosek 37. $\mathbb{F}_2$ *nie jest średniowalna.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie i niech m będzie średnią niezmienniczą. Weźmy zbiór $A \subset \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ tych słów zredukowanych, które zaczynają się od nietrywialnej potęgi a. Wówczas

$$A \cup aA = \mathbb{F}_2,$$

więc $m(1_A) \geq \frac{1}{2}$. Ale zbiory $A, bA, b^2A, \dots$ są rozłączne, więc korzystając z niezmienniczości,

$$1 = m(\mathbb{F}_2) \geq m(A) + m(bA) + m(b^2A) = 3m(A) \geq \frac{3}{2}.$$

□

6. Własność A

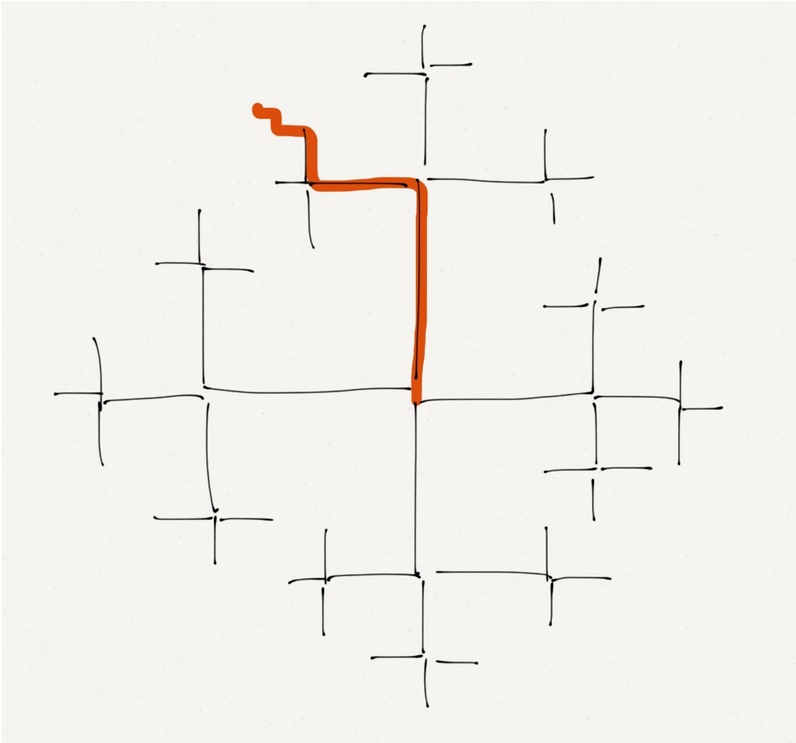
Definicja 38 (Yu, 1998)**.** *Niech X przestrzeń metryczna dyskretna. X ma własność A jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ i $R > 0$ istnieje rodzina skończonych zbiorów $\{A_x\}_{x \in X}$, $A_x \subset X \times \mathbb{N}$, spełniających następujące warunki:*

(1) $\frac{\#(A_x \triangle A_y)}{\#(A_x \cap A_y)} \leq \varepsilon$ *jeśli* $d(x, y) \leq R$*;*
(2) $A_x \subseteq B(x, S) \times \mathbb{N}$*, gdzie $S > 0$ zależy od ε i R, ale nie od x.*

Przykład 39. Niech G – grupa średniowalna. Wówczas G ma własność A. Istotnie, mając dany lewo-stronny zbiór Følnera F dla danego $\varepsilon > 0$ zdefiniujmy $A_g = Fg \times \{1\} \subseteq G \times \mathbb{N}$. Wówczas rodzina $\{A_g\}$ spełnia warunki definicji własności A.

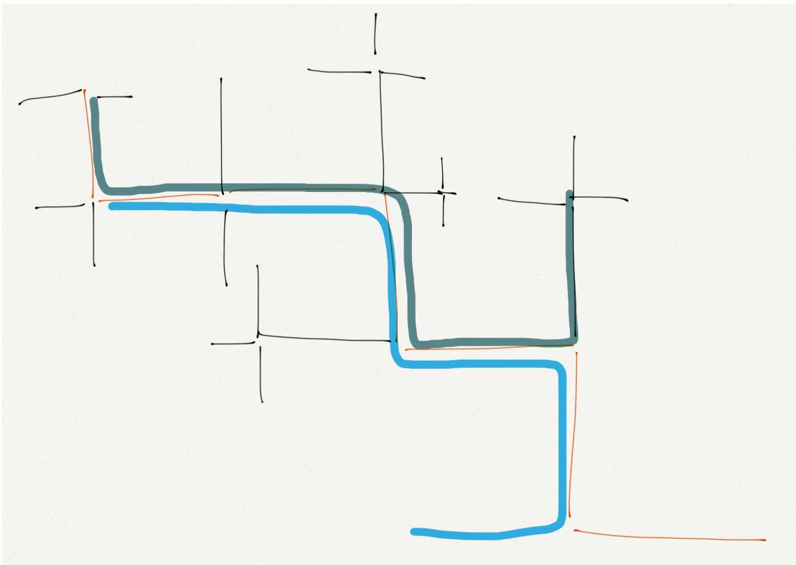
Przykład 40. Drzewo T ma własność A. Ustalmy jeden wierzchołek oraz nieskończony geodezyjny promień γ w T. Dla każdego wierzchołka x w T istnieje dokładnie jeden promień geodezyjny γ_x, mający nieskończone przecięcie z γ. Dla $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, zdefiniujmy A_x jako segment geodezyjny o początku w x i długości n, zawarty w γ_x. Ta rodzina zbiorów $\{A_x\}$ spełnia warunki własności A dla danego $\varepsilon > 0$.

Własność A jest niezmiennikiem w geometrii dużej skali.



Rysunek 6. Ustalony promień geodezyjny w drzewie

Twierdzenie 41 (Yu, 1998)**.** *Niech X i Y będą dyskretnymi przestrzeniami o ograniczonej geometrii. Jeśli X is Y są zgrubnie równoważne oraz X ma własność A to Y również ma własność A.*



Rysunek 7. Zbiory A_x

Twierdzenie 42 (Higson–Roe, 2003)**.** *Niech X przestrzeń metryczna o ograniczonej geometrii. Jeśli* $\operatorname{asdim} X < \infty$ *to X ma własność A.*

Dowód. Mając dane pokrycie z definicji skończonego wymiaru asymptotycznego bierzemy stowarzyszony z nim rozkład jedynki. Własność A otrzymuje się poprzez zamianę zmiennych w rozkładzie. $\square$

Wniosek 43. *Grupy hiperboliczne mają własność A.*

Jest jeszcze jedna naturalna klasa grup które spełniają własność A, a mianowicie grupy liniowe.

Twierdzenie 44 (Guentner, Higson, Weinberger 2003)**.** *Niech K będzie ciałem a G będzie dowolną przeliczalną podgrupą $GL_n(K)$. Wówczas G ma własność A.*

Oczywiście chcielibyśmy poznać również przykłady grup, które nie mają własności A, takie przykłady są jednak niesłychanie trudne do skonstruowania. Obecnie istnieje jedna taka konstrukcja: losowe grupy zawierające ekspandery w swoich grafach Cayley'a. Zostały skonstruowane przez Gromova i często nazywane są *potworami Gromova.*

Możemy jednak skonstruować przykłady przestrzeni metrycznych, które nie mają własności A. Zaprezentujemy dwie takie konstrukcje.

Grupa jest rezydualnie skończona jeśli posiada ona rodzinę podgrup normalnych skończonego indeksu N_i, taką, że $\bigcap_i N_i = \{e\}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $N_{i+1} \subset N_i$. Dla każdej podgrupy N_i iloraz G/N_i jest skończoną grupą generowaną przez obraz zbioru generatorów G przy przekształceniu ilorazowym, a więc jest też skończoną przestrzenią metryczną.

Mając ciąg skończonych przestrzeni metrycznych X_i ich sumę rozłączną $X = \coprod_i X_i$ możemy traktować jako przestrzeń metryczną, definiując odległość tak aby na każdym X_i pozostała ona bez zmian a $d(X_i, X_j) \geq \exp(\max(\operatorname{diam} X_i, \operatorname{diam} X_j))$.

Twierdzenie 45 (Roe, 2001)**.** *Niech G grupa rezydualnie skończona. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *suma rozłączna $\coprod G/N_i$ ma własność A;*
(2) *G jest średniowalna.*

Dowód opiera się na następującej geometrycznej własności ciągu G_i: dla każdego $R > 0$ istnieje indeks i taki, że epimorfizm ilorazowy $G \to G_i$ obcięty do kuli $B_G(e, R)$ jest izometrią na kulę $B_{G_i}(e, R)$.

Przykładem grupy rezydualnie skończonej jest grupa wolna.

Wniosek 46. *Istnieje rodzina podgrup normalnych N_i skończonego indeksu grupy wolnej $\mathbb{F}_2$ o trywialnym przecięciu, taka, że $X = \coprod \mathbb{F}_2/N_i$ nie ma własności A.*

Powyższe przykłady mają ograniczoną geometrię.

Druga klasa przykładów wykorzystuje wysoko-wymiarowe produkty kartezjańskie. Mając daną grupę skończoną G o zbiorze generatorów S poprzez G^n rozumiemy produkt kartzejański n kopii G, generowany przez zbiór $S \times \{e\} \times \cdots \times \{e\} \cup \{e\} \times S \times \{e\} \times \cdots \times \{e\} \cup \cdots \cup \{e\} \times \cdots \times \{e\} \times S$.

Twierdzenie 47 (Nowak, 2007)**.** *Niech G skończona grupa o przynajmniej dwóch elementach. Wówczas suma rozłączna $\coprod_n G^n$ nie ma własności A.*

W przypadku gdy $G = \mathbb{Z}_2$ powyższy przykład to suma kostek dyskretnych coraz większych wymiarów, z tzw. metryką Hamminga. Ta rodzina kostek jest niezależnie użyteczna w geometrii metrycznej przestrzeni Banacha.

7. Zgrubne zanurzenia w przestrzenie Banacha

Istotnym pytaniem jest, które przestrzenie metryczne i grupy możemy zanurzyć zgrubnie w przestrzeń Hilberta. Powodem jest następujące

Twierdzenie 48 (Yu, 1998)**.** *Niech G skończenie generowana grupa. Jeśli G zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta to hipoteza Novikova jest prawdziwa dla wszystkich rozmaitości zamkniętych M takich, że $\pi_1(M) = G$.*

Hipoteza Novikova to jeden z większych otwartych problemów w topologii rozmaitości. Mówi ona o tym że wyższe sygnatury są niezmiennikami typu homotopijnego rozmaitości. Wyższe sygnatury to liczby przypisane rozmaitości, otrzymane poprzez ewaluację pewnych wyrażeń w klasach charakterystycznych rozmaitości, na klasie orientacji.

Twierdzenie 49. *Niech X przestrzeń metryczna o ograniczonej geometrii. Jeśli X ma własność A to X zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

Dowód. Mając dany ciąg rodzin zbiorów A_x^n, dla ε spełniających $\sum \varepsilon_n^2 < \infty$ konstruujemy

$$\xi_x^n = \frac{1_{A_x}}{\sqrt{\#A_x}} \in \ell_2(X \times \mathbb{N}).$$

Następnie definiujemy przekształcenie $F\colon X \to \bigoplus \ell_2(X \times \mathbb{N})$ wzorem

$$F(x) = \bigoplus \xi_x - \xi_p,$$

gdzie p jest ustalonym punktem. Tak zdefiniowane F jest zanurzeniem zgrubnym X w $H = \ell_2(X \times \mathbb{N})$. $\square$

Wniosek 50. *Jeśli X ma skończony wymiar asymptotyczny to X zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

Zatem otrzymujemy listę grup dla których hipoteza Novikova jest wnioskiem z geometrycznych własności grupy:

- średniowalne,
- hiperboliczne,
- liniowe
- mapping class grupy

Istotnym pytaniem było czy zgrubna zanurzalność w przestrzeń Hilberta jest równoważna własności A.

Twierdzenie 51 (Nowak)**.** *Niech $X = \coprod G^n$ będzie przestrzenią z twierdzenia 47. Wówczas X nie ma własności A ale zanurza się zgrubnie z przestrzeń Hilberta.*

W przypadku zanurzeń w przestrzenie Hilberta również nie istnieje wiele przykładów przestrzeni, które nie zanurzają się w nią zgrubnie. Pierwszy taki przykład został znaleziony przez Gonga, Dranishnikova, Lafforgue'a i Yu, wykorzystując pewną konstrukcję Enflo. Na podstawie ich przykładu Gromov zaobserwował, że ważnym przykładem są ekspandery, omówione bardziej szczegółowe w następnej sekcji.

Twierdzenie 52 (Gromov)**.** *Ciąg ekspanderów nie zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

Interesujące są również zanurzenia w inne przestrzenie Banacha, np. przestrzenie ℓ_p lub, ogólniej, jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha. Dla niektórych przestrzeni Banacha zanurzenie zgrubne zawsze istnieje.

Przykład 53. Każda dyskretna przestrzeń metryczna zanurza się w przestrzeń ℓ_∞ (tzw. zanurzenie Kuratowskiego).

Twierdzenie 54 (Aharoni, 1974)**.** *Dowolna ośrodkowa przestrzeń metryczna zanurza się bi-Lipschitzowsko w c_0 (a więc również zgrubnie).*

Twierdzenie 55 (Brown–Guentner, 2003)**.** *Dowolna przestrzeń metryczna o ograniczonej geometrii zanurza się zgrubnie w pewną refleksywną przestrzeń Banacha, np. w $\left(\bigoplus_{p=2,3,\ldots} \ell_p\right)_{(2)}$.*

Żadna z powyższych przestrzeni nie jest jednostajnie wypukła. Przestrzeń Banacha E jest jednostajnie wypukła, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że $\|x - y\| \geq \varepsilon$ implikuje

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Przykładami jednostajnie wypukłych przestrzeni Banacha są $L_p(\mu)$ dla dowolnej miary i $1 < p < \infty$. Przestrzenie c_0, ℓ_1 i ℓ_∞ nie są jednostajnie wypukłe, co jest widoczne nawet w dwóch wymiarach.

Przykład 56. Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z normą ℓ_1 (miejską) nie jest jednostajnie wypukła, ale posiada równoważną normę jednostajną wypukła, normę euklidesową.

Zatem jednostajna wypukłość przestrzeni Banacha jest własnością izometryczną a nie izomorficzną. Przestrzeń Banacha, która posiada równoważną normę jednostajnie wypukłą nazywa się superrefleksywną.

Ze wszystkich przestrzeni ℓ_p, w przestrzeń Hilberta najtrudniej jest zanurzyć zgrubnie.

Twierdzenie 57 (Nowak, 2005)**.** *Niech X przestrzeń metryczna, która zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta. Wówczas X zanurza się zgrubnie w przestrzeń ℓ_p dla każdego $1 \leq p \leq \infty$.*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się przekształcenie Mazura, pomiędzy sferami jednostkowymi przestrzeni L_p. Przekształcenie to definiujemy jako $M_{p,q}\colon S(L_p(\mu)) \to S(L_q(\mu))$,

$$M_{p,q} f(x) = |f(x)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign}(f(x)).$$

Ma ono tą własność, że $M_{p,q}$ jest, dla dowolnych $1 \leq p, q < \infty$, jednostajnie ciągłym homeomorfizem sfer L_p i L_q o jednostajnie ciągłej odwrotności. (Zauważmy, że $M_{p,q}^{-1} = M_{q,p}$).

Ciekawą własnością zanurzeń zgrubnych jest również to, że wyznaczone są one na skończonych podzbiorach.

Twierdzenie 58 (Ostrovski)**.** *Przestrzeń metryczna X zanurza się zgrubnie w przestrzeń Banacha E wtedy i tylko wtedy gdy istnieją funkcje $\rho_-, \rho_+\colon [o,\infty) \to [0,\infty)$ takie, że dla każdego skończonego podzbioru $F \subseteq X$ istnieje przekształcenie $\varphi_F\colon F \to X$ takie, że*

$$\rho_-(d(x,y)) \leq \|\varphi_F(x) - \varphi_F(y)\| \leq \rho_+(d(x,y)).$$

8. Ekspandery

Ekspandery to skończone grafy o bardzo ciekawych własnościach. Są obecnie bardzo intensywnie badane ze względu na swoje zastosowania w różnych dziedzinach matematyki i informatyki.

Dla grafu $\Gamma = (V,E)$ stopień wierzchołka to ilość krawędzi posiadających jeden koniec w tym wierzchołku. Dla podzbioru $A \subseteq V$ definiujemy brzeg „krawędziowy” jako zbiór tych krawędzi $e \in E$, dla których jeden koniec leży w A a drugi w $V \setminus A$. Wówczas $\partial_e A = \partial_e V \setminus A$.

Definicja 59. *Niech $\Gamma = (V,E)$ skończony graf. Stałą izoperymetryczną Cheegera $h(\Gamma)$ definiujemy wzorem*

$$h(\Gamma) = \min\left\{ \frac{\#\partial_e A}{\max(A, V\setminus A)} \ :\ A \subseteq V \right\}.$$

Stała ta mierzy rozmiary brzegu zbiorów wierzchołków. Definicja ekspanderów wykorzystuje tą stałą.

Definicja 60. *Niech $\{\Gamma_n = (V_n, E_n)\}$ będzie ciągiem skończonych grafów o wspólnie ograniczonych stopniach wierzchołków. $\{\Gamma_n\}$ jest ciągiem ekspanderów jeśli*

(1) $\#V_n \to \infty$,
(2) $\inf h(\Gamma_n) > 0$.

Zatem ekspandery to grafy o wspólnie ograniczonych stopniach wierzchołków, w których zbiory mają relatywnie duże brzegi. Innymi słowy, taki graf ma dużo dróg pomiędzy wierzchołkami. Tego typu grafy mają zastosowania w informatyce i w przemyśle.

Teraz mając dany graf Γ jak powyżej wybierzmy dowolna orientacje krawędzi. Definiujemy dyskretny gradient $\nabla\colon \ell_2(V) \to \ell_2(E)$ wzorem

$$\nabla f(x,y) = f(y) - f(x),$$

jeśli (x,y) jest zorientowaną krawędzią o początku x i końcu y. Dyskretny Laplasjan $\Delta\colon \ell_2(V) \to \ell_2(V)$ jest wówczas zdefiniowany wzorem

$$\Delta = \nabla^*\nabla.$$

Operator Δ jest dodatnim, samosprzężonym operatorem na przestrzeni skończenie wymiarowej $\ell_2(V)$. 0 jest w jego spektrum przy założeniu że graf Γ jest spójny. Przez $\lambda_1(\Gamma)$ oznaczamy najmniejszą dodatnią wartość własną Δ.

Twierdzenie 61 (Dodziuk, Alon, Tanner, ...). *Niech Γ graf skończony o stopniach wierzchołków ograniczonych przez k. Wówczas*

$$\frac{h(\Gamma)^2}{2k} \leq \lambda_1(\Gamma) \leq 2h(\Gamma).$$

Stąd otrzymujemy analityczną charakteryzację ekspanderów.

Wniosek 62. *$\{\Gamma_n\}$ jest ciągiem ekspanderów wtedy i tylko wtedy gdy $\#V_n \to \infty$ oraz*

$$\inf \lambda_1(\Gamma_n) > 0.$$

Przykłady ekspanderów nie są łatwe do skonstruowania. Konstrukcję Margulisa omówimy w następnej sekcji.

Twierdzenie 63. *Niech $\{\Gamma_n\}$ będzie ciągiem ekspanderów. Wówczas $X = \coprod \Gamma_n$ nie zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

Wykorzystując pewne techniki interpolacyjne można również pokazać, że ekspandery nie zanurzają się zgrubnie w przestrzenie L_p dla $1 \leq p < \infty$.

Ważnym problemem w geometrii metrycznej jest pytanie o zanurzalność ekspanderów w jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha.

Twierdzenie 64 (V. Lafforgue 2007; Mendel–Naor 2011). *Istnieją ekspandery, które nie zanurzają się zgrubnie w żadną jednostajnie wypukłą przestrzeń Banacha.*

Nadal nie wiadomo czy istnieją ekspandery, które zanurzają się zgrubnie w pewną jednostajnie wypukłą przestrzeń Banacha.

9. Własność (T)

Własność (T) została wprowadzona przez Kazhdana w latach 60tych. Operator ograniczony U na przestrzeni Hilberta jest unitarny jeśli $U^*U = I$. Operatory unitarne są izometriami liniowymi przestrzeni Hilberta: zachowują iloczyn skalarny.

Definicja 65. *Grupa G generowana przez skończony zbiór S ma własność (T) jeśli dla każdej reprezentacji unitarnej, która nie ma wektorów niezmienniczych istnieje $\delta > 0$ taka, że*

$$\sup_{s \in S} \|v - \pi_s v\| \geq \delta \|v\|.$$

Przykład 66. Grupy skończone mają (T).

Własność (T) jest bardzo silną własnością grupy i relatywnie niewiele grup ją posiada. Głównymi przykładami są kraty w grupach Liego wyższej rangi, a w szczególności grupy $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dla $n \geq 3$ (Kazhdan).

Własność (T) ma wiele zastosowań, w szczególności ekspandery. Niezależnie Margulis i Sullivan rozwiązali przy jej pomocy problem Ruziewicza o jednozanczności średniej niezmienniczej na sferze w $\mathbb{R}^n$, niezmienniczej ze względu na obroty.

Przykład 67. Grupa $\mathbb{Z}$, a ogólniej, grupy średniowalne, nie mają własności (T). Istotnie, reprezentacja regularna λ grupy G na $\ell_2(G)$ ma ciąg wektorów $v_n = \dfrac{1_{F_n}}{(\#F_n)^{1/2}}$, gdzie F_n jest zbiorem Følnera dla $\varepsilon = 1/n$, spełniających

$$\|v_n - \lambda_s v_n\| \to 0,$$

dla $s \in S$. Z drugiej strony, λ nie posiada niezerowych wektorów niezmienniczych. (Reprezentacja regularna G na $\ell_2(G)$ jest dana przez lewe przesunięcia: $(\lambda_h f)(g) = f(h^{-1}g)$).

Lemat 68. *Niech H będzie podgrupą skończonego indeksu w G. Wówczas G ma własność (T) wtedy i tylko wtedy gdy H ma własność (T).*

Stwierdzenie 69. *Niech G grupa z własnością (T) a Q niech będzie ilorazem G. Wówczas Q ma własność (T).*

Dowód. Niech π reprezentacja unitarna Q na przestrzeni Hilberta H, nie posiadająca niezerowych wektorów niezmienniczych. W naturalny sposób π zadaje też reprezentację unitarną grupy G, również nie posiadającą wektorów niezmienniczych. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\sup_{s\in S} \|v - \pi_s v\| \geq \delta \|v\|,$$

dla każdego generatora s grupy G. Zatem to samo możemy wywnioskować dla generatorów grupy Q, będących obrazem generatorów G przy przekształceniu ilorazowym. $\square$

Wniosek 70. *Grupa, która rzutuje się na nieskończoną grupę średniowalną, nie może mieć własności (T). W szczególności, grupa wolna $\mathbb{F}_n$ nie ma własności (T).*

Wykorzystując powyższy fakt, Margulis udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 71 (Margulis)**.** *Niech G – rezydualnie skończona grupa z własnością (T) Kazhdana. Wówczas rodzina grafów Cayley skończonych ilorazów G_i, gdzie N_i ciąg podgrup skończonego indeksu w G o trywialnym przecięciu, stanowi rodzinę ekspanderów.*

W szczególności, korzystając z własności (T) dla $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, rodzina grafów Cayley'a

$$\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}_{p^k}),$$

stanowi rodzinę ekspanderów.

Literatura

[1] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR2415834 (2009i:22001)

[2] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR1744486 (2000k:53038)

[3] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295. MR1253544 (95m:20041)

[4] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000. MR1786869 (2001i:20081)

[5] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **43** (2006), no. 4, 439–561 (electronic), DOI 10.1090/S0273-0979-06-01126-8. MR2247919 (2007h:68055)

[6] Alexander Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Progress in Mathematics, vol. 125, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. With an appendix by Jonathan D. Rogawski. MR1308046 (96g:22018)

[7] Piotr W. Nowak and Guoliang Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012. MR2986138

[8] John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR2007488 (2004g:53050)

Piotr Nowak

Piotr Nowak większość z ostatnich 10 lat spędził w USA. Stopień doktora otrzymał w 2008 roku na *Vanderbilt University* w USA, pod kierunkiem Guolianga Yu. Przez kolejne lata pracował na *Texas A&M University* w College Station i w MSRI w Berkeley. Od 2011 jest jednocześnie adiunktem na Uniwersytecie Warszawskim oraz w Instytucie Matematycznym PAN. W USA realizował granty *National Science Foundation*, w Polsce prowadzi projekt Fundacji na rzecz Nauki Polskiej. Wygłosił ponad 60 zaproszonych wykładów na międzynarodowych konferencjach i seminariach. Główne zainteresowania badawcze to szeroko pojęta geometria grup dyskretnych i jej zastosowania w innych dziedzinach matematyki: topologii, teorii indeksu, analizie harmonicznej i nieprzemiennej geometrii. W 2012 roku wydał, wspólnie z Guoliangiem Yu, książkę z tej tematyki.