ELEMENTY TEORII ALGEBR VON NEUMANNA

PIOTR M. SOŁTAN

Spis treści

1. Początek

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Przestrzeń wszystkich ograniczonych operatorów na $\mathscr{H}$ będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{B}(\mathscr{H})$. Podzbiór $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ nazywamy *samosprzężonym*, jeśli $s \in S$ implikuje $s^* \in S$. Dla $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ definiujemy *komutant* zbioru S jako

$$S' = \bigl\{x \in \mathrm{B}(\mathscr{H}) \,\big|\, \forall\, s \in S \; sx = xs\bigr\}.$$

Zbiór S' jest automatycznie *algebrą* ($x, y \in S'$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow , \lambda x, x + y, xy \in S'$) zawierającą *operator identycznościowy* $\mathbb{1} \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Jeśli S jest samosprzężony, to S' jest samosprzężony.

Jest jasne, że

(1) jeśli $S_1 \subset S_2$, to $S_1' \supset S_2'$,
(2) dla dowolnego $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ mamy $S \subset (S')'$.

Dla $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ definiujemy *bikomutant* zbioru S jako komutant komutanta S i oznaczamy go symbolem S'' (czyli $S'' = (S')'$).

Fakt 1.1. *Mamy* $(S'')' = (S')''$. $\Bigl($ To jest jasne, obie strony są równe $\bigl((S')')\bigr)'$.$\Bigr)$

Skoro tak, to oznaczając przez S''' zbiór $(S'')' = (S')''$, na mocy (1), mamy $S' \supset S'''$ (bo $S \subset S''$ ze względu na (2)) oraz $S' \subset S'''$ (ma nocy (2) zastosowanego do S').

Wniosek 1.2. *Mamy* $S' = S'''$ *i w konsekwencji*

$$S' = S''' = S''''' = \cdots, \qquad S'' = S'''' = S'''''' = \cdots.$$

Definicja 1.3. Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Algebrę operatorów $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ nazywamy *algebrą von Neumanna*, jeśli M jest samosprzężonym podzbiorem $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ oraz $\mathsf{M} = \mathsf{M}''$.

Przykład 1.4. Dla dowolnego samosprzężonego $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ komutant S' jest algebrą von Neumanna. Komutant algebry von Neumanna jest algebrą von Neumanna.

Na przestrzeni $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ mamy *normę operatorową* zdefiniowaną wzorem

$$\|x\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\|.$$

Łatwo sprawdzić, że komutant dowolnego zbioru $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest domknięty w topologii zadanej przez tę normę: jeśli $x_1, x_2, \ldots \in S'$ i $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$, to dla dowolnego $s \in S$ mamy

$$sx = \lim_{n\to\infty} sx_n = \lim_{n\to\infty} x_n s = xs,$$

a więc $x \in S'$. Oznacza to, że dla samosprzężonego $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ zbiór S'' jest *domkniętą* $*$-podalgebrą $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ zawierającą operator identycznościowy. W szczególności każda algebra von Neumanna M jest C^*-algebrą z jedynką, czyli algebrą Banacha z inwolucją zawierającą element neutralny dla operacji mnożenia, której norma spełnia

$$\|x^*x\| = \|x\|^2$$

dla wszystkich $x \in \mathsf{M}$. Istotnie, dla dowolnego $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ mamy

$$\|x\|^2 = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\|^2 = \sup_{\|\xi\|=1} (x\xi|x\xi) = \sup_{\|\xi\|=1} (\xi|x^*x\xi) \le \|x^*x\| \le \|x^*\|\|x\|.$$

Stąd po pierwsze $\|x\| \le \|x^*\|$ (czyli $\|x\| = \|x^*\|$), a po drugie $\|x\|^2 = \|x^*x\|$.

Uwaga 1.5. Łatwo się przekonać, że dla $S = \{\lambda\mathbb{1} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ mamy $S' = \mathrm{B}(\mathscr{H})$, a więc $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest algebrą von Neumanna. W szczególności $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest C^*-algebrą.

1.1. **Parę słów o C^*-algebrach.** Niech A będzie C^*-algebrą z jedynką. Dla $a \in \mathsf{A}$ definiujemy *widmo* a jako zbiór

$$\operatorname{Sp} a = \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, \text{operator } \lambda\mathbb{1} - a \text{ nie jest odwracalny}\bigr\}.$$

Widmo dowolnego elementu jest niepustym i zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Jeśli $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ jest C^*-podalgebrą (z jedynką), to widmo elementu $b \in \mathsf{B}$ jest identyczne z widmem elementu $b \in \mathsf{A}$.

Fakt 1.6. *Dla $a, b \in \mathsf{A}$ mamy $\operatorname{Sp} ab = \operatorname{Sp} ba \mod \{0\}$.* (W każdej algebrze nad $\mathbb{C}$.)

Element $a \in \mathsf{A}$ nazywamy normalnym, jeśli spełnia $a^*a = aa^*$. Dla dowolnego normalnego $a \in \mathsf{A}$ mamy (jedyny) izometryczny $*$-izomorfizm algebry $\mathrm{C}(\operatorname{Sp} a)$ na najmniejszą domkniętą $*$-podalgebrę A zawierającą a oraz $\mathbb{1}$ taki, że funkcja $\operatorname{Sp} a \ni \lambda \mapsto \lambda \in \mathbb{C}$ przechodzi na a, natomiast funkcja stała $\operatorname{Sp} a \ni \lambda \mapsto 1$ przechodzi na $\mathbb{1}$. Tradycyjnie wartość tego izomorfizmu na $f \in \mathrm{C}(\operatorname{Sp} a)$ oznaczamy symbolem $f(a)$ i nazywamy *funkcją od elementu a*. Odwzorowanie $f \mapsto f(a)$ nazywamy *rachunkiem funkcyjnym.*

Następujący fakt jest standardowym wynikiem teorii C^*-algebr:

Fakt 1.7. *Niech a będzie normalnym elementem C^*-algebry A i niech $f \in \mathrm{C}(\operatorname{Sp} a)$. Wówczas*
(1) $\operatorname{Sp} f(a) = f(\operatorname{Sp} a)$,
(2) *jeśli $g \in \mathrm{C}\bigl(\operatorname{Sp} f(a)\bigr)$, to $g\bigl(f(a)\bigr) = (g \circ f)(a)$.*

Element $a \in \mathsf{A}$ taki, że $a = a^*$ nazywamy *samosprzężonym.* Oczywiście elementy samosprzężone są normalne. Ponadto widmo elementu samosprzężonego jest podzbiorem $\mathbb{R}$.

Element $a \in \mathsf{A}$ nazywamy *dodatnim*, jeśli a jest normalny i $\operatorname{Sp} a \subset [0, +\infty[$ (piszemy $a \geq 0$).

Stwierdzenie 1.8. *Dla elementu $a \in \mathsf{A}$ następujące warunki są równoważne:*
(1) $a \geq 0$,
(2) *istnieje samosprzężony $b \in \mathsf{A}$ taki, że $a = b^2$,*
(3) *$a = a^*$ i dla każdego $t \geq \|a\|$ mamy $\|t\mathbb{1} - a\| \leq t$,*
(4) *$a = a^*$ i istnieje $t \geq \|a\|$ takie, że $\|t\mathbb{1} - a\| \leq t$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Jeśli $a \geq 0$, to funkcja $f\colon t \mapsto \sqrt{t}$ jest ciągła na $\operatorname{Sp} a$ i kładąc $b = f(a)$ otrzymujemy samosprzężony b taki, że $b^2 = a$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Jeśli $a = b^2$, a b jest samosprzężony, to $a = f(b)$, przy czym funkcja f przyjmuje tylko nieujemne wartości. Oznacza to, że widmo a zawiera się w $[0, +\infty[$, a więc $a \geq 0$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Element $t\mathbb{1} - a$ jest samosprzężony, a więc jego norma jest równa *promieniowi spektralnemu*:

$$\|t\mathbb{1} - a\| = \sup\bigl\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \operatorname{Sp}(t\mathbb{1} - a)\bigr\} = \sup\bigl\{|t - \mu| \,\big|\, \mu \in \operatorname{Sp} a\bigr\}.$$

Skoro $\operatorname{Sp} a \subset [0, +\infty[$, mamy $\|t\mathbb{1} - a\| \leq t$ dla wszystkich $t \geq \|a\|$.

Implikacja (3) $\Rightarrow$ (4) jest jasna.

(4) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\lambda \in \operatorname{Sp} a$ i takie $t \geq \|a\|$, że $\|t\mathbb{1} - a\| \leq t$. Wówczas $|t - \lambda| \leq \|t\mathbb{1} - a\| \leq t$, co natychmiast dowodzi, że $\lambda \geq 0$. ☐

Wniosek 1.9. *Niech $a, b \geq 0$. Wówczas $a + b \geq 0$.*

Dowód. Z warunku (3) ze stwierdzenia 1.8 wiemy, że

$$\bigl\|\|a\|\mathbb{1} - a\bigr\| \leq \|a\| \quad \text{oraz} \quad \bigl\|\|b\|\mathbb{1} - b\bigr\| \leq \|b\|.$$

Niech $t = \|a\| + \|b\|$ wtedy oczywiście $t \geq \|a + b\|$ oraz

$$\big\|t\mathbb{1} - (a+b)\big\| \leq \big\|\|a\|\mathbb{1} - a\big\| + \big\|\|b\|\mathbb{1} - b\big\| \leq \|a\| + \|b\| = t.$$

Innymi słowy wykazaliśmy, że dla $a + b$ spełniony jest warunek (4) ze stwierdzenia 1.8. $\square$

Stwierdzenie 1.10. *Element $a \in \mathsf{A}$ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b^*b$ dla pewnego $b \in \mathsf{A}$.*

Dowód. Jeśli $a \geq 0$, to na mocy stwierdzenia 1.8 mamy $a = b^2$ dla pewnego $b = b^*$, a więc $a = b^*b$.

Załóżmy teraz, że $a = b^*b$. Jest jasne, że a jest samosprzężony. Niech $a_+ = f_+(a)$ i $a_- = f_-(a)$, gdzie $f_+(t) = \max\{t, 0\}$, $f_-(t) = \max\{-t, 0\}$. Wówczas $a = a_+ - a_-$ i $a_\pm$ są dodatnimi elementami takimi, że $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. Pokażemy, że $a_- = 0$. Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}\big(b\sqrt{a_-}\big)^*\big(b\sqrt{a_-}\big) &= \sqrt{a_-}b^*b\sqrt{a_-}b\\ &= \sqrt{a_-}(a_+ - a_-)\sqrt{a_-}\\ &= a_-a_+ - a_-^2 = -a_-^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Z drugiej strony, skoro dla dowolnego $c \in \mathsf{A}$ mamy

$$cc^* = 2\left(\frac{c+c^*}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c-c^*}{2i}\right)^2 - c^*c,$$

to kładąc $c = b\sqrt{a_-}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\big(b\sqrt{a_-}\big)\big(b\sqrt{a_-}\big)^* &= 2\left(\frac{c+c^*}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c-c^*}{2i}\right)^2 - \big(b\sqrt{a_-}\big)^*\big(b\sqrt{a_-}\big)\\ &= 2\left(\frac{c+c^*}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c-c^*}{2i}\right)^2 + a_-^2.\end{aligned}$$

Element ten jest dodatni, gdyż kwadraty elementów samosprzężonych są dodatnie, a sumy elementów dodatnich są dodatnie (stwierdzenie 1.8 i wniosek1.9).

Ale $\mathrm{Sp}\big(b\sqrt{a_-}\big)\big(b\sqrt{a_-}\big)^* = \mathrm{Sp}\big(b\sqrt{a_-}\big)^*\big(b\sqrt{a_-}\big) \mod \{0\}$, więc $-a_-^2 = \big(b\sqrt{a_-}\big)^*\big(b\sqrt{a_-}\big)$ jest samosprzężonym elementem o widmie $\{0\}$, a co za tym idzie jest równy 0. W konsekwencji $a_- = 0$. $\square$

Stwierdzenie 1.11. *Niech $a \in \mathsf{A}$ będzie dodatni i niech $b = \sqrt{a}$. Wówczas jeśli $a = c^2$ dla pewnego $c \geq 0$, to $c = b$.*

W szczególności dodatni pierwiastek z a należy do najmniejszej C*-podalgebry A zawierającej a oraz $\mathbb{1}$.

Dowód stwierdzenia 1.11. Niech $x = \sqrt{b}$ i niech $y = \sqrt{c}$. Mamy

$$b = x^2, \qquad a = x^4, \qquad c = y^2, \qquad a = y^4.$$

W szczególności y jest przemienny z a. Jest więc również przemienny z funkcjami ciągłymi od a, czyli

$$[y, b] = [y, \sqrt{a}\,] = 0, \qquad\qquad [y, x] = [y, \sqrt[4]{a}\,] = 0.$$

Skoro $c = \sqrt{y}$, a x jest przemienny z y, to $[c, x] = 0$. W końcu, $[c, b] = [c, x^2] = 0$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\big(x(b-c)\big)^*\big(x(b-c)\big) + \big(y(b-c)\big)^*\big(y(b-c)\big) &= (b-c)x^2(b-c) + (b-c)y^2(b-c)\\ &= (b-c)b(b-c) + (b-c)c(b-c)\\ &= (b-c)(b+c)(b-c)\\ &= (b^2-c^2)(b-c) = 0\end{aligned}$$

na mocy przemienności b i c. To oznacza, że

$$\big(x(b-c)\big)^*\big(x(b-c)\big) = -\big(y(b-c)\big)^*\big(y(b-c)\big),$$

a skoro $\big(x(b-c)\big)^*\big(x(b-c)\big), \big(y(b-c)\big)^*\big(y(b-c)\big) \geq 0$, mamy

$$\big(x(b-c)\big)^*\big(x(b-c)\big) = \big(y(b-c)\big)^*\big(y(b-c)\big) = 0.$$

Stąd natychmiast wynika, że

$$\begin{aligned}0 &= \big(x(b-c)\big)^*\big(x(b-c)\big) - \big(y(b-c)\big)^*\big(y(b-c)\big)\\ &= (b-c)x^2(b-c) - (b-c)y^2(b-c)\\ &= (b-c)b(b-c) - (b-c)c(b-c)\\ &= (b-c)^3.\end{aligned}$$

Pamiętając, że $b - c$ jest elementem samosprzężonym, otrzymujemy $b - c = 0$. $\square$

Uwaga 1.12. Jeśli C*-algebra A jest algebrą operatorów działających na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$, to dodatniość elementu $a \in \mathsf{A}$ jest równoważna temu, że operator $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest dodatni w tym sensie, że dla wszystkich $\xi \in \mathscr{H}$ mamy $(\xi | a\xi) \geq 0$. Istotnie, jeśli $a = b^*b$, to oczywiście $(\xi | a\xi) \geq 0$ dla każdego ξ. Przeciwna implikacja wynika z tego, że widmo operatora jest zwarte w domknięciu jego *numerical range*.

Element $u \in \mathsf{A}$ nazywamy *unitarnym*, jeśli $u^*u = uu^* = \mathbb{1}$.

Stwierdzenie 1.13. *Każdy element $a \in \mathsf{A}$ jest kombinacją liniową czterech operatorów unitarnych.*

Dowód. Wystarczy wykazać to dla elementów o normie 1. Niech więc $\|a\| = 1$. Mamy $a = x + \mathrm{i}y$, gdzie

$$x = \tfrac{1}{2}(a + a^*), \qquad y = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(a - a^*).$$

Wówczas x i y są samosprzężone i $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Mamy

$$x = \tfrac{1}{2}(u + u^*),$$

gdzie

$$u = x + i\sqrt{\mathbb{1} - x^2}.$$

Element u jest unitarny:

$$u^*u = uu^* = (x + i\sqrt{\mathbb{1} - x^2})(x - i\sqrt{\mathbb{1} - x^2}) = x^2 + (\mathbb{1} - x^2) = \mathbb{1}.$$

Podobnie $y = \frac{1}{2}(v + v^*)$, gdzie $v = y + i\sqrt{\mathbb{1} - y^2}$ jest unitarny. $\square$

1.2. **Rozkład biegunowy.** Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Operator $p \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ nazywamy *rzutem*, jeśli $p = p^2$ i $p = p^*$ (czyli w jednym równaniu: $p = p^*p$). Innymi słowy nie rozważamy rzutów innych niż ortogonalne.

Dla operatora $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ definiujemy *lewy nośnik* $\boldsymbol{l}(x)$ i *prawy nośnik* $\boldsymbol{r}(x)$ jako rzuty odpowiednio na $\overline{x\mathscr{H}}$ i $(\ker x)^{\perp}$.

Fakt 1.14. $\boldsymbol{l}(x^*) = \boldsymbol{r}(x)$, $\boldsymbol{r}(x^*) = \boldsymbol{l}(x)$

Jeśli $x = x^*$, to $\boldsymbol{l}(x) = \boldsymbol{r}(x)$ i rzut ten nazywamy *nośnikiem* x, a oznaczamy symbolem $\boldsymbol{s}(x)$.

Definicja 1.15. *Częściowa izometria* jest to taki operator $v \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$, że v^*v jest rzutem.

Niech v będzie częściową izometrią. Wówczas vv^* także jest rzutem. Istotnie: $(vv^*)^3 = vv^*vv^*vv^* = vv^*vv^* = (vv^*)^2$, a więc $x = vv^*$ jest dodatnim operatorem, który spełnia $x^3 = x^2$. Taki operator musi być rzutem.

Dla częściowej izometrii v rzuty v^*v i vv^* nazywamy odpowiednio rzutem *początkowym* i *końcowym* częściowej izometrii v. Łatwo sprawdzić następujące fakty

- $vv^*\mathscr{H}$ jest obrazem v,
- $(\mathbb{1} - v^*v)\mathscr{H} = (v^*v\mathscr{H})^{\perp}$ jest jądrem v,
- v przeprowadza $v^*v\mathscr{H}$ na $vv^*\mathscr{H}$ izometrycznie.

(W szczególności $vv^*v = v$ i $v^*vv^* = v^*$.)

Twierdzenie 1.16. *Niech $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Wówczas istnieje dokładnie jedna para (v, d) złożona z częściowej izometrii v i operatora dodatniego d taka, że*

- *$x = vd$,*
- *$v^*v = \boldsymbol{s}(d)$.*

Dowód. Niech $d = \sqrt{x^*x}$. Oczywiście d jest operatorem dodatnim. Dla dowolnego $\xi \in \mathscr{H}$ mamy

$$\|d\xi\|^2 = (d\xi|d\xi) = (\xi|d^*d\xi) = (\xi|x^*x\xi) = \|x\xi\|^2.$$

Wynika stąd, że odwzorowanie

$$d\mathscr{H} \ni d\xi \longmapsto x\xi \in x\mathscr{H} \tag{1.1}$$

jest dobrze zdefiniowane i izometryczne. Niech $\mathscr{K}_1 = \overline{d\mathscr{H}}$ i $\mathscr{K}_2 = \overline{x\mathscr{H}}$. Wówczas (1.1) ustala izometrię v_0 podprzestrzeni $\mathscr{K}_1$ na $\mathscr{K}_2$. Definiujemy $v \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ kładąc $v = v_0$ na $\mathscr{K}_1$ i $v = 0$ na $\mathscr{K}_1^{\perp}$. Teraz nietrudno się przekonać, że $x = vd$.

Załóżmy, że $x = wk$ jest takim rozkładem x, że $k \geq 0$, a $w^*w = \boldsymbol{s}(k)$. Wtedy $x^*x = kw^*wk = k^2$, a więc z jedyności dodatniego pierwiastka operatora dodatniego mamy $k = \sqrt{x^*x}$, czyli $k = d$. Dalej $w^*w = \boldsymbol{s}(k) = \boldsymbol{s}(d)$. Oznacza to, że w jest częściową izometrią o przestrzeni początkowej $\mathscr{K}_1$. Fakt ten wraz z równaniem $x = wd$ wyznacza v na gęstym podzbiorze $\mathscr{K}_1$ jednoznacznie: wartością w na $d\xi$ musi być $x\xi$. Oznacza to, że w i v są równe na $d\mathscr{H}$, a więc również na $\mathscr{K}_1$. Stąd $w = v$. □

Rozkład $x = vd$ opisany w twierdzeniu 1.16 nazywamy *rozkładem biegunowym* x. Standardowym oznaczeniem na d jest $|x|$.

Fakt 1.17. *Niech $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ i niech $x = v|x|$ będzie jego rozkładem biegunowym. Mamy*

- *$\boldsymbol{l}(x) = vv^*$,*
- *$\boldsymbol{r}(x) = v^*v$,*
- *v jest operatorem unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker x = \{0\}$ i $\overline{x\mathscr{H}} = \mathscr{H}$.*

1.3. **Rozkład biegunowy w algebrach von Neumanna.** Niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna. Komutant M' algebry M jest także algebrą von Neumanna. Operator $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ należy do M wtedy i tylko wtedy, gdy $x$jest przemienny ze wszystkimi elementami M'. Na mocy stwierdzenia 1.13 jest to równoważne temu, że

$$u'x = xu'$$

dla wszystkich unitarnych $u' \in \mathsf{M}'$.

Stwierdzenie 1.18. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* $x \in \mathsf{M}$. *Niech* $x = v|x|$ *będzie rozkładem biegunowym* x. *Wówczas*

$$|x|, v, \boldsymbol{l}(x), \boldsymbol{r}(x) \in \mathsf{M}.$$

Dowód. Niech u' będzie unitarnym elementem M'. Mamy

$$x = u'xu'^* = u'v|x|u'^* = u'vu'^*u'|x|u'^*.$$

Operator $u'|x|u'^*$ jest dodatni, a $u'vu'^*$ jest częściową izometrią. Ponadto

$$(u'vu'^*)^*(u'vu'^*) = u'v^*vu'^* = u'\,\boldsymbol{s}(|x|)u'^*.$$

Łatwo się przekonać, że $u'\,\boldsymbol{s}(|x|)u'^* = \boldsymbol{s}(u'|x|u'^*)$ (ogólnie, dla samosprzężonego $t \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ operator $\boldsymbol{s}(t)$ jest rzutem na dopełnienie ortogonalne jądra t, a więc dla unitarnego w mamy $\boldsymbol{s}(wtw^*) = w\,\boldsymbol{s}(t)w^*$). Oznacza to, że para $\bigl(u'vu'^*, u'|x|u'^*\bigr)$ spełnia warunki z twierdzenia o rozkładzie biegunowym. Z jedyności rozkładu wynika, że

$$u'vu'^* = v, \qquad u'|x|u'^* = |x|$$

lub inaczej

$$u'v = vu', \qquad u'|x| = |x|u'.$$

Ponieważ u' jest dowolnym unitarnym elementem $'sM'$, otrzymujemy $v, |x| \in \mathsf{M}$. Wreszcie $\boldsymbol{l}(x) = v^*v \in \mathsf{M}$ i $\boldsymbol{r}(x) = vv^* \in \mathsf{M}$. ☐

2. Topologie na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$

2.1. **Słabe topologie.** Niech E będzie przestrzenią wektorową i niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni E^*, która *rozdziela punkty* E (dla $x \in E \setminus \{0\}$ istnieje $\psi \in F$ taki, że $\psi(x) \neq 0$). Rozważmy rodzinę półnorm $\{p_\psi\}_{\psi \in F}$ na E zdefiniowanych jako $p_\psi(x) = \bigl|\psi(x)\bigr|$, $x \in E$. Wówczas rodzina skończonych przecięć zbiorów postaci

$$\bigl\{x \in E \,\big|\, p_\psi(x) < 1\bigr\}, \qquad (\psi \in F)$$

jest bazą otoczeń 0 dla lokalnie wypukłej topologii na E. Topologię tę nazywamy $\sigma(E, F)$-topologią. Będziemy korzystali z faktu, że funkcjonał φ na E jest ciągły w tej topologii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\psi_1, \ldots, \psi_n \in F$ takie, że

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| \leq \sum_{j=1}^{n} \bigl|\psi_j(x)\bigr|, \qquad (x \in E).$$

Wynika on z następującej ogólnej charakteryzacji ciągłości odwzorowań liniowych na przestrzeniach lokalnie wypukłych:

Fakt 2.1. *Niech* X *i* Y *będą przestrzeniami lokalnie wypukłymi z topologiami zadanymi przez rodziny półnorm* $\mathscr{P}$ *i* $\mathscr{Q}$. *Dla odwzorowania liniowego*$T\colon X \to Y$ *następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest ciągłe z $(X, \mathscr{P})$ do $(Y, \mathscr{Q})$,*
(2) *T jest ciągłe w $0 \in X$,*
(3) *$\forall\, q \in \mathscr{Q}\ \exists\, p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ takie, że*

$$\sup\bigl\{q(Tx) \bigm| p_1(x), \ldots, p_n(x) < 1\bigr\} < +\infty,$$

(4) *$\forall\, q \in \mathscr{Q}\ \exists\, p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ takie, że*

$$q(Tx) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i p_i(x), \qquad (x, \in X).$$

Lemat 2.2. *Niech φ będzie funkcjonałem na przestrzeni wektorowej E i niech $p_1, \ldots, p_n$ będą półnormami na E takimi, że*

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| \leq \sum_{j=1}^{n} p_j(x)$$

dla wszystkich $x \in E$. Wówczas istnieją funkcjonały $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ na E takie, że

$$\bigl|\varphi_j(x)\bigr| \leq p_j(x), \qquad (x, \in E,\ j = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

oraz

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j. \tag{2.2}$$

Dowód. Niech D będzie podprzestrzenią E^n zdefiniowaną jako

$$D = \bigl\{(x, \ldots, x) \bigm| x \in E\bigr\}$$

i niech φ_0 będzie funkcjonałem na D zadanym wzorem $\varphi_0(x, \ldots, x) = \varphi(x)$. Dalej niech p będzie półnorm na E^n daną wzorem

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x_j).$$

Na mocy twierdzenia Hahna-Banacha istnieje rozszerzenie φ_0 do funkcjonału Φ na E^n takie, że

$$\bigl|\Phi(x_1, \ldots, x_n)\bigr| \leq p(x_1, \ldots, x_n)$$

dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Zdefiniujmy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon E \to \mathbb{C}$ kładąc

$$\varphi_j(x) = \Phi(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)$$

(x na j-tym miejscu). Relacje (2.1) i (2.2) są oczywiste. □

Twierdzenie 2.3. *Niech E będzie przestrzenią Banacha i niech $F \subset E^*$ będzie podprzestrzenią rozdzielającą punkty. Oznaczmy przez E_1 domkniętą kulę jednostkową w E. Wówczas dla $\varphi \in E^*$ mamy*

(1) *φ jest $\sigma(E, F)$-ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in F$;*
(2) *φ jest $\sigma(E, F)$-ciągły na E_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \overline{F}$;*
(3) *topologie $\sigma(E, F)$ i $\sigma(E, \overline{F})$ pokrywają się na E_1;*
(4) *jeśli F jest domknięta w topologii normowej na E^* i φ jest $\sigma(E, F)$-ciągły na E_1, to φ jest $\sigma(E, F)$-ciągły.*

Dowód. Ad (1). Jest jasne, że jeśli $\varphi \in F$, to φ jest $\sigma(E,F)$-ciągły. Z kolei, jeśli φ jest $\sigma(E,F)$-ciągły, to istnieją $\psi_1,\dots,\psi_n \in F$ takie, że

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| \leq \sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x), \qquad (x \in E),$$

a więc, na mocy lematu 2.2, istnieją funkcjonały $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ takie, że $\bigl|\varphi_j(x)\bigr| \leq \bigl|\psi_j(x)\bigr|$ dla wszystkich x (w szczególności $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in E^*$) i

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j.$$

Jeśli dla pewnego k mamy $\psi_k = 0$, to $\varphi_k = 0$. Natomiast jeśli $\psi_j \neq 0$, to istnieje $x_j \in E$ taki, że $\psi_j(x_j) = 1$. Wówczas

$$\bigl|\varphi_j\bigl(x - \psi_j(x)x_j\bigr)\bigr| \leq \bigl|\psi_j\bigl(x - \psi_j(x)x_j\bigr)\bigr| = 0,$$

a zatem

$$\varphi_j = \varphi_j(x_j)\psi_j \in F.$$

Stąd $\varphi \in F$.

Ad (2). Niech $\varphi \in \overline{F}$, a więc $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, gdzie $\varphi_n \in F$. Teraz jeśli $(x_i)_{i\in I}$ jest ciągiem uogólnionym $\sigma(E,F)$-zbieżnym do x i takim, że $\|x_i\| \leq 1$ dla wszystkich $i \in I$, to

$$\begin{aligned}\bigl|\varphi(x_i) - \varphi(x)\bigr| &\leq \bigl|\varphi(x_i) - \varphi_n(x_i)\bigr| + \bigl|\varphi_n(x_i) - \varphi_n(x)\bigr| + \bigl|\varphi_n(x) - \varphi(x)\bigr| \\ &\leq 2\|\varphi_n - \varphi\| + \bigl|\varphi_n(x_i) - \varphi_n(x)\bigr|.\end{aligned}$$

Dla $\varepsilon > 0$ wybieramy n tak, aby $\|\varphi_n - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dla tego n istnieje $j \in I$ taki, że dla $i \succcurlyeq j$ mamy $\bigl|\varphi_n(x_i) - \varphi_n(x)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3}$, czyli $\bigl|\varphi(x_i) - \varphi(x)\bigr| < \varepsilon$ dla $i \succeq j$.

Odwrotnie: niech φ będzie $\sigma(E,F)$-ciągły na E_1. Wówczas φ jest normowo ciągły, a więc $\varphi \in E^*$. Dalej, skoro φ jest $\sigma(E,F)$-ciągły na E_1, jest on $\sigma(E,F)$-ciągły w 0 (dla uogólnionych ciągów w E_1). Dla $\varepsilon > 0$ istnieją $\psi_1 \dots, \psi_n \in F$ takie, że

$$\Biggl(\|x\| \leq 1,\ \sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) < 1\Biggr) \Longrightarrow \Bigl(\bigl|\varphi(x)\bigr| < \varepsilon\Bigr). \tag{2.3}$$

Wynika stąd, że

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| \leq \|\varphi\| \sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) + \varepsilon\|x\|$$

Istotnie: warunek (2.3) implikuje, że dla każdego x mamy

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}\bigl(\tfrac{x}{\|x\|}\bigr) < 1\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\bigl|\varphi(x)\bigr| < \varepsilon\|x\|\Bigr).$$

Innymi słowy

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) < \|x\|\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\bigl|\varphi(x)\bigr| < \varepsilon\|x\|\Bigr).$$

Zatem, jeśli $x \in E$ to mamy dwie możliwości:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) < \|x\| \quad \text{lub} \quad \sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) \geq \|x\|.$$

W pierwszej z nich zachodzi

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| < \varepsilon\|x\| \leq \|\varphi\| \sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) + \varepsilon\|x\|,$$

a w drugiej

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| \leq \|\varphi\|\|x\| \leq \|\varphi\| \sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) \leq \|\varphi\| \sum_{j=1}^{n} p_{\psi_j}(x) + \varepsilon\|x\|.$$

W świetle (2.3), z lematu (2.2) wynika, że φ można zapisać jako $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, gdzie

$$\bigl|\varphi_1(x)\bigr| \leq \sum_{j=1}^{n} p_{\|\varphi\|\psi_j}(x) \quad \text{oraz} \quad \bigl|\varphi_2(x)\bigr| \leq \varepsilon\|x\|$$

dla wszystkich $x \in E$. Oznacza to, że $\varphi_1 \in F$ (bo jest $\sigma(E,F)$-ciągły) i $\|\varphi - \varphi_1\| = \|\varphi_2\| \leq \varepsilon$.

Pozostałe punkty są jasne. □

2.2. **Najważniejsze topologie na** $\mathrm{B}(\mathscr{H})$**.** Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Dla $\xi, \eta \in \mathscr{H}$ definiujemy funkcjonał $\omega_{\xi,\eta}$ na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ kładąc

$$\omega_{\xi,\eta}(x) = (\eta|x\xi)\,.$$

Symbolem $\mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$ będziemy oznaczać przestrzeń (skończonych) kombinacji liniowych funkcjonałów $\omega_{\xi,\eta}$, natomiast symbolem $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$ oznaczać będziemy $\overline{\mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim}$. Zauważmy, że $\|\omega_{\xi,\eta}\| = \|\xi\|\|\eta\|$.

Definicja 2.4. $\sigma\bigl(\mathrm{B}(\mathscr{H}), \mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim\bigr)$-topologię na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ nazywamy *słabą operatorową* topologią lub wo-*topologią*. Topologię $\sigma\bigl(\mathrm{B}(\mathscr{H}), \mathrm{B}(\mathscr{H})_*\bigr)$ nazywamy *ultrasłabą* topologią lub w-*topologią*.

Twierdzenie 2.3 dla $E = \mathrm{B}(\mathscr{H})$ i $F = \mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$ można przepisać w następujący sposób:

Stwierdzenie 2.5. *Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Wówczas*
1. $\mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$ *jest przestrzenią wszystkich* wo-*ciągłych funkcjonałów na* $\mathrm{B}(\mathscr{H})$*;*
2. $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$ *jest przestrzenią wszystkich* w-*ciągłych funkcjonałów na* $\mathrm{B}(\mathscr{H})$*;*
3. *funkcjonał na* $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ *jest* w-*ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jego obcięcie do* $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$ *jest* wo-*ciągłe;*
4. *na* $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$ *topologie słaba operatorowa i ultrasłaba pokrywają się.*

Definicja 2.6. *Mocna operatorowa* topologia (inaczej so-*topologia*) na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest to topologia zadana przez rodzinę półnorm

$$\mathrm{B}(\mathscr{H}) \ni x \longmapsto \|x\xi\|, \qquad (\xi \in \mathscr{H}).$$

Twierdzenie 2.7. *Funkcjonał liniowy na* $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ *jest* wo-*ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest* so-*ciągły.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że każdy wo-ciągły funkcjonał jest so-ciągły. Załóżmy więc, że φ jest so-ciągły. Oznacza to, że istnieją wektory $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$ takie, że

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| < \sum_{j=1}^{n} \|x\eta_j\|, \qquad (x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})).$$

Z lematu 2.2 wynika, że istnieją funkcjonały $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ takie, że $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$ i

$$\bigl|\varphi_j(x)\bigr| < \|x\eta_j\|, \qquad (x \in \mathrm{B}(\mathscr{H}),\ j = 1, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Ustalmy j. Wówczas $\{x\eta_j \,|\, x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})\} = \mathscr{H}$ i na mocy (2.4) odwzorowanie

$$\mathscr{H} \ni x\eta_j \longmapsto \varphi_j(x)$$

jest dobrze zdefiniowane i ograniczone. Stąd, z lematu Riesza wynika, że istnieje $\xi_j \in \mathscr{H}$ taki, że

$$\varphi_j(x) = (\xi_j | x\eta_j)\,.$$

W szczególności $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_{\xi_j,\eta_j} \in \mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$. ☐

Ponieważ w lokalnie wypukłej przestrzeni wektorowo topologicznej domknięty podzbiór wypukły jest przecięciem domkniętych podprzestrzeni (tw. o oddzielaniu), a te są wyznaczone przez ciągłe funkcjonały, mamy:

Wniosek 2.8. *Niech K będzie wypukłym podzbiorem $\mathrm{B}(\mathscr{H})$. Wówczas* wo-*domknięcie K i* so-*domknięcie K są równe. W szczególności wypukły podzbiór $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest* wo-*domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jest* so-*domknięty.*

Natomiast z twierdzenia Hahna-Banacha wynika następujący wniosek:

Wniosek 2.9. *Niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie podprzestrzenią. Wówczas funkcjonał liniowy na M jest* wo-*ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest* so-*ciągły.*

Twierdzenie 2.10. *Przestrzeń $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią sprzężoną do przestrzeni Banacha $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$.*

Mamy kanoniczne dwuliniowe odwzorowanie

$$\mathrm{B}(\mathscr{H}) \times \mathrm{B}(\mathscr{H})_* \ni (x, \varphi) \longmapsto \varphi(x) \in \mathbb{C}.$$

Kanoniczny izomorfizm z twierdzenia 2.10 oznacza, że dla każdego $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi(x)$ jest ciągłym funkcjonałem na $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$ o normie $\|x\|$ oraz, że każdy funkcjonał ciągły na $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$ jest tej postaci.

Dowód twierdzenia 2.10. Weźmy $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ i niech Φ_x będzie funkcjonałem

$$\mathrm{B}(\mathscr{H})_* \ni \varphi \longmapsto \varphi(x).$$

Jest jasne, że Φ_x jest ciągłym funkcjonałem i $\|\Phi_x\| \leq \|x\|$. Z drugiej strony

$$\|x\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\| = \sup_{\|\eta\|=\|\xi\|=1} \bigl|(\eta|x\xi)\bigr| = \sup_{\|\eta\|=\|\xi\|=1} \bigl|\Phi_x(\omega_{\xi,\eta})\bigr| \leq \|\Phi_x\|.$$

Teraz niech $\Phi \in \bigl(\mathrm{B}(\mathscr{H})_*\bigr)^*$. Definiujemy formę półtoraliniową F na $\mathscr{H}$ kładąc

$$F(\xi, \eta) = \Phi(\omega_{\eta,\xi}).$$

Forma ta jest ograniczona: $\|F\| \leq \|\Phi\|$. Tak więc istnieje dokładnie jeden $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ taki, że

$$(\xi|x\eta) = F(\xi, \eta) = \Phi(\omega_{\eta,\xi})$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in \mathscr{H}$. Oznacza to, że $\Phi = \Phi_x$ na $\mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$, a więc także na $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$. ☐

Wniosek 2.11. *Kula $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$ jest* wo-*zwarta.*

Stwierdzenie 2.12. *Niech* B *Będzie przestrzenią Banacha i niech* $\mathsf{B}_* \subset \mathsf{B}^*$ *będzie podprzestrzenią taką, że* B *jest kanonicznie izometrycznie izomorficzna z przestrzenią* $(\mathsf{B}_*)^*$. *Niech* M *będzie* $\sigma(\mathsf{B},\mathsf{B}_*)$*-domkniętą podprzestrzenią. Przyjmijmy oznaczenie*

$$\mathsf{M}_* = \bigl\{\varphi\big|_{\mathsf{M}} \,\big|\, \varphi \in \mathsf{B}_*\bigr\}.$$

Wówczas

(1) M_* *jest domkniętą podprzestrzenią* M^**;*
(2) *dla każdego* $\psi \in \mathsf{M}_*$ *i* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\varphi \in \mathsf{B}_*$ *taki, że* $\varphi\big|_{\mathsf{M}} = \psi$ *i* $\|\varphi\| < \|\psi\| + \varepsilon$*;*
(3) M *jest kanonicznie izomorficzna z* $(\mathsf{M}_*)^*$.

Dowód. Stosujemy oznaczenia z książki Rudina:

$$\begin{aligned} {}^{\perp}\mathsf{M} &= \bigl\{\varphi \in \mathsf{B}_* \,\big|\, \forall\, x \in \mathsf{M}\ \varphi(x) = 0\bigr\},\\ ({}^{\perp}\mathsf{M})^{\perp} &= \bigl\{x \in \mathsf{B} \,\big|\, \forall\, \varphi \in {}^{\perp}\mathsf{M}\ \varphi(x) = 0\bigr\}. \end{aligned}$$

The bipolar theorem (lub twierdzenie 4.7(b) z Rudina) mówi, że $({}^{\perp}\mathsf{M})^{\perp} = \mathsf{M}$.

Odwzorowanie $\mathsf{B}_* \ni \varphi \mapsto \varphi\big|_{\mathsf{M}}$ jest liniową kontrakcją, a jego jądrem jest ${}^{\perp}\mathsf{M}$. Stad dostajemy odwzorowanie (surjekcję)

$$\mathsf{B}_*/{}^{\perp}\mathsf{M} \ni \varphi + {}^{\perp}\mathsf{M} \longmapsto \varphi\big|_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}_*. \tag{2.5}$$

Mamy dla $\varphi \in \mathsf{B}_*$ i dowolnego $\varphi_1 \in {}^{\perp}\mathsf{M}$

$$\bigl\|\varphi\big|_{\mathsf{M}}\bigr\| = \sup_{y\in\mathsf{M},\|y\|=1} \bigl|\varphi(y)\bigr| = \sup_{y\in\mathsf{M},\,\|y\|=1} \bigl|\varphi(y)+\varphi_1(y)\bigr| \leq \sup_{y\in\mathsf{B},\,\|y\|=1} \bigl|\varphi(y)+\varphi_1(y)\bigr| = \|\varphi+\varphi_1\|,$$

a więc $\bigl\|\varphi\big|_{\mathsf{M}}\bigr\| \leq \inf\limits_{\varphi_1\in{}^{\perp}\mathsf{M}} \|\varphi+\varphi_1\| = \|\varphi + {}^{\perp}\mathsf{M}\|$, czyli (2.5) jest kontrakcją. Pokażemy, że odwzorowanie to jest izometrią.

Niech $\varphi_0 \in \mathsf{B}_*$ będzie taki, że $\|\varphi_0 + {}^{\perp}\mathsf{M}\| = 1$. Oznacza to, że $\mathrm{dist}(\varphi_0, {}^{\perp}\mathsf{M}) = 1$. Z twierdzenia Hahana-Banacha wiemy, że istnieje funkcjonał $\Phi \in (\mathsf{B}_*)^*$ taki, że $\Phi\big|_{{}^{\perp}\mathsf{M}} = 0$ i $\|\Phi\| = \Phi(\varphi_0) = 1$. Ponieważ $(\mathsf{B}_*)^* = \mathsf{B}$, istnieje $x \in \mathsf{B}$ taki, $\|x\| = \varphi_0(x) = 1$ i $\varphi(x) = 0$ dla wszystkich $\varphi \in {}^{\perp}\mathsf{M}$. Oznacza to, że $x \in ({}^{\perp}\mathsf{M})^{\perp} = \mathsf{M}$. Stąd również $\bigl\|\varphi_0\big|_{\mathsf{M}}\bigr\| \geq \varphi_0(x) = 1$, a to znaczy, że (2.5) jest izometrią.

W szczególności $\mathsf{M}_* \cong \mathsf{B}_*/{}^{\perp}\mathsf{M}$ jest zupełna, a więc M_* jest normowo domkniętą podprzestrzenią B_* (co dowodzi punktu (1).

Ad (2). Wykazaliśmy powyżej, że dla $\psi \in \mathsf{M}_*$ istnieje $\varphi_0 \in \mathsf{B}_*$ taki, że $\varphi_0\big|_{\mathsf{M}} = \psi$ i $\|\psi\| = \|\varphi_0 + {}^{\perp}\mathsf{M}\|$. W szczególności dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\varphi_1 \in {}^{\perp}\mathsf{M}$ taki, że $\|\varphi_0+\varphi_1\| \leq \|\psi\|+\varepsilon$. Jeśli położymy $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, to $\varphi \in \mathsf{B}_*$, $\varphi\big|_{\mathsf{M}} = \varphi_0\big|_{\mathsf{M}}$ i $\|\varphi\| \leq \|\psi\| + \varepsilon$.

Ad (3). Weźmy $x \in \mathsf{M}$. Odwzorowanie

$$\Psi_x \colon \mathsf{M}_* \ni \psi \longmapsto \psi(x) \in \mathbb{C}$$

jest ograniczone (z normą nie większą niż $\|x\|$). Biorąc pod uwagę fakt, że $\mathsf{B} = (\mathsf{B}_*)^*$ oraz punkt (2), obliczamy

$$\|\Psi_x\| = \sup_{\substack{\psi\in\mathsf{M}_*\\ \|\psi\|=1}} \bigl|\psi(x)\bigr| = \sup_{\substack{\psi\in\mathsf{M}_*\\ \|\psi\|<1}} \bigl|\psi(x)\bigr| = \sup_{\substack{\varphi\in\mathsf{B}_*\\ \|\varphi\|<1}} \bigl|\varphi(x)\bigr| = \sup_{\substack{\varphi\in\mathsf{B}_*\\ \|\varphi\|=1}} \bigl|\varphi(x)\bigr| = \|x\|.$$

To oznacza, że M wkłada się w $(\mathsf{M}_*)^*$ izometrycznie.

Z drugiej strony, jeśli $\Psi \in (\mathsf{M}_*)^*$, to możemy zdefiniować funkcjonał Φ na B_* kładąc

$$\Phi(\varphi) = \Psi\bigl(\varphi\big|_{\mathsf{M}}\bigr).$$

Wówczas $\Phi \in (\mathsf{B}_*)^*$, a zatem istnieje $x \in \mathsf{B}$ taki, że $\Phi(\varphi) = \varphi(x)$, a ponadto $x \in ({}^\perp\mathsf{M})^\perp = \mathsf{M}$, bo i $\Phi\big|_{{}^\perp\mathsf{M}} = 0$. Oznacza to, że dla $\psi \in \mathsf{M}_*$ (czyli $\psi = \varphi\big|_{\mathsf{M}}$ dla pewnego $\varphi \in \mathsf{B}_*$) mamy

$$\Psi(\psi) = \Psi\big(\varphi\big|_{\mathsf{M}}\big) = \Phi(\varphi) = \varphi(x) = \psi(x),$$

gdyż $x \in \mathsf{M}$. Stąd $\Psi = \Psi_x$. □

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Dla w-domkniętej podprzestrzeni $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ przyjmiemy oznaczenie $\mathsf{M}_\sim$ na zbiór wszystkich wo-ciągłych funkcjonałów na M. Tak jak w stwierdzeniu 2.12 symbolem M_* będziemy oznaczać zbiór w-ciągłych funkcjonałów na M. Jest jasne, że $\mathsf{M}_\sim$ i M_* są podprzestrzeniami w M^*.

Twierdzenie 2.13. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie* w-*domkniętą podprzestrzenią. Wówczas*

(1) $\mathsf{M}_\sim = \big\{\varphi\big|_{\mathsf{M}} \,\big|\, \varphi \in \mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim\big\}$;
(2) $\mathsf{M}_* = \big\{\varphi\big|_{\mathsf{M}} \,\big|\, \varphi \in \mathrm{B}(\mathscr{H})_*\big\}$;
(3) M_* *jest domknięciem* $\mathsf{M}_\sim$ *w* M^*;
(4) M *jest kanonicznie izomorficzna z* $(\mathsf{M}_*)^*$;
(5) *dla każdego* $\varphi \in \mathsf{M}_*$ *i* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\psi \in \mathrm{B}(\mathscr{H})_*$ *taki, że* $\psi\big|_{\mathsf{M}}$ *i* $\|\psi\| \leq \|\varphi\| + \varepsilon$;
(6) *funkcjonał liniowy* ψ *na* M *należy do* M_* *wtedy i tylko wtedy, gdy* ψ *jest* wo-*ciągły na* M_1.

Dowód. Punkty (1) i (2) wynikają natychmiast z twierdzenia Hahana-Banacha. Punkty (4) i (5) to części (3) i (2) stwierdzenia 2.12. Z kolei stwierdzenie 2.12(1) mówi, że M_* jest domkniętą podprzestrzenią w M^*. Gęstość $\mathsf{M}_\sim$ w M_* wynika z tego, że $\mathrm{B}(\mathscr{H})^* \ni \varphi \mapsto \varphi\big|_{\mathsf{M}}$ jest ciągłą surjekcją przeprowadzającą $\mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$ na $\mathsf{M}_\sim$ i $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$ na M_* (punkty (1) i (2)) i z gęstości $\mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$ w $\mathrm{B}(\mathscr{H})_*$. To dowodzi punktu (3).

Z udowodnionych już punktów (1) i (2) wynika, że wo-topologia i w-topologia na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ indukują na M odpowiednio $\sigma(\mathsf{M}, \mathsf{M}_\sim)$ i $\sigma(\mathsf{M}, \mathsf{M}_*)$ topologię. Tak więc punkt (6) jest natychmiastową konsekwencją punktu (2) twierdzenia 2.3 dla $E = \mathsf{M}$ i $F = \mathsf{M}_\sim$ (korzystamy z punktu (3) niniejszego twierdzenia). □

W twierdzenia Kreina-Šmuliana (Rudin, zadanie 21 do rozdziału 4) wynika natychmiast:

Wniosek 2.14. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie podprzestrzenią.*

(1) M *jest* w-*domknięta wtedy i tylko wtedy, gdy kula* M_1 *jest* wo-*zwarta.*
(2) *jeśli* M *jest* w-*domknięta, to dowolny wypukły podzbiór* $K \subset \mathsf{M}$ *jest* w-*domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $r > 0$ *zbiór* $K \cap r\mathsf{M}_1$ *jest* w-*zwarty.*

Definicja 2.15. Niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie w-domkniętą podprzestrzenią. Przestrzeń M_* nazywamy przestrzenią *predualną* do M.

2.3. **Inne topologie na** $\mathrm{B}(\mathscr{H})$**.** Oprócz topologii normowej na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ zdefiniowaliśmy jeszcze w-topologię, wo-topologię oraz so-topologię. Zdefiniujemy teraz jeszcze trzy inne, a mianowicie s-topologię (inaczej *ultramocną* topologię), s*-topologię i so*-topologię. Wszystkie są wprowadzane przez rodziny półnorm, które umieszczamy w tabeli 1.

Topologie s* i so* są tak zdefiniowane, aby operacja brania sprzężenia operatora była w niech ciągła (nie sjest ciągła w topologiach soi s). Nietrudno także wykazać, że pary topologii $(\mathrm{so}, \mathrm{s})$ i $(\mathrm{so}^*, \mathrm{s}^*)$ pokrywają się na zbiorach ograniczonych.

Stwierdzenie 2.16. *Niech* φ *będzie* s*-*ciągłym funkcjonałem liniowym na* $\mathrm{B}(\mathscr{H})$*. Wtedy* φ *jest* w-*ciągły.*

Topologia	Półnormy	
wo	$x \mapsto \lvert\varphi(x)\rvert,$	$\varphi \in \mathrm{B}(\mathscr{H})_\sim$
w	$x \mapsto \lvert\varphi(x)\rvert,$	$\varphi \in \mathrm{B}(\mathscr{H})_*$
so	$x \mapsto \lVert x\xi\rVert,$	$\xi \in \mathscr{H}$
s	$x \mapsto \Bigl(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lVert x\xi_n\rVert^2\Bigr)^{\frac{1}{2}},$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lVert\xi_n\rVert^2 < +\infty$
so*	$x \mapsto \bigl(\lVert x\xi\rVert^2 + \lVert x^*\xi\rVert^2\bigr)^{\frac{1}{2}},$	$\xi \in \mathscr{H}$
s*	$x \mapsto \Bigl(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lVert x\xi_n\rVert^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lVert x^*\xi_n\rVert^2\Bigr)^{\frac{1}{2}},$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lVert\xi_n\rVert^2 < +\infty$

TABELA 1. Najważniejsze topologie na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ i wyznaczające je półnormy

Dowód. Jeśli φ jest s*-ciągły, to $|\varphi|$ szacuje się przez sumę półnorm definiujących s*-topologię. Z lematu 2.2 wynika, że φ jest sumą funkcjonałów, których moduły szacują się przez półnormy definiujące s*-topologię. Tak więc wystarczy udowodnić, że jeśli

$$\bigl|\varphi(x)\bigr| \leq \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} \lVert x\xi_n\rVert^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lVert x^*\xi_n\rVert^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \qquad (x \in \mathrm{B}(\mathscr{H}), \tag{2.6}$$

gdzie $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest takim ciągiem wektorów z $\mathscr{H}$, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lVert\xi_n\rVert^2 < +\infty$$

to φ jest w-ciągły.

Zdefiniujmy nową przestrzeń Hilberta $\widetilde{\mathscr{H}} = \Bigl(\bigoplus\limits_{n=-\infty}^{1} \overline{\mathscr{H}}\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}\Bigr)$, gdzie $\overline{\mathscr{H}}$ jest przestrzenią zespolenie sprzężoną do $\mathscr{H}$.[1] Możemy działać operatorami z $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ na przestrzeni $\widetilde{\mathscr{H}}$: operator $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ definiuje $\widetilde{a} \in \mathrm{B}(\widetilde{\mathscr{H}})$ wzorem

$$\widetilde{a}(\dots, \overline{\eta_{-2}}, \overline{\eta_{-1}}, \eta_1, \eta_2, \dots) = (\dots, \overline{a^*\eta_{-2}}, \overline{a^*\eta_{-1}}, a\eta_1, a\eta_2, \dots).$$

Oznaczmy $\widetilde{\xi} = (\dots, \overline{\xi_2}, \overline{\xi_1}, \xi_1, \xi_2, \dots)$ i rozważmy odwzorowanie

$$\widetilde{a}\widetilde{\xi} \longmapsto \varphi(a), \qquad (a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})).$$

[1] Przestrzeń $\overline{\mathscr{H}}$ jest jako zbiór bijektywnym obrazem zbioru $\mathscr{H}$ przy odwzorowaniu zapisywanym jako $\mathscr{H} \ni \psi \longmapsto \overline{\psi} \in \overline{\mathscr{H}}$. Struktura przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$ zadana jest wzorami

$$\overline{\psi_1} + \overline{\psi_2} = \overline{\psi_1 + \psi_2}, \qquad \lambda\overline{\psi} = \overline{\overline{\lambda}\psi},$$

dla $\psi_1, \psi_2, \psi \in \mathscr{H}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, a iloczyn skalarny zdefiniowany jest jako

$$\bigl(\overline{\psi_1}\big|\overline{\psi_2}\bigr)_{\overline{\mathscr{H}}} = (\psi_2|\psi_1)_{\mathscr{H}}, \qquad (\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{H}).$$

Dzięki oszacowaniu (2.6) jest ono dobrze zdefiniowane i ograniczone. Tak więc istnieje wektor $\widetilde{\eta} = (\dots, \overline{\eta_{-2}}, \overline{\eta_{-1}}, \eta_1, \eta_2, \dots) \in \widetilde{\mathscr{H}}$ taki, że

$$\varphi(a) = \left(\widetilde{\eta}\middle|\widetilde{a}\widetilde{\xi}\right), \qquad (a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})).$$

Innymi słowy

$$\varphi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n | a\xi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n | a\eta_{-n}),$$

a taki funkcjonał jest w-ciągły. □

Można udowodnić (np. korzystając z własności operatorów śladowych, patrz część 6), że każdy funkcjonał $\varphi \in \mathrm{B}(\mathscr{H})_*$ jest postaci

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n | x\xi_n), \qquad (x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})),$$

gdzie $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są takimi ciągami wektorów z $\mathscr{H}$, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2, \sum_{n=1}^{\infty} \|\eta_n\|^2 < +\infty.$$

Wynika stąd, że każdy w-ciągły funkcjonał na $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest także s*-ciągły, co pozwala przepisać stwierdzenie 2.16 na wniosek:

Wniosek 2.17. *Funkcjonał liniowy na* $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ *jest* s**-ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest* w-*ciągły.*

W szczególności dla zbioru wypukłego $K \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ domknięcia w s*-topologii i w w-topologii są takie same. Mamy też wynik ogólniejszy:

Twierdzenie 2.18. *Niech* $K \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie wypukły. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) K *jest* w-*domknięty,*
(2) K *jest* s-*domknięty,*
(3) K *jest* s*-*domknięty,*
(4) *dla każdego* $r > 0$ *zbiór* $K \cap \mathrm{B}(\mathscr{H})_r$ *jest* wo-*domknięty* (w-*domknięty),*
(5) *dla każdego* $r > 0$ *zbiór* $K \cap \mathrm{B}(\mathscr{H})_r$ *jest* so-*domknięty* (s-*domknięty),*
(6) *dla każdego* $r > 0$ *zbiór* $K \cap \mathrm{B}(\mathscr{H})_r$ *jest* so*-*domknięty* (s*-*domknięty).*

Dowód. Implikacje (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) oraz (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) są jasne. Równoważność (1) $\Leftrightarrow$ (4) wynika z twierdzenia Kreina-Šmuliana. W końcu implikacje (6) $\Rightarrow$ (4) i (3) $\Rightarrow$ (1) wynikają ze stwierdzenia 2.16. □

2.4. Algebry von Neumanna.

Stwierdzenie 2.19. *Niech* $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$*. Wówczas* S' *jest zbiorem* so-*domkniętym.*

Dowód. Niech $(x_i)_{i\in I}$ będzie ciągiem uogólnionym elementów S' so-zbieżnym do $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Weźmy $\xi \in \mathscr{H}$ i $s \in S$. Mamy

$$xs\xi = \lim_{i\in I} x_i s\xi = \lim_{i\in I} s x_i \xi = s \lim_{i\in I} x_i \xi = sx\xi.$$

□

W szczególności dla $r > 0$ zbiór $S' \cap \mathrm{B}(\mathscr{H})_r$ jest so-domknięty, a więc

- S' jest s-domknięty,
- S' jest s*-domknięty,
- S' jest w-domknięty.

Ponadto,

- S' jest wo-domknięty (wniosek 2.8),
- S' jest so*-domknięty (bo jest s*-domknięty).

Następne twierdzenie znane jest jako *twierdzenie von Neumanna o bikomutancie.*

Twierdzenie 2.20. *Niech $\mathscr{A} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie $*$-algebrą zawierającą operator identycznościowy. Wówczas $\mathscr{A}$ jest* so-*gęsta w $\mathscr{A}''$.*

Dowód. Niech $x \in \mathscr{A}''$ i wybierzmy $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathscr{H}$ oraz $\varepsilon > 0$. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\widehat{\mathscr{H}} = \underbrace{\mathscr{H} \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}}_{n}$. Algebra $\mathscr{A}$ działa na $\widehat{\mathscr{H}}$ w przez operatory $\widehat{a}$ ($a \in \mathscr{A}$):

$$\widehat{a}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\eta_1\\ \vdots\\ a\eta_n\end{bmatrix}$$

i $\widehat{\mathscr{A}} = \left\{\widehat{a}\,\middle|\, s \in \mathscr{A}\right\}$ jest $*$-algebrą operatorów na $\widehat{\mathscr{H}}$ zawierającą operator jednostkowy. Niech

$$\widehat{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

i rozważmy zbiór

$$\mathscr{K} = \overline{\widehat{\mathscr{A}}\widehat{\xi}}.$$

Wówczas $\mathscr{K}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\widehat{\mathscr{H}}$. Ponadto $\mathscr{K}$ jest niezmiennicza dla wszystkich operatorów z $\widehat{\mathscr{A}}$. Ponadto, skoro $\widehat{\mathscr{A}}$ jest $*$-algebrą, podprzestrzeń $\mathscr{K}^{\perp}$ także jest niezmiennicza dla $\widehat{\mathscr{A}}$. Oznacza to, że każdy $\widehat{a}$ jest przemienny z rzutem p na $\mathscr{K}$. Zapisując oba te operatory w postaci macierzowej:

$$\widehat{a} = \begin{bmatrix}a & & \\ & \ddots & \\ & & a\end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad p = \begin{bmatrix}p_{1,1} & \cdots & p_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n}\end{bmatrix}$$

widzimy, że relacja $\widehat{a}p = p\widehat{a}$ oznacza dokładnie tyle, że $ap_{i,j} = p_{i,j}a$ dla wszystkich $i, j = 1, \ldots, n$. Oznacza to, że $p_{i,j} \in \mathscr{A}''$ dla wszystkich i, j. W takim razie rzut p jest przemienny z operatorem

$$\widehat{x}\colon \widehat{\mathscr{H}} \ni \begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}x\eta_1\\ \vdots\\ x\eta_n\end{bmatrix} \in \widehat{\mathscr{H}}.$$

Stąd $\widehat{x}$ zachowuje podprzestrzeń $\mathscr{K}$. Do podprzestrzeni tej należy także wektor $\widehat{\xi} \in \mathscr{K}$, bo $\widehat{\mathscr{A}}$ zawiera operator identycznościowy. Zatem $\widehat{x}\widehat{\xi} \in \mathscr{K}$. Oznacza to, że istnieje ciąg $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathscr{A}$ taki, że

$$\widehat{x}\widehat{\xi} = \lim_{m\to\infty} \widehat{a_m}\widehat{\xi}.$$

To oznacza, że $x\xi_j = \lim\limits_{n\to\infty} a_m\xi_j$ dla $j = 1, \ldots, n$, czyli x należy do so-domknięcia $\mathscr{A}$. □

Wniosek 2.21. *Niech* M *będzie* $*$*-algebrą operatorów na* $\mathscr{H}$ *zawierającą operator identycznościowy. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. M *jest algebrą von Neumanna (czyli* $\mathsf{M} = \mathsf{M}''$*),*
2. M *jest* wo-*domknięta,*
3. M *jest* w-*domknięta,*
4. M *jest* so-*domknięta,*
5. M *jest* s-*domknięta,*
6. M *jest* so*-*domknięta,*
7. M *jest* s*-*domknięta,*
8. *kula* M_1 *jest* wo-*zwarta,*
9. *kula* M_1 *jest* w-*zwarta.*

Wniosek 2.22. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *i* $\mathsf{N} \subset \mathrm{B}(\mathscr{K})$ *będą algebrami von Neumanna i niech* $\Phi\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ *będzie* w-*ciągłym* $*$*-homomorfizmem algebr z jedynką. Wówczas* $\Phi(\mathsf{M})$ *jest algebrą von Neumanna.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że kula $\Phi(\mathsf{M})_1$ jest w-zwarta. Weźmy element $y \in \Phi(\mathsf{M})$ taki, że $\|y\| < \delta < 1$. Wówczas istnieje $x \in \mathsf{M}_1$ taki, że $y = \Phi(x)$. Istotnie, jak każdy $*$-homomorfizm C*-algebr Φ jest kontrakcją, a ponadto daje się zapisać jako złożenie kanonicznego odwzorowania $\mathsf{M} \to \mathsf{M}/\ker\Phi$ i izometrii. Tak więc istnieje $x_0 \in \mathsf{M}$ taki, że $\Phi(x_0) = y$ i $\inf\limits_{z\in\ker\Phi} \|x_0 + z\| = \|y\|$. Wystarczy wybrać $x = x_0 + z$ dla odpowiednio dobranego z.

Rozważmy rozkład biegunowy $x = v|x|$ i niech $e = \chi_{[\delta,+\infty[}\bigl(|x|\bigr)$. Mamy

$$\delta e \leq |x| \qquad \text{oraz} \qquad |x|(\mathbb{1} - e) \leq \delta\mathbb{1}.$$

Dlatego

$$\delta\bigl\|\Phi(e)\bigr\| \leq \bigl\|\Phi(|x|)\bigr\| = \bigl\|\Phi(v^*x)\bigr\| = \bigl\|\Phi(v^*)\Phi(x)\bigr\| \leq \bigl\|\Phi(x)\bigr\| = \|y\|$$

Ale to oznacza, że

$$\bigl\|\Phi(e)\bigr\| \leq \tfrac{1}{\delta}\|y\| < 1,$$

czyli $\Phi(e) = 0$. Stąd

$$y = \Phi\bigl(x(\mathbb{1} - e)\bigr)$$

oraz

$$\bigl\|x(\mathbb{1} - e)\bigr\| = \bigl\|v|x|(\mathbb{1} - e)\bigr\| \leq \bigl\||x|(\mathbb{1} - e)\bigr\| \leq \delta < 1.$$

Tym samym wykazaliśmy, że

$$\bigl\{y \in \Phi(\mathsf{M}) \bigm| \|y\| < 1\bigr\} = \Phi\bigl(\bigl\{x \in \mathsf{M} \bigm| \|x\| < 1\bigr\}\bigr).$$

Teraz nasza teza wynika z tego, że M_1 jest w-zwarta, a Φ w-ciągłe. □

Uwaga 2.23. Ten sam dowód pokazuje, że obraz algebry von Neumanna przy wo-ciągłym $*$-homomorfiźmie algebr z jedynką w inną algebrą von Neumanna jest algebrą von Neumanna. Istotnie, z dowodu wniosku 2.22 wiemy, że obrazem kuli $\bigl\{x' \in \mathsf{M}' \bigm| \|x'\| < 1\bigr\}$ jest cała kula $\bigl\{y \in (\mathsf{M}')_e \bigm| \|y\| < 1\bigr\}$. Stąd kula $\bigl((\mathsf{M}')_e\bigr)_1$ jest wo-zwarta, a więc jest w-zwarta.

3. Szczególne przykłady

3.1. Skończenie wymiarowe algebry von Neumanna. Skończenie wymiarowa algebra von Neumanna jest w szczególności skończenie wymiarową C*-algebrą (tak na prawdę, to są to dokładnie te same obiekty, bo wszystkie topologie wektorowe na skończenie wymiarowej przestrzeni są równoważne). Każda skończenie wymiarowa C*-algebra jest półprostą[2] algebrą nad $\mathbb{C}$, więc do ich pełnej klasyfikacji można posłużyć się narzędziami algebraicznymi. Dokładniej, twierdzenie Wedderburna (wraz z algebraiczną domkniętością $\mathbb{C}$) mówi, że w takim przypadku

$$\mathsf{A} \cong \bigoplus_{j=1}^{m} M_{n_j}(\mathbb{C}).$$

Jeśli $\dim \mathscr{H} < +\infty$, to każda $*$-podalgebra z jedynką w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest (skończenie wymiarową) algebrą von Neumanna, ale często się zdarza, że $\dim \mathscr{H} = +\infty$, a $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest algebrą von Neumanna i $\dim \mathsf{M} < +\infty$. Podstawowym przykładem jest $\mathbb{C}\mathbb{1}$, czyli zbiór skalarnych wielokrotności identyczności na $\mathscr{H}$. Jest to oczywiście algebra von Neumanna, gdyż

$$(\mathbb{C}\mathbb{1})' = \mathrm{B}(\mathscr{H}) \quad \text{i} \quad (\mathbb{C}\mathbb{1})'' = \mathrm{B}(\mathscr{H})' = \mathbb{C}\mathbb{1}.$$

Nietrudno się przekonać, że każda skończenie wymiarowa $*$-algebra operatorów zawierająca $\mathbb{1}$ jest algebrą von Neumanna, gdyż jest ona zupełna (a więc domknięta w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$) w każdej z rozważanych w częściach 2 i (2.4) topologii. Oto typowy przykład takiej sytuacji: niech $\mathscr{H} = \mathscr{K} \oplus \mathscr{K}$, gdzie $\mathscr{K}$ jest jakąś przestrzenią Hilberta (n.p. nieskończenie wymiarową). Wówczas każdy operator na $\mathscr{H}$ można zapisać w postaci macierzy 2×2. Niech

$$\mathsf{M} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha\mathbb{1} & \beta\mathbb{1} \\ \gamma\mathbb{1} & \delta\mathbb{1} \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\} \cong M_2(\mathbb{C})$$

(przez $\mathbb{1}$ oznaczyliśmy tu odwzorowanie identycznościowe $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$).

3.2. Przemienne algebry von Neumanna. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą σ-skończoną miarą. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathscr{H} = L^2(\Omega, \mu)$. Wówczas każda funkcja $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ definiuje operator $M_f \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$:

$$(M_f\psi)(\omega) = f(\omega)\psi(\omega), \qquad (\psi \in \mathscr{H},\ \omega \in \Omega)$$

Niech $\mathsf{M} = \{ M_f \,|\, f \in L^\infty(\Omega, \mu) \}$. Zbiór operatorów M ma strukturę C*-algebry identyczną ze strukturą $L^\infty(\Omega, \mu)$:

$$\left.\begin{aligned} M_f + M_g &= M_{f+g}, \\ M_f M_g &= M_{fg}, \\ M_f^* &= M_{\overline{f}}, \\ \|M_f\| &= \|f\|_\infty, \end{aligned}\right\} \qquad (f, g \in L^\infty(\Omega, \mu)),$$

(dlatego często pisze się po prostu $\mathsf{M} = L^\infty(\Omega, \mu)$). W szczególności M jest przemienna.

Stwierdzenie 3.1. M *jest algebrą von Neumanna.*

[2]Radykał takiej algebry jest przecięciem wszystkich lewych/prawych ideałów nilpotentnych i sam jest ideałem nilpotentnym. Jednak jeśli $a \in \mathsf{A}$ należy do nilpotentnego ideału N, to należy do niego także a^*a. Nilpotentność ideału oznacza, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathsf{N}^k = \{0\}$. W szczególności $(a^*a)^k = 0$. Ale to implikuje $a = 0$.

Dowód. Na początek załóżmy, że miara μ jest skończona. Wówczas $L^\infty(\Omega,\mu)\subset L^2(\Omega,\mu)\subset L^1(\Omega,\mu)$ i każda podprzestrzeń jest gęsta w następnej. Niech $x\in\mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie dodatnim operatorem przemiennym z M i zdefiniujmy funkcjonał

$$L^\infty(\Omega,\mu)\ni f\longmapsto(\mathbb{1}\,|\,M_f x\mathbb{1}) \tag{3.1}$$

($\mathbb{1}$ oznacza funkcję stałą równą 1). Zapiszmy f w postaci $f=u|f|$, gdzie

$$u(\omega)=\begin{cases}\frac{f(\omega)}{|f(\omega)|} & f(\omega)\neq 0,\\ 0 & f(\omega)=0,\end{cases}\qquad(\omega\in\Omega).$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\bigl|(\mathbb{1}\,|\,M_f x\mathbb{1})\bigr| &= \bigl|\bigl(\mathbb{1}\,\big|\,M_u M_{|f|}x\mathbb{1}\bigr)\bigr|\\ &= \Bigl|\Bigl(M_{|f|^{1/2}}x^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}\,\Big|\,M_u M_{|f|^{1/2}}x^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}\Bigr)\Bigr|\\ &\leq \bigl\|M_{|f|^{1/2}}x^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}\bigr\|\bigl\|M_u M_{|f|^{1/2}}x^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}\bigr\|\\ &= \bigl\|M_{|f|^{1/2}}x^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}\bigr\|^2\\ &\leq \bigl(\bigl\|x^{\frac{1}{2}}\bigr\|\bigl\|M_{|f|^{1/2}}\mathbb{1}\bigr\|\bigr)^2\\ &= \|x\|\bigl\|M_{|f|^{1/2}}\mathbb{1}\bigr\|^2=\|x\|\|f\|_1.\end{aligned}$$

Oznacza to, że (3.1) jest ciągłym funkcjonałem na $L^1(\Omega,\mu)$, a więc istnieje $g\in L^\infty(\Omega,\mu)$ taki, że

$$(\mathbb{1}\,|\,M_f x\mathbb{1})=\int\limits_\Omega fg\,d\mu.$$

Teraz podstawmy $f=\overline{\varphi}\psi$, gdzie $\varphi,\psi\in L^\infty(\Omega,\mu)$. Mamy wtedy

$$\int\limits_\Omega\overline{\varphi}g\psi\,d\mu=(M_\varphi\mathbb{1}\,|\,M_\psi x\mathbb{1})=(M_\varphi\mathbb{1}\,|\,xM_\psi\mathbb{1})=(\varphi|x\psi)\,. \tag{3.2}$$

Przez ciągłość uzyskujemy (3.2) dla wszystkich $\varphi,\psi\in\mathscr{H}$, a więc $x=M_g$. Stąd już łatwo wynika, że $\mathsf{M}'=\mathsf{M}$, czyli w szczególności $\mathsf{M}=\mathsf{M}''$.

Teraz przejście of miary skończonej do σ-skończonej nie nastręcza już trudności: zapisujemy Ω jako sumę rozłącznych zbiorów skończonej miary: $\Omega=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. Kładziemy $\mathscr{H}_n=L^2(\Omega_n,\mu_n)$, gdzie μ_n jest obcięciem μ do σ-ciała $\bigl\{A\cap\Omega_n\,\big|\,A\in\mathcal{F}\bigr\}$ podzbiorów Ω_n. Wówczas oczywiście

$$\mathscr{H}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathscr{H}_n,$$

a rzut $\mathscr{H}$ na $\mathscr{H}_n$ jest elementem M. Jeśli $x\in\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest przemienny z M, to zachowuje podprzestrzenie $\mathscr{H}_n$, i możemy zdefiniować $x_n=x\big|_{\mathscr{H}_n}\in\mathrm{B}(\mathscr{H}_n)$. Wówczas x_n jest przemienny z

$$\mathsf{M}_n=\bigl\{M_f\,\big|\,f\in L^\infty(\Omega_n,\mu_n)\bigr\}\subset\mathrm{B}(\mathscr{H}_n).$$

Na podstawie rozumowania dla przestrzeni z miarą skończoną wnioskujemy, że $x_n \in \mathsf{M}_n$, czyli x_n jest operatorem mnożenia przez pewną funkcję $g_n \in L^\infty(\Omega_n, \mu_n)$. Ponieważ

$$x = \bigoplus_{n=1}^{\infty} x_n$$

widzimy, że x jest operatorem mnożenia przez funkcję g taką, że $g\big|_{\Omega_n} = g_n$. Funkcja g jest ograniczona, gdyż

$$\|x\| = \sup_n \|g_n\|_\infty.$$

Stąd $x \in \mathsf{M}$. □

Uwaga 3.2.

(1) Argument użyty w dowodzie stwierdzenia 3.1 działa również dla tak zwanych *lokalizowalnych* przestrzeni z miarą czyli takich $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, które można rozbić na rozłączną sumę zbiorów miary skończonej (niekoniecznie przeliczalną) w taki sposób, że miara każdego zbioru mierzalnego jest sumą miar jego przecięć ze zbiorami rozbicia (aby była skończona, co najwyżej przeliczalna ilość tych przecięć może mieć niezerową miarę). W szczególności algebrą von Neumanna jest np. $\ell^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathrm{B}\big(\ell^2(\mathbb{R})\big)$.

(2) W stwierdzeniu 3.1 wykazaliśmy, że algebra operatorów mnożenia przez funkcje z $L^\infty(\Omega, \mu)$ dla σ-skończonej miary μ jest nie tylko algebrą von Neumanna, ale także jest *maksymalną* przemienną podalgebrą w $\mathrm{B}\big(L^2(\Omega, \mu)\big)$.

(3) Algebra von Neumanna $\mathsf{N} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest maksymalna przemienna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathsf{N} = \mathsf{N}'$. Istotnie, $\mathsf{N} = \mathsf{N}'$ implikuje, że N jest maksymalna przemienna, a z drugiej strony, jeśli $x' \in \mathsf{N}'$ jest samosprzężony, to $\widetilde{\mathsf{N}} = \big(\{x'\} \cup \mathsf{N}\big)''$ jest przemienna i $\mathsf{N} \subset \widetilde{\mathsf{N}}$. Ale, jeśli N jest maksymalna przemienna, to musi być $\widetilde{\mathsf{N}} \subset \mathsf{N}$, a więc $x' \in \mathsf{N}$. Stąd $\mathsf{N}' \subset \mathsf{N}$.

Ciekawą cechą algebry $\mathsf{M} = L^\infty(\Omega, \mu) \subset \mathrm{B}\big((L^2(\Omega, \mu)\big)$ jest istnienie *wektora cyklicznego* dla tej algebry (w przypadku σ-skończonym).

Definicja 3.3. Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Wektor $\Xi \in \mathscr{H}$ nazywamy *cyklicznym* dla S, jeśli zbiór

$$S\Xi = \big\{ s\Xi \,\big|\, s \in S \big\}$$

jest liniowo gęsty w $\mathscr{H}$.

Jeśli $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ jest rozbiciem Ω na rozłączne zbiory miary skończonej, to wektor

$$\Xi = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{\mu(\Omega_n) 2^n} \chi_{\Omega_n}$$

jest cykliczny dla $\mathsf{M} = L^\infty(\Omega, \mu) \subset \mathrm{B}\big(L^2(\Omega, \mu)\big)$.

Stwierdzenie 3.4. *Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie przemienną algebrą von Neumanna. Jeśli M posiada wektor cykliczny, to $\mathsf{M} = \mathsf{M}'$.*

Do dowodu stwierdzenia 3.4 potrzebne będą dwa lematy:

Lemat 3.5. *Niech $t \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Wówczas t jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\eta \in \mathscr{H}$ mamy $\|t^*\eta\| = \|t\eta\|$.*

Dowód. Jeśli t jest normalny, to

$$\|t^*\eta\|^2 = (t^*\eta|t^*\eta) = (tt^*\eta|\eta) = (t^*t\eta|\eta) = (t\eta|t\eta) = \|t\eta\|^2.$$

Z drugiej strony, jeśli $\|t^*\eta\| = \|t\eta\|$ dla wszystkich η, to $(\eta|t^*t\eta) = (\eta|tt^*\eta)$, a więc przez polaryzację

$$(\xi|t^*t\eta) = (\xi|tt^*\eta)$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in \mathscr{H}$. To oznacza, że $t^*t = tt^*$. □

Lemat 3.6. *Niech $\mathscr{A}$ będzie $*$-algebrą. Wówczas $\mathscr{A}$ jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej element jest normalny.*

Dowód. Oczywiście elementy przemiennej $*$-algebry są normalne. Z drugiej strony, $\mathscr{A}$ jest rozpinana przez zwoje elementy samosprzężone. Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnych samosprzężonych $a, b \in \mathscr{A}$ mamy $[a, b] = 0$. Tak jest, bo element $a + ib$ jest normalny, a więc

$$\begin{aligned} 0 &= [a + \mathrm{i}b, a - \mathrm{i}b] = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) - (a - \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b) \\ &= a^2 + b^2 - \mathrm{i}ab + \mathrm{i}ba - a^2 - b^2 - \mathrm{i}ab + \mathrm{i}ba = 2\mathrm{i}[b, a], \end{aligned}$$

czyli a i b są przemienne. □

Dowód stwierdzenia 3.4. Przemienność M natychmiast implikuje $\mathsf{M} \subset \mathsf{M}'$. Niech Ξ będzie wektorem cyklicznym dla M i weźmy $x' \in \mathsf{M}'$. Istnieje wówczas ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów M taki, że $x'\Xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n\Xi$. Ponadto ciąg $(x_n^*\Xi)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, gdyż na mocy lematu 3.5 mamy

$$\|a_n^*\Xi - a_m^*\Xi\| = \big\|(a_n - a_m)^*\Xi\big\| = \big\|(a_n - a_m)\Xi\big\|.$$

Zatem $a_n^*\Xi \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ dla pewnego $\xi \in \mathscr{H}$. Dalej dla dowolnego $y \in \mathsf{M}$

$$\begin{aligned} (\xi|y\Xi) &= \lim_{n\to\infty} (x_n^*\Xi|y\Xi) = \lim_{n\to\infty} (y^*x_n^*\Xi|\Xi) \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n^*y^*\Xi|\Xi) = \lim_{n\to\infty} (y^*\Xi|x_n\Xi) \\ &= \big(y^*\Xi|x'\Xi\big) = \big(x'^*y^*\Xi|\Xi\big) \\ &= \big(y^*x'^*\Xi|\Xi\big) = \big(x'^*\Xi|y\Xi\big)\,. \end{aligned}$$

Ponieważ $\overline{\mathsf{M}\Xi} = \mathscr{H}$, widzimy, że $\xi = x'^*\Xi$, czyli

$$a_n^*\Xi \xrightarrow[n\to\infty]{} x'^*\Xi.$$

Stąd wynika, że x' jest operatorem normalnym, bo dla każdego $x \in \mathsf{M}$

$$\begin{aligned} \big\|x'(x\Xi)\big\| &= \|xx'\Xi\| = \lim_{n\to\infty} \|xa_n\Xi\| = \lim_{n\to\infty} \big\|a_n(x\Xi)\big\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \big\|a_n^*(x\Xi)\big\| = \lim_{n\to\infty} \big\|xa_n^*\Xi\big\| = \big\|x(x'^*\Xi)\big\| \end{aligned}$$

(kilkukrotnie korzystaliśmy z lematu 3.5).

Element x' był dowolny, a więc dowolny element M' jest normalny i z lematu 3.6 wnioskujemy, że M' jest algebrą przemienną. W szczególności $\mathsf{M}' \subset (\mathsf{M}')' = \mathsf{M}$. □

Stwierdzenie 3.7. *Niech $\mathscr{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta i niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie maksymalną przemienną algebrą von Neumanna. Wówczas istnieje w $\mathscr{H}$ wektor cykliczny dla M.*

Dowód. Niech $\{\Xi_i\}_{i\in I}$ będzie maksymalną rodziną wektorów jednostkowych o tej własności, że podprzestrzenie $\left\{\overline{\mathsf{M}\Xi_i}\right\}_{i\in I}$ są parami ortogonalne. Przestrzeń $\mathscr{H}$ jest ośrodkowa, więc rodzina $\{\Xi_i\}_{i\in I}$ jest przeliczalna: możemy pisać $\{\Xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Niech p_i będzie rzutem na $\overline{\mathsf{M}\Xi_i}$. Łatwo wykazać, że $p_i \in \mathsf{M}'$, ale na mocy maksymalności M, mamy $p_i \in \mathsf{M}' = \mathsf{M}$.

Oczywiście $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = \mathbb{1}$ (szereg jest zbieżny w so-topologii), bo w przeciwnym razie istniałby $\xi \in \mathscr{H}$ taki, że $\|\xi\| = 1$ i
$$\xi \perp \overline{\mathsf{M}\Xi_i}, \qquad (i \in \mathbb{N}),$$
czyli $p_i\xi = 0$. Ponadto, skoro $p_i \in \mathsf{M}$, mamy dla każdego $y \in \mathsf{M}$ i dla każdego i
$$p_i y\xi = y p_i \xi = 0,$$
a więc $\mathsf{M}\xi \perp \overline{\mathsf{M}\Xi_i}$. Stąd $\overline{\mathsf{M}\xi} \perp \overline{\mathsf{M}\Xi_i}$, co przeczy maksymalności rodziny $\{\Xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Teraz wystarczy położyć $\Xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\Xi_i$. □

Więcej informacji o przemiennych algebrach von Neumanna będzie podane w części 9.

3.3. **Macierze.** Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy przestrzeń Hilberta
$$\widetilde{\mathscr{H}} = \underbrace{\mathscr{H} \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}}_{n} \tag{3.3}$$
oraz zbiór $\widetilde{\mathsf{M}}$ operatorów na $\mathscr{H}$, które w zapisie macierzowym związanym z rozkładem (3.3) mają postać
$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (x_{ij} \in \mathsf{M},\ i,j = 1,\dots,n).$$
Jest jasne, że $\widetilde{\mathsf{M}}$ jest $*$-algebrą operatorów zawierającą operator identycznościowy i jest izomorficzna z $*$-algebrą $M_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathsf{M}$ (algebraiczny iloczyn tensorowy).

Pokażemy, że $\widetilde{\mathsf{M}}$ jest algebrą von Neumanna. Niech $\widetilde{a} \in \mathrm{B}(\widetilde{\mathscr{H}})$ będzie przemienny z $\widetilde{\mathsf{M}}$. Zapiszmy
$$\widetilde{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$
Ponieważ $\widetilde{a}$ jest przemienny ze wszystkimi operatorami postaci
$$\begin{bmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{bmatrix}, \qquad (x \in \mathsf{M})$$
łatwo sprawdzamy, że $a_{ij} \in \mathsf{M}'$ dla wszystkich i, j. Dalej z przemienności $\widetilde{a}$ z macierzami postaci $\mathrm{diag}(0,\dots,0,\mathbb{1},0,\dots,0)$ (macierz diagonalna z jedynką na k-tym miejscu na przekątnej i zerami wszędzie indziej) wynika, że $a_{i,j} = 0$ dla $i \neq j$. W końcu z przemienności $\widetilde{a}$ z macierzami mającymi $\mathbb{1}$ w miejscu (i,j) i zera wszędzie indziej, łatwo wynika, że $\widetilde{a} = \mathrm{diag}(a,\dots,a)$, gdzie $a \in \mathsf{M}'$.

Tak więc $\widetilde{\mathsf{M}}'$ jest zbiorem operatorów na $\widetilde{\mathscr{H}}$, które w zapisie macierzowym wyglądają tak:

$$\begin{bmatrix} x' & & \\ & \ddots & \\ & & x' \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

gdzie $x' \in \mathsf{M}'$. Stosując podobne rozumowanie do przytoczonego powyżej (patrz dowód twierdzenia 2.20) pokazujemy, że komutantem zbioru operatorów postaci 3.4 jest dokładnie $\widetilde{\mathsf{M}}$. Innymi słowy $\widetilde{\mathsf{M}} = \widetilde{\mathsf{M}}''$.

Algebrę $\widetilde{\mathsf{M}}$ oznaczamy często symbolem $M_n(\mathsf{M})$. Można ją opisać także jako *iloczyn tensorowy* algebr von Neumanna (zob. część 3.5).

3.4. **Sumy proste.** Niech $\mathscr{H}_1$ i $\mathscr{H}_2$ będą przestrzeniami Hilberta i niech $\mathsf{M}_i \subset \mathrm{B}(\mathscr{H}_i)$ $(i = 1, 2)$ będą algebrami von Neumanna. Rozważmy zbiór operatorów na $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, które w zapisie macierzowym związanym z tym rozkładem są postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \qquad (x_1 \in \mathsf{M}_1\ x_2 \in \mathsf{M}_2). \tag{3.5}$$

Jest jasne, że zbiór M wszystkich takich operatorów jest $*$-algebrą operatorów na $\mathscr{H}$ zawierającą operator identycznościowy. Równie łatwo jak w części 3.3 dowodzimy, że M' jest zbiorem operatorów postaci

$$\begin{bmatrix} x_1' & 0 \\ 0 & x_2' \end{bmatrix}, \qquad (x_1' \in \mathsf{M}_1'\ x_2' \in \mathsf{M}_2').$$

Istotnie, jeśli operator

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

jest przemienny z (3.5), to

$$x_1 a = a x_1, \quad d x_2 = x_2 d, \quad b x_2 = x_1 b, \quad c x_1 = x_2 c$$

dla wszystkich $x_1 \in \mathsf{M}_1$, $x_2 \in \mathsf{M}_2$. Kładąc np. $x_1 = \mathbb{1}$ i $x_2 = 0$ natychmiast widzimy, że $b = c = 0$. Z drugiej strony oczywiście $a \in \mathsf{M}_1'$ i $d \in \mathsf{M}_2'$. Jest też jasne, że wszystkie macierze postaci (3.6) należą do M'. Teraz ten sam argument pokazuje, że $\mathsf{M} = \mathsf{M}''$.

Wykazaliśmy, że M jest algebrą von Neumanna. Nazywamy ją *sumą prostą* algebr M_1 i M_2 i oznaczamy symbolem $\mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2$.

Taką samą techniką można udowodnić następujący fakt: niech $(\mathscr{H}_i)_{i\in I}$ będzie rodzina przestrzeni Hilberta i dla każdego i niech $\mathsf{M}_i \subset \mathrm{B}(\mathscr{H}_i)$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas zbiór M operatorów na $\mathscr{H} = \bigoplus\limits_{i\in I}$ postaci

$$(\xi_i)_{i\in I} \longmapsto (x_i \xi_i)_{i\in I}, \qquad ((\xi_i)_{i\in I} \in \mathscr{H})$$

gdzie dla każdego i mamy $x_i \in \mathsf{M}_i$ i $\sup\limits_{i\in I} \|x_i\| < +\infty$, jest algebrą von Neumanna. Piszemy

$$\mathsf{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathsf{M}_i.$$

Sumy proste można uogólnić i zdefiniować tak zwane *całki proste* przestrzeni Hilberta i algebr von Neumanna. Jest to pojęcie bardzo użyteczne w teorii algebr operatorów.

Zauważmy, że jeśli M jest sumą prostą $\mathsf{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathsf{M}_i$, to jedynki algebr $\{\mathsf{M}_i\}_{i\in I}$ są rzutami w M, które są przemienne ze wszystkimi elementami M (należą do *centrum* M, patrz część

3.6). Rzuty te sumują się (w so-topologii) do $\mathbb{1} \in \mathsf{M}$. Odwrotnie, jeśli algebra von Neumanna M posiada w swoim centrum rodzinę rzutów $(p_i)_{i\in I}$ taką, że

$$\sum_{i\in I} p_i = \mathbb{1}$$

(w szczególności szereg jest so-zbieżny), to M jest izomorficzna z sumą prostą rodziny algebr von Neumanna wyznaczonej przez te rzuty (patrz część 3.7)

3.5. **Iloczyny tensorowe.** Niech $M_1 \subset \mathrm{B}(\mathscr{H}_1)$ i $M_2 \subset \mathrm{B}(\mathscr{H}_2)$ będą algebrami von Neumanna. Zbiór kombinacji liniowych operatorów

$$\mathscr{A} = \left\{x_1 \otimes x_2 \,\middle|\, x_1 \in \mathsf{M}_1,\ x_2 \in \mathsf{M}_2\right\} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$$

(przez $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ oznaczamy *iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta*) jest $*$-algebrą z jedynką izomorficzną z $\mathsf{M}_1 \otimes_{\mathrm{alg}} \mathsf{M}_2$. Iloczynem tensorowym algebr von Neumanna M_1 i M_2 nazywamy algebrę von Neumanna

$$\mathscr{A}'' \subset \mathrm{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2).$$

Algebra ta nie jest (zazwyczaj) izomorficzna z $\mathsf{M}_1 \otimes_{\mathrm{alg}} \mathsf{M}_2$ i nie posiada wyróżniającej go własności uniwersalnej. Jednak iloczyn tensorowy gra bardzo ważną rolę w teorii algebr von Neumanna. Standardowym oznaczeniem na iloczyn tensorowy M_1 i M_2 jest $\mathsf{M}_1 \bar{\otimes} \mathsf{M}_2$.

3.6. **Faktory.**

Definicja 3.8. Niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna. *Centrum* algebry M nazywamy algebrę von Neumanna $\mathscr{Z}(\mathsf{M}) = \mathsf{M} \cap \mathsf{M}'$. Algebrę M nazywamy *faktorem*, jeśli $\mathscr{Z}(\mathsf{M}) = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Uwaga 3.9. Choć definiujemy faktor jako algebrę von Neumanna $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ taką, że $\mathsf{M} \cap \mathsf{M}' = \mathbb{C}\mathbb{1}$, jest jasne, że jest to własność niezależna od konkretnej realizacji abstrakcyjnej $*$-algebry M jako algebry operatorów na pewnej przestrzeni Hilberta. Inaczej, jeśli $\mathsf{N} \subset \mathrm{B}(\mathscr{K})$ jest algebrą von Neumanna i algebry M i N są izomorficzne, to M jest faktorem wtedy i tylko wtedy, gdy jest nim N.

Przykład 3.10. Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Wówczas algebra von Neumanna $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest faktorem ($\mathrm{B}(\mathscr{H})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$).

Przykład 3.11. Niech M będzie skończenie wymiarową algebrą von Neumanna. Wiemy już, że M jest sumą prostą algebr macierzowych $M_{n_1}(\mathbb{C}), \ldots, M_{n_m}(\mathbb{C})$, czyli sumą prostą faktorów ($M_n(\mathbb{C}) = \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$). Tak zwana *teoria redukcji* pokazuje, że każda algebra von Neumanna może być przedstawiona jako całka prosta faktorów.

Przykład 3.12. Niech Γ będzie grupą dyskretną. Rozważmy działanie Γ na przestrzeni $\ell^2(\Gamma)$ przez lewe przesunięcia: dla $t \in \Gamma$ definiujemy operator unitarny $\lambda_t \in \mathrm{B}\big(\ell^2(\Gamma)\big)$

$$(\lambda_t\psi)(s) = \psi(t^{-1}s), \qquad (\psi \in \ell^2(\Gamma),\ s \in \Gamma).$$

Odwzorowanie $\Gamma \ni t \mapsto \lambda_t$ nazywamy *lewą regularną reprezentacją* grupy Γ. Podobnie definiujemy *prawą regularną reprezentację* $\Gamma \ni t \mapsto \rho_t$, gdzie

$$(\rho_t\psi)(s) = \psi(st), \qquad (\psi \in \ell^2(\Gamma),\ s \in \Gamma).$$

Ponieważ operatory λ_t ($t \in \Gamma$), są unitarne, zbiór $L(\Gamma) = \{\lambda_t \mid t \in \Gamma\}''$ jest algebrą von Neumanna. Nazywamy ją *grupową algebrą von Neumanna* grupy Γ.

Pokażemy, że $L(\Gamma)$ jest faktorem wtedy i tylko wtedy, gdy grupa Γ jest tak zwaną grupą *i.c.c.* tzn. każda nietrywialna klasa sprzężoności w grupie Γ jest nieskończona. Przykładami takich grup są S_∞ i $\mathbb{F}_n$ dla $n \geq 2$.

Rozważmy odwzorowanie $\eta\colon L(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$ zdefiniowane jako

$$\eta(x) = x\delta_e,$$

gdzie δ_e jest elementem $\ell^2(\Gamma)$ równym 1 w elemencie neutralnym Γ i zero wszędzie indziej. W szczególności dla $t \in \Gamma$ $\lambda_t\delta_e = \rho_{t^{-1}}\delta_e = \delta_t$, gdzie δ_t jest "funkcją Diraca" w $t \in \Gamma$. Zauważmy, że dla funkcji $\psi \in \ell^2(\Gamma)$ i $s \in \Gamma$ wartość $\psi(s)$ można obliczyć także jako $(\delta_s|\psi)$.

Niech $z \in \mathscr{Z}\big(L(\Gamma)\big)$. Pokażemy, że funkcja $\eta(z)$ jest stała na klasach sprzężoności w Γ: niech $s, t \in \Gamma$

$$\begin{aligned}\big(\eta(z)\big)(t^{-1}st) &= (\delta_{t^{-1}st}|\eta(z)) = (\lambda_t^*\lambda_s\delta_t|z\delta_e) = (\lambda_s\delta_t|\lambda_t z\delta_e)\\ &= (\lambda_s\delta_t|z\lambda_t\delta_e) = (\lambda_s\delta_t|z\delta_t) = (\lambda_s\rho_t^*\delta_e|z\rho_t^*\delta_e)\\ &= (\rho_t^*\lambda_s\delta_e|\rho_t^*z\delta_e) = (\lambda_s\delta_e|z\delta_e) = (\delta_s|\eta z) = \eta(z)(s),\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że prawa i lewa regularna reprezentacja komutują.

Ale $\eta(z)$ należy do $\ell^2(\Gamma)$, więc jeśli Γjest i.c.c. to funkcja $\eta(z)$ musi być proporcjonalna do δ_e:

$$\eta(z) = z\delta_e = \theta\delta_e.$$

Stąd

$$z\delta_t = z\lambda_t\delta_e = \lambda_t z\delta_e = \lambda_t\theta\delta_e = \theta\delta_t,$$

czyli $z = \theta\mathbb{1}$.

Z drugiej strony, jeśli istnieje jakaś nietrywiala i skończona klasa sprzężoności $C \subset \Gamma$, to element $z = \sum\limits_{s\in C}\lambda_s \in L(\Gamma)$ nie jest proporcjonalny do $\mathbb{1}$ i należy do centrum algebry $L(\Gamma)$:

$$z\lambda_t = \sum_{s\in C}\lambda_s\lambda_t = \lambda_t\lambda_{t^{-1}}\sum_{s\in C}\lambda_s\lambda_t = \lambda_t\sum_{s\in C}\lambda_{t^{-1}st} = \lambda_t\sum_{r\in C}\lambda_r = \lambda_t z.$$

3.7. **Indukcja i restrykcja.** Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech e będzie rzutem $\mathscr{H}$ na podprzestrzeń $\mathscr{K}$. Dla $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ definiujemy $x_e \in \mathrm{B}(\mathscr{K})$ kładąc

$$ex\big|_{\mathscr{K}}.$$

Dla $S \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ piszemy

$$S_e = \big\{x_e\,\big|\,x \in S\big\}.$$

Twierdzenie 3.13. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą von Neumanna i załóżmy, że* $e \in \mathsf{M}$. *Wówczas*

(1) M_e *jest algebrą von Neumanna,*
(2) $(\mathsf{M}')_e$ *jest algebrą von Neumanna,*
(3) $(\mathsf{M}_e)' = (\mathsf{M}')_e$.

Dowód twierdzenia 3.13. Ad (1). Algebry M_e i $(\mathsf{M}')_e$ komutują: dla dowolnych $x \in \mathsf{M}$, $x' \in \mathsf{M}'$

$$(exe)(ex'e) = exex'e = exx'e = ex'xe = e^2x'xe = ex'exe = (ex'e)(exe).$$

W szczególności operatory te komutują po obcięciu do $\mathscr{K}$. Mamy zatem

$$\mathsf{M}_e \subset \big((\mathsf{M}')_e\big)'. \tag{3.7}$$

Weźmy teraz $a \in \big((\mathsf{M}')_e\big)'$ i niech $b = a \circ e$ traktowany jako operator $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$. Ponieważ $e \in \mathsf{M}$, każdy $x' \in \mathsf{M}'$ zachowuje podprzestrzenie $\mathscr{K}$ i $\mathscr{K}^{\perp}$. Stąd widać, że b komutuje ze wszystkimi $x' \in \mathsf{M}'$, a więc $b \in \mathsf{M}'' = \mathsf{M}$. Ale $a = b_e$, więc

$$\big((\mathsf{M}')_e\big)' \subset \mathsf{M}_e. \tag{3.8}$$

Zestawiając (3.7) i (3.8) otrzymujemy

$$\mathsf{M}_e = \big((\mathsf{M}')_e\big)', \tag{3.9}$$

a więc w szczególności M_e jest algebrą von Neumanna.

Ad (2). Ławto się przekonać, że odwzorowanie $\mathsf{M}' \ni x \mapsto x'_e \in \mathrm{B}(\mathscr{K})$ jest wo-ciągłym $*$-homomorfizmem algebr z jedynką. Możemy więc skorzystać z wniosku 2.22 i uwagi 2.23.

Ad (3). Przejdźmy do komutantów obu stron w (3.9):

$$(\mathsf{M}_e)' = \big((\mathsf{M}')_e\big)'' = (\mathsf{M}')_e,$$

co dowodzi (3). □

Z uwagi na równość z punktu (3) w powyższym twierdzeniu, piszemy M'_e w miejsce $(\mathsf{M}_e)' = (\mathsf{M}')_e$. Algebrę von Neumanna M_e nazywamy *restrykcją* algebry M do podprzestrzeni $\mathscr{K}$ lub algebrą M *obciętą* do $\mathscr{K}$, natomiast algebrę M'_e nazywamy algebrą *indukowaną* na $\mathscr{K}$ przez M' (*indukcją* M' na $\mathscr{K}$).

4. Rachunek funkcji borelowskich

4.1. **Monotoniczne ciągi uogólnione.** Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $(a_i)_{i\in I}$ będzie ciągiem uogólnionym dodatnich elementów $\mathrm{B}(\mathscr{H})$, który jest *monotonicznie niemalejący* i normowo ograniczony. Wówczas istnieje w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ supremum a ciągu $(a_i)_{i\in I}$ i ciąg ten jest so-zbieżny do a. Istotnie, przyjmijmy, że $(a_i)_{i\in I}$ jest niemalejący i dla $\xi \in \mathscr{H}$ połóżmy

$$F(\xi,\xi) = \sup_{i\in I} (\xi|a_i\xi)\,.$$

Przez polaryzację definiujemy F na $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$:

$$F(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k F(\xi - \mathrm{i}^k\eta, \xi - \mathrm{i}^k\eta).$$

F jest ograniczoną formą półtoraliniową, a więc istnieje dokładnie jeden operator $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ taki, że

$$(\xi|a\eta) = \lim_{i\in I} (\xi|a_i\eta)$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in \mathscr{H}$. Łatwo udowodnić, że a jest dodatni. Ponadto a jest ograniczeniem górnym dla $(a_i)_{i\in I}$, a każde ograniczenie górne b dla $(a_i)_{i\in I}$ musi spełniać $(\xi|b\xi) \geq \sup\limits_{i\in I} (\xi|a_i\xi)$, czyli $b \geq a$. Stąd $a = \sup\limits_{i\in I} a_i$.

Aby wykazać, że $a_i \xrightarrow[i\in I]{\text{so}} a$ weźmy $\xi \in \mathscr{H}$. Mamy

$$\begin{aligned}\|a\xi - a_i\xi\|^2 &= \big\|(a-a_i)\xi\big\|^2 = \big\|(a-a_i)^{\frac{1}{2}}(a-a_i)^{\frac{1}{2}}\xi\big\|^2\\ &\leq \big\|(a-a_i)^{\frac{1}{2}}\big\|^2\big\|(a-a_i)^{\frac{1}{2}}\xi\big\|^2\\ &\leq \text{const.}\big\|(a-a_i)^{\frac{1}{2}}\xi\big\|^2\\ &= \text{const.}\left((a-a_i)^{\frac{1}{2}}\xi\,\middle|\,(a-a_i)^{\frac{1}{2}}\xi\right)\\ &= \text{const.}\,(\xi\,|\,(a-a_i)\xi) = \text{const.}\big(F(\xi,\xi) - (\xi|a_i\xi)\big) \xrightarrow[i\in I]{} 0.\end{aligned}$$

4.2. **Rachunek funkcji borelowskich.** Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Symbolem $\mathscr{B}(X)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich ograniczonych funkcji borelowskich na X. Jeśli X jest metryzowalna, to $\mathscr{B}(X)$ jest najmniejszą klasą funkcji zawierającą $\mathrm{C_b}(X)$ i zamkniętą na punktowe granice ciągów jednostajnie ograniczonych.

Twierdzenie 4.1. *Niech $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie operatorem samosprzężonym. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie*

$$\mathscr{B}(\operatorname{Sp} a) \ni f \longmapsto f(a) \in \mathrm{B}(\mathscr{H}) \tag{4.1}$$

taki, że

(1) *jeśli $f$jest wielomianem: $f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n$, to*
$$f(a) = \alpha_0\mathbb{1} + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n,$$
(2) *jeśli (f_n) jest jednostajnie ograniczonym ciągiem elementów $\mathscr{B}(\operatorname{Sp} a)$ zbieżnym punktowo do $f \in \mathscr{B}(\operatorname{Sp} a)$, to*
$$f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{so}} f(a).$$

Ponadto (4.1) *jest $*$-homomorfizmem z C^*-algebry $\mathscr{B}(\operatorname{Sp} a)$ w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ rozszerzającym rachunek funkcji ciągłych. Obraz tego homomorfizmu zawiera się w najmniejszej algebrze von Neumanna zawierającej a.*

W szczególności dla dowolnego samosprzężonego $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ i borelowskiego $E \subset \operatorname{Sp} a$ możemy rozważać element $\chi_E(a)$. Jest to tak zwany *rzut spektralny* operatora a wyznaczony przez podzbiór E.

Wniosek 4.2. *Niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas M jest normowo domknięta powłoką liniową rzutów należących do M.*

Dowód. Każdy element M jest kombinacją dwóch elementów samosprzężonych. Dalej jeśli $x \in \mathsf{M}$ jest samosprzężony, niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem borelowskich funkcji prostych na $\operatorname{Sp} x$ przybliżającym jednostajnie funkcję $f\colon \operatorname{Sp} x \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$. Wówczas $f_n(a)$ jest kombinacją liniową rzutów (spektralnych operatora x). Z drugiej strony

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Uwaga 4.3. Jeśli $x \in \mathsf{M}$ i $0 \leq x \leq \mathbb{1}$, to istnieją rzuty $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} e_n,$$

Konstruujemy rzuty $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indukcyjnie: $e_1 = \chi_{[\frac{1}{2},+\infty[}(x)$. Wtedy

$$xe_1 \geq \tfrac{1}{2}e_1 \quad \text{oraz} \quad x(\mathbb{1}-e_1) \leq \tfrac{1}{2}(\mathbb{1}-e_1),$$

a co za tym idzie

$$0 \leq x - \tfrac{1}{2}e_1 \leq \tfrac{1}{2}\mathbb{1}.$$

Jeśli rzuty $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ takie, że

$$0 \leq x - \sum_{j=1}^{n-1}\tfrac{1}{2^j}e_j \leq \tfrac{1}{2^{n-1}}\mathbb{1}$$

definiujemy

$$e_n = \chi_{[\frac{1}{2^n},+\infty[}\biggl(x - \sum_{j=1}^{n-1}\tfrac{1}{2^j}e_j\biggr).$$

(tak samo jak zdefiniowaliśmy e_1, tyle że zamiast x bierzemy $x - \sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2^j}e_j$, a zamiast $\frac{1}{2}$ mamy $\frac{1}{2^n}$). Mamy wówczas

$$0 \leq x - \sum_{j=1}^{n}\tfrac{1}{2^j}e_j \leq \tfrac{1}{2^n}\mathbb{1}$$

(to jest po prostu nierówność dla funkcji na $[0,1]$), a co za tym idzie $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}e_j \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$.

Od teraz zbiór rzutów należących do algebry von Neumanna M będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$.

Wniosek 4.4. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą von Neumanna i* $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$*. Wówczas* $a \in \mathsf{M}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $ap' = p'a$ *dla wszystkich* $p' \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M}')$.

Niech $x \in \mathsf{M}$ będzie samosprzężony. Mamy wówczas $\boldsymbol{s}(x) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)$. Istotnie, z relacji $\lambda\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(\lambda) = \lambda$ dla wszystkich $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x$ wnosimy, że

$$x\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x) = x.$$

To oznacza, że $\boldsymbol{s}(x) \leq \chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)$. Z drugiej strony, skoro $x\,\boldsymbol{s}(x) = x$, mamy

$$f(x)\,\boldsymbol{s}(x) = f(x) \tag{4.2}$$

dla wszystkich wielomianów f takich, że $f(0) = 0$. Przez przejście graniczne dostajemy (4.2) dla wszystkich $f \in \mathscr{B}(\mathrm{Sp}\,x)$ takich, że $f(0) = 0$. W szczególności $\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)\,\boldsymbol{s}(x) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)$, czyli $\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x) \leq \boldsymbol{s}(x)$.

4.3. **Punkty ekstremalne kuli jednostkowej.** Ciekawym i ważnym faktem, który łatwo udowodnić używając rzutów spektralnych jest następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 4.5. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* u *będzie punktem ekstremalnym kuli* M_1*. Wówczas* u *jest częściową izometrią.*

Dowód. Aby udowodnić, że u^*u jest rzutem wystarczy wykazać, że $\operatorname{Sp} u^*u \subset \{0,1\}$. Załóżmy, że tak nie jest, tj. istnieje liczba $\lambda \in \operatorname{Sp} u^*u$ taka, że $0 < \lambda < 1$. Weźmy $\alpha \in]0,1[$ taką, że $\lambda < \alpha$ oraz $\varepsilon > 0$ taki, że $\alpha(1+\varepsilon)^2 < 1$ i niech

$$a = \varepsilon\chi_{[0,\alpha]}(u^*u).$$

Korzystając z rachunku funkcyjnego przekonujemy się, że

$$\big\|(\mathbb{1}+a)u^*u(\mathbb{1}+a)\big\| \leq 1 \quad \text{oraz} \quad \big\|(\mathbb{1}-a)u^*u(\mathbb{1}-a)\big\| \leq 1$$

(mamy $(\mathbb{1}\pm a)u^*u(\mathbb{1}\pm a) = f_\pm(u^*u)$, gdzie $f_\pm(\lambda) = \big(1\pm\varepsilon\chi_{[0,\alpha]}(\lambda)\big)^2\lambda$; obie funkcje przyjmują wartości z przedziału $[0,1]$). Stąd $u_\pm = u(\mathbb{1}\pm a) \in \mathsf{M}_1$. Skoro $u = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$ i u jest ekstremalny, otrzymujemy $u_+ = u_- = u$. Innymi słowy $ua = 0$, a stąd

$$u^*u\chi_{[0,\alpha]}(u^*u) = \tfrac{1}{\varepsilon}u^*\big(ua\big) = 0.$$

Stąd $u^*u = f(u^*u)$, gdzie $f(t) = t\chi_{]\alpha,1]}(t)$. Dlatego $u^*u - \lambda\mathbb{1} = g(u^*u)$, gdzie $g(t) = t\chi_{]\alpha,1]}(t) - \lambda$. Funkcja g jest odwracalna na $[0,1]$, czyli $\lambda \notin \operatorname{Sp} u^*u$ — sprzeczność. □

5. Normalne funkcjonały i odwzorowania

Niech φ będzie funkcjonałem na C*-algebrze A. Definiujemy funkcjonał φ^* kładąc

$$\varphi^*(a) = \overline{\varphi(a^*)}, \qquad (a \in \mathsf{A}).$$

Funkcjonał φ taki, że $\varphi = \varphi^*$ nazywamy *samosprzężonym.* Funkcjonały samosprzężone to dokładnie te, które przyjmują wartości rzeczywiste na samosprzężonych elementach. Funkcjonał φ nazywamy *dodatnim*, jeśli przyjmuje on wartości nieujemne na dodatnich elementach A. Oczywiście każdy funkcjonał dodatni jest samosprzężony.

Na podstawie uwagi 4.3 możemy wyciągnąć następujący wniosek:

Wniosek 5.1. *Niech φ będzie ograniczonym funkcjonałem na algebrze von Neumanna M. Wówczas φ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje wartości dodatnie na wszystkich $e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$.*

Ważne jest jeszcze jedno kryterium dodatniości funkcjonału:

Stwierdzenie 5.2. *Niech φ będzie funkcjonałem ograniczonym na C*-algebrze z jedynką A. Wówczas φ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\mathbb{1}) = \|\varphi\|$.*

Dowód. Jeśli φ jest dodatni, to z nierówności Schwarza mamy dla dowolnego $a \in \mathsf{A}$

$$\big|\varphi(a)\big| = \big|\varphi(\mathbb{1}^*a)\big| \leq \varphi(\mathbb{1})^{\frac{1}{2}}\varphi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq \varphi(\mathbb{1})^{\frac{1}{2}}\varphi\big(\|a^*a\|\mathbb{1}\big)^{\frac{1}{2}} = \|a\|\varphi(\mathbb{1}),$$

a z drugiej strony oczywiście $\varphi(\mathbb{1}) \leq \|\varphi\|$.

Załóżmy teraz, że $\varphi(\mathbb{1}) = \|\varphi\| = 1$. Jeśli $a \in \mathsf{A}$, $a \geq 0$ i $\varphi(a)$ nie jest liczbą nieujemną, to istnieje dysk

$$\big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda - \lambda_0| \leq r\big\},$$

który zawiera $\operatorname{Sp} a$, a nie zawiera liczby $\varphi(a)$. Widmo normalnego elementu $a - \lambda_0\mathbb{1}$ zawiera się w dysku

$$\big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| \leq r\big\},$$

a co za tym idzie $\|a - \lambda_0\mathbb{1}\| \leq r$. Stąd uzyskujemy sprzeczność

$$r < \big|\varphi(a) - \lambda_0\big| = \big|\varphi(a - \lambda_0\mathbb{1})\big| \leq \|a - \lambda_0\mathbb{1}\| \leq r.$$

□

Uwaga 5.3. Funkcjonały dodatnie na C*-algebrze są automatycznie ciągłe. Istotnie, Niech φ będzie funkcjonałem liniowym na A przyjmującym wartości nieujemne na A_+ i niech

$$\alpha = \sup\bigl\{\bigl|\varphi(a)\bigr| \,\big|\, a \in \mathsf{A}, ;\, \|a\| \leq 1\bigr\}.$$

Jeśli $\alpha = +\infty$, to istnieje ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dodatnich elementów algebry A taki, że $\|a_n\| \leq 1$ i $\bigl|\varphi(a)\bigr| \geq n$ dla wszystkich n (jeśli $\varphi(x) \leq C$ dla wszystkich dodatnich x o normie nieprzekraczającej 1, to $\bigl|\varphi(y)\bigr| \leq 4C$ dla wszystkich y o normie nie większej niż 1). Z durgiej strony, dla dowolnego ciągu $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb nieujemnych takiego, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$$

jest zbieżny do pewnego $a \in A$. Ponadto, na mocy dodatniości φ mamy

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi(a_n) = \varphi\biggl(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n\biggr) \leq \varphi(a)$$

dla każdego $N \in \mathbb{N}$. Stąd szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi(a_n)$$

jest zbieżny. Przy dowolności $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, implikuje to ograniczoność ciągu $\bigl(\varphi(a_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ — sprzeczność.

Uwaga 5.4.

(1) Jeśli φ jest samosprzężonym ograniczonym funkcjonałem na M i $x \in \mathsf{M}$ jest taki, że $0 \leq x \leq \mathbb{1}$ oraz $\varphi(x) > \delta$ dla pewnej liczby $\delta \in \mathbb{R}$, to istnieje $e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ taki, że $\varphi(e) > \delta$.

(2) Każdy $y \in \mathsf{M}$ o normie 1 jest kombinacją liniową ze współczynnikami ± 1 oraz $\pm i$ czterech elementów dodatnich o normie nie przekraczającej 1, jeśli $\bigl|\varphi(e)\bigr| \leq \delta$ dla wszystkich $e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$, to $\|\varphi\| \leq 4\delta$.

5.1. **Pełna addytywność.** Przypomnijmy, że dwa rzuty e i f na przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ są *ortogonalne*, jeśli $ef = 0$. Jest to równoważne temu, że obrazy e i f są ortogonalnymi podprzestrzeniami w $\mathscr{H}$ jak i temu, że $e + f$ jest rzutem.

Definicja 5.5. Niech M będzie algebrą von Neumanna i niech φ będzie ograniczonym funkcjonałem na M. Powiemy, że φ jest *w pełni addytywny*, jeśli dla dowolnej rodziny parami ortogonalnych rzutów $(e_i)_{i\in I}$ w M mamy

$$\varphi\biggl(\sum_{i\in I} e_i\biggr) = \sum_{i} \varphi(e_i).$$

Jeśli $(e_i)_{i\in I}$ jest rodziną parami ortogonalnych rzutów w M, to szereg

$$\sum_{i\in I} e_i$$

jest so-zbieżny i jego sumy częściowe są normowo ograniczone (wszystkie mają normę 1). Zatem jest on także w-zbieżny (bo jest oczywiście wo-zbieżny, a na $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$ w-topologia zgadza się z wo-topologią). Stąd każdy w-ciągły funkcjonał jest w pełni addytywny.

Lemat 5.6. *Niech φ będzie ograniczonym samosprzężonym i w pełni addytywnym funkcjonałem na* M. *Wówczas dla każdego $e \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ istnieje $f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ taki*

(1) $f \leq e$,
(2) $\varphi(f) \geq \varphi(e)$,
(3) *φ obcięty do $f\mathsf{M}f$ jest dodatni.*

Dowód. Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie maksymalną rodziną parami ortogonalnych rzutów w M majoryzowanych przez e i takich, że $\varphi(e_i) < 0$ dla wszystkich $i \in I$. Kładziemy $f = e - \sum\limits_{i\in I} e_i$. Z maksymalności rodziny $(e_i)_{i\in I}$ wynika, że φ przyjmuje dodatnią wartość na wszystkich rzutach majoryzowanych przez f, a więc φ jest dodatni na $f\mathsf{M}f$ na mocy wniosku 5.1.

Korzystając z pełnej addytywności φ liczymy:

$$\varphi(f) = \varphi(e) - \sum_{i\in I} \varphi(e_i) \geq \varphi(e),$$

gdyż $\varphi(e_i) < 0$ dla wszystkich i. □

Lemat 5.7. *Niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna i niech φ będzie w pełni addytywnym dodatnim funkcjonałem na M. Niech $e \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M}) \setminus \{0\}$. Wówczas istnieje niezerowy rzut $f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ taki, że $f \leq e$ oraz wektor $\xi \in \mathscr{H}$ taki, że*

$$\big|\varphi(xf)\big| \leq \|xf\xi\|$$

dla wszystkich $x \in \mathsf{M}$.

Dowód. Skoro $e \neq 0$, istnieje $\eta \in \mathscr{H}$ taki, że

$$(\omega_{\eta,\eta} - \varphi)(e) = \|e\eta\|^2 - \varphi(e) > 0.$$

Z lematu 5.6 zastosowanego do $\omega_{\eta,\eta} - \varphi$ wynika, że istnieje $f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ taki, że $f \leq e$, funkcjonał $\omega_{\eta,\eta} - \varphi$ obcięty do $f\mathsf{M}f$ jest dodatni i

$$(\omega_{\eta,\eta} - \varphi)(f) \geq (\omega_{\eta,\eta} - \varphi)(e).$$

W szczególności $f \neq 0$. Skoro $\omega_{\eta,\eta} - \varphi$ jest dodatni na $f\mathsf{M}f$, mamy dla każdego $x \in \mathsf{M}$

$$\|xf\eta\|^2 - \varphi(fx^*xf) = (\omega_{\eta,\eta} - \varphi)(fx^*xf) \geq 0.$$

Z kolei φ jest dodatni, a więc można zastosować nierówność Schwarza

$$\big|\varphi(xf)\big|^2 = \big|\varphi(\mathbb{1}^*xf)\big|^2 \leq \varphi(\mathbb{1}^*\mathbb{1})\varphi(fx^*xf) = \varphi(\mathbb{1})\varphi(fx^*xf) \leq \varphi(\mathbb{1})\|xf\eta\|^2.$$

Wystarczy zatem położyć $\xi = \sqrt{\varphi(\mathbb{1})}\eta$. □

Twierdzenie 5.8. *Dodatni w pełni addytywny funkcjonał na M jest* w*-ciągły.*

Dowód. Niech φ będzie dodatni i w pełni addytywny. Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie maksymalną rodziną parami ortogonalnych rzutów w M taką, że dla każdego $i \in I$ istnieje wektor ξ_i taki, że

$$\big|\varphi(e_i f)\big| \leq \|xe_i\xi_i\|, \qquad (x \in \mathsf{M}).$$

Z lematu 5.7 wynika, że $\sum\limits_{i\in I} e_i = \mathbb{1}$.

Na mocy pełnej addytywności φ mamy

$$\sum_{i\in I} \varphi(e_i) = \varphi(\mathbb{1}).$$

Weźmy $\varepsilon > 0$. Istnieje skończony $J \subset I$ taki, że

$$\Big|\varphi\Big(\sum_{i \in I \setminus J} e_i\Big)\Big| < \tfrac{\varepsilon^2}{\|\varphi\|}.$$

Oznaczmy

$$e = \sum_{i \in J} e_i, \qquad f = \sum_{i \in I \setminus J} e_i$$

i zdefiniujmy ograniczone funkcjonały φ_1 i φ_2 na M kładąc

$$\varphi_1(x) = \varphi(xe) \quad \text{oraz} \quad \varphi_2(x) = \varphi(xf)$$

dla wszystkich $x \in \mathsf{M}$. Wówczas oczywiście $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Ponadto φ_1 jest so-ciągły, gdyż

$$\big|\varphi_1(x)\big| \leq \sum_{i \in J} \|x\xi_i\|.$$

Zatem $\varphi_1 \in \mathsf{M}_\sim$. Z drugiej strony

$$\big|\varphi_2(x)\big|^2 = \big|\varphi(xf)\big|^2 \leq \varphi(\mathbb{1})\varphi(fx^*xf) \leq \|\varphi\|\|x\|^2\varphi(f) \leq \varepsilon^2\|x\|^2,$$

czyli $\|\varphi_2\| \leq \varepsilon$. Ponieważ ε jest dowolnie mały, oznacza to, że $\varphi \in \mathsf{M}_*$. □

Wniosek 5.9. *Niech φ będzie dodatnim funckjonałem na M. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) $\varphi \in \mathsf{M}_*$,
(2) *φ jest w pełni addytywny,*
(3) *dla dowolnego ograniczonego i niemalejącego ciągu uogólnionego $(x_i)_{i \in I}$ mamy*

$$\varphi\big(\sup_{i \in I} x_i\big) = \sup_{i \in I} \varphi(x_i).$$

Dowód. Wiemy już, że warunki (1) i (2) są równoważne. Jeśli $(x_i)_{i \in I}$ jest ograniczonym i niemalejącego ciągiem uogólnionym, to

$$x_i \xrightarrow[i \in I]{\text{so}} \sup_{i \in I} x_i.$$

Funkcjonał w-ciągły jest wo-ciągły na zbiorach ograniczonych, a więc jest na nich so-ciągły, co pokazuje, że (1) implikuje (3). Z drugiej strony, jeśli $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest rodziną parami ortogonalnych rzutów, to suma

$$\sum_{\alpha \in A} e_\alpha$$

jest równa supremum (ograniczonego) niemalejącego ciągu uogólnionego sum częściowych indeksowanego skończonymi podzbiorami zbioru indeksów A. Dlatego (3) implikuje (2). □

Definicja 5.10. Funkcjonały dodatnie spełniające warunek (3) z wniosku 5.9 nazywamy funkcjonałami *normalnymi*.

W niektórych podręcznikach sformułowanie "funckjonał normalny" odnosi się do dowolnego (niekoniecznie dodatniego) funkcjonału w-ciągłego.

Lemat 5.11. *Niech $e \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie rzutem i niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą takie, że*

$$\alpha, \beta, \alpha\beta - \gamma^2 \geq 0.$$

Wówczas dla dowolnego $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ takiego, że $\|x\| \leq 1$ operator

$$\alpha e + \beta(\mathbb{1} - e) + \gamma\big(ex(\mathbb{1} - e) + (\mathbb{1} - e)x^* e\big)$$

jest dodatni.

Dowód. Zauważmy, że dla $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ mamy

$$\Big(\exists\, x, y \in \mathbb{R} \;\; ax^2 + by^2 + 2cxy < 0\Big) \iff \Big(c^2 > ab\Big).$$

Istotnie, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$a(ax^2 + by^2 + 2cxy) = a^2x^2 + aby^2 + 2acxy + c^2y^2 - c^2y^2 = (ax + cy)^2 + (ab - c^2)y^2.$$

Tak więc założenia o liczbach α, β i γ implikują, że dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\alpha s^2 + \beta t^2 - 2|\gamma|st \geq 0.$$

Zatem dla dowolnego $\xi \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned}
\alpha\,(\xi|e\xi) + \beta\,(\xi|(\mathbb{1} - e)\xi) &+ \gamma\,(\xi|ex(\mathbb{1} - e)\xi) + \gamma\,(\xi|(\mathbb{1} - e)x^* e\xi)\\
&= \alpha\|e\xi\|^2 + \beta\big\|(\mathbb{1} - e)\xi\big\|^2 + 2\gamma\,\mathrm{Re}\,(e\xi|x(\mathbb{1} - e)\xi)\\
&\geq \alpha\|e\xi\|^2 + \beta\big\|(\mathbb{1} - e)\xi\big\|^2 - 2|\gamma|\|e\xi\|\big\|(\mathbb{1} - e)\xi\big\| \geq 0
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.12. *Ograniczony funkcjonał na* M *jest w pełni addytywny wtedy i tylko wtedy, gdy jest* w*-ciągły.*

Dowód. Niech φ będzie w pełni addytywnym ograniczonym funkcjonałem na M. Aby wykazać, że $\varphi \in \mathsf{M}_*$ możemy przyjąć, że φ jest samosprzężony i $\|\varphi\| \leq 1$. Niech

$$\mu = \sup\big\{\varphi(a) \,\big|\, a \in \mathsf{M},\ 0 \leq a \leq \mathbb{1}\big\}.$$

Weźmy $\varepsilon \in \big]0, \tfrac{3}{4}\big]$. Istnieje $a \in \mathsf{M}$ taki, że $0 \leq a \leq \mathbb{1}$ i $\varphi(a) > \mu - \varepsilon$. Tak więc istnieje $e_1 \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ taki, że

$$\varphi(e_1) > \mu - \varepsilon \tag{5.1}$$

i obcięcie φ do $e_1\mathsf{M}e_1$ jest funkcjonałem dodatnim (kombinacja uwagi 5.4(1) i lematu 5.6). W takim razie φ obcięty do $e_1\mathsf{M}e_1$ jest w-ciągły na mocy twierdzenia 5.8.

Niech $e_2 = \mathbb{1} - e_1$ i zdefiniujmy funkcjonały $\{\varphi_{ij}\}_{i,j=1,2}$ kładąc

$$\varphi_{ij}(x) = \varphi(e_i x e_j), \qquad (x \in \mathsf{M}). \tag{5.2}$$

Wówczas $\varphi = \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{22}$ i φ_{11} jest w-ciągły.

Dla dowolnego $x \in \mathsf{M}$, $\|x\| \leq 1$ definiujemy

$$y = (1 - \varepsilon)e_1 + \varepsilon e_2 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1 - \varepsilon}(e_1 x e_2 + e_2 x^* e_1).$$

Wtedy $\mathbb{1}-y=\varepsilon e_1+(1-\varepsilon)e_2-\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}(e_1xe_2+e_2x^*e_1)$, a więc na mocy lematu 5.11 mamy $0\leq y\leq\mathbb{1}$. Stąd $\varphi(y)\leq\mu$, a więc

$$\begin{aligned}\mu&\geq(1-\varepsilon)\varphi(e_1)+\varepsilon\varphi(e_2)+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}\varphi(e_1xe_2+e_2x^*e_1)\\&=(1-\varepsilon)\varphi(e_1)+\varepsilon\varphi(e_2)+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}2\Re\varphi(e_1xe_2)\\&>(1-\varepsilon)(\mu-\varepsilon)+\varepsilon\varphi(e_2)+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}2\Re\varphi(e_1xe_2)\\&\geq(1-\varepsilon)(\mu-\varepsilon)-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}2\Re\varphi(e_1xe_2)\\&=(1-\varepsilon)(\mu-\varepsilon)-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}2\Re\varphi_{12}(x),\end{aligned}$$

gdzie przy nierównościach skorzystaliśmy kolejno z (5.1) i faktu, że $\|\varphi\|=1$.

Powyższy rachunek pokazuje, że dla dowolnego $x\in\mathsf{M}$, $\|x\|\leq 1$ mamy

$$\Re\varphi_{12}(x)\leq\frac{\mu+\varepsilon-(1-\varepsilon)(\mu-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}}=\frac{2\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon^2}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon}}=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\frac{2+\mu-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}}\leq\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\frac{3}{\sqrt{1-\varepsilon}}\leq 3\sqrt{\varepsilon}$$

(pamiętamy, że $\varepsilon\leq\frac{3}{4}$). Stosując to rozumowanie dla $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x$ w miejsce x otrzymujemy

$$\bigl|\varphi_{12}(x)\bigr|=\varphi_{12}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x)=\Re\varphi_{12}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x)\leq 3\sqrt{\varepsilon}$$

(wybór θ jest jasny) i widzimy, że $\|\varphi_{12}\|\leq 3\sqrt{\varepsilon}$. Podobnie uzyskujemy $\|\varphi_{21}\|\leq 3\sqrt{\varepsilon}$.

Jeśli $f\in\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ jest taki, że $f\leq e_2$, to $f+e_1$ jest rzutem i dzięki (5.1)

$$\mu\geq\varphi(f+e_1)=\varphi(e_1)+\varphi(f)>\mu+\varepsilon+\varphi(f).$$

W konsekwencji $\varphi(f)<\varepsilon$.

Podsumowując: zaczynając od M i φ

- skonstruowaliśmy rzuty e_1,e_2 takie, że $e_1+e_2=\mathbb{1}$,
- dla φ_{ij} zdefiniowanych przez (5.2) mamy $\varphi=\varphi_{11}+\varphi_{12}+\varphi_{21}+\varphi_{22}$ mamy
  - φ_{11} jest w-ciągły
  - $\|\varphi_{12}\|,\|\varphi_{12}\|\leq 3\sqrt{\varepsilon}$,
  - dla każdego $f\leq e_2$ mamy $\varphi(f)<\varepsilon$.

Teraz oznaczmy symbolem ψ obcięcie $-\varphi$ do $e_2\mathsf{M}e_2$. Mamy wówczas $\|\psi\|\leq 1$, a dla dowolnego $f\in\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$, $f\leq e_2$

$$\psi(f)>-\varepsilon.\tag{5.3}$$

Powtarzając rozumowanie z pierwszej części dowodu dla $e_2\mathsf{M}e_2$ i ψ

- skonstruujemy $f_1,f_2\in\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ takie, że $f_1+f_2=e_2$
- definiując

  $$\psi_{ij}(x)=\psi(f_ixf_j),\qquad(i=1,2,\ x\in e_2\mathsf{M}e_2)$$

  uzyskamy $\psi=\psi_{11}+\psi_{12}+\psi_{21}+\psi_{22}$ oraz
  - ψ_{11} jest w-ciągły,
  - $\|\psi_{12}\|,\|\psi_{21}\|\leq 3\sqrt{\varepsilon}$,
  - dla każdego $f\in\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$, $f\leq f_2$ mamy $\psi_{22}(f)<\varepsilon$.

Skoro tak, to dla $f\in\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$, $f\leq f_2$ mamy $\bigl|\psi_{22}(f)\bigr|<\varepsilon$, a zatem $\|\psi_{22}\|\leq 4\varepsilon$ na mocy (5.3) i uwagi 5.4(2). Tak więc

$$\|\psi-\psi_{11}\|=\|\psi_{12}+\psi_{21}+\psi_{22}\|\leq 6\sqrt{\varepsilon}+4\varepsilon.\tag{5.4}$$

Zdefiniujmy teraz nowy funkcjonał ψ_0 na M:

$$\psi_0(x)=\psi_{11}(e_2xe_2),\qquad(x\in\mathsf{M}).$$

Wówczas ψ_0 jest w-ciągły (operacja $x \mapsto e_2 x_2 e_2$ jest w-ciągła). Teraz

$$\|\varphi - \varphi_{11} + \psi_0\| = \|\varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{22} + \psi_0\| \leq 3\sqrt{\varepsilon} + 3\sqrt{\varepsilon} + \|\varphi_{22} + \psi_0\|. \tag{5.5}$$

Skoro

$$\begin{aligned}\|\varphi_{22} + \psi_0\| &= \sup_{\substack{x\in\mathsf{M}\\ \|x\|\leq 1}} \bigl|\varphi_{22}(x) + \psi_0(x)\bigr| \\ &= \sup_{\substack{x\in\mathsf{M}\\ \|x\|\leq 1}} \bigl|\varphi(e_2xe_2) + \psi_{11}(e_2xe_2)\bigr| \\ &= \sup_{\substack{x\in\mathsf{M}\\ \|x\|\leq 1}} \bigl|-\psi(e_2xe_2) + \psi_{11}(e_2xe_2)\bigr| \leq \|\psi - \psi_{11}\|\end{aligned}$$

(na mocy (5.4)), otrzymujemy z (5.5)

$$\|\varphi - \varphi_{11} + \psi_0\| \leq 12\sqrt{\varepsilon} + 4\varepsilon.$$

Ponieważ $\varphi_{11} - \psi_0 \in \mathsf{M}_*$, a $\varepsilon \in \left]0, \frac{3}{4}\right]$ jest dowolny, mamy $\varphi \in \mathsf{M}_*$. □

5.2. **Odwzorowania normalne.**

Definicja 5.13. Niech M i N będą algebrami von Neumanna i niech $\Phi\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ będzie $*$-homomorfizmem. Powiemy, że Φ jest *normalny*, jeśli dla dowolnego ograniczonego i niemalejącego ciągu uogólnionego $(x_i)_{i\in I}$ w M mamy

$$\Phi\bigl(\sup_{i\in I} x_i\bigr) = \sup_{i\in I} \Phi(x_i).$$

Stwierdzenie 5.14. *Niech $\Phi\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ będzie normalnym $*$-homomorfizmem pomiędzy algebrami von Neuamnna. Wówczas Φ jest* w-*ciągły.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że dla dowolnego $\phi \in \mathsf{N}_*$ funkcjonał $\varphi\circ\Phi$ jest w-ciągły, a więc w pełni addytywny. Jeśli $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ jest rodziną parami ortogonalnych rzutów w M, to oczywiście $\bigl(\Phi(e_\alpha)\bigr)_{\alpha\in A}$ jest taką rodziną w N. Z normalności Φ wynika, że

$$\Phi\biggl(\sum_{\alpha\in A} e_\alpha\biggr) = \sum_{\alpha\in A} \Phi(e_\alpha),$$

a dzięki pełnej addytywności φ mamy

$$(\varphi\circ\Phi)\biggl(\sum_{\alpha\in A} e_\alpha\biggr) = \varphi\biggl(\sum_{\alpha\in A} \Phi(e_\alpha)\biggr) = \sum_{\alpha\in A} (\varphi\circ\Phi)(e_\alpha),$$

czyli $\varphi\circ\Phi$ jest w pełni addytywny. □

Twierdzenie 5.15. *Każdy* w-*ciągły $*$-homomorfizm pomiędzy algebrami von Neumanna jest normalny.*

Dowód. Niech $\Phi\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ będzie w-ciągłym $*$-homomorfizmem pomiędzy algebrami von Neumanna. Dalej niech $(x_i)_{i\in I}$ będzie niemalejącym i ograniczonym ciągiem uogólnionym w M. Wówczas $\bigl(\Phi(x_i)\bigr)_{i\in I}$ jest takim samym ciągiem w N. Zatem

$$x_i \xrightarrow[i\in I]{\text{so}} \sup_{i\in I} x_i \qquad \text{oraz} \qquad \Phi(x_i) \xrightarrow[i\in I]{\text{so}} \sup_{i\in I} \Phi(x_i).$$

Tak więc $x_i \xrightarrow[i\in I]{\mathrm{w}} \sup\limits_{i\in I} x_i$, a więc na mocy w-ciągłości Φ, ciąg uogólniony $\big(\Phi(x_i)\big)_{i\in I}$ jest w-zbieżny do $\Phi\big(\sup\limits_{i\in I} x_i\big)$. Ale, jak już napisaliśmy, jest on także monotonicznie so-zbieżny do $\sup\limits_{i\in I} \Phi(x_i)$. Stąd

$$\sup_{i\in I} \Phi(x_i) = \Phi\big(\sup_{i\in I} x_i\big).$$

□

Klasa normalnych $*$-homomorfizmów jest naturalną klasą odwzorowań pomiędzy algebrami von Neumanna.

Twierdzenie 5.16. *Niech $\Phi\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ będzie $*$-izomorfizmem. Wówczas Φ jest normalny.*

Dowód. Niech $(x_i)_{i\in I}$ będzie ograniczonym niemalejącym ciągiem uogólnionym w M i niech x będzie jego granicą. Wówczas $\big(\Phi(x_i)\big)_{i\in I}$ jest ograniczonym niemalejącym ciągiem uogólnionym w N so-zbieżnym do $y \leq \Phi(x)$. Z drugiej strony $\big(\Phi^{-1}\big(\Phi(x_i)\big)\big)_{i\in I}$ jest ograniczonym niemalejącym ciągiem w M so-zbieżnym do granicy $x \leq \Phi^{-1}(y)$, co pokazuje, że $y = \Phi(x)$. □

Jedną z konsekwencji twierdzenia 5.16 jest fakt, iż w-topologia algebry von Neumanna nie zależy od realizacji tej algebry na przestrzeni Hilberta.

Na koniec tej części przypomnijmy wniosek 2.22:

Wniosek 5.17. *Obraz algebry von Neumanna przy normalnym $*$-homomorfiźmie algebr z jedynką jest algebrą von Neumanna.*

6. Ślad i macierze gęstości

Dokończyć!!!

---

7. Konstrukcja G.N.S.

Lemat 7.1. *Niech A będzie C^*-algebrą z jedynką i niech d będzie dodatnim elementem A. Wówczas*

(1) *$d \leq \|d\|\mathbb{1}$,*
(2) *dla wszystkich $a \in \mathsf{A}$ mamy $a^*da \geq 0$;*
(3) *jeśli $a, b \in \mathsf{A}$ i $0 \leq b \leq d$, to $a^*ba \leq a^*da$.*

Dowód. Ad (1). Widmo d zawiera się w przedziale $\big[0, \|d\|\big]$. Zatem widmo samosprzężonego elementu $\|d\|\mathbb{1} - d$ także zawiera się w tym przedziale. Oznacza to, że $\|d\|\mathbb{1} - d \geq 0$.

Ad (2). Mamy $d = c^*c$ dla pewnego $c \in \mathsf{A}$. Zatem $a^*da = a^*c^*ca = (ca)^*(ca) \geq 0$.

Punkt (3) otrzymujemy stosując (2) do dodatniego elementu $d - b$. □

Twierdzenie 7.2. *Niech φ będzie dodatnim funkcjonałem na C^*-algebrze z jedynką A takim, że $\varphi(\mathbb{1}) = 1$. Wówczas istnieje przestrzeń Hilberta $\mathscr{H}_\varphi$, wektor $\Omega_\varphi \in \mathscr{H}_\varphi$ o normie 1 oraz $*$-homomorfizm algebr z jedynką $\pi_\varphi\colon \mathsf{A} \to \mathrm{B}(\mathscr{H}_\varphi)$ takie, że*

(1) *wektor Ω_φ jest cykliczny dla $\pi_\varphi(\mathsf{A})$,*

(2) *dla wszystkich* $a \in \mathsf{A}$ *mamy*

$$\varphi(a) = (\Omega_\varphi | \pi_\varphi(a)\Omega_\varphi)\,. \tag{7.1}$$

Dowód. Niech $\mathscr{N}_\varphi = \{a \in \mathsf{A} \,|\, \varphi(a^*a) = 0\}$. Wówczas $\mathscr{N}_\varphi$ jest domkniętym lewym ideałem w A: dla $a \in \mathscr{N}_\varphi$ i $b \in \mathsf{A}$ mamy

$$\varphi\big((ba)^*(ba)\big) = \varphi(a^*b^*ba) \le \varphi\big(a^*\|b^*b\|\mathbb{1}a\big) = \|b\|^2\varphi(a^*a) = 0,$$

a więc $ba \in \mathscr{N}_\varphi$. Podobnie, gdy $a_1, a_2 \in \mathscr{N}_\varphi$, to $0 \le (a_1 - a_2)^*(a_1 - a_2) = a_1^*a_1 + a_2 *_2^a - a_2^*a_1 - a_1^*a_2$, czyli $a_2^*a_1 + a_1^*a_2 \le a_1^*a_1 + a_2 *_2^a$. Zatem

$$\varphi\big((a_1 + a_2)^*(a_1 + a_2)\big) = \varphi(a_1^*a_1 + a_2^*a_2 + a_2^*a_1 + a_1^*a_2) \le 2\varphi(a_1^*a_1 + a_2^*a_2) = 0$$

(bo z $(a_1 - a - 2)^*(a_1 - a_2) \ge 0$ wynika, że $a_1^*a_2 + a_2^*a_1 \le a_1^*a_1 + a_2^*a_2$). Tak więc $a_1 + a_2 \in \mathscr{N}_\varphi$.

Niech $\mathscr{H}_0 = \mathsf{A}/\mathscr{N}_\varphi$. Wprowadzamy na $\mathscr{H}_0$ formę półtoraliniową:

$$(a + \mathscr{N}_\varphi | b + \mathscr{N}_\varphi) = \varphi(a^*b).$$

Z tą formą półtoraliniową $\mathscr{H}_0$ jest przestrzenią pre-hilbertowską i definiujemy $\mathscr{H}_\varphi$ jako uzupełnienie $\mathscr{H}_0$ w metryce pochodzącej od hilbertowskiej normy na $\mathscr{H}_0$.

Ponieważ $\mathscr{N}_\varphi$ jest lewym ideałem, dla dowolnego $a \in \mathsf{A}$ odwzorowanie

$$\mathsf{A} \ni b \longmapsto ab \in \mathsf{A}$$

definiuje odwzorowanie $\pi_0(a)\colon \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$

$$\pi_0(a)(b + \mathscr{N}_\varphi) = ab + \mathscr{N}_\varphi, \qquad (b \in \mathsf{A}).$$

Traktowany jako gęsto zdefiniowany operator na $\mathscr{H}_\varphi$, $\pi_0(a)$ jest ograniczony:

$$\big\|\pi_0(a)(b + \mathscr{N}_\varphi)\big\|^2 = \|ab + \mathscr{N}_\varphi\|^2 = \varphi(b^*a^*ab) \le \|a\|^2\varphi(b^*b) = \|a\|^2\|b + \mathscr{N}_\varphi\|^2.$$

Niech $\pi_\varphi(a)$ będzie rozszerzeniem $\pi_0(a)$ do elementu $\mathrm{B}(\mathscr{H}_\varphi)$. Mamy $\big\|\pi_\varphi(a)\big\| \le \|a\|$ dla wszystkich $a \in \mathsf{A}$. Nietrudno sprawdzić, że

$$\pi_\varphi(a)\pi_\varphi(b) = \pi_\varphi(ab) \quad \text{oraz} \quad \pi_\varphi(a)^* = \pi_\varphi(a^*)$$

dla wszystkich $a, b \in \mathsf{A}$, oraz że $\pi_\varphi(\mathbb{1})$ jest operatorem identycznościowym na $\mathscr{H}_\varphi$.

Zauważmy, że przestrzeń $\mathscr{H}_\varphi$ jest automatycznie wyposażona w odwzorowanie $\eta\colon \mathsf{A} \to \mathscr{H}_\varphi$ o gęstym obrazie (jest to oczywiście odwzorowanie $\mathsf{A} \ni a \mapsto a + \mathscr{N}_\varphi \in \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}_\varphi$). Definiujemy wektor $\Omega_\varphi \in \mathscr{H}_\varphi$ jako $\eta(\mathbb{1})$. Jest jasne, że

$$\pi_\varphi(a)\Omega_\varphi = \eta(a), \qquad (a \in \mathsf{A}).$$

W szczególności Ω_φ jest wektorem cyklicznym dla $\pi_\varphi(\mathsf{A})$.

Wreszcie obliczmy

$$(\Omega_\varphi | \pi_\varphi(a)\Omega_\varphi) = \varphi(\mathbb{1}^*a\mathbb{1}) = \varphi(a),$$

co dowodzi wzoru (7.1). □

Przedstawioną powyżej konstrukcję $\varphi \mapsto (\mathscr{H}_\varphi, \Omega_\varphi, \pi_\varphi)$ nazywamy konstrukcją Gelfanda-Naimarka-Segala. Funkcjonały dodatnie o normie 1 nazywamy *stanami*. Stan φ nazywamy *wiernym*, jeśli $\varphi(x^*x) = 0$ implikuje $x = 0$. Zauważmy, że jeśli φ jest stanem wiernym na A, to π_φ jest odwzorowaniem różnowartościowym. Istotnie, dla $a \neq 0$ mamy

$$0 < \varphi(x^*x) = (\pi_\varphi(x)\Omega_\varphi | \pi_\varphi(x)\Omega_\varphi) = \big\|\pi_\varphi(x)\Omega_\varphi\big\|^2.$$

Stwierdzenie 7.3. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* φ *będzie stanem normalnym na* M. *Wówczas* $\pi_\varphi\colon \mathsf{M} \to \mathrm{B}(\mathscr{H}_\varphi)$ *jest odwzorowaniem normalnym.*

Dowód. Niech $(x_i)_{i\in I}$ będzie niemalejącym, normowo ograniczonym ciągiem uogólnionym elementów dodatnich i niech $x = \lim\limits_{i\in I} x_i$. Wówczas $\bigl(\pi_\varphi(x_i)\bigr)_{i\in I}$ jest niemalejącym, normowo ograniczonym ciągiem uogólnionym w $\mathrm{B}(\mathscr{H}_\varphi)$ i $\pi_\varphi(x)$ jest ograniczeniem górnym dla $\bigl(\pi_\varphi(x_i)\bigr)_{i\in I}$. Stan φ jest normalny, a więc zachowuje rosnące granice ograniczonych ciągów uogólnionych. W szczególności

$$\lim_{i\in I}\left(\pi_\varphi(y)\Omega_\varphi\middle|\pi_\varphi(x_i)\pi_\varphi(y)\Omega_\varphi\right) = \lim_{i\in I}\varphi(y^*x_iy) = \varphi(y^*xy) = \left(\pi_\varphi(y)\Omega_\varphi\middle|\pi_\varphi(x)\pi_\varphi(y)\Omega_\varphi\right).$$

Ponieważ wektor Ω_φ jest cykliczny dla $\pi_\varphi(\mathsf{M})$, widzimy, że dla dowolnego $\xi\in\mathscr{H}_\varphi$ mamy

$$\left(\xi\middle|\pi_\varphi(x_i)\xi\right)\xrightarrow[i\in I]{}\left(\xi\middle|\pi_\varphi(x)\xi\right)$$

niemalejąco, a więc $\pi_\varphi(x_i)\xrightarrow[i\in I]{\text{so}}\pi_\varphi(x)$.

Stąd

$$\pi_\varphi\bigl(\sup_{i\in I}x_i\bigr) = \sup_{i\in I}\pi_\varphi(x_i),$$

czyli π_φ jest odwzorowaniem normalnym. □

8. Twierdzenie Kaplansky'ego

Twierdzenie Kaplansky'ego jest drugim po twierdzeniu o bikomutancie ważnym wynikiem dotyczącym so-gęstości podalgebry w algebrze von Neumanna. W jego sformułowaniu wykorzystamy następujące oznaczenia. Dla podzbioru $S\subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ przyjmujemy

- $S_1 = S\cap \mathrm{B}(\mathscr{H})_1$,
- $S_{\mathrm{h}} = S\cap\bigl\{x\in\mathrm{B}(\mathscr{H})\,\big|\,x=x^*\bigr\}$,
- $S_+ = S\cap\bigl\{x\in\mathrm{B}(\mathscr{H})\,\big|\,x\geq 0\bigr\}$.

Ponadto definiujemy $S_1^{\mathrm{h}} = S_1\cap S_{\mathrm{h}}$ oraz $S_1^+ = S_1\cap S_+$.

Twierdzenie 8.1. *Niech* $\mathsf{M}\subset\mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą i niech* $\mathscr{A}\subset\mathsf{M}$ *będzie* so-*gęstą* $*$-*podalgebrą. Wówczas*

(1) $\mathscr{A}_{\mathrm{h}}$ *jest* so-*gęsta w* M_{h},
(2) $\mathscr{A}_1^{\mathrm{h}}$ *jest* so-*gęsta w* $\mathsf{M}_1^{\mathrm{h}}$,
(3) $\mathscr{A}_1^+$ *jest* so-*gęsta w* M_1^+,
(4) $\mathscr{A}_1$ *jest* so-*gęsta w* M_1.

Dowód. Na początek zauważmy, że skoro wszystkie rozważane zbiory są wypukłe, so-gęstość i wo-gęstość są równoważne (wniosek 2.8), więc będziemy wybierać wersję łatwiejszą do dowodu. Dalej zauważmy, że jeśli A jest normowym domknięciem $\mathscr{A}$, to wszystkie rozważane podzbiory $\mathscr{A}$ są normowo gęste w odpowiednich podzbiorach A. Dlatego możemy od razu założyć, że $\mathscr{A}$ jest normowo domknięta.

Ad (1). Odwzorowanie $\mathsf{M}\ni x\mapsto\frac{1}{2}(x+x^*)$ jest wo-ciągłą surjekcją, a podalgebra $\mathscr{A}$ jest wo-gęsta w M. Stąd $\mathscr{A}_{\mathrm{h}}$ jest wo-gęsta w M_{h}.

Ad (2). Weźmy $x\in\mathsf{M}_1^{\mathrm{h}}$. Funkcja $f\colon[-1,1]\ni t\mapsto\frac{2t}{1+t^2}$ jest ciągłą bijekcją, a więc posiada funkcję odwrotną $g\in C\bigl([-1,1]\bigr)$. Tak więc kładąc $y=g(x)$, otrzymujemy element $y\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ taki, że

$$x = f(y) = 2y(\mathbb{1}+y^2)^{-1}.$$

Z punktu (1) wiemy, że istnieje ciąg uogólniony $(b_i)_{i\in I}$ elementów $\mathscr{A}_{\mathrm{h}}$ taki, że

$$b_i\xrightarrow[i\in I]{\text{so}} y.$$

Dla każdego i niech $a_i = 2b_i(\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}$. Wówczas $a_i \in \mathscr{A}_1^{\mathrm{h}}$ (bo $\|g\|_\infty = 1$) i

$$\begin{aligned}
a_i - x &= 2b_i(\mathbb{1}+b_i^2)^{-1} - 2y(\mathbb{1}+y^2)^{-1} \\
&= (\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}\big(2b_i(\mathbb{1}+y^2) - (\mathbb{1}+b_i^2)2y\big)(\mathbb{1}+y^2)^{-1} \\
&= (\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}\big(2b_i + 2b_iy^2 - 2y - 2b_i^2y\big)(\mathbb{1}+y^2)^{-1} \\
&= (\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}\big(2(b_i-y) + 2b_i(y-b_i)y\big)(\mathbb{1}+y^2)^{-1} \\
&= 2(\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}(b_i-y)(\mathbb{1}+y^2)^{-1} + 2(\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}b_i(y-b_i)y(\mathbb{1}+y^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ponieważ ciągi $\big((\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}\big)_{i\in I}$ oraz $\big((\mathbb{1}+b_i^2)^{-1}b_i\big)_{i\in I}$ są ograniczone, widzimy, że

$$a_i \xrightarrow[i\in I]{\text{so}} x$$

a więc $\mathscr{A}_1^{\mathrm{h}}$ jest so-gęsta w $\mathsf{M}_1^{\mathrm{h}}$.

Ad (3). Niech $x \in \mathsf{M}_1^{+}$. Z punktu (2) wiemy, że istnieje ciąg uogólniony $(b_i)_{i\in I}$ elementów $\mathscr{A}_1^{\mathrm{h}}$ taki, że

$$b_i \xrightarrow[i\in I]{\text{so}} \sqrt{x}.$$

Niech $a_i = b_i^*b_i$. Wówczas oczywiście $a_i \in \mathscr{A}_1^{+}$dla wszystkich i oraz

$$a_i \xrightarrow[i\in I]{\text{wo}} x.$$

gdyż dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathscr{H}$ mamy

$$\begin{aligned}
\big|(\xi\,|\,(x-a_i)\eta)\big| &= \big|\big(\xi\,\big|\,(\sqrt{x}^*\sqrt{x} - b_i^*b_i)\eta\big)\big| \\
&= \big|\big(\xi\,\big|\,\sqrt{x}^*(\sqrt{x}-b_i)\eta\big) + \big(\xi\,\big|\,(\sqrt{x}-b_i^*)b_i\eta\big)\big| \\
&= \big|\big(\sqrt{x}\xi\,\big|\,(\sqrt{x}-b_i)\eta\big) + \big((\sqrt{x}-b_i)\xi\,\big|\,b_i\eta\big)\big| \\
&\leq \|\sqrt{x}\xi\|\big\|(\sqrt{x}-b_i)\eta\big\| + \big\|(\sqrt{x}-b_i)\xi\big\|\|\eta\|.
\end{aligned}$$

Stąd $\mathscr{A}_1^{\mathrm{h}}$ jest wo-gęsta w $\mathsf{M}_1^{\mathrm{h}}$.

Ad (4). Weźmy $x \in \mathsf{M}_1$ i niech

$$\widetilde{x} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathsf{M})_1^{\mathrm{h}}$$

(por. część 3.3). Łatwo sprawdzić, że $M_2(\mathscr{A})$ jest so-gęsta w $M_2(\mathsf{M})$. Tak więc na mocy punktu (2) zastosowanego do algebr macierzy nad $\mathscr{A}$ is M, istnieje ciąg uogólniony

$$\left(\begin{bmatrix} x_{11}^i & x_{12}^i \\ x_{21}^i & x_{22}^i \end{bmatrix}\right)_{i\in I}$$

elementów $M_2(\mathscr{A})_1^h$, który jest so-zbieżny do $\widetilde{x}$. W szczególności

$$x_{12}^i \xrightarrow[i\in I]{\text{so}} x.$$

Teraz pozostaje zauważyć, że $x_{12}^i \in \mathscr{A}_1$, więc $\mathscr{A}_1$ jest so-gęsta w M_1. □

9. Więcej o algebrach przemiennych

Stwierdzenie 9.1. *Niech $\mathscr{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wówczas* wo-*topologia na kuli* $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$ *jest metryzowalna. W szczególności* $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$ *z* w-*topologią jest ośrodkową przestrzenią topologiczną.*

Dowód. Niech $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem gęstym w $\mathscr{H}_1$. Definiujemy metrykę na $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$ kładąc

$$d(a,b)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\tfrac{1}{2^{m+n}}\left(\xi_m|a\xi_n-b\xi_n\right),\qquad (a,b\in\mathrm{B}(\mathscr{H})_1).$$

Metryka ta wyznacza wo-topologię. □

Wniosek 9.2. *Niech $\mathscr{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta i niech $\mathsf{M}\subset\mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas istnieje ośrodkowa* C^*-*podalgebra z jedynką* $\mathsf{A}\subset\mathsf{M}$ so-*gęsta w* M.

Dowód. Kula M_1jest domkniętym podzbiorem ośrodkowej zupełnej przestrzeni metrycznej $\mathrm{B}(\mathscr{H})_1$, więc też jest ośrodkowa. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie w-gęstym podzbiorem M_1 takim, że $\mathbb{1}$ jest jednym z elementów zbioru $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Niech A będzie najmniejszą C^*-algebrą w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ zawierającą $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wówczas A jest ośrodkowa i oczywiście $\mathsf{A}''=\mathsf{M}$. □

Twierdzenie 9.3. *Dla $i=1,2$ niech $\mathscr{H}_i$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\mathsf{A}_i\subset\mathrm{B}(\mathscr{H}_i)$ będzie* C^*-*algebrą. Niech $\Omega_i\in\mathscr{H}_i$ będzie wektorem cyklicznym dla A_i. Niech $\Phi\colon\mathsf{A}_1\to\mathsf{A}_2$ będzie izomorfizmem i załóżmy, że dla każdego $a\in\mathsf{A}_1$ mamy*

$$(\Omega_1|a\Omega_1)=(\Omega_2|\Phi(a)\Omega_2)\,.$$

Wówczas istnieje operator unitarny $U\colon\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ taki, że $U\Omega_i=\Omega_2$ i $\Phi(a)=UaU^*$ dla wszystkich $a\in\mathsf{A}_1$.

Dowód. Definiujemy operator $U_0\colon\mathsf{A}_1\Omega_1\to\mathscr{H}_2$:

$$U_0a\Omega_1=\Phi(a)\Omega_2.$$

Wówczas U_0 jest izometrią gęstego podzbioru $\mathscr{H}_1$ na gęsty podzbiór $\mathscr{H}_2$, a więc rozszerza się do unitarnego $U\colon\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$. Reszta dowodu jest trywialna. □

Twierdzenie 9.4. *Niech $\mathscr{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta i niech $\mathsf{M}\subset\mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie maksymalną przemienną algebrą von Neumanna. Wówczas M jest izomorficzna z algebrą $L^\infty(\Omega,\mu)\subset\mathrm{B}\big(L^2(\Omega,\mu)\big)$ dla pewnej zwartej i metryzowalnej przestrzeni Ω i skończonej miary Radona μ na Ω.*

Dowód. Przypomnijmy, że w stwierdzeniu 3.7 wykazaliśmy, że M posiada wektor cykliczny $\Omega\in\mathscr{H}$. Teraz niech A będzie ośrodkową C^*-podalgebrą mocno gęstą w M (wniosek 9.2) i niech Ω będzie spektrum Gelfanda[3] algebry A.

Odwzorowanie $\mathsf{A}\ni a\mapsto(\Omega|a\Omega)$ wyznacza funkcjonał dodatni na $\mathrm{C}(\Omega)$, a więc pewną skończoną miarę Radona na Ω. Korzystając z twierdzenia 9.3 dla

- $\mathscr{H}_1=\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_2=L^2(\Omega,\mu)$,
- $\Omega_1=\Omega$, $\Omega_2=\mathbb{1}$ (funkcja stała na Ω),
- $\mathsf{A}_1=\mathsf{A}\subset\mathrm{B}(\mathscr{H})$, $\mathsf{A}_2=\mathrm{C}(\Omega)\subset\mathrm{B}\big(L^2(\Omega,\mu)\big)$ (jako operatory mnożenia przez funkcje)

[3] Każda przemienna C^*-algebra z jedynką A jest izomorficzna z algebrą $\mathrm{C}(\Omega)$ dla jedynej z dokładnością do homeomorfizmu zwartej przestrzeni Ω. Przestrzeń tę nazywamy *spektrum Gelfanda* algebry A. Przestrzeń Ω jest metryzowalna tedy i tylko wtedy, gdy A jest ośrodkowa.

widzimy, że algebry von Neumanna $\mathsf{M} = \mathsf{A}''$ i $\mathrm{C}(\Omega)''$ są izomorficzne. Pozostaje wykazać, że $\mathrm{C}(\Omega)'' = L^\infty(\Omega, \mu)$.

Jest jasne, że $\mathrm{C}(\Omega)'' \subset \mathrm{B}\bigl(L^2(\Omega, \mu)\bigr)$ jest przemienną algebrą von Neumanna posiadającą wektor cykliczny. Stąd, na mocy stwierdzenia 3.4 jest ona maksymalna przemienna, czyli mamy $\mathrm{C}(\Omega)'' = \mathrm{C}(\Omega)'$. Jest jasne, że $L^\infty(\Omega, \mu)$ jest przemienna z algebrą $\mathrm{C}(\Omega)$, a więc także z jej so-domknięciem $\mathrm{C}(\Omega)''$. Stąd

$$L^\infty(\Omega, \mu) \subset \mathrm{C}(\Omega)' = \mathrm{C}(\Omega)''.$$

Z drugiej strony $L^\infty(\Omega, \mu)$ jest so-domknięta, więc $\mathrm{C}(\Omega)'' \subset L^\infty(\Omega, \mu)$. □

Twierdzenie 9.4 można uogólnić na przypadek dowolnej przestrzeni Hilberta i algebr niekoniecznie posiadających wektor cykliczny. Algebry takie są wszystkie izomorficzne z $L^\infty(\Omega, \mu) \subset \mathrm{B}\bigl(L^2(\Omega, \mu)\bigr)$ z tym, że przestrzeń Ω nie będzie w ogólnym przypadku metryzowalna, a miara μ nie będzie skończona ani nawet σ-skończona.

10. Rzuty

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Dla dowolnej rodziny rzutów $(e_i)_{i \in I}$ w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ definiujemy

$$\bigvee_{i \in I} e_i \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{i \in I} e_i$$

jako rzuty odpowiednio na domknięcie podprzestrzeni generowanej przez $\{e_i \mathscr{H}\}_{i \in I}$ i na

$$\bigcap_{i \in I} e_i \mathscr{H}.$$

Nietrudno wykazać, że $\mathrm{Proj}\bigl(\mathrm{B}(\mathscr{H})\bigr)$ z porządkiem odziedziczonym z $\mathrm{B}(\mathscr{H})_+$ i operacjami $\vee$ i $\wedge$ jest kratą zupełną. Ponadto, gdy rzuty $(e_i)_{i \in I}$ są parami ortogonalne, mamy

$$\bigvee_{i \in I} e_i = \sum_{i \in I} e_i$$

(szereg so-zbieżny).

Krata $\mathrm{Proj}\bigl(\mathrm{B}(\mathscr{H})\bigr)$ posiada także *ortodopełnienie* czyli operację $e \mapsto \mathbb{1} - e$. Operacja ta zamienia suprema na infima i na odwrót.

Uwaga 10.1. Będziemy wielokrotnie korzystać z następującego faktu: jeśli $e, f \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Wówczas $e + f$ jest rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy $ef = 0$. Istotnie, jest jasne, że $e + f$ jest operatorem samosprzężonym. Ponadto $(e + f)^2 = e + f + ef + fe$, więc jeśli $ef = 0$, to $fe = (ef)^* = 0$ i $e + f$ jest rzutem. Odwrotnie, jeśli $e + f$ jest rzutem, to oczywiście $e + f \geq e$. Stąd $e(e + f) = e$, a więc $ef = 0$.

Stwierdzenie 10.2. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą von Neumanna. Wówczas* $\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ *jest kratą zupełną.*

Dowód. Niech $(e_i)_{i \in I}$ będzie rodziną elementów $\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ i niech $e = \bigvee_{i \in I} e_i \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Weźmy unitarny $u' \in \mathsf{M}'$. Mamy

$$u' e u'^* = \bigvee_{i \in I} u' e_i u'^* = \bigvee_{i \in I} e_i = e,$$

a więc $e \in \mathsf{M}'' = \mathsf{M}$. Skoro e jest supremum rodziny $(e_i)_{i \in I}$ w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest on tym bardziej supremum tej rodziny w $\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$. Istnienie infimum rodziny $(e_i)_{i \in I}$ wynika z istnienia supremum dla $(\mathbb{1} - e_i)_{i \in I}$. □

10.1. **Nośnik centralny.**

Twierdzenie 10.3. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą von Neumanna i niech* $x \in \mathsf{M}$*. Zbiór wszystkich rzutów* $p \in \mathrm{Proj}\bigl(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\bigr)$ *takich, że* $px = x$ *posiada element najmniejszy* $\boldsymbol{z}(x)$*, który można wyznaczyć w następujący sposób:* $\boldsymbol{z}(x)$ *jest rzutem na domknięcie podprzestrzeni*

$$\mathsf{M}x\mathscr{H} = \bigl\{yx\xi \,\big|\, \xi \in \mathscr{H},\ y \in \mathsf{M}\bigr\}.$$

Dowód. Definiujemy $\boldsymbol{z}(x)$ kładąc

$$\boldsymbol{z}(x) = \bigwedge \bigl\{p \in \mathrm{Proj}\bigl(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\bigr) \,\Big|\, px = x\bigr\}.$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy rzut centralny $\boldsymbol{z}(x)$. Jeśli p jest rzutem i $px = x$, to obraz x zawiera się w obrazie p. Stąd obraz x zawiera się również w obrazie $\boldsymbol{z}(x)$, a co za tym idzie $\boldsymbol{z}(x)x = x$, co dowodzi pierwszej części naszego twierdzenia.

Niech p będzie rzutem na domknięcie $\mathsf{M}x\mathscr{H}$. Podprzestrzeń ta jest niezmiennicza dla M i dla M', a więc p należy do $\mathsf{M}' \cap \mathsf{M} = \mathscr{Z}(\mathsf{M})$. Oczywiście $x\mathscr{H} \subset \mathsf{M}x\mathscr{H}$, czyli $px = x$, a więc $p \geq \boldsymbol{z}(x)$. Z drugiej strony, skoro $\boldsymbol{z}(x)x = x$, mamy $x\mathscr{H} \subset \boldsymbol{z}(x)\mathscr{H}$. Poza tym $\boldsymbol{z}(x)\mathscr{H}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla M, a więc musi być $\mathsf{M}x\mathscr{H} \subset \boldsymbol{z}(x)\mathscr{H}$, a więc i domknięcie $\mathsf{M}x\mathscr{H}$ zawiera się w obrazie $\boldsymbol{z}(x)$, czyli $p \leq \boldsymbol{z}(x)$. □

Definicja 10.4. Niech M będzie algebrą von Neumanna i niech $x \in \mathsf{M}$. Rzut centralny $\boldsymbol{z}(x)$ skonstruowany w twierdzeniu 10.3 nazywamy *nośnikiem centralnym* elementu x.

Stwierdzenie 10.5. *Niech* $x \in \mathsf{M}$ *i niech* $p \in \mathrm{Proj}\bigl(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\bigr)$*. Wówczas* $\boldsymbol{z}(px) = p\,\boldsymbol{z}(x)$*.*

Dowód. Oczywiście $\bigl(p\,\boldsymbol{z}(x)\bigr)px = px$, więc $\boldsymbol{z}(px) \leq p\,\boldsymbol{z}(x)$. Ale $\boldsymbol{z}(px)$ jest rzutem na

$$\overline{\mathsf{M}px\mathscr{H}} = \overline{p\mathsf{M}x\mathscr{H}} = p\overline{\mathsf{M}x\mathscr{H}} = p\,\boldsymbol{z}(x)\mathscr{H}$$

czyli $\boldsymbol{z}(px) = p\,\boldsymbol{z}(x)$. □

10.2. **Rzuty i ideały.** Zaczniemy od standardowego twierdzenia z teorii C*-algebr.

Twierdzenie 10.6. *Niech* A *będzie* C**-algebrą i niech* $\mathscr{J} \subset \mathsf{A}$ *będzie lewym ideałem (niekoniecznie domkniętym). Wówczas istnieje ciąg uogólniony* $(u_i)_{i\in I}$ *elementów* $\mathscr{J}$ *taki, że*

1. *dla każdego* $i \in I$ *mamy* $0 \leq u_i \leq \mathbb{1}$*,*
2. $i \preccurlyeq j$ *implikuje* $u_i \leq u_j$*,*
3. *dla każdego* $a \in \mathscr{J}$ *mamy* $\|x - xu_i\| \xrightarrow[i\in I]{} 0$*.*

Ciąg uogólniony $(u_i)_{i\in I}$ z twierdzenia 10.6 nazywamy *lewą jedynką aproksymatywną* dla ideału $\mathscr{J}$. Jeśli ideał $\mathscr{J}$ jest dwustronny, to wstawiając x^* zamiast x w punkcie (3) twierdzenia 10.6 uzyskujemy także $\|x - u_ix\| \xrightarrow[i\in I]{} 0$, czyli jedynka aproksymatywna jest *dwustronna*.

Twierdzenie 10.7. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą von Neumanna i niech* $\mathscr{J}$ *będzie lewym ideałem w* M*. Oznaczmy przez* J w*-domknięcie ideału* $\mathscr{J}$*. Wówczas istnieje dokładnie jeden rzut* $e \in \mathsf{M}$ *taki, że* $\mathsf{J} = \mathsf{M}e$*.*

Dowód. Niech $(u_i)_{i\in I}$ będzie lewą aproksymatywną jedynką dla $\mathscr{J}$. Wówczas ciąg uogólniony $(u_i)_{i\in I}$ jest so-zbieżny do pewnego samosprzężonego elementu $e \in \mathsf{M}$:

$$e = \lim_{i\in I} u_i = \sup_{i\in I} u_i \in \mathsf{M}.$$

Dla każdego $x \in \mathscr{J}$ mamy

$$x - xu_i \xrightarrow[i \in I]{\|\cdot\|} 0,$$

a więc $x = xe$. Stąd $x = xe$ dla wszystkich $x \in \mathsf{J}$ (operacja mnożenia z prawej przez e jest w-ciągła). Oczywiście $e \in \mathsf{J}$, bo jest so, a więc wo-granicą (ograniczonego) ciągu uogólnionego elementów $\mathscr{J}$. Zatem $e = e^2$, czyli e jest rzutem.

Mamy $\mathsf{M}e \subset \mathsf{J}$, ponieważ J jest lewym ideałem.Z drugiej strony wykazaliśmy już, że $\mathsf{J} \subset \mathsf{M}e$ (bo dla $x \in \mathsf{J}$ mamy $x = xe \in \mathsf{M}e$). Stąd

$$\mathsf{J} = \mathsf{M}e.$$

Jeśli $\mathsf{J} = \mathsf{M}f$ dla $f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$, to $f \in \mathsf{J}$, a więc $f = fe$ co oznacza $f \leq e$. Jeśli $f \neq e$, to istnieje $\xi \in \mathscr{H}$ taki, że $f\xi = 0 \neq e\xi$. Ale skoro $e \in \mathsf{J}$, istnieje $x \in \mathsf{M}$ taki, że $e = xf$. Ale to oznacza, że $e\xi = xf\xi = 0$ – sprzeczność. □

Jest jasne, że prawy ideał w M jest postaci $\mathscr{J}^*$ dla pewnego lewego ideału $\mathscr{J}$. Stąd każdy w-domknięty prawy ideał jest postaci $e\mathsf{M}$ dla pewnego $e \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$.

Wniosek 10.8. *Niech* J *będzie* w-*domkniętym dwustronnym ideałem w* M. *Wówczas istnieje dokładnie jeden* $e \in \mathrm{Proj}\big(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\big)$ *taki, że* $\mathsf{J} = \mathsf{M}e$.

Dowód. J jest lewym ideałem, a więc jest postaci $\mathsf{M}e$ dla pewnego $e \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$. Weźmy unitarny $u \in \mathsf{M}$. Wówczas

$$u\mathsf{J}u^* \subset \mathsf{J}.$$

bo J jest ideałem. Mnożąc tę równość z lewej przez u^* i z prawej przez u dostajemy

$$\mathsf{J} \subset u^*\mathsf{J}u,$$

a skoro $u^*\mathsf{J}u \subset \mathsf{J}$, otrzymujemy

$$u\mathsf{J}u^* = \mathsf{J}.$$

W takim razie

$$\mathsf{M}e = u\mathsf{M}eu^* = u\mathsf{M}u^*ueu^* = \mathsf{M}(ueu^*).$$

Z jedyności e spełniającego $\mathsf{J} = \mathsf{M}e$ wynika, że $ueu^* = e$ dla wszystkich unitarnych $u \in \mathsf{M}$, a więc $e \in \mathsf{M}'$. □

10.3. **Równoważność i porównywanie.**

Definicja 10.9. Niech M będzie algebrą von Neumanna. Powiemy, że rzuty $e, f \in \mathrm{Proj}(M)$ są *równoważne* jeśli istnieje częściowa izometria $u \in \mathsf{M}$ taka, że $e = u^*u$ i $f = uu^*$. Piszemy wówczas $e \sim f$.

Uwaga 10.10.

(1) Relacja "$\sim$" jest oczywiście relacją równoważności nazywaną czasem *równoważnością Murray'a-von Neumanna.*
(2) Jeśli $e \sim f$ i $u \in \mathsf{M}$ jest częściową izometrią taką, że $u^*u = e$ i $uu^* = f$, to odwzorowanie $e\mathsf{M}e \ni x \mapsto uxu^* \in f\mathsf{M}f$ jest izomorfizmem $*$-algebr z jedynką (jedynką pierwszej jest e, a drugiej f).

Przykład 10.11. Relacja "$\sim$" zależy bardzo mocno od algebry M, w której leżeć ma częściowa izometria v. Na przestrzeni Hilberta $\mathbb{C}^n$ rozważmy dwie algebry von Neumanna:

$$\mathsf{M}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \dots .\lambda_n \in \mathbb{C} \right\}$$

oraz $\mathsf{M}_2 = \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$. Rzuty

$$e = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad f = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

należą do obu algebr. Jest jasne, że $e \sim f$ w M_2, ale M_1 jest przemienna, więc w niej relacja "$\sim$" jest relacją równości.

Uwaga 10.12.

(1) Jeśli $e \sim f$ i $p \in \mathrm{Proj}\big(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\big)$, to $ep \sim fp$. Istotnie, jeśli $e = u^*u$ i $f = uu^*$, to
$$ep = u^*up = (up)^*up \quad \text{oraz} \quad fp = uu^*p = up(up^*).$$

(2) Jeśli $e \sim f$, to $\boldsymbol{z}(e) = \boldsymbol{z}(f)$. Weźmy częściową izometrię u taką, że $u^*u = e$ i $uu^* = f$. Wiemy, że $\boldsymbol{z}(f)$ jest najmniejszym rzutem centralnym takim, że $f = f\,\boldsymbol{z}(f)$. Z drugiej strony, skoro
$$f\,\boldsymbol{z}(e) = uu^*\,\boldsymbol{z}(e) = uu^*uu^*\,\boldsymbol{z}(e) = u\big(u^*u\,\boldsymbol{z}(e)\big)u^* = uu^*uu^* = uu^* = f,$$
a więc, $\boldsymbol{z}(f) \leq \boldsymbol{z}(e)$. Tak samo sprawdzamy, że $\boldsymbol{z}(e) \leq \boldsymbol{z}(f)$.

Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną parami ortogonalnych rzutów w M i niech $e = \bigvee\limits_{i\in I} e_i$. Jeśli $e \sim f$ dla pewnego $f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$, to istnieje rodzina parami ortogonalnych rzutów $\{f_i\}_{i\in I}$ w M taka, że $f = \bigvee\limits_{i\in I} f_i$ i dla każdego i mamy $e_i \sim f_i$. Istotnie, niech $v^*v = e$ i $vv^* = f$. Połóżmy $f_i = ve_iv^*$.

Stwierdzenie 10.13. *Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ i $\{f_i\}_{i\in I}$ w M będą rodzinami parami ortogonalnych rzutów w M takimi, że dla każdego i mamy $e_i \sim f_i$. Wówczas $\bigvee\limits_{i\in I} e_i \sim \bigvee\limits_{i\in I} f_i$.*

Dowód. Dla każdego i niech $u_i \in \mathsf{M}$ będzie częściową izometrią taką, że $u_i^*u_i = e_i$ i $u_iu_i^* = f_i$. Dla skończonego podzbioru $J \subset I$ definiujemy
$$u_J = \sum_{i\in J} u_i.$$
Wówczas $(u_J)_J$ jest so-zbieżnym ciągiem uogólnionym (przestrzenie początkowe izometrii $\{u_i\}_{i\in I}$ są ortogonalne podobnie jak ich przestrzenie końcowe). Oznaczmy przez u granicę ciągu uogólnionego $(u_J)_J$. Jest to częściowa izometria o przestrzeni początkowej $\bigoplus\limits_{i\in I} e_i\mathscr{H}$ i końcowej $\bigoplus\limits_{i\in I} f_i\mathscr{H}$. Stąd
$$u^*u = \bigvee_{i\in I} e_i \quad \text{i} \quad uu^* = \bigvee_{i\in I} f_i.$$
$\square$

Z rozważań dotyczących rozkładu biegunowego (część1.2) natychmiast wynika:

Stwierdzenie 10.14. *Niech* $x \in \mathsf{M}$*. Wówczas* $\boldsymbol{l}(x) \sim \boldsymbol{r}(x)$*.*

Wniosek 10.15. *Niech* $e, f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$*. Wówczas*
(1) $\big((e \vee f) - f\big) \sim \big(e - (e \wedge f)\big)$,
(2) $\big(e - (e \wedge (\mathbb{1} - f))\big) \sim \big(f - ((\mathbb{1} - e) \wedge f)\big)$.

Dowód. Zaczniemy od wzoru (2). Niech $a = ef$. Mamy

$$\ker a^* = \ker fe = (e\mathscr{H})^{\perp} + (e\mathscr{H}) \cap (f\mathscr{H})^{\perp}.$$

Zatem

$$\overline{a\mathscr{H}} = (\ker a^*)^{\perp} = e\mathscr{H} \ominus \big((e\mathscr{H}) \cap (f\mathscr{H})^{\perp}\big),$$

a więc $\boldsymbol{l}(a) = e - \big(e \wedge (\mathbb{1} - f)\big)$. Z drugiej strony $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{l}(a^*)$, a skoro $a^* = fe$, używając tych samych argumentów, co poprzednio dostajemy $\boldsymbol{r}(a) = f - \big((\mathbb{1} - e) \wedge f\big)$.

Aby udowodnić wzór (1) na początek zauważmy, że

$$e \vee f - e = (\mathbb{1} - e) - (\mathbb{1} - e \vee f) = (\mathbb{1} - e) - (\mathbb{1} - e) \wedge (\mathbb{1} - f) = (\mathbb{1} - e) - (\mathbb{1} - f) \wedge (\mathbb{1} - e). \tag{10.1}$$

Teraz wstawiamy $(f, \mathbb{1} - e)$ zamiast (e, f) do (2):

$$\big(f - (f \wedge e)\big) \sim \big((\mathbb{1} - e) - (\mathbb{1} - f) \wedge (\mathbb{1} - e)\big). \tag{10.2}$$

Zestawienie (10.1) i (10.2) daje (1). □

Stwierdzenie 10.16. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą von Neumanna i niech* $e, f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$*. Następujące warunki są równoważne:*
(1) $e\mathsf{M}f \neq \{0\}$,
(2) *istnieją niezerowe* $e_0, f_0 \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ *takie, że* $e_0 \leq e$*,* $f_0 \leq f$ *i* $e_0 \sim f_0$*,*
(3) $\boldsymbol{z}(e)\,\boldsymbol{z}(f) \neq 0$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Weźmy $x \in \mathsf{M}$ taki, że $exf \neq 0$. Wówczas kładąc $e_0 = \boldsymbol{l}(exf)$ i $f_0 = \boldsymbol{r}(exf)$ otrzymujemy $0 \neq e_0 \leq e$, $0 \neq f_0 \leq f$ i $e_0 \sim f_0$ (por. przykład 10.14).

(2) $\Rightarrow$ (1). Niech u będzie częściową izometrią taką, że $e_0 = u^*u$ i $f_0 = uu^*$. Wówczas $eu^*f = u^* \neq 0$ (bo $e_0 \leq e$ oznacza, że e zachowuje podprzestrzeń początkową u, a $f_0 \leq f$ oznacza, że f zachowuje podprzestrzeń końcową u).

(1) $\Rightarrow$ (3). Załóżmy, że $\boldsymbol{z}(e)\,\boldsymbol{z}(f) = 0$. Dla dowolnego $x \in \mathsf{M}$ mamy

$$exf = \boldsymbol{z}(e)exf = \boldsymbol{z}(e)x\,\boldsymbol{z}(f)f = \boldsymbol{z}(e)\,\boldsymbol{z}(f)exf = 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Jeśli $e\mathsf{M}f = \{0\}$ to $e\,\boldsymbol{z}(f) = 0$ (bo $\boldsymbol{z}(f)$ jest rzutem na $\overline{\mathsf{M}f\mathscr{H}}$). Stąd

$$0 = \boldsymbol{z}\big(e\,\boldsymbol{z}(f)\big) = \boldsymbol{z}(e)\,\boldsymbol{z}(f)$$

na mocy stwierdzenia 10.5. □

Definicja 10.17. Powiemy, że rzut $e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ *majoryzuje* $f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$, jeśli istnieje rzut $e_1 \leq e$ taki, że $e_1 \sim f$. Piszemy: $f \prec e$.

Twierdzenie 10.18. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* $e, f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$*. Wtedy istnieje rzut* $p \in \mathscr{Z}(\mathsf{M})$ *taki, że*

$$ep \prec fp \quad \text{oraz} \quad e(\mathbb{1} - p) \succ f(\mathbb{1} - p).$$

Dowód. Niech $\{e_i, f_i\}_{i \in I}$ będzie maksymalną rodziną taką, że
- dla każdego i

  - $e_i, f_i \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$,
  - $e_i \leq e$, $f_i \leq f$,
  - $e_i \sim f_i$,
- rzuty $\{e_i\}_{i\in I}$ są parami ortogonalne,
- rzuty $\{f_i\}_{i\in I}$ są parami ortogonalne.

Niech
$$e_1 = \bigvee_{i\in I} e_i, \qquad f_1 = \bigvee_{i\in I} f_i.$$
W świetle stwierdzenia 10.13 mamy $e_1 \sim f_1$. Połóżmy $e_2 = e - e_1$, $f_2 = f - f_1$. Wówczas $\boldsymbol{z}(e_2)\,\boldsymbol{z}(f_2) = 0$. Istotnie, jeśli $\boldsymbol{z}(e_2)\,\boldsymbol{z}(f_2) \neq 0$, to ze stwierdzenia 10.16 wynika, że istnieją $0 \neq e_0 \leq e_2$ oraz $0 \neq f_0 \leq f_2$ takie, że $e_0 \sim f_0$, co przeczy maksymalności rodziny $(e_i, f_i)_{i\in I}$.

Niech $p = \boldsymbol{z}(f_2)$. Mamy
$$\begin{aligned} ep &= e_1p + e_2p = e_1p + e_2\,\boldsymbol{z}(f_2)\\ &= e_1p + e_2\,\boldsymbol{z}(e_2)\,\boldsymbol{z}(f_2) = e_1p \sim f_1p \leq fp \end{aligned}$$
(skorzystaliśmy z uwagi 10.12(1)). Podobnie
$$\begin{aligned} f(\mathbb{1}-p) &= f_1(\mathbb{1}-p) + f_2(\mathbb{1}-p) = f_1(\mathbb{1}-p) + f_2\big(\mathbb{1}-\boldsymbol{z}(f_2)\big)\\ &= f_1(\mathbb{1}-p) + f_2\,\boldsymbol{z}(f_2)\big(\mathbb{1}-\boldsymbol{z}(f_2)\big) = f_1(\mathbb{1}-p) \sim e_1(\mathbb{1}-p) \leq e(\mathbb{1}-p). \end{aligned}$$
□

Wniosek 10.19. *Jeśli* M *jest faktorem i* $e, f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$*, to* $e \prec f$ *lub* $e \succ f$*.*

Twierdzenie 10.20. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* $e, f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$*. Jeśli* $e \prec f$ *i* $e \succ f$*, to* $e \sim f$*.*

Dowód. Niech w i v będą częściowymi izometriami takimi, że
$$ww^* = e, \quad w^*w \leq f, \quad vv^* = f, \quad v^*v \leq e.$$
Rozważmy zbiór $\mathrm{Proj}_f = \big\{g \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M}) \,\big|\, g \leq f\big\}$. Jest on podkratą (zupełną) kraty $\mathrm{Proj}(\mathsf{M})$. Zdefiniujmy funkcję $\phi\colon \mathrm{Proj}_f \to \mathrm{Proj}_f$
$$\phi(g) = f - w^*(e - v^*gv)w, \qquad (g \in \mathrm{Proj}_f).$$
Jest to funkcja niemalejąca. Niech $\mathscr{X} = \big\{g \in \mathrm{Proj}_f \,\big|\, g \leq \phi(g)\big\}$ i połóżmy
$$h = \bigvee_{g\in\mathscr{X}} g.$$
Dla $g \in \mathscr{X}$ mamy $g \leq h$, a więc $g \leq \phi(g) \leq \phi(h)$, czyli
$$h \leq \phi(h). \tag{10.3}$$
Stąd $\phi(h) \leq \phi\big(\phi(h)\big)$, co pokazuje, że $\phi(h) \in \mathscr{X}$. To z kolei oznacza, że
$$\phi(h) \leq h. \tag{10.4}$$
Nierówności (10.3) i (10.4) dają $h = \phi(h)$, czyli
$$h = f - w^*(e - v^*hv)w. \tag{10.5}$$
Łatwo się przekonać, że częściowe izometrie hv i $(e - v^*hv)w$ ustanawiają równoważności
$$h \sim v^*hv \quad \text{oraz} \quad (h - f) \sim (e - v^*hv).$$

Istotnie, mamy $(hv)^*hv = v^*hv$ oraz $hv(hv)^* = hvv^*h = hfh = h$ (bo $h \leq f$). Dalej
$$\big((e - v^*hv)w\big)^*(e - v^*hv)w = w^*(e - v^*hv)w = f - h$$
na mocy (10.5) i w końcu
$$\begin{aligned}(e - v^*hv)w\big((e - v^*hv)w\big)^* &= (e - v^*hv)ww^*(e - v^*hv)\\ &= (e - v^*hv)e(e - v^*hv) = (e - v^*hv).\end{aligned}$$
Tak więc rodziny $\{e - v^*hv, v^*hv\}$ oraz $\{f - h, h\}$ spełniają założenia stwierdzenia 10.13 i w konsekwencji
$$e \sim f.$$
□

Tak więc relacja "$\prec$" indukuje na $\mathsf{M}/\sim$ częściowy porządek, a jeśli M jest faktorem, to jest to porządek liniowy.

10.4. **Nośnik funkcjonału dodatniego.** Niech φ będzie dodatnim elementem M_*. Jeśli $a \in \mathsf{M}_+$ i $\varphi(a) = 0$, to $\varphi\big(\boldsymbol{s}(a)\big) = 0$, bo kładąc $e_n = \chi_{[\frac{1}{n},\infty[}(a)$ mamy $ae_n \geq \frac{1}{n}e_n$ i $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{so}} \boldsymbol{s}(a)$.Z drugiej strony z nierówności Schwarza mamy
$$\big|\varphi(ae_n)\big| = \big|\varphi\big(a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}e_n\big)\big| \leq \varphi(a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}})\varphi\big((a^{\frac{1}{2}}e_n)^*(a^{\frac{1}{2}}e_n)\big) = \varphi(a)\varphi(ae_n) = 0.$$
Zatem
$$0 = \varphi(ae_n) \geq \tfrac{1}{n}\varphi(e_n) \geq 0$$
i otrzymujemy
$$\varphi\big(\boldsymbol{s}(a)\big) = \lim_{n\to\infty}\varphi(e_n) = 0.$$
Teraz zauważmy, że jeśli $e, f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ i $\varphi(e) = 0 = \varphi(f)$, to $\varphi(e \wedge f) = 0$, bo wtedy $\varphi(e + f) = 0$, a więc $\varphi\big(\boldsymbol{s}(e + f)\big) = 0$, a $\boldsymbol{s}(e + f) = e \wedge f$. Stąd wnosimy, że zbiór
$$\big\{e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M}) \,\big|\, \varphi(e) = 0\big\}$$
jest zbirem skierowanym dla relacji "$\leq$". Niech
$$\mathbb{1} - \boldsymbol{s}(\varphi) = \bigvee\big\{e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M}) \,\big|\, \varphi(e) = 0\big\}.$$
Mamy wtedy $\boldsymbol{s}(\varphi) \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ i $\varphi\big(\mathbb{1} - \boldsymbol{s}(\varphi)\big) = 0$.

Teraz dla $x \in \mathsf{M}$ mamy $\varphi(x) - \varphi\big(x\,\boldsymbol{s}(\varphi)\big) = \varphi\big(x(\mathbb{1} - \boldsymbol{s}(\varphi))\big)$, a z nierówności Schwarza
$$\big|\varphi\big(x(\mathbb{1} - \boldsymbol{s}(\varphi))\big)\big| \leq \varphi(x^*x)\varphi\big(\mathbb{1} - \boldsymbol{s}(\varphi)\big) = 0.$$
Innymi słowy
$$\varphi(x) = \varphi\big(x\,\boldsymbol{s}(\varphi)\big), \qquad (x \in \mathsf{M}).$$
Tak samo uzyskujemy
$$\varphi(x) = \varphi\big(\boldsymbol{s}(\varphi)x\big), \qquad (x \in \mathsf{M}).$$
Jeśli $x \geq 0$ i $\varphi(x) = 0$, to jak już wiemy $\varphi\big(\boldsymbol{s}(x)\big) = 0$. W szczególności $\boldsymbol{s}(x) \perp \boldsymbol{s}(\varphi)$ (z definicji $\boldsymbol{s}(\varphi)$). Zatem $\boldsymbol{s}(\varphi)x = \boldsymbol{s}(\varphi)\,\boldsymbol{s}(x)s = 0$. Tak samo $x\,\boldsymbol{s}(\varphi) = 0$. W szczególności
$$\Big(\varphi \text{ jest wierny}\Big) \iff \Big(\boldsymbol{s}(\varphi) = \mathbb{1}\Big).$$

Definicja 10.21. Rzut $\boldsymbol{s}(\varphi)$ nazywamy *nośnikiem* funkcjonału dodatniego φ.

10.5. **Rozkład biegunowy funkcjonału.** Niech $\mathscr{A}$ będzie algebrą nad $\mathbb{C}$ (albo jakimkolwiek ciałem). Wówczas przestrzeń sprzężona $\mathscr{A}^*$ jest bimodułem nad $\mathscr{A}$:

$$a\phi b(c) = \phi(bca), \qquad (a, b, c \in \mathscr{A},\ \phi \in \mathscr{A}^*).$$

Niech M będzie algebrą von Neumanna jest jasne, że prawe i lewe działanie M na funkcjonałach na M obcina się do działania na M^* i wtedy

$$\|x\varphi y\| \leq \|x\|\|\varphi\|\|y\|, \qquad (x, y \in \mathsf{M},\ \varphi \in \mathsf{M}^*).$$

Ponadto, jeśli $\psi \in \mathsf{M}_\sim$, to $x\psi y \in \mathsf{M}_\sim$, a stąd już łatwo wynika, że jeśli $\varphi \in \mathsf{M}_*$, to $x\varphi y \in \mathsf{M}_*$.

Nietrudno też sprawdzić, że

$$(x\varphi y)^* = y^*\varphi^* x^*, \qquad (x, y \in \mathsf{M},\ \varphi \in \mathsf{M}_*). \tag{10.6}$$

(jako że $(x\varphi y)^*(z) = \overline{\varphi(yz^*x)} = \varphi^*(x^*zy^*) = y^*\varphi^*x^*(z)$).

Twierdzenie 10.22. *Niech $\varphi \in \mathsf{M}_*$. Wówczas istnieje dokładnie jedna para $\big(v, |\varphi|\big)$ złożona z częściowej izometrii $v \in \mathsf{M}$ i normalnego funkcjonału dodatniego $|\varphi|$ na M taka, że*

- $\varphi = v|\varphi|$,
- $v^*v = \boldsymbol{s}\big(|\varphi|\big)$.

Dowód. Niech u będzie punktem ekstremalnym niepustego, wypukłego i w-zwartego zbioru $\big\{x \in \mathsf{M}_1 \bigm| \varphi(x) = \|\varphi\|\big\}$ (zbiór ten jest niepusty ze względu na w-zwartość M_1). Wówczas u jest także punktem ekstremalnym M_1 (łatwo sprawdzić, że jeśli $u = tu_1 + (1-t)u_2$ i $u_1, u_2 \in \mathsf{M}_1$ i $t \in [0,1]$, to $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \|\varphi\|$). Zatem na mocy stwierdzenia 4.5 u jest częściową izometrią.

Niech $\psi = u\varphi$. Mamy

$$\psi(\mathbb{1}) = \varphi(u) = \|\varphi\| \geq \|\psi\| \geq \psi(\mathbb{1}),$$

a więc ψ jest dodatni (stwierdzenie 5.2). Teraz policzmy

$$\psi(\mathbb{1} - uu^*) = \varphi(u - uu^*u) = \varphi(0) = 0,$$

a więc $uu^* \geq \boldsymbol{s}(\psi)$. W szczególności $v = u^*\,\boldsymbol{s}(\psi)$ jest częściową izometrią i $v^*v = \boldsymbol{s}(\psi)$. Pokażemy, że

$$\varphi = v\psi.$$

Na początek zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathsf{M}$

$$\psi(x) = \psi\big(x\,\boldsymbol{s}(\psi)\big) = \varphi\big(s\,\boldsymbol{s}(\psi)u\big) = \varphi(xv^*).$$

Załóżmy, że $\varphi \neq v\psi$. Wówczas istnieje $x \in \mathsf{M}$ taki, że $\varphi(x) - \psi(xv) \neq 0$. Innymi słowy

$$\varphi\big(x(\mathbb{1} - vv^*)\big) \neq 0.$$

Możemy założyć, że $\|x\| \leq 1$ i $\alpha = \varphi\big(x(\mathbb{1} - vv^*)\big) > 0$.

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
\big\|nv^* + x(\mathbb{1} - vv^*)\big\|^2 &= \big\|\big(nv^* + x(\mathbb{1} - vv^*)\big)\big(nv^* + x(\mathbb{1} - vv^*)\big)^*\big\| \\
&= \big\|\big(nv^* + x(\mathbb{1} - vv^*)\big)\big(nv + (\mathbb{1} - vv^*)x^*\big)\big\| \\
&= \big\|n^2v^*v + x(\mathbb{1} - vv^*)x^*\big\| \leq n^2 + 1,
\end{aligned}$$

a stąd

$$\big|\varphi\big(nv^* + x(\mathbb{1} - vv^*)\big)\big| \leq \|\varphi\|\sqrt{n^2 + 1}.$$

Z drugiej strony

$$\varphi\big(nv^* + x(\mathbb{1} - vv^*)\big) = \varphi(nv^*) + \varphi\big(x(\mathbb{1} - vv^*)\big) = n\psi(\mathbb{1}) + \varphi\big(x(\mathbb{1} - vv^*)\big) = n\|\phi\| + \alpha.$$

Tak więc uzyskujemy niemożliwą nierówność

$$n\|\phi\| + \alpha \leq \|\varphi\|\sqrt{n^2+1}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tak więc udowodniliśmy, że $\varphi = v\psi$ i $v^*v = \boldsymbol{s}(\psi)$. Oznaczmy ψ symbolem $|\varphi|$.

Przechodzimy do dowodu jedyności pary $\big(v, |\varphi|\big)$. Załóżmy, że mamy $\varphi = v\psi = v'\psi'$, dla dodatnich $\psi, \psi' \in \mathsf{M}_*$ i $v^*v = \boldsymbol{s}(\psi)$ oraz $v'^*v' = \boldsymbol{s}(\psi')$. Mamy wówczas

$$\psi(\mathbb{1}) = \psi(vv^*) = \varphi(v^*) = \psi'(v^*v') = \psi(v'^*v'v^*v') = \varphi(v'^*v'v^*) = \psi(v'^*v'v^*v) = \psi(v'^*v'),$$

a więc $v'^*v' \geq \boldsymbol{s}(\psi) = v^*v$. Tak samo $v^*v \geq v'^*v'$, a więc $v'^*v' = v^*v$. Oznaczmy rzut $\boldsymbol{s}(\psi') = v'^*v' = v^*v = \boldsymbol{s}(\psi)$ symbolem e.

Mamy

$$v'^*v = v'^*v'v'^*vv^*v = ev'^*ve \in e\mathsf{M}e.$$

Więc możemy rozłożyć v'^*v na część rzeczywistą i urojoną w algebrze $e\mathsf{M}e$:

$$v'^*v = a + \mathrm{i}b,$$

gdzie a i b są samosprzężonymi elementami $e\mathsf{M}e$. Obliczamy:

$$\psi(a) + \mathrm{i}\psi(b) = \psi(v'^*v) = \varphi(v'^*) = \psi'(v'^*v') = \|\psi'\| = \|\psi\|$$

(ostatnia równość: mamy $v\psi = v'\psi'$, więc $\psi = \boldsymbol{s}(\psi)\psi = v^*v\psi = v^*v'\psi'$, a stąd $\|\psi\| \leq \|\psi'\|$ i tak samo otrzymujemy przeciwną nierówność). Tak więc $\psi(a) = \|\psi\|$, a więc $\psi(e-a) = 0$. Ponieważ $e - a \geq 0$ i ψ jest wierny na $e\mathsf{M}e$, otrzymujemy $a = e$. Tak więc

$$\|e + \mathrm{i}b\| = \|v'^*v\| \leq 1,$$

a więc $b = 0$ (bo e jest jedynką algebry $s\mathsf{M}e$). Tym samym wykazaliśmy, że

$$v'^*v = e.$$

Biorąc sprzężenie obu stron otrzymujemy też

$$v^*v' = e.$$

Możemy teraz napisać

$$v'v'^* = v'v'^*v'v'^* = v'ev'^* = v'v'^*vv^*v'v'^*$$

lub inaczej

$$v'v'^*(\mathbb{1} - vv^*)v'v'^* = 0$$

albo

$$v'v'^*(\mathbb{1} - vv^*)(\mathbb{1} - vv^*)v'v'^* = 0.$$

To oznacza, że

$$(\mathbb{1} - vv^*)v'v'^* = 0,$$

czyli

$$v'v'^* \leq vv^*.$$

Oczywiście tak samo uzyskujemy $v'v'^* \geq vv^*$, więc

$$v'v'^* = vv^*.$$

Oznaczmy ten rzut przez f. Teraz mamy

$$v = vv^*v = fv = v'v'^*v = v'e = v'v'^*v' = v'.$$

Zatem $\varphi = v\psi = v\psi'$, a stąd $\psi = \boldsymbol{s}(\psi)\psi = v^*v\psi = v^*\varphi$ i tak samo $\psi' = v^*\varphi$, czyli $\psi = \psi'$. □

Definicja 10.23. Rozkład $\varphi = v|\varphi|$ opisany w twierdzeniu 10.22 nazywamy *rozkładem biegunowym* funkcjonału normalnego φ.

10.6. **Rozkład Jordana.**

Twierdzenie 10.24. *Niech $\varphi \in \mathsf{M}_*$ będzie samosprzężony. Wówczas istnieje dokładnie jedna para (φ_1, φ_2) dodatnich elementów M_* taka, że*
- $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$,
- $\boldsymbol{s}(\varphi_1)\,\boldsymbol{s}(\varphi_2) = 0$.

Dowód. Niech $\varphi = v|\varphi|$ będzie rozkładem biegunowym φ.Na mocy (10.6) mamy
$$v|\varphi| = \varphi = \varphi^* = (v|\varphi|)^* = |\varphi|v^* = \boldsymbol{s}\big(|\varphi|\big)|\varphi|v^* = v^*v|\varphi|v^*,$$
a ponieważ funkcjonał $v|\varphi|v^*$jest dodatni, z jedyności rozkładu biegunowego wnioskujemy, że
$$v = v^* \quad \text{i} \quad |\varphi| = v|\varphi|v^*.$$
Samosprzężona częściowa izometria jest postaci $e_1 - e_2$, gdzie $e_1, e_2 \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ spełniają $e_1e_2 = 0$. Niech
$$\varphi_1 = e_1\varphi, \qquad \varphi_2 = -e_2\varphi.$$
Teraz, skoro $|\varphi| = v|\varphi|v$ oraz $\boldsymbol{s}\big(|\varphi|\big) = v^*v = e_1 + e_2$ mamy odpowiednio
$$|\varphi| = (e_1 - e_2)|\varphi|(e_1 - e_2) = e_1|\varphi|e_1 - e_2|\varphi|e_1 - e_1|\varphi|e_2 + e_2|\varphi|e_2$$
oraz
$$|\varphi| = (e_1 + e_2)|\varphi|(e_1 + e_2) = e_1|\varphi|e_1 + e_2|\varphi|e_1 + e_1|\varphi|e_2 + e_2|\varphi|e_2,$$
co razem daje
$$|\varphi| = (e_1 + e_2)|\varphi|(e_1 + e_2) = e_1|\varphi|e_1 + e_2|\varphi|e_2.$$
Zatem
$$\varphi_1 = e_1\varphi = e_1(e_1 - e_2)|\varphi| = e_1|\varphi| = e_1\big(e_1|\varphi|e_1 + e_2|\varphi|e_2\big) = e_1|\varphi|e_1 \geq 0$$
i tak samo
$$\varphi_2 = -e_2\varphi = -e_2(e_1 - e_2)|\varphi| = e_2|\varphi| = e_2\big(e_1|\varphi|e_1 + e_2|\varphi|e_2\big) = e_2|\varphi|e_2 \geq 0.$$
Oczywiście $\boldsymbol{s}(\varphi_1) = e_1$ i $\boldsymbol{s}(\varphi_2) = e_2$, więc $\boldsymbol{s}(\varphi_1)\,\boldsymbol{s}(\varphi_2) = 0$, co kończy dowód istnienia pary (φ_1, φ_2).

Przechodzimy do dowodu jedyności. Niech $\varphi = \varphi_1' - \varphi_2'$, gdzie $\varphi_1', \varphi_2' \geq 0$, a ich nośniki e_1' i e_2' są ortogonalne. Niech $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ oraz $\psi' = \varphi_1' + \varphi_2'$ i połóżmy $v' = e_1' - e_2'$. Mamy wówczas
$$v'\psi' = (e_1' - e_2')\psi' = (e_1' - e_2')(\varphi_1' + \varphi_2') = \varphi_1' - \varphi_2' = \varphi$$
oraz
$$v'^*v' = e_1' + e_2' = \boldsymbol{s}(\psi'),$$
a więc $v'\psi' = \varphi$ jest rozkładem biegunowym. Z jedyności rozkładu otrzymujemy $v = v'$ i $\psi' = |\varphi|$, czyli
$$e_1' - e_2' = e_1 - e_2 \quad \text{oraz} \quad e_1' + e_2' = \boldsymbol{s}(\psi') = \boldsymbol{s}(\psi) = e_1 + e_2.$$
Stąd $e_1' = e_1$ i $e_2' = e_2$. W szczególności
$$\varphi_1' = e_1'\varphi = e_1\varphi = \varphi_1,$$
a więc także $\varphi_2' = \varphi_2$. □

10.7. **Warunkowe wartości oczekiwane.**

Definicja 10.25. Niech A będzie C*-algebrą, a B jej C*-podalgebrą. Odwzorowanie $\Phi\colon \mathsf{A}\to\mathsf{B}$ nazywamy

(1) *dodatnim*, jeśli $\Phi(a^*a)\geq 0$ dla wszystkich $a\in\mathsf{A}$,
(2) B-*liniowym*, jeśli $\Phi(ab)=\Phi(a)b$ oraz $\Phi(ba)=b\Phi(a)$dla wszystkich $a\in\mathsf{A}$, $b\in\mathsf{B}$,
(3) *warunkową wartością oczekiwaną*, jeśli Φ jest dodatnim, B-liniowym rzutem.

Twierdzenie 10.26. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* N *będzie* w-*domkniętą* $*$-*podalgebrą* M. *Niech* $\Phi\colon\mathsf{M}\to\mathsf{N}$ *będzie rzutem o normie* 1. *Wówczas* Φ *jest warunkową wartością oczekiwaną.*

Nie zakładamy, że N jest algebrą von Neumanna. Jako w-domknięta $*$-podalgebra posiada ona jedynkę $\mathbb{1}_{\mathsf{N}}$, gdyż N jest C*-algebrą, a więc posiada jedynkę aproksymatywną (twierdzenie 10.6), która musi być so-zbieżna (patrz dowód twierdzenia 10.7), Może się jednak zdarzyć, że $\mathbb{1}_{\mathsf{N}}$ jest rzutem różnym od $\mathbb{1}$.

Dowód twierdzenia 10.26. Niech $e\in\operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ i $f=\mathbb{1}-e$. Załóżmy, że e lub f należy do N. Wówczas dla każdego $n\in\mathsf{N}$ mamy $en,fn\in\mathsf{N}$. Istotnie, jeśli $e\in\mathsf{N}$, to $en\in\mathsf{N}$ oraz $fn=(\mathbb{1}-e)n=n-en\in\mathsf{N}$. Podobnie, jeśli $f\in\mathsf{N}$ to $fn\in\mathsf{N}$ i $en=(I_M-f)n=n-fn\in\mathsf{N}$.

Zauważmy, że dla $x,y\in\mathsf{M}$ mamy

$$\begin{aligned}\|ex+fy\|^2&=\big\|(ex+fy)^*(ex+fy)\big\}=\|x^*ex+y^*fy\|\\&\leq\|x^*ex\|+\|y^*fy\|=\big\|(ex)^*(ex)\big\|+\big\|(fy)^*(fy)\big\|\\&=\|ex\|^2+\|fy\|^2.\end{aligned}\tag{10.7}$$

Teraz pokażemy, że $f\Phi(ex)=0$ dla wszystkich $x\in\mathsf{M}$. Niech t będzie liczbą rzeczywistą. mamy

$$\begin{aligned}(1+t)^2\big\|f\Phi(ex)\big\|^2&=\big\|(1+t)f\Phi(ex)\big\|^2\\&=\big\|f\Phi(ex)+tf\Phi(ex)\big\|^2\\&=\big\|f\Phi(ex)+tf^2\Phi(ex)\big\|^2\\&=\big\|f\big(\Phi(ex)+tf\Phi(ex)\big)\big\|^2.\end{aligned}$$

Teraz skoro $tf\Phi(ex)$ należy do N (wiemy, że $\Phi(\mathsf{M})=\mathsf{N}$ oraz $fn\in\mathsf{N}$ dla dowolnego $n\in\mathsf{N}$), a Φ jest rzutem, mamy $tf\Phi(ex)=\Phi\big(tf\Phi(ex)\big)$ i

$$\begin{aligned}(1+t)^2\big\|f\Phi(ex)\big\|^2&=\big\|f\big(\Phi(ex)+t\Phi\big(f\Phi(ex)\big)\big)\big\|^2\\&=\big\|f\Phi\big(ex+tf\Phi(ex)\big)\big\|^2\\&\leq\|f\|^2\big\|\Phi\big(ex+tf\Phi(ex)\big)\big\|^2\\&=\big\|\Phi\big(ex+tf\Phi(ex)\big)\big\|^2\\&\leq\big\|ex+tf\Phi(ex)\big\|^2\leq\|ex\|^2+t^2\big\|f\Phi(ex)\big\|^2\end{aligned}$$

(w przedostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że $\|\Phi\|=1$, a w ostatniej z (10.7)).

Tym sposobem wykazaliśmy, że dla $t\in\mathbb{R}$ mamy

$$(1+t)^2\big\|f\Phi(ex)\big\|^2\leq\big\|ex+tf\Phi(ex)\big\|^2\leq\|ex\|^2+t^2\big\|f\Phi(ex)\big\|^2,$$

a więc
$$2t\big\|f\Phi(ex)\big\|^2+\big\|f\Phi(ex)\big\|^2\leq\|ex\|^2.$$
Stąd natychmiast wynika, że $f\Phi(ex)=0$. To, z kolei, oznacza, że $(\mathbb{1}-e)\Phi(x)=0$, czyli
$$\Phi(ex)=e\Phi(ex),\qquad(x\in\mathsf{M}).\tag{10.8}$$

Zamieniające e i f w powyższym rozumowaniu uzyskamy $e\Phi(fx)=0$ lub inaczej $e\Phi\big((\mathbb{1}-e)x\big)=0$, co można przepisać jako
$$e\Phi(x)=e\Phi(ex).\tag{10.9}$$
Teraz (10.8) razem z (10.9) dają
$$e\Phi(x)=\Phi(ex),\qquad(x\in\mathsf{M}).\tag{10.10}$$
Podstawiając $x=\mathbb{1}_{\mathsf{M}}$ i $e=\mathbb{1}_{\mathsf{N}}$ otrzymujemy
$$\Phi(\mathbb{1}_{\mathsf{M}})=\mathbb{1}_{\mathsf{N}}\Phi(\mathbb{1}_{\mathsf{M}})=\Phi(\mathbb{1}_{\mathsf{N}}\mathbb{1}_{\mathsf{M}})=\Phi(\mathbb{1}_{\mathsf{N}})=\mathbb{1}_{\mathsf{N}}$$
(ostatnia równość wynika z tego, że Φ jest rzutem)

Niech ψ będzie funkcjonałem dodatnim na N i niech $\varphi=\psi\circ\Phi$. Mamy
$$\|\varphi\|\geq\|\psi\|=\psi(\mathbb{1}_{\mathsf{N}})=\psi\big(\Phi(\mathbb{1}_{\mathsf{M}})\big)=\varphi(\mathbb{1}_{\mathsf{M}})\leq\|\varphi\|.$$
Tak więc $\|\varphi\|=\varphi(\mathbb{1}_{\mathsf{M}})$, czyli φ jest dodatni.

Wykazaliśmy, że $\psi\circ\Psi$ jest dodatni dla dowolnego funkcjonału dodatniego ψ na N. Stąd wynika, że Φ jest odwzorowaniem dodatnim.[4] W szczególności $\Phi(x^*)=\Phi(x)^*$ dla wszystkich $x\in\mathsf{M}$. Tak więc, sprzęgając obie strony (10.10) dostajemy
$$\Phi(x)e=\Phi(xe),\qquad(x\in\mathsf{M}).\tag{10.11}$$
Teraz, skoro M jest normowo domkniętą powłoką wypukłą zbioru $\operatorname{Proj}(\mathsf{M})$, wzory (10.10) oraz (10.11) dają nam
$$\begin{aligned}\Phi(xy)&=\Phi(x)y,\\\Phi(yx)&=y\Phi(x)\end{aligned}$$
dla wszystkich $x\in\mathsf{M}$ and $y\in\mathsf{N}$. □

Uwaga 10.27. Niech $\Phi\colon\mathsf{M}\to\mathsf{N}$ będzie warunkową wartością oczekiwaną. Wówczas dla dowolnego $x\in\mathsf{M}$
$$\Phi(x)^*\Phi(x)\leq\Phi(x^*x).$$
Istotnie,
$$\begin{aligned}0&\leq\Phi\big((x-\Phi(x))^*(x-\Phi(x))\big)\\&=\Phi\big(x^*x-x^*\Phi(x)-\Phi(x)^*x+\Phi(x)^*\Phi(x)\big)\\&=\Phi(x^*x)-\Phi(x)^*\Phi(x).\end{aligned}$$

[4] Ogólnie, element C*-algebry jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy każdy dodatni funkcjonał przyjmuje na nim wartość nieujemną. W naszym przypadku można sobie jednak poradzić łatwiej: niech $x\in\mathsf{M}$. Wówczas dla dowolnego $\xi\in\mathscr{H}$ mamy $\omega_{\xi,\xi}\big(\Phi(x^*x)\big)\geq0$. Stąd $\Phi(x^*x)\geq0$.

11. Klasyfikacja

Definicja 11.1. Niech $\mathsf{M} \subset B(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna i niech $e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$. Powiemy, że rzut e jest

- *skończony* (*finite*), jeśli warunek $\bigl(f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M}),\ f \leq e,\ f \sim e\bigr)$ implikuje $f = e$,
- *nieskończony* (*infinite*), jeśli nie jest skończony,
- *właściwie nieskończony* (*properly infinite*), jeśli dla każdego rzutu centralnego p rzut pe jest nieskończony lub 0,
- *abelowy* (*abelian*), jeśli algebra $e\mathsf{M}e$ jest przemienna.

Stwierdzenie 11.2.

(1) *Każdy rzut abelowy jest skończony.*
(2) *Jeśli e jest skończony i $f \prec e$, to f jest skończony.*
(3) *Jeśli e jest abelowy i $f \prec e$, to f jest abelowy.*

Dowód. Ad (1). Niech e będzie abelowy i niech $f \leq e$. Jeśli $f \sim e$, to istnieje częściowa izometria $u \in \mathsf{M}$ taka, że $u^*u = e$ i $uu^* = f$. Mamy

$$ue = uu^*u = u$$

oraz

$$u^*e = u^*uu^*e = u^*fe = u^*f = u^*uu^* = u^*,$$

czyli $ue = eu = u$. Zatem $u \in e\mathsf{M}e$. Ale algebra $e\mathsf{M}e$ jest przemienna, więc $f = uu^* = u^*u = e$.

Ad (2). Załóżmy, że istnieje $f_1 \lneqq f$ taki, że $f_1 \sim f$. Skoro $f \prec e$, to istnieje częściowa izometria $u \in \mathsf{M}$ taka, że $u^*u \leq e$ i $uu^* = f$. Niech $e_1 = u^*f_1u$. Mamy $e_1 \lneqq u^*u$, ale skoro $f_1 \sim f$, to $e_i \sim u^*u$. Teraz na mocy stwierdzenia 10.13

$$e = u^*u + (e - u^*u) \gneqq e_1 + (e - u^*u) \sim u^*u + (e - u^*u) = e$$

co stoi w sprzeczności ze skończonością e.

Ad (3). Jeśli $f = uu^*$ i $u^*u \leq e$, to

$$f\mathsf{M}f \ni x \longmapsto u^*xu \in e\mathsf{M}e$$

jest injekcją algebr, więc $f\mathsf{M}f$ jest przemienna. $\square$

Stwierdzenie 11.3. *Niech $e \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ nie zawiera żadnego niezerowego rzutu abelowego. Wówczas istnieją $e_1, e_2 \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ takie, że $e_1 \sim e_2$ i*

$$e = e_1 + e_2.$$

Dowód. Niech $\{e_i^i, e_i^2\}_{i \in I}$ będzie maksymalną rodziną par rzutów taką, że

- rzuty $\{e_i^1\}_{i \in I}$ są parami ortogonalne,
- rzuty $\{e_i^2\}_{i \in I}$ są parami ortogonalne,
- dla każdego i mamy $e_i^1 \leq e$, $e_i^2 \leq e$ oraz $e_i^1 \sim e_i^2$,
- dla wszystkich $i, j \in I$ mamy $e_i^1 e_i^2 = 0$.

Definiujemy $e_1 = \bigvee\limits_{i \in I} e_i^1$ i $e_2 = \bigvee\limits_{i \in I} e_i^2$. Jest jasne, że $e_1, e_2 \leq e$, a ze stwierdzenia 10.13 wynika, że $e_1 \sim e_2$. Ponadto $e_1e_2 = 0$.

Niech $r = e - e_1 - e_2$. Jeśli $r \neq 0$, to r nie jest abelowy, a więc algebra $r\mathsf{M}r$ nie jest przemienna. Stąd istnieje rzut $0 \neq g \leq r$ (innymi słowy — rzut w $r\mathsf{M}r$), który nie jest przemienny z elementem rxr dla pewnego $x \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$:

$$grxr \neq rxrg. \tag{11.1}$$

Zauważmy, że mamy również

$$grxr \neq grxrg. \tag{11.2}$$

Istotnie, jeśli $grxr = grxrg$, to $grxr$ jest samosprzężony, a więc $grxr = (grxr)^* = rxrg$, co przeczy (11.1). Ale $r \leq g$, więc $gr = rg = g$ i (11.2) można przepisać jako

$$gxr \neq gxg,$$

czyli

$$rx(r - g) \neq 0.$$

W takim razie stwierdzenie 10.16 (implikacja (1) $\Rightarrow$ (2)) pokazuje, że rodzina $\{e_i^i, e_i^2\}_{i\in I}$ nie była maksymalna. Tak więc musi być $r = 0$, czyli $e = e_1 + e_2$. □

Lematy 11.4 – 11.7 potrzebne są do udowodnienia twierdzenia 11.8 podającego ważną charakteryzację rzutów przeliczalnie nieskończonych.

Lemat 11.4. *Jeśli e nie jest skończony, to istnieje przeliczalnie nieskończony zbiór parami ortogonalnych rzutów $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że dla każdego n mamy $0 \neq f_n \leq e$ i dla wszystkich m, n mamy $f_n \sim f_m$.*

Dowód. Niech $e_1 \lneqq e$, $e_1 \sim e$ i połóżmy $f_1 = e - e_1$. Wówczas istnieją rzuty e_2 i f_2 takie, że $e_2 + f_2 = e_1$, $e_2 \sim e_1$ i $f_2 \sim f_1$. Parę tę tworzymy korzystając z tego, że $e_1 \sim e = e_1 + f_1$, a więc możemy przenieść rozkład e (na $e_1 + f_1$) na e_1: jeśli $u^*u = e$ i $uu^* = e_1$, kładziemy $e_2 = ue_1u^*$ i $f_2 = uf_1u^*$. Potem kontynuujemy ten proces uzyskując e_3, f_3 takie, że $e_2 = e_3 + f_3$ i $f_3 \sim f_2$ (i $e_3 \sim e_2$) itd. Szukaną rodziną jest $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Lemat 11.5. *Niech $\{e\}_{i\in I}$ będzie nieskończoną rodziną parami ortogonalnych i parami równoważnych rzutów, $e = \bigvee_{i\in I} e_i$ i niech $f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$. Jeśli $fe = 0$ i dla każdego i mamy $f \prec e_i$, to istnieje rodzina $\{h_i\}_{i\in I}$ parami ortogonalnych rzutów taka, że dla każdego i mamy $e_i \sim h_i$ i $e + f = \bigvee_{i\in I} h_i$.*

Dowód. Weźmy $i_0 \in I$ i niech f_{i_0} i g_{i_0} będą takie, że

$$e_{i_0} = f_{i_0} + g_{i_0} \tag{11.3}$$

i $f_{i_0} \sim f$ (taki rozkład istnieje, bo $f \prec e_{i_0}$, a więc $f \sim f_{i_0} \leq e_{i_0}$ i kładziemy $g_{i_0} = e_{i_0} - f_{i_0}$).

Teraz przenosimy rozkład (11.3) na e_i: dla każdego i istnieją f_i, g_i takie, że

$$e_i = f_i + g_i$$

oraz $f_i \sim f_{i_0} \sim f$, $g_i \sim g_{i_0}$. Niech ϕ będzie bijekcją pomiędzy zbiorami

$$\{g_i\}_{i\in I} \quad \text{oraz} \quad \{f\} \cup \{f_i\}_{i\in I}$$

i połóżmy

$$h_i = g_i + \phi(g_i), \qquad (i \in I).$$

□

Lemat 11.6. *Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie maksymalną nieskończoną rodziną parami ortogonalnych i parami równoważnych rzutów. Wówczas istnieje niezerowy rzut centralny p i rodzina $\{g_i\}_{i\in I}$ taka, że $p = \bigvee_{i\in I} g_i$ i dla wszystkich i mamy $g_i \sim pe_i$.*

Dowód. Niech $e = \bigvee_{i \in I} e_i$ i weźmy $i_0 \in I$. Relacja $e_{i_0} \prec (\mathbb{1} - e)$ jest niemożliwa, bo wtedy rodzina $\{e_i\}_{i \in I}$ nie byłaby maksymalna. Z drugiej strony twierdzenie 10.18 mówi, że istnieje rzut centralny p taki, że

$$p(\mathbb{1} - e) \prec pe_{i_0} \quad \text{oraz} \quad (\mathbb{1} - p)(\mathbb{1} - e) \succ (\mathbb{1} - p)e_{i_0}.$$

Stąd $p \neq 0$. Mamy

$$p = p(\mathbb{1} - e) + pe = p(\mathbb{1} - e) + \bigvee_{i \in I} pe_i.$$

Teraz stosujemy lemat 11.5 dla $p(\mathbb{1} - e)$ i $\{pe_i\}_{i \in I}$ w miejsce f i $\{e_i\}_{i \in I}$. □

Lemat 11.7. *Jeśli $\mathbb{1} \in \mathsf{M}$ jest rzutem właściwie nieskończonym, to $\mathbb{1}$ można zapisać jako supremum przeliczalnej rodziny równoważnych, parami ortogonalnych rzutów.*

Dowód. Rzut $\mathbb{1}$ nie jest skończony, więc na mocy lematu 11.4 w M istnieje przeliczalna rodzina parami ortogonalnych i parami równoważnych niezerowych rzutów. Niech $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie taką rodziną. Z lematu 11.6 wynika, że istnieje niezerowy rzut centralny p taki, że $p = \bigvee_{n=1}^{\infty} g_n$ i dla każdego n mamy $g_n \sim pe_n$ (w szczególności rzuty $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są parami równoważne). Rzut $\mathbb{1} - p$ także jest właściwie nieskończony, a zatem możemy powtórzyć opisaną powyżej procedurę dla $\mathbb{1} - p$ (w algebrze $(\mathbb{1} - p)\mathsf{M}$).

Niech $\{p_\alpha\}_\alpha \in A$ będzie maksymalną rodziną rzutów centralnych które są parami ortogonalne i dla każdego α możemy zapisać

$$p_\alpha = \bigvee_{n=1}^{\infty} g_n^\alpha,$$

gdzie dla każdego m, n mamy $0 \neq g_n^\alpha \sim g_m^\alpha$. Wtedy $\bigvee_{\alpha \in A} p_\alpha = \mathbb{1}$, bo rzut

$$\mathbb{1} - \bigvee_{\alpha \in A} p_\alpha$$

jest właściwie nieskończony i powtarzając opisaną wyżej procedurę zaprzeczymy maksymalności rodziny $\{p_\alpha\}_\alpha \in A$.

Dla $m \in \mathbb{N}$ niech $e_m = \bigvee_{\alpha \in A} p_m^\alpha$. Mamy wówczas

$$e_n \sim e_m, \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

na mocy stwierdzenia 10.13. Oczywiście $\mathbb{1} = \bigvee_{m=1}^{\infty} e_m$. □

Twierdzenie 11.8. *Niech $e \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$. Wówczas e jest właściwie nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ parami ortogonalnych rzutów taka, że $e = \bigvee_{n=1}^{\infty} e_n$ i dla każdego n mamy $e_n \sim e$.*

Dowód. Niech e będzie rzutem właściwie nieskończonym. Traktując e jako jedność w algebrze $e\mathsf{M}e$ możemy zapisać

$$e = \bigvee_{m=1}^{\infty} f_m,$$

gdzie $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest rodziną parami ortogonalnych i parami równoważnych rzutów (lemat 11.7. Rozbijmy $\mathbb{N}$ na przeliczalną sumę rozłącznych zbiorów przeliczalnych (nieskończonych): $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ i niech

$$e_n = \bigvee_{m\in A_n} f_m.$$

Wtedy $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rodziną rzutów parami ortogonalnych i parami równoważnych (stwierdzenie 10.13), a ponadto (także na mocy stwierdzenia 10.13) mamy

$$e_n \sim e,$$

jako że lewa strona jest równa $\bigvee\limits_{m\in A_n} f_m$, a prawa $\bigvee\limits_{m=1}^{\infty} f_m$.

Załóżmy teraz, że $e = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} e_n$, gdzie $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są parami ortogonalne i każdy jest równoważny e. Niech p będzie rzutem centralnym takim, że $pe \neq 0$. Wtedy istnieje m takie, że $pe_m \neq 0$, a na mocy uwagi 10.12(1) mamy $pe_n \sim pe_m$ dla wszystkich n. Stąd w szczególności $pe_n \neq 0$ dla wszystkich n, a ponadto pe nie jest rzutem skończonym, bo $pe \sim pe_m \lneqq pe$. □

Wniosek 11.9. *Rzut e jest właściwie nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy $e = e_1 \vee e_2$, gdzie $e_1, e_2 \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ są takie, że $e_1e_2 = 0$ i*

$$e_1 \sim e_2 \sim e.$$

Dowód. Załóżmy, że e jest właściwie nieskończony. Zapisujemy e w postaci

$$e = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n,$$

gdzie rzuty $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są parami ortogonalne i dla wszystkich m, n mamy $f_n \sim f_m$. Kładziemy

$$e_1 = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_{2n} \quad \text{oraz} \quad e_2 = \bigvee_{n=0}^{\infty} f_{2n+1}.$$

Wtedy oczywiście $e_1 \sim e_2 \sim e$ i $e = e_1 + e_2$ (stwierdzenie 10.13).

Odwrotnie, jeśli $e = e_1 + e_2$ i $e_1 \sim e_2 \sim e$, to przenosząc rozkład z e na e_1 ($e_1 = e_{11} + e_{12}$) itd. uzyskujemy zapis e w postaci przeliczalnej sumy rzutów równoważnych rzutowi e, a więc e jest właściwie nieskończony na mocy twierdzenia 11.8. □

Stwierdzenie 11.10. *Niech $\{e_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną rzutów taką, że $\big\{\boldsymbol{z}(e_i)\big\}_{i\in I}$ są parami ortogonalne i niech $e = \bigvee\limits_{i\in I} e_i$. Wtedy*

(1) *jeśli dla każdego i rzut e_i jest skończony, to e jest skończony,*
(2) *jeśli dla każdego i rzut e_i jest abelowy, to e jest abelowy.*

Dowód. Na początek zauważmy, że dla ustalonego $i \in I$ mamy

$$0 \leq e - e_i = \bigvee_{j\neq i} e_j \leq \bigvee_{j\neq i} \boldsymbol{z}(e_j).$$

Ponieważ $\big\{\boldsymbol{z}(e_i)\big\}_{i\in I}$ są parami ortogonalne, mnożąc tę nierówność stronami przez $\boldsymbol{z}(e_i)$ otrzymujemy $e\,\boldsymbol{z}(e_i) - e_i = 0$, czyli

$$e_i = e\,\boldsymbol{z}(e_i).$$

Ad (1). Niech f będzie takim rzutem, że $f \leq e$ i $f \sim e$. Skoro $f \leq e$, to mamy $f\,\boldsymbol{z}(e_i) \leq e\,\boldsymbol{z}(e_i) = e_i$. Z drugiej strony $e \sim f$, więc

$$e_i = e\,\boldsymbol{z}(e_i) \sim f\,\boldsymbol{z}(e_i).$$

Oznacza to, że $e_i \sim f\,\boldsymbol{z}(e_i) \leq ei$. Ze skończoności e_i wynika więc, że $f\,\boldsymbol{z}(e_i) = e_i$. W szczególności $e_i = f\,\boldsymbol{z}(e_i) \leq f$ dla dowolnego i. Stąd

$$e = \bigvee_{i \in I} e_i \leq f,$$

co pokazuje, że $e = f$.

Ad (2). Mamy $e\,\boldsymbol{z}(e_i) = e_i$ dla każdego i. Stąd

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i \in I} e_i \mathsf{M} e_i &= \bigoplus_{i \in I} \boldsymbol{z}(e_i) e \mathsf{M}\, \boldsymbol{z}(e_i) e = \bigoplus_{i \in I} \boldsymbol{z}(e_i) e \mathsf{M} e \\ &= \sum_{i \in I} \boldsymbol{z}(e_i) e \mathsf{M} e = e \mathsf{M} e,\end{aligned}$$

bo nośniki centralne $\bigl\{\boldsymbol{z}(e_i)\bigr\}_{i \in I}$ są parami ortogonalne. Ponieważ algebra $\bigoplus\limits_{i \in I} e_i \mathsf{M} e_i$ jest przemienna, rzut e jest abelowy. □

Stwierdzenie 11.11. *Niech $e, f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ będą skończone. Wówczas $e \vee f$ jest rzutem skończonym.*

Dowód. Zacznijmy od redukcji sytuacji do przypadku $e \vee f = \mathbb{1}$. Jeśli $g \leq e \vee f$ i $g \sim e \vee f$, to częściowa izometria u taka, że $u^*u = g$ i $uu^* \leq e \vee f$ leży w algebrze $(e \vee f)\mathsf{M}(e \vee f)$. Istotnie, mamy

$$(e \vee f)u = (e \vee f)uu^*u = \bigl((e \vee f)uu^*\bigr)u = uu^*u = u$$

oraz $ug = uu^*u = u$, co daje

$$u(e \vee f) = ug(e \vee f) = ug = u$$

(bo $g \leq (e \vee f)$).[5]

Tak więc możemy przyjąć, że $e \vee f = \mathbb{1}$. Przypuśćmy, że $\mathbb{1}$ nie jest rzutem skończonym. Niech $\{p_i\}_{i \in I}$ będzie maksymalną rodziną parami ortogonalnych rzutów skończonych w $\mathscr{Z}(\mathsf{M})$. Wtedy $p = \bigvee\limits_{i \in I} p_i$ jest rzutem centralnym i $\mathbb{1} - p$ jest właściwie nieskończony. Istotnie, jeśli q jest rzutem centralnym i $q(\mathbb{1} - p)$ byłby niezerowym rzutem skończonym, to rodzina $\{p_i\}_{i \in I}$ nie byłaby maksymalna.

Stwierdzenie 11.10(1) mówi, że p jest rzutem skończonym. Tak więc zamieniając ewentualnie e i f na $e(\mathbb{1} - p)$ i $f(\mathbb{1} - p)$ możemy przyjąć, że $\mathbb{1}$ jest rzutem właściwie nieskończonym. Z wniosku 11.9 wiemy, że istnieje wtedy rzut g taki, że

$$g \sim \mathbb{1} \sim (\mathbb{1} - g).$$

Zauważmy, że na mocy wniosku 10.15(1) mamy

$$\mathbb{1} - e = (e \vee f - e) \sim (f - e \wedge f) \leq f,$$

a więc $\mathbb{1} - e$ jest rzutem skończonym. Zastosujmy twierdzenie 10.18 do pary rzutów

$$\bigl(g \wedge (\mathbb{1} - e), (\mathbb{1} - g) \wedge e\bigr).$$

[5] To jest powtórka rozumowania z dowodu stwierdzenia 11.2(1).

Istnieje rzut centralny r taki, że

$$\big(g \wedge (\mathbb{1}-e)\big)r \prec \big((\mathbb{1}-g)\wedge e\big)r \quad \text{oraz} \quad \big(g \wedge (\mathbb{1}-e)\big)(\mathbb{1}-r) \succ \big((\mathbb{1}-g)\wedge e\big)(\mathbb{1}-r).$$

Rozważając oddzielnie algebry $r\mathsf{M}$ i $(\mathbb{1}-r)\mathsf{M}$ możemy przyjąć, że zachodzi jedna z następujących dwóch możliwości:

$$g\wedge(\mathbb{1}-e) \prec (\mathbb{1}-g)\wedge e \quad \text{lub} \quad g\wedge(\mathbb{1}-e) \succ (\mathbb{1}-g)\wedge e \tag{11.4}$$

przy czym rzuty e oraz $\mathbb{1}-e$ są skończone, a rzuty g oraz $\mathbb{1}-g$ są właściwie nieskończone (tak było przed obcięciem rzutami centralnymi r lub $\mathbb{1}-r$, a skończoność i właściwa nieskończoność zachowują się przy obcięciu rzutami centralnymi).

W pierwszym przypadku z (11.4) mamy

$$g = g\wedge(\mathbb{1}-e) + \big(g - g\wedge(\mathbb{1}-e)\big) \prec (\mathbb{1}-g)\wedge e + \big(g - g\wedge(\mathbb{1}-e)\big) \tag{11.5}$$

(dwa rzuty w sumie po prawej stronie są ortogonalne, bo pierwszy jest zawarty w $\mathbb{1}-g$, a drugi w g). Podstawiając zamiast (e,f) we wniosku 10.15(1) rzuty $(g,\mathbb{1}-e)$ otrzymujemy z (11.5)

$$g \prec (\mathbb{1}-g)\wedge e + \big(g - g\wedge(\mathbb{1}-e)\big) \sim (\mathbb{1}-g)\wedge e + g\wedge(\mathbb{1}-e) - (\mathbb{1}-e)$$

(rzuty po prawej stronie nadal są ortogonalne, więc aby uzyskać powyższą relację możemy skorzystać ze stwierdzenia 10.13). Stąd

$$g \prec (\mathbb{1}-g)\wedge e + g\wedge(\mathbb{1}-e) - (\mathbb{1}-e) \leq e.$$

To stoi w sprzeczności z faktem,że e jest skończony, a g nieskończony.

Podobnie zaczynając od drugiej możliwości z (11.4) uzyskamy

$$\mathbb{1}-g \prec \mathbb{1}-e,$$

co przeczy skończoności $\mathbb{1}-e$ i nieskończoności $\mathbb{1}-g$. □

Definicja 11.12. Niech M będzie algebrą von Neumanna. Powiemy, że M jest

- *skończona*, jeśli $\mathbb{1}$ jest rzutem skończonym,
- *półskończona*, jeśli każdy niezerowy rzut centralny w M zawiera niezerowy rzut skończony,
- typu I, jeśli każdy niezerowy rzut centralny w M zawiera rzut abelowy,
- typu II, jeśli M jest półskończona i nie zawiera niezerowego rzutu abelowego,
- typu III, jeśli w M nie ma niezerowego rzutu skończonego,
- typu $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, jeśli M jest skończona i typu I,
- typu I_∞, jeśli M jest typu I, ale nie jest skończona,
- typu II_1, jeśli M jest typu II i jest skończona,
- typu II_∞, jeśli M jest typu II, ale nie jest skończona.

Dodatkowo używa się następującej terminologii: algebra von Neumanna M jest

- *dyskretna*, jeśli jest typu I,
- *ciągła*, jeśli nie zawiera niezerowego rzutu abelowego,
- *właściwie nieskończona*, jeśli $\mathbb{1}$ jest rzutem właściwie nieskończonym,
- *czysto nieskończona*, jeśli jest typu III.

Twierdzenie 11.13. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna. Wówczas istnieją rzuty centralne* $p_1,\dots,p_5$ *takie, że* $\sum\limits_{j=1}^{5} p_j = \mathbb{1}$ *i*

- $\mathsf{M}p_1$ *jest typu* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$,
- $\mathsf{M}p_2$ *jest typu* I_{∞},
- $\mathsf{M}p_3$ *jest typu* II_1,
- $\mathsf{M}p_4$ *jest typu* II_{∞},
- $\mathsf{M}p_5$ *jest typu* III.

Dowód. Twierdzenie wynika z zastosowania następujących trzech typów rozkładu:

(1) istnieje dokładnie jedna para rzutów centralnych (p_0, q_0) taka, że $p_0 + q_0 = \mathbb{1}$, $\mathsf{M}p_0$ jest półskończona, a $\mathsf{M}q_0$ jest czysto nieskończona;
(2) istnieje dokładnie jedna para rzutów centralnych (p_0, q_0) taka, że $p_0 + q_0 = \mathbb{1}$, $\mathsf{M}p_0$ jest skończona, a $\mathsf{M}q_0$ jest właściwie nieskończona;
(3) istnieje dokładnie jedna para rzutów centralnych (p_0, q_0) taka, że $p_0 + q_0 = \mathbb{1}$, $\mathsf{M}p_0$ jest dyskretna, a $\mathsf{M}q_0$ jest ciągła.

Ad (1). Kładziemy

$$p_0 = \bigvee \bigl\{ p \in \mathrm{Proj}\bigl(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\bigr) \,\big|\, \mathsf{M}p \text{ jest półskończona} \bigr\}$$

i $q_0 = \mathbb{1} - p_0$. Wówczas $p_0\mathsf{M}$ jest półskończona, gdyż, jeśli r jest niezerowym rzutem centralnym w $p_0\mathsf{M}$, to istnieje $p \in \mathrm{Proj}\bigl(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\bigr)$ taki, że $p\mathsf{M}$ jest półskończona i $pr \neq 0$ (w przeciwnym razie r byłby ortogonalny do p_0, a więc równy 0). Skoro $rp \neq 0$, musi istnieć niezerowy skończony rzut $e \leq rp$,bo algebra $p\mathsf{M}$ jest półskończona. Tak więc r zawiera niezerowy rzut skończony:

$$e \leq rp \leq r.$$

Algebra $q_0\mathsf{M}$ jest czysto nieskończona, gdyż jeśli e jest skończonym rzutem w $q_0\mathsf{M}$, to $\boldsymbol{z}(e)q_0 = \boldsymbol{z}(eq_0) = \boldsymbol{z}(e)$, czyli $z(e) \leq q_0$. Ale jeśli $e \neq 0$, to algebra $\boldsymbol{z}(e)\mathsf{M}$ byłaby półskończona (sprzeczność z definicją q_0). Istotnie: jeśli r jest niezerowym rzutem centralnym w $\boldsymbol{z}(e)\mathsf{M}$ (czyli rzutem centralnym zawartym w $\boldsymbol{z}(e)$), to

- $re \leq r$,
- re jest skończony (bo e jest skończony, patrz stwierdzenie 11.2(2)),
- $re \neq 0$ gdyż warunek $re = 0$ implikuje (na mocy stwierdzenia 10.5)

$$0 = \boldsymbol{z}(re) = \boldsymbol{z}(e)r = r,$$

  jako, że $r \leq \boldsymbol{z}(e)$.

Ad (2). Kładziemy

$$p_0 = \bigvee \bigl\{ p \in \mathrm{Proj}\bigl(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\bigr) \,\big|\, p \text{ jest skończony} \bigr\}$$

i $q_0 = \mathbb{1} - p_0$. Na początek zauważmy, że p_0 można wyrazić jako supremum rodziny parami ortogonalnych centralnych rzutów skończonych. Istotnie, niech $\{p_i\}_{i \in I}$ będzie maksymalną taką rodziną. Wówczas $\bigvee\limits_{i \in I} p_i \leq p_0$. Niech $r = p_0 - \bigvee\limits_{i \in I} p_i$. Jeśli $r \neq 0$, to musi istnieć skończony rzut centralny p taki, że $pr \neq 0$ (inaczej r byłby ortogonalny do p_0, a więc równy 0). Ale wtedy rp jest skończonym rzutem centralnym zawartym w r, a więc rodzina $\{p_i\}_{i \in I}$ nie jest maksymalna — sprzeczność.

Tak więc p_0 jest sumą parami ortogonalnych skończonych rzutów centralnych i na mocy stwierdzenia 11.10(1) p_0 jest skończony. Stąd oczywiście algebra $p'_0 sM$ jest skończona.

Algebra $q_0\mathsf{M}$ jest właściwie nieskończona, bo jeśli r jest niezerowym rzutem centralnym w $q_0\mathsf{M}$ (innymi słowy r jest rzutem centralnym takim, że $0 \neq r \leq q_0$), to r musi być nieskończony (gdyby był skończony, byłby zawarty w p_0).

Ad (3). Kładziemy

$$p_0 = \bigvee \bigl\{ p \in \mathrm{Proj}\bigl(\mathscr{Z}(\mathsf{M})\bigr) \,\big|\, \mathsf{M}p \text{ jest dyskretna} \bigr\}$$

i $q_0 = \mathbb{1} - p_0$. Dowód tego, że algebra $p_0\mathsf{M}$ jest dyskretna, a algebra $q_0\mathsf{M}$ jest ciągła jest powtórzeniem rozumowań z punktu (1) z zamianą słów “półskończona”, “czysto nieskończona” i “skończony” odpowiednio na “dyskretna”, “ciągła” i “abelowy”.

Sposób uzyskania podziału algebry na sumę prostą pięciu składników opisanych w sformułowaniu twierdzenia podsumowuje tabela 2.

Typu I		Typu II		Typu III
Typu $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$	Typu I_∞	Typu II_1	Typu II_∞	
dyskretna	dyskretna	ciągła	ciągła	ciągła
półskończona	półskończona	półskończona	półskończona	czysto nieskończona
skończona	właściwie nieskończona	skończona	właściwie nieskończona	właściwie nieskończona

TABELA 2. Typy algebr von Neumanna

□

Wniosek 11.14. *Faktor może być tylko jednego z typów* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, I_∞, II_1, II_∞ *lub* III.

Uwaga 11.15. Nietrudno się przekonać, że rzuty $p_1, \ldots, p_5$ skonstruowane w twierdzeniu 11.13 są wyznaczone jednoznacznie.

Stwierdzenie 11.16. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna. Wówczas*

(1) M *jest dyskretna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje abelowy* $e \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ *taki, że* $\boldsymbol{z}(e) = \mathbb{1}$,

(2) M *jest półskończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony* $e \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ *taki, że* $\boldsymbol{z}(e) = \mathbb{1}$.

Dowód. Ad 1. Niech $(e_i)_{i\in I}$ będzie maksymalną rodziną rzutów abelowych, których nośniki centralne są parami ortogonalne i niech

$$e = \bigvee_{i\in I} e_i.$$

Na mocy stwierdzenia 11.10(2) e jest abelowy. Z ortogonalności nośników centralnych wynika, że

$$\boldsymbol{z}(e) = \bigvee_{i\in I} \boldsymbol{z}(e_i).$$

Niech M będzie dyskretna. Jeśli $\mathbb{1} - \boldsymbol{z}(e) \neq 0$, to $\mathbb{1} - \boldsymbol{z}(e)$ zawiera niezerowy rzut abelowy f, a więc $\boldsymbol{z}(f) \leq \bigl(\mathbb{1} - \boldsymbol{z}(e)\bigr) \perp \boldsymbol{z}(e_i)$ dla wszystkich i. To przeczy maksymalności rodziny $(e_i)_{i\in I}$, a co za tym idzie $\boldsymbol{z}(e) = \mathbb{1}$.

Odwrotnie, jeśli $\boldsymbol{z}(e) = \mathbb{1}$ i $p \neq 0$ jest rzutem centralnym w M, to

$$p = p\mathbb{1} = \bigvee_{i\in I} p\,\boldsymbol{z}(e_i).$$

Stąd istnieje i_0 takie, że $p\,\boldsymbol{z}(e_{i_0}) \neq 0$. Ale z tego wynika, że $pe_{i_0} \neq 0$, bo $\boldsymbol{z}(pe_{i_0}) = p\,\boldsymbol{z}(e_{i_0})$ (stwierdzenie 10.5). Tak więc mamy

$$0 \neq pe_{i_0} \leq p.$$

Skoro e_{i_0} jest abelowy, pe_{i_0} jest abelowy (stwierdzenie 11.2(3)). Tym samy pokazaliśmy, że każdy niezerowy rzut centralny zawiera niezerowy rzut abelowy czyli M jest dyskretna.

Ad (2). Dowód jest identyczny jak dla punktu (1) z zamianą słowa "abelowy" na "skończony" i "dyskretna" na "półskończona". □

Wniosek 11.17. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna. Wówczas*

(1) M *jest dyskretna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy rzut w* M *zawiera niezerowy rzut abelowy.*
(2) M *jest półskończona wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy rzut w* M *zawiera niezerowy rzut skończony.*

Dowód. Implikacje "$\Rightarrow$" są oczywiste w obu przypadkach.

Ad (1). Jeśli M jest dyskretna, to na mocy stwierdzenia 11.16(1) istnieje w M rzut abelowy e taki, że $\boldsymbol{z}(e) = \mathbb{1}$. Niech $f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M}) \setminus \{0\}$. Wtedy istnieje rzut centralny p taki, że

$$ep \prec fp. \tag{11.6}$$

Mamy $ep \neq 0$, bo $\boldsymbol{z}(ep) = p\,\boldsymbol{z}(e) = p \neq 0$ (stwierdzenie 10.5). Relacja (11.6) mówi, że istnieje $f_1 \leq fp$ taki, że $ep \sim fp$. Innymi słowy

$$f_1 \leq fp \leq f$$

i f_1 jest abelowy, bo $ep \leq e$ jest abelowy (stwierdzenie 11.2(3) i uwaga 10.10(2)).

Ad (2). Powtarzamy dowód punktu (1) zmieniając słowa "abelowy" na "skończony" i "dyskretna" na "półskończona". Zamiast ze stwierdzenia 11.16(1) korzystamy z punktu (2) tego stwierdzenia, a zamiast z punktu (3) uwagi 11.2 korzystamy z jej punktu (2). □

Uwaga 11.18. Algebra von Neumanna M jest skończona, jeśli każda izometria (czyli element $v \in \mathsf{M}$ taki, że $v^*v = \mathbb{1}$) jest unitarna.

12. Twierdzenie Dixmier

Niech M będzie algebrą von Neumanna. Symbolem $\mathcal{U}(\mathsf{M})$ będziemy oznaczać grupę elementów unitarnych M. Niech $a \in \mathsf{M}$ i rozważmy zbiór $\operatorname{conv}_{\mathsf{M}}(a)$ kombinacji wypukłych elementów zbioru

$$\bigl\{uau^* \bigm| u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})\bigr\}$$

oraz jego normowe domknięcie $\overline{\operatorname{conv}_{\mathsf{M}}}(a)$. Celem niniejszej części jest udowodnienie następującego twierdzenia zwanego *twierdzeniem Dixmier o aproksymacji* (*Dixmier approximation theorm*):

Twierdzenie 12.1. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* $a \in \mathsf{M}$. *Wówczas zbiór* $\overline{\operatorname{conv}_{\mathsf{M}}}(a) \cap \mathscr{Z}(\mathsf{M})$ *jest niepusty.*

W dalszym ciągu oznaczymy symbolem Z centrum algebry von Neumanna M. Oznaczmy także przez $\mathscr{D}$ zbiór odwzorowań $\alpha\colon \mathsf{M} \to \mathsf{M}$, które są postaci

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j x u_j^*, \qquad (x \in \mathsf{M}),$$

gdzie $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ są ściśle dodatnimi liczbami takimi, że $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$, a $u_1,\dots,u_n \in \mathcal{U}(\mathsf{M})$. Nietrudno przekonać się o tym, iż prawdziwe są następujące fakty:

- dla $a \in \mathsf{M}$ mamy $\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}(a) = \bigl\{\alpha(a)\,\big|\,\alpha \in \mathscr{D}\bigr\}$;
- $\mathsf{Z} = \bigl\{x \in \mathsf{M}\,\big|\,\forall\,\alpha \in \mathscr{D}\ \alpha(x) = x\bigr\}$;
- każde odwzorowanie $\alpha \in \mathscr{D}$ jest liniową kontrakcją (a nawet $\|\alpha\| = 1$);
- dla $\alpha, \beta \in \mathscr{D}$ mamy $\alpha\beta \in \mathscr{D}$;
- dla każdego $\alpha \in \mathscr{D}$
$$\begin{aligned}\alpha(x^*) &= \alpha(x)^*, && x \in \mathsf{M},\\ \alpha(zx) &= z\alpha(x), && x \in \mathsf{M},\ z \in \mathsf{Z},\end{aligned}$$
a ponadto $x \geq 0$ implikuje $\alpha(x) \geq 0$;
- dla każdego $\alpha \in \mathscr{D}$ oraz $a \in \mathsf{M}$ mamy
$$\begin{aligned}\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}\bigl(\alpha(a)\bigr) &\subset \mathrm{conv}_{\mathsf{M}}(a),\\ \overline{\mathrm{conv}}_{\mathsf{M}}\bigl(\alpha(a)\bigr) &\subset \overline{\mathrm{conv}}_{\mathsf{M}}(a) \subset \|a\|\mathsf{M}_1;\end{aligned}$$
- dla każdego $\alpha \in \mathscr{D}$ oraz $a \in \mathsf{M}$ mamy
$$\begin{aligned}\alpha\bigl(\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}(a)\bigr) &\subset \mathrm{conv}_{\mathsf{M}}(a),\\ \alpha\bigl(\overline{\mathrm{conv}}_{\mathsf{M}}(a)\bigr) &\subset \overline{\mathrm{conv}}_{\mathsf{M}}(a) \subset \|a\|\mathsf{M}_1.\end{aligned}$$

Lemat 12.2. *Niech $a \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$. Wówczas istnieją $u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})$ oraz $z \in \mathsf{Z}_{\mathrm{h}}$ takie, że*
$$\bigl\|\tfrac{1}{2}(a + uau^*) - z\bigr\| \leq \tfrac{3}{4}\|a\|.$$

Dowód. Możemy od razy założyć, że $\|a\| = 1$. Rozkładamy a na część dodatnią i ujemną:
$$a = a_+ - a_-$$
i kładziemy $e = \boldsymbol{s}(a_+)$, $f = \mathbb{1} - e$. Z rachunku funkcyjnego wynika natychmiast, że
$$-f \leq a \leq e. \tag{12.1}$$
Stosujemy twierdzenie o porównywaniu (twierdzenie 10.18) do e i f: istnieje $p \in \mathrm{Proj}(\mathsf{Z})$ takie, że
$$pe \prec pf \quad \text{oraz} \quad (\mathbb{1} - p)e \succ (\mathbb{1} - p)f.$$
W dalszym ciągu będziemy używać oznaczenia $q = \mathbb{1} - p$. Oznaczmy przez e_1 i f_1 takie rzuty, że
$$pe \sim e_1 \leq pf \quad \text{oraz} \quad qf \sim f_1 \leq qe$$
i niech $e_2 = pf - e_1$ oraz $f_2 = qe - f_1$. Dalej niech v i w będą częściowymi izometriami z M takimi, że
$$\begin{aligned}v^*v &= pe, & vv^* &= e_1,\\ w^*w &= qf, & ww^* &= f_1.\end{aligned}$$
Zauważmy, że skoro $e \perp f$, mamy $pe \perp pf$ i $qe \perp qf$, a więc rzuty
$$pe, e_1, e_2, qf, f_1, f_2$$
są parami ortogonalne. Ponadto
$$pe + e_1 + e_2 + qf + f_1 + f_2 = pe + pf + qf + qe = p + q = \mathbb{1}.$$
Stąd łatwo wynika, że operator
$$u = v + v^* + w + w^* + e_2 + f_2$$

jest unitarny ($v^2 = w^2 = 0$). Mamy

$$\left.\begin{aligned} upeu^* &= e_1,\\ ue_1u^* &= pe,\\ ue_2u^*e_2 \end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} uqfu^* &= f_1,\\ uf_1u^* &= qf,\\ uf_2u^*f_2 \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Z (12.1) wynika, że $-pf \leq pa \leq pe$, tj.

$$-e_1 - e_2 \leq pa \leq pe. \tag{12.4}$$

Sprzęgając obie powyższe nierówności stronami operatorem u otrzymujemy na mocy (12.2)

$$-pe - e_2 \leq upau^* \leq e_1 \tag{12.5}$$

Dodając stronami (12.4) i (12.5) i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$-\tfrac{1}{2}(pe + e_1) - e_2 \leq \tfrac{1}{2}(pa + upau^*) \leq \tfrac{1}{2}(pe + e_1). \tag{12.6}$$

Teraz, skoro $pe + e_1 + e2 = pe + pf = p$ mamy

$$\tfrac{1}{2}(pe + e_1) + e_2 = \tfrac{1}{2}(pe + e_1 + e_2) + \tfrac{1}{2}e_2 = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}e_2 \leq \tfrac{1}{2}p \leq p$$

czyli

$$-p \leq -\tfrac{1}{2}(pe + e_1) - e_2. \tag{12.7}$$

Podobnie

$$\tfrac{1}{2}(pe + e_1) \leq \tfrac{1}{2}(pe + e_1) + \tfrac{1}{2}e_2 = \tfrac{1}{2}p. \tag{12.8}$$

Zestawiając (12.6) z (12.7) i (12.8) dostajemy

$$-p \leq \tfrac{1}{2}(pa + upau^*) \leq \tfrac{1}{2}p$$

lub inaczej

$$-\tfrac{3}{4}p \leq \tfrac{1}{2}(pa + upau^*) + \tfrac{1}{4}p \leq \tfrac{3}{4}p. \tag{12.9}$$

Podobnie z (12.1) wynika, że $-qf \leq qa \leq eq = f_1 + f_2$ i korzystając z (12.3) zamiast (12.2) dostajemy

$$-\tfrac{3}{4}q \leq \tfrac{1}{2}(qa + uqau^*) - \tfrac{1}{4}q \leq \tfrac{3}{4}q. \tag{12.10}$$

Dodajemy (12.9) i (12.10) stronami:

$$-\tfrac{3}{4}\mathbb{1} \leq \tfrac{1}{2}(a + uau^*) - \tfrac{1}{4}(q - p) \leq \tfrac{3}{4}\mathbb{1},$$

co pokazuje, że

$$\left\|\tfrac{1}{2}(a + uau^*) - z\right\| \leq \tfrac{3}{4}$$

dla $z = \frac{1}{4}(q - p) \in \mathsf{Z}_{\mathrm{h}}$. □

Lemat 12.3. *Niech $a \in \mathsf{M}$ i $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieją $\alpha \in \mathscr{D}$ i $z \in \mathsf{Z}$ takie, że*

$$\left\|\alpha(a) - z\right\| < \varepsilon.$$

Dowód. Na początek załóżmy, że $a \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$. Wystarczy wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ istnieją $\alpha_n \in \mathscr{D}$, $z_n \in \mathsf{Z}$ takie, że

$$\big\|\alpha_n(a) - z_n\big\| \leq \big(\tfrac{3}{4}\big)^n \|a\|.$$

Dowodzimy tego indukcyjnie. Dla $n = 1$ rzecz jest udowodniona w lemacie 12.2. Załóżmy, że α_{n-1} i z_{n-1} są już skonstruowane. Stosujemy lemat 12.2 do $\alpha_{n-1}(a) - z_{n-1}$ zamiast a. Mówi on, że istnieją $\alpha \in \mathscr{D}$ i $z \in \mathsf{Z}_{\mathrm{h}}$ takie, że

$$\big\|\alpha(\alpha_{n-1}(a) - z_{n-1}) - z\big\| \leq \tfrac{3}{4}\big\|\alpha_{n-1}(a) - z_{n-1}\big\| \leq \big(\tfrac{3}{4}\big)^n \|a\|.$$

Korzystając z tego, że $\alpha(z_{n-1}) = z_{n-1}$ (bo $z_{n-1} \in \mathsf{Z}$), otrzymujemy więc

$$\big\|\alpha(\alpha_{n-1}(a)) - (z_{n-1} + z)\big\| \leq \big(\tfrac{3}{4}\big)^n \|a\|.$$

czyli możemy położyć $\alpha_n = \alpha\alpha_{n-1}$ i $z_n = z_{n-1} + z$.

Teraz przechodzimy do sytuacji ogólnej: a nie musi być samosprzężony. Wówczas rozkładamy a na część rzeczywistą i urojoną: $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$. Na mocy pierwszej części dowodu istnieją $\alpha_1 \in \mathscr{D}$ i $z_1 \in \mathsf{Z}_{\mathrm{h}}$ takie, że

$$\big\|\alpha_1(a_1) - z_1\big\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Teraz stosujemy ponownie pierwszą część dowodu do (samosprzężonego) elementu $\alpha(a_2)$. Otrzymujemy $\gamma \in \mathscr{D}$ oraz $z_2 \in \mathsf{Z}$ takie, że

$$\big\|\alpha_2(\alpha_1(a_2)) - z_2\big\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Tak więc

$$\big\|\alpha_2(\alpha_1(a_1)) - z_1\big\| = \big\|\alpha_2(\alpha_1(a_1) - z_1)\big\| \leq \big\|\alpha_1(a_1) - z_1\big\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

i dla $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ i $z = z_1 + \mathrm{i}z_2$ dostajemy

$$\begin{aligned}\big\|\alpha(a) - z\big\| &= \big\|\alpha(a_1) - z_1 + \mathrm{i}(\alpha(a_2) - z_2)\big\| \\ &\leq \big\|\alpha(a_1) - z_1\big\| + \big\|\alpha(a_2) - z_2\big\| \\ &\leq \big\|\alpha_2(\alpha_1(a_1)) - z_1\big\| + \big\|\alpha_2(\alpha_1(a_2)) - z_2\big\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 12.4. *Niech $a \in \mathsf{M}$. Wówczas istnieją $z \in \mathsf{Z}$ i ciąg $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathscr{D}$ takie, że*

$$\big\|\alpha_n(a) - z\big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{12.11}$$

Dowód. Zaczniemy od udowodnienia, że istnieją ciągi $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathscr{D}$ oraz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów Z takie, że

$$\big\|(\beta_n\beta_{n-1}\cdots\beta_1)(a) - z_n\big\| < 2^{-n}.$$

Dowodzimy tego indukcyjnie. Dla $n = 1$ sprawę załatwia lemat 12.3 dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Załóżmy teraz, że mamy już $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ i $z_1 \ldots, z_{n-1}$. Teraz stosujemy lemat 12.3 do $(\beta_{n-1}\cdots\beta_1)(a)$ zamiast a i dla $\varepsilon = 2^{-n}$. Lemat 12.3 mówi, że istnieją $\beta_n \in \mathscr{D}$ oraz $z_n \in \mathsf{Z}$ takie, że

$$\big\|\beta_n\big(\beta_{n-1}\cdots\beta_1)(a)\big) - z_n\big\| < 2^{-n}.$$

Teraz korzystając z tego, że dla wszystkich k mamy $\|\beta\| \leq 1$, a elementy Z są niezmiennicze dla odwzorowań z $\mathscr{D}$ szacujemy

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - z_n\| &\leq \big\|z_{n+1} - (\beta_{n+1}\beta_n \cdots \beta_1)(a)\big\| + \big\|(\beta_{n+1}\beta_n \cdots \beta_1)(a) - z_n\big\| \\ &< 2^{-(n+1)} + \big\|(\beta_{n+1}\beta_n \cdots \beta_1)(a) - z_n\big\| \\ &= 2^{-(n+1)} + \big\|\beta_{n+1}\big((\beta_n \cdots \beta_1)(a)\big) - \beta_{n+1}(z_n)\big\| \\ &\leq 2^{-(n+1)} + \big\|(\beta_n \cdots \beta_1)(a) - z_n\big\| \\ &< 2^{-(n+1)} + 2^{-n} = \tfrac{3}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Tak więc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Niech $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Ponadto mamy

$$\big\|(\beta_n \cdots \beta_1)(a) - z\big\| \leq \big\|(\beta_n \cdots \beta_1)(a) - z_n\big\| + \|z_n - z\| \leq 2^{-n} + \|z_n - z\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Tak więc nasze stwierdzenie jest prawdziwe dla $\alpha_n = \beta_n \cdots \beta_1$. □

Dowód twierdzenia 12.1. Ze stwierdzenia 12.4 mamy ciąg $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $z \in \mathsf{Z}$ takie, że spełniona jest relacja (12.11). Ponieważ dla każdego n mamy $\alpha_n(a) \in \operatorname{conv}_{\mathsf{M}}(a)$. Stąd

$$z = \lim_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n(a) \in \overline{\operatorname{conv}}_{\mathsf{M}}(a).$$

□

13. Kanoniczny ślad na algebrach skończonych

Niech M będzie algebrą von Neumanna. Tak jak w części 12 oznaczmy symbolem $\mathcal{U}(\mathsf{M})$ grupę elementów unitarnych M. Łatwo się przekonać, że $\varphi \in \mathsf{M}_*$ jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy $u\varphi u^* = \varphi$ dla wszystkich $u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})$.

Lemat 13.1. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i oznaczmy* $\mathsf{Z} = \mathscr{Z}(\mathsf{M})$. *Niech* $\varphi \in \mathsf{M}_*$ *będzie funkcjonałem śladowym. Wówczas* $\|\varphi\| = \|\varphi|_{\mathsf{Z}}\|$. *W szczególności* $\varphi \geq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\varphi|_{\mathsf{Z}} \geq 0$.

Dowód. Niech $\varphi = v|\varphi|$ będzie rozkładem biegunowym. Zgodnie z uwagą 11.18 ze śladowości φ wynika, że dla każdego $u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})$ mamy

$$\varphi = u\varphi u^* = uv|\varphi|u^* = uvu^*u|\varphi|u^*.$$

Z jednoznaczności rozkładu biegunowego wynika więc, że $v \in \mathsf{Z}$, a $|\varphi|$ jest śladowy. Stąd

$$\|\varphi\| = \big\||\varphi|\big\| = |\varphi|(\mathbb{1}) = \varphi(v^*) \leq \|\varphi|_{\mathsf{Z}}\| \leq \|\varphi\|.$$

Druga część tezy wynika ze stwierdzenia 5.2. □

Niech $\varphi \in \mathsf{M}$ i niech K_φ będzie normowo domkniętą powłoką wypukłą zbioru

$$\big\{u\varphi u^* \,\big|\, u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})\big\}.$$

Twierdzenie 13.2. *Jeśli* M *jest skończona, to zbiór* K_φ *jest słabo zwarty.*

W dowodzie następnego lematu skorzystamy z twierdzenia Rylla-Nardzewskiego o punkcie stałym:

Twierdzenie 13.3. *Niech* X *będzie przestrzenią Banacha i niech* K *będzie niepustym, słabo zwartym podzbiorem wypukłym* X. *Niech* S *będzie półgrupą afinicznych izometrii* $K \to K$. *Wówczas istnieje* $x_0 \in K$ *taki, że dla każdego* $s \in S$ *mamy* $s(x_0) = x_0$.

Lemat 13.4. *Niech* M *będzie skończoną algebrą von Neumanna i oznaczmy* $\mathsf{Z} = \mathscr{Z}(\mathsf{M})$*. Niech* $\omega \in \mathsf{Z}_*$*. Wówczas* ω *rozszerza się jednoznacznie do śladowego* $\varphi_\omega \in \mathsf{M}^*$*. Ponadto* $\varphi_\omega \in \mathsf{M}_*$*,* $\|\varphi_\omega\| = \|\omega\|$ *i* $\varphi_\omega \geq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\omega \geq 0$*.*

Dowód. Zaczynamy od dowodu jedyności rozszerzenia. Niech $\psi \in \mathsf{M}^*$ będzie śladowym funkcjonałem rozszerzającym ω. Mamy oczywiście $u\psi u^* = \psi$ dla wszystkich $u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})$. Dla $a \in \mathsf{M}$ niech $z \in \mathsf{Z} \cap \overline{\operatorname{conv}}_{\mathsf{M}}(x)$ (patrz twierdzenie 12.1). Zauważmy, że ψ ma stałą wartość na $\overline{\operatorname{conv}}_{\mathsf{M}}(a)$, a więc

$$\psi(a) = \psi(z) = \omega(z).$$

Stąd wartości ψ na elementach M są wyznaczone jednoznacznie przez ω.

Teraz zajmiemy się istnieniem i własnościami rozszerzenia. Na mocy twierdzenia Hahna-Banacha ω posiada pewne rozszerzenie $\varphi \in \mathsf{M}_*$. Zastosujemy twierdzenie Rylla-Nardzewskiego dla $X = \mathsf{M}_*$, $K = K_\varphi$ i $S = \mathcal{U}(\mathsf{M})$ działającej przez sprzężenia:

$$u(\varphi) = u\varphi u^*, \qquad (u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})).$$

Niech φ_ω będzie punktem stałym dla tego działania. Wówczas φ_ω jest funkcjonałem śladowym. Ponadto każdy element K_φ jest rozszerzeniem ω na M, gdyż dla $z \in \mathsf{Z}$ i $u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})$ mamy

$$u\varphi u^*(z) = \varphi(u^*zu) = \varphi(zu^*u) = \varphi(z).$$

Stąd $\varphi_\omega\big|_{\mathsf{Z}} = \omega$.

Tak więc φ_ω jest jedynym rozszerzeniem ω do śladowego funkcjonału na M. Ale z konstrukcji mamy $\varphi_\omega \in \mathsf{M}_*$. Reszta tezy wynika z lematu 13.1. □

Uwaga 13.5. Do dowodu jedyności rozszerzenia ω do śladowego funkcjonału na M nie potrzebowaliśmy skończoności algebry M.

Twierdzenie 13.6. *Niech* M *będzie skończoną algebrą von Neumanna i oznaczmy* $\mathsf{Z} = \mathscr{Z}(\mathsf{M})$*. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie*

$$\natural\colon \mathsf{M} \ni x \longmapsto x^\natural \in \mathsf{Z}$$

takie, że

(1) $\natural$ *jest liniowe i ograniczone,*
(2) *dla wszystkich* $x, y \in \mathsf{M}$ *mamy* $(xy)^\natural = (yx)^\natural$*,*
(3) *dla wszystkich* $z \in \mathsf{Z}$ *mamy* $z^\natural = z$*.*

Ponadto odwzorowanie $\natural$ *spełnia następujące warunki:*

(4) $\|\natural\| = 1$*,*
(5) $\natural$ *jest* w-*ciągłe,*
(6) *dla* $x \in \mathsf{M}$ *i* $z \in \mathsf{Z}$ *mamy* $(zx)^\natural = zx^\natural$*,*
(7) *jeśli* $x \geq 0$*, to* $x^\natural \geq 0$*,*
(8) *jeśli* $x \geq 0$ *i* $x^\natural = 0$*, to* $x = 0$*,*
(9) $x^\natural \in \overline{\operatorname{conv}}_{\mathsf{M}}(x)$*.*

Dowód. Na początek udowodnijmy jedyność odwzorowania $\natural$ o własnościach (1)–(3). Dla $\omega \in \mathsf{Z}_*$ odwzorowanie

$$\mathsf{M} \ni x \longmapsto \omega(x^\natural)$$

jest ograniczonym funkcjonałem na M rozszerzającym ω i jest on śladowy (na mocy (2)). Tak więc $\omega \circ \natural = \varphi_\omega$, gdzie φ_ω jest rozszerzeniem omawianym w lemacie 13.4. Oznacza to, że wartość każdego funkcjonału $\omega \in \mathsf{Z}_*$ na elemencie $x^\natural$ jest wyznaczona jednoznacznie przez x. Stąd też element $x^\natural$ jest wyznaczony jednoznacznie przez x.

Przechodzimy do dowodu istnienia odwzorowania $\natural$. Oznaczmy przez E odwzorowanie

$$\mathsf{Z}_* \ni \omega \longmapsto \varphi_\omega \in \mathsf{M}_*.$$

Odwzorowanie to jest liniową kontrakcją (patrz lematy 13.1 i 13.4). Definiujemy $\natural$ jako odwzorowanie sprzężone do E, czyli $\natural\colon \mathsf{M} \to \mathsf{Z}$jest wyznaczone przez relacje

$$\omega(x^\natural) = \varphi_\omega(x), \qquad (x \in \mathsf{M},\ \omega \in \mathsf{Z}_*).$$

Wówczas $\natural$ jest liniowe i $\|\natural\| = 1$. Dalej dla $z \in \mathsf{Z}$ mamy oczywiście $z^\natural = z$ i

$$\omega\big((xy)^\natural\big) = \varphi_\omega(xy) = \varphi_\omega(yx) = \omega\big((xy)^\natural\big)$$

dla wszystkich $\omega \in \mathsf{Z}_*$, bo φ_ω jest śladowy. Ponadto $\natural$ jest w-ciągłe, a lemat 13.1 zapewnia, że spełniony jest również warunek (7). Własność (9) wynika z konstrukcji: dla $x \in \mathsf{M}$ istnieje $z \in \overline{\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}}(x) \cap \mathsf{Z}$. Wtedy

$$\omega(x^\natural) = \varphi_\omega(x) = \varphi_\omega(z) = \omega(z),$$

dla wszystkich $\omega \in \mathsf{Z}_*$, a więc $x^\natural = z \in \overline{\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}}(x)$.

Aby udowodnić (6) wystarczy wykazać, że dla każdego $x \in \mathsf{M}$ mamy

$$(wx)^\natural = wx^\natural$$

dla wszystkich unitarnych elementów $w \in \mathsf{Z}$. Ustalmy więc unitarny $w \in \mathsf{Z}$ i rozważmy odwzorowanie

$$\mathsf{M} \ni x \longmapsto w^*(wx)^\natural.$$

Łatwo sprawdzić, że spełnia ono warunki (1)–(3), a więc $w^*(wx)^\natural = x^\natural$ dla wszystkich x.

Przechodzimy do dowodu (8). Jeśli $x \geq 0$ i $x \neq 0$, to $\boldsymbol{z}(x) \neq 0$. Istnieje dodatni $\omega \in \mathsf{Z}_*$ taki, że $\boldsymbol{s}(\omega) \leq \boldsymbol{z}(x)$ (wystarczy wziąć dowolny $\omega' \in \mathsf{Z}_*$ taki, że $\omega'\big(\boldsymbol{z}(x)\big) \neq 0$ i położyć $\omega(z) = \omega'\big(\boldsymbol{z}(x)z\big)$ dla wszystkich $z \in \mathsf{Z}$). Rozważmy teraz nośnik $\boldsymbol{s}(\varphi_\omega)$. Jest on niezmienniczy na sprzężenia elementami $u \in \mathcal{U}(\mathsf{M})$, gdyż φ_ω jest śladowy. Stąd $\boldsymbol{s}(\varphi_\omega) \in \mathsf{Z}$, czyli $\boldsymbol{s}(\varphi_\omega) = \boldsymbol{s}(\omega)$ (skoro największy rzut na którym zeruje się φ_ω jest centralny, to jest on równy największemu rzutowi centralnemu, na którym zeruje się ω).

Teraz jeśli $\varphi_\omega(x) = 0$, to $\boldsymbol{s}(\varphi_\omega)x = 0$ (część 10.4), ale to jest niemożliwe, bo $\boldsymbol{s}(\varphi_\omega) = \boldsymbol{s}(\omega) \leq \boldsymbol{z}(x)$, a dla $p \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$ relacja $px = 0$ implikuje $p\,\boldsymbol{z}(x) = 0$, gdyż $\boldsymbol{z}(x)$ jest rzutem na $\overline{\mathsf{M}x\mathscr{H}}$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że $\varphi_\omega(x) \neq 0$ dla wszystkich dodatnich $\omega \in \mathsf{Z}_*$, a więc $x^\natural \neq 0$. ☐

Uwaga 13.7. Warunki (6) i (7) wynikają z (1), (3) i (4) (patrz część 10.7)

Definicja 13.8. Niech M będzie skończoną algebrą von Neumanna o centrum Z. Odwzorowanie $\natural\colon \mathsf{M} \to \mathsf{Z}$ skonstruowane w twierdzeniu 13.6 nazywamy *kanonicznym śladem o wartościach w centrum* algebry M.

Uwaga 13.9. Jeśli M jest skończona, to dla każdego $x \in \mathsf{M}$ zbiór $\overline{\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}}(x) \cap \mathscr{Z}(\mathsf{M})$ jest jednoelementowy. Istotnie, jeśli $z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}}(x) \cap \mathscr{Z}(\mathsf{M})$ i $z_1 \neq z_2$, to istnieje $\omega \in \mathsf{Z}_*$ taki, że $\omega(z_1) \neq \omega(z_2)$. Ale wtedy ω nie może być rozszerzony do śladowego $\varphi_\omega \in \mathsf{M}^*$, gdyż takie rozszerzenie musi przyjmować stałą wartość na $\overline{\mathrm{conv}_{\mathsf{M}}}(x)$ i równocześnie pokrywać się z ω na $\mathscr{Z}(\mathsf{M})$.

Twierdzenie 13.10. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna o centrum* Z. *Jeśli istnieje odwzorowanie* $\natural\colon \mathsf{M} \to \mathsf{Z}$ *spełniające warunki* (1),(2), (3), (7) *i* (8) *z twierdzenia 13.6, to* M *jest skończona.*

Dowód. Jeśli $v \in \mathsf{M}$ jest izometrią (tj. $v^*v = \mathbb{1}$), to $\mathbb{1} - vv^*$ jest rzutem. Mamy

$$(\mathbb{1} - vv^*)^\natural = \mathbb{1}^\natural - (vv^*)^\natural = \mathbb{1} - (v^*v)^\natural = 0,$$

a więc $vv^* = \mathbb{1}$. □

Korzystając z wyników dotyczących klasyfikacji algebr von Neumanna (część 11) można wzmocnić twierdzenie 13.10.

Twierdzenie 13.11. *Algebra von Neumanna* M *jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie* $\natural\colon \mathsf{M} \to \mathscr{Z}(\mathsf{M})$ *spełniające warunki* (1)–(3) *z twierdzenia 13.6.*

Proof. Wiemy, że algebra skończona posiada odpowiednie odwzorowanie $\natural$. Teraz niech M będzie dowolna. W dowodzie twierdzenia 11.13 wykazaliśmy, że istnieją rzuty centralne p i q w M takie, że $p\mathsf{M}$ jest skończona, $q\mathsf{M}$ jest właściwie nieskończona i $p+q = \mathbb{1}$. Przypuśćmy, że $q \neq 0$. Wówczas q jest rzutem właściwie nieskończonym. Zgodnie z wnioskiem 11.9 istnieją rzuty $e_1, e_2 \in \mathrm{Proj}(q\mathsf{M})$ takie, że $q = e_1 + e_2$ i $e_1 \sim e_2 \sim q$. Jeśli istnieje odwzorowanie $\natural$ o własnościach (1)–(3), to mamy

$$e_1^\natural = e_2^\natural = q^\natural = q \neq 0,$$

a z drugiej strony

$$e_1^\natural + e_2^\natural = q^\natural = q.$$

Uzyskana sprzeczność pokazuje, że musi być $q = 0$. □

Z udowodnionych powyżej faktów możemy wysnuć następujący wniosek:

Wniosek 13.12. *Niech* M *będzie faktorem. Jeśli* τ *jest stanem śladowym na* M*, to* M *jest skończony, a* τ *jest normalny. Ponadto na* M *nie istnieje żaden inny stan śladowy.*

13.1. **Funkcja wymiaru.**

Twierdzenie 13.13. *Niech* M *będzie skończoną algebrą von Neumanna i niech* $e, f \in \mathrm{Proj}(\mathsf{M})$*. Wówczas* $e \prec f$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $e^\natural \leq f^\natural$*.*

Dowód. Jeśli $e \prec f$, to istnieje częściowa izometria $v \in \mathsf{M}$ taka, że $v^*v = e$ i $vv^* = f_1 \leq f$. Mamy więc

$$e^\natural = (v^*v)^\natural = (vv^*)^\natural = f_1^\natural \leq f^\natural$$

jako, że $\natural$ jest odwzorowaniem dodatnim.

Odwrotnie, załóżmy, że $e^\natural \leq f^\natural$. Na mocy twierdzenia 10.18 istnieje rzut centralny p taki, że

$$pe \prec pf \quad \text{oraz} \quad (\mathbb{1} - p)e \succ (\mathbb{1} - p)f. \tag{13.1}$$

Niech r będzie takim rzutem, że

$$(\mathbb{1} - p)f \sim r \leq (\mathbb{1} - p)e.$$

Ponieważ odwzorowanie $\natural$ jest dodatnie i ma stałe wartości na klasach relacji "$\sim$", mamy

$$0 \leq \big((\mathbb{1} - p)e - r\big)^\natural = (\mathbb{1} - p)e^\natural - r^\natural = (\mathbb{1} - p)e^\natural - (\mathbb{1} - p)f^\natural = -(\mathbb{1} - p)(f^\natural - e^\natural) \leq 0$$

Więc na mocy wierności $\natural$ mamy $r = (\mathbb{1} - p)e$. Stąd

$$(\mathbb{1} - p)e \sim (\mathbb{1} - p)f.$$

Zestawiając to z pierwszą z relacji (13.1) otrzymujemy $e \prec f$. □

Uwaga 13.14. Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 13.13 jest, że w skończonej algebrze von Neumanna M dla dowolnych $e, f \in \operatorname{Proj}(\mathsf{M})$ mamy $e \sim f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e^\natural = f^\natural$.

Niech M będzie skończonym faktorem. Wówczas odwzorowanie $\natural$ staje się normalnym i wiernym stanem śladowym, który zwyczajowo oznaczamy symbolem τ (patrz wniosek 13.12). Niech

$$d = \tau\big|_{\operatorname{Proj}(\mathsf{M})}.$$

Funkcja d nazywana jest *funkcją wymiaru* faktora M. Ma ona następujące własności:

(1) jeśli $e \neq 0$, to $d(e) > 0$,
(2) jeśli $e \perp f$, to $d(e+f) = d(e) + d(f)$,
(3) $e \sim f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(e) = d(f)$.

14. Teoria Tomity-Takesakiego

Teoria Tomity-Takesakiego jest jedną z najważniejszych części teorii algebr operatorów. Przedstawimy ją w formie zaproponowana przez M.A. Rieffel'a i A. Van Daele'a w pracy [6]. Jest to tak zwana "teoria Tomity-Takesakiego dla stanów" – mniej ogólna niż "teoria Tomity-Takesakiego dla wag", która jest bardziej skomplikowana technicznie. W zastosowaniach potrzebna jest właśnie owa ogólniejsza wersja teorii Tomity-Takesakiego, ale na razie zadowolimy się jej wersją uboższą.

14.1. **Informacje wstępne.**

14.1.1. *Wektory cykliczne i separujące.*

Definicja 14.1. Niech $\mathsf{M} \subset B(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna i niech $\Omega \in \mathscr{H}$. Powiemy, że wektor Ω jest *separujący* dla M, jeśli dla $x \in \mathsf{M}$ warunek $x\Omega = 0$ implikuje $x = 0$.

Fakt 14.2.

(1) *Każda algebra von Neumanna działająca na ośrodkowej przestrzeni Hilberta posiada wektor separujący.*
(2) *Wektor Ω jest separujący dla M wtedy i tylko wtedy, gdy Ω jest cykliczny dla M'.*

Najciekawsza jest sytuacja, gdy algebra von Neumanna posiada wektor, który jest równocześnie cykliczny i separujący dla M (jest on wtedy cykliczny i separujący dla M'). Aby przekonać się, że taka sytuacja często ma miejsce rozważmy następujący przykład: niech M będzie algebrą von Neumanna i niech ω będzie normalnym stanem wiernym na M. Konstrukcja G.N.S. (patrz część 7) dostarcza reprezentacji π_ω algebry M na przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}_\omega$. W reprezentacji tej M ma wektor cykliczny Ω, który jest także separujący, bo stan ω jest wierny. Odwzorowanie π_ω jest normalnym izomorfizmem M na $\pi_\omega(\mathsf{M})$, więc możemy utożsamić M i $\pi_\omega(\mathsf{M})$. W ten sposób realizujemy M na przestrzeni Hilberta w taki sposób, że M ma w niej wektor cykliczny i separujący.[6]

[6] Jest to tak zwana *forma standardowa* algebry M.

14.1.2. *Rozkład biegunowy nad* $\mathbb{R}$.

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech t będzie operatorem na $\mathscr{H}$. Niech $t = u|t|$ będzie rozkładem biegunowym t (część 1.2). Jeśli t jest operatorem samosprzężonym (czy choć normalnym), to u jest funkcją (mierzalną) od t. W szczególności t, $|t|$ i u są parami przemienne. Pamiętamy, że $u^*u = \boldsymbol{s}\big(|t|\big) = \boldsymbol{r}(t)$ jest rzutem na dopełnienie ortogonalne $\ker|t| = \ker t$. Gdy t jest samosprzężony, to $\ker t$ jest dopełnieniem ortogonalnym obrazu t. W szczególności, jeśli $\ker t = \{0\}$, to u jest operatorem unitarnym. Łatwo również sprawdzić, że u jest operatorem samosprzężonym (u jest funkcją od t przyjmującą jedynie rzeczywiste wartości). Tak więc mamy następującą wersję twierdzenia o rozkładzie biegunowym dla operatora samosprzężonego o trywialnym jądrze:

Twierdzenie. *Niech t będzie samosprzężonym operatorem na zespolonej przestrzenie Hilberta H takim, że $\ker t = \{0\}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden operator u taki, że $u^*u = \mathbb{1}$ oraz $t = u|t|$. Ponadto u jest przemienny z t i $|t|$ oraz $u^2 = \mathbb{1}$.*

Rozważymy teraz wersję powyższego twierdzenia dla rzeczywistych przestrzeni Hilberta. Niech K będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Wówczas możemy rozważyć jej kompleksyfikację $\mathscr{H} = K + \mathrm{i}K$, którą jako przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ identyfikujemy z sumą prostą dwóch kopii K, a strukturę zespolonej przestrzeni Hilberta nadajemy jej w nastepujący sposób: piszemy $\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$ zamiast (ξ_1, ξ_2) i kładziemy

$$\mathrm{i}(\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2) = -\xi_2 + \mathrm{i}\xi_1, \qquad (\xi_1, \xi_2 \in K),$$

$$(\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2 | \eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)_{\mathscr{H}} = (\xi_1|\eta_1)_K + (\xi_2|\eta_2)_K + \mathrm{i}\big((\xi_1|\eta_2)_K - (\xi_2|\eta_1)_K\big), \quad (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in K).$$

Możemy teraz rozważyć odwzorowanie

$$\iota\colon \mathrm{B}(K) \longrightarrow \mathrm{B}(\mathscr{H})$$

dane przez $\iota(a)(\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2) = a\xi_1 + \mathrm{i}a\xi_2$. Jest ono $\mathbb{R}$-liniowe i multyplikatywne. Ponadto $\iota(a)^* = \iota(a^*)$ (sprzężenie po lewej stronie jest względem zespolonego iloczynu skalarnego na $\mathscr{H}$, a po prawej względem rzeczywistego iloczynu skalarnego na K). Łatwo również sprawdzić bezpośrednio, że zachowuje ono dodatniość (definiowaną w $\mathrm{B}(K)$ i $\mathrm{B}(\mathscr{H})$ przez elementy macierzowe względem odpowiednich iloczynów skalarnych).

Zauważmy wreszcie, że łatwo opisać obraz odwzorowania ι. Niech p będzie operatorem

$$\mathscr{H} \ni \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2 \longmapsto \xi_1 + \mathrm{i}0.$$

Wówczas p jest rzutem ortogonalnym na rzeczywistą podprzestrzeń $\big\{\xi_1 + \mathrm{i}0 \,\big|\, \xi_1 \in K\big\} \subset \mathscr{H}$ względem iloczynu skalarnego $\Re\,(\cdot|\cdot)_{\mathscr{H}}$. Nietrudno sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że operator $s \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ jest w obrazie odwzorowania ι wtedy i tylko wtedy, gdy $ps = sp$.

Niech teraz x będzie samosprzężonym operatorem na K i roważmy rozkład biegunowy $\iota(x) = u\big|\iota(x)\big|$. Ponieważ $\iota(s)$ komutuje z p, to samo jest prawdą dla $\big|\iota(x)\big|$ (bo jest to granica wielomianów od $\iota(x)$) i u. Stąd

$$\big|\iota(x)\big| = \iota(t) \quad \text{oraz} \quad u = \iota(j)$$

dla pewnych operatorów $t, j \in \mathrm{B}(K)$. Jest jasne, że $x = jt$ oraz, że t jest dodatni (i samosprzężony). Ponadto t i j komutują z x, a operator j jest samosprzężony i spełnia $j^2 = \mathbb{1}$. Tym samym udowodnliśmy:

Twierdzenie 14.3. *Niech x będzie samosprzężonym operatorem na rzeczywistej przestrzeni Hilberta K takim, że $\ker t = \{0\}$. Wówczas istnieje dokładnie jedna para (j, t) złożona z operatora unitarnego (ortogonalnego) j i operatora dodatniego t na K taka, że $x = jt$ i $j^2 = \mathbb{1}$.*

14.2. **Para podprzstrzeni w rzeczywistej przestrzeni Hilberta.** Niech H będzie przestrzenią Hilberta nad $\mathbb{R}$ i niech (K, L) będzie parą domknietych podprzestrzeni H takich, że

- $K \cap L = \{0\}$,
- podprzestrzeń $K + L$ jest gęsta w H.

Taka para podprzestrzeni definiuje następujące operatory:

- $\boldsymbol{p}$ – rzut ortogonalny na K,
- $\boldsymbol{q}$ – rzut ortogonalny na L,
- $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$,
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$.

Uwaga 14.4. Operator $\boldsymbol{x}$ jest injektywny: załóżmy, że $\boldsymbol{x}\xi = 0$. Oznacza to, że $\boldsymbol{p}\xi = \boldsymbol{q}\xi$, a więc $\boldsymbol{p}\xi = \boldsymbol{q}\xi = 0$. Warunek $\boldsymbol{p}\xi = 0$ oznacza, że $\xi \in K^\perp$, a $\boldsymbol{q}\xi = 0$ oznacza $\xi \in L^\perp$. Stąd $\xi \in (K + L)^\perp = \{0\}$.

Niech

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{t}$$

będzie rozkładem biegunowym operatora $\boldsymbol{x}$ (patrz część 14.1.2). Operator $\boldsymbol{t}$ jest dodatni (a więc samosprzężony), a $\boldsymbol{j}$ jest ortogonalny, tj. $\boldsymbol{j}^*\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}^* = \mathbb{1}$, ponadto $\boldsymbol{j}^2 = \mathbb{1}$. Zauważmy też, że $\boldsymbol{t}$ jest injektywny oraz $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{j}$ są przemienne (bo $\boldsymbol{x}$ jest samosprzężony, a więc $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{t}$ są funkcjami od $\boldsymbol{x}$).

Stwierdzenie 14.5.

(1) *Mamy* $0 \leq \boldsymbol{r} \leq 2\mathbb{1}$ *oraz* $\ker \boldsymbol{r} = \ker(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}) = \{0\}$;
(2) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}$;
(3) $\boldsymbol{j}$ *jest ortogonalnym operatorem samosprzężonym, a co za tym idzie* $\boldsymbol{j}^2 = \mathbb{1}$;
(4) $\boldsymbol{t}$ *jest przemienny z* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ *oraz* $\boldsymbol{j}$;
(5) *mamy*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}\boldsymbol{p} &= (\mathbb{1} - \boldsymbol{q})\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{q} &= (\mathbb{1} - \boldsymbol{p})\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{r} &= (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Dowód. Ad (1). Mamy oczywiście $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \leq 2\mathbb{1}$ i $\boldsymbol{r} \geq 0$. Załóżmy, że $\boldsymbol{r}\xi = 0$. Wówczas mamy

$$\|\boldsymbol{p}\xi\|^2 + \|\boldsymbol{q}\xi\|^2 = (\xi|\boldsymbol{p}\xi) + (\xi|\boldsymbol{q}\xi) = (\xi|\boldsymbol{r}\xi) = 0.$$

Zatem $\boldsymbol{p}\xi = \boldsymbol{q}\xi$ i tak jak w uwadze 14.4 mamy $\xi = 0$.

Rozważmy parę $(L^\perp, K^\perp)$. Para ta spełnia te same warunki, co para (K, L). Istotnie:

- jeśli $\xi \in (L^\perp \cap K^\perp)$, to $\xi \perp (K + L)$, a więc $\xi = 0$,
- jeśli $\xi \perp (L^\perp + K^\perp)$, to $\xi \perp L^\perp$ i $\xi \perp L^\perp$, a stąd $\xi \in K \cap L = \{0\}$; innymi słowy podprzestrzeń $L^\perp + K^\perp$ jest gęsta w H.

Teraz zauważmy, że przejście od (K, L) do $(L^\perp, K^\perp)$ zamienia $\boldsymbol{r}$ na $2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}$. W szczególności $\ker(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}) = \{0\}$.

Ad (2). Mamy

$$\boldsymbol{t}^2 = \boldsymbol{t}\boldsymbol{j}^*\boldsymbol{j}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$$

oraz
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})(2\mathbb{1}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) &= 2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\\ &= \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\end{aligned}$$
czyli $\boldsymbol{t}^2 = \boldsymbol{r}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})$, a co za tym idzie
$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}.$$

Ad (3). Cały ten punkt był już omówiony – jest on konsekwencją procedury rozkładu biegunowego (twierdzenie 14.3).

Ad (4). Operator $\boldsymbol{t}$ komutuje z $\boldsymbol{j}$, bo $\boldsymbol{x}$ jest samosprzężony. Komutuje też z $\boldsymbol{r}$, bo jest funkcją tego operatora. Musi więc komutować z $\boldsymbol{x}$. Skoro komutuje z $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{r}$, to komutuje z $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$.

Ad (5). Pamiętając, że komutuje z $\boldsymbol{p}$ obliczamy
$$\boldsymbol{jpt} = \boldsymbol{jtp} = \boldsymbol{xp} = (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{qp} = (\mathbb{1}-\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = (I-\boldsymbol{q})\boldsymbol{x} = (\mathbb{1}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{jt}$$
czyli $\boldsymbol{jp} = (\mathbb{1}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{j}$ na obrazie $\boldsymbol{t}$. Obraz ten jest gęsty, bo $\ker\boldsymbol{t} = \{0\}$ i $\boldsymbol{t}^* = \boldsymbol{t}$. Stąd
$$\boldsymbol{jp} = (\mathbb{1}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{j}. \tag{14.1}$$
Biorąc sprzężenia obu stron (14.1) otrzymujemy $\boldsymbol{pj} = \boldsymbol{j}(\mathbb{1}-\boldsymbol{q})$ czyli
$$\boldsymbol{jq} = (\mathbb{1}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{j}. \tag{14.2}$$
Wreszcie
$$\boldsymbol{jr} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = (\mathbb{1}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{j} + (\mathbb{1}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{j} = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{j} = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}.$$
□

Uwaga 14.6. Z punktu (5) stwierdzenia 14.5 wynika, że $\boldsymbol{j}K = L^\perp$ i $\boldsymbol{j}L = K^\perp$. Istotnie, weźmy $\xi \in K$. Wówczas $\boldsymbol{j}\xi = \boldsymbol{jp}\xi = (\mathbb{1}-\boldsymbol{q})\boldsymbol{j}\xi \in L^\perp$, co pokazuje, że $\boldsymbol{j}K \subset L^\perp$. Natomiast korzystając ze wzoru $\boldsymbol{jq} = (\mathbb{1}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{j}$ przepisanego jako $\boldsymbol{j}(\mathbb{1}-\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{pj}$ dla $\eta \in L^\perp$ otrzymujemy $\boldsymbol{j}\eta = \boldsymbol{j}(\mathbb{1}-\boldsymbol{q})\eta = \boldsymbol{pj}\eta$, czyli $\boldsymbol{j}L^\perp \subset K$. Równość $\boldsymbol{j}K = L^\perp$ dostajemy korzystając z tożsamości $\boldsymbol{j}^2 = \mathbb{1}$. Dokładnie tak samo otrzymujemy $\boldsymbol{j}L = K^\perp$.

14.2.1. *Pewne operatoy nieograniczone.*

Rozważmy teraz inne operatory wyznaczone przez podprzestrzenie K i L w przestrzeni H. Niech $\boldsymbol{s}$ będzie operatorem o dziedzinie $K+L$ takim, że
$$\boldsymbol{s}(\xi+\eta) = \xi-\eta, \qquad (\xi \in K,\ \eta \in L).$$
Jest to gęsto zdefiniowany operator, który może być nieograniczony. Jest jasne, że operator ten jest domknięty, gdyż jeśli ciąg $(\xi_n+\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathrm{D}(\boldsymbol{s})$ jest zbieżny i ciąg $(\xi_n-\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ także jest zbieżny, to ciągi $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne i
$$\lim_{n\to\infty}(\xi_n+\eta_n) = \lim_{n\to\infty}\xi_n + \lim_{n\to\infty}\eta_n \in K+L = \mathrm{D}(\boldsymbol{s})$$
oraz
$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{s}(\xi_n+\eta_n) = \lim_{n\to\infty}(\xi_n-\eta_n) = \lim_{n\to\infty}\xi_n - \lim_{n\to\infty}\eta_n = \boldsymbol{s}\big(\lim_{n\to\infty}(\xi_n+\eta_n)\big).$$

Podobnie, wykorzystując przestrzenie $L^\perp$ i $K^\perp$ zamiast K i L definiujemy domknięty operator $\boldsymbol{f}$ taki, że $\mathrm{D}(\boldsymbol{f}) = L^\perp + K^\perp$
$$\boldsymbol{f}(\xi'+\eta') = \xi'-\eta', \qquad (\xi' \in L^\perp,\ \eta' \in K^\perp).$$

Stwierdzenie 14.7.

(1) $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{jsj}$ *i* $\boldsymbol{f}^*=\boldsymbol{s}$,
(2) *dla* $\zeta\in\mathrm{D}(\boldsymbol{s})$ *mamy* $(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}\zeta=\boldsymbol{jt}\zeta$,
(3) *kładąc* $\Delta=(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}^{-1}$ *mamy*

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{j}\Delta^{\frac{1}{2}}\quad\textit{oraz}\quad\boldsymbol{f}=\boldsymbol{j}\Delta^{-\frac{1}{2}}.$$

Proof. Ad (1). Skoro $\boldsymbol{j}K=L^\perp$ i $\boldsymbol{j}L=K^\perp$ (uwaga 14.6), mamy oczywiście $\boldsymbol{jsj}=\boldsymbol{f}$. Weźmy $\xi\in K$, $\eta\in K$, $\xi'\in L^\perp$ i $\eta'\in K^\perp$. Mamy

$$\big(\boldsymbol{s}(\xi+\eta)\big|\xi'+\eta'\big)=\big(\xi-\eta\big|\xi'+\eta'\big)=\big(\xi\big|\xi'\big)-\big(\eta\big|\eta'\big)=\big(\xi+\eta\big|\xi'-\eta'\big)=\big(\xi+\eta\big|\boldsymbol{f}(\xi'+\eta')\big),$$

czyli $\boldsymbol{f}\subset\boldsymbol{s}^*$. Z drugiej strony jeśli $\zeta\in\mathrm{D}(\boldsymbol{s}^*)$, to dla $\xi\in K$ i $\eta\in K$

$$(\xi-\eta|\zeta)=(\boldsymbol{s}(\xi+\eta)|\zeta)=(\xi+\eta|\boldsymbol{s}^*\zeta). \tag{14.3}$$

Kładąc w (14.3) $\eta=0$ otrzymujemy $\zeta-\boldsymbol{s}^*\zeta\in K^\perp$, a kładąc $\xi=0$ dostajemy $\zeta+\boldsymbol{s}^*\zeta\in L^\perp$.Stąd

$$\zeta\in K^\perp+L^\perp=\mathrm{D}(\boldsymbol{f}).$$

W konsekwencji $\boldsymbol{s}^*=\boldsymbol{f}$.

Ad (2). Niech $\zeta\in\mathrm{D}(\boldsymbol{s})$, tj. $\zeta=\xi+\eta$, gdzie $\xi\in K$, $\eta\in L$. Mamy

$$\begin{aligned}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}\zeta=(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}(\xi+\eta)&=(2\mathbb{1}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})(\xi-\eta)\\&=(\mathbb{1}-\boldsymbol{p})(\xi-\eta)+(\mathbb{1}-\boldsymbol{q})(\xi-\eta)\\&=-(\mathbb{1}-\boldsymbol{p})\eta+(\mathbb{1}-\boldsymbol{q})\xi\\&=-(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\eta+(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\xi\\&=(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})(\xi+\eta)=\boldsymbol{x}(\xi+\eta)=\boldsymbol{jt}(\xi+\eta)=\boldsymbol{jt}\zeta.\end{aligned}$$

Ad (3). Z punktu (1) natychmiast wynika, że

$$(\boldsymbol{js})^*=\boldsymbol{s}^*\boldsymbol{j}=\boldsymbol{fj}=\boldsymbol{js}.$$

Innymi słowy operator $\boldsymbol{js}$ jest samosprzężony. Weźmy teraz $\zeta\in\mathrm{D}(\boldsymbol{s})$. Mamy na mocy punktu (2):

$$\boldsymbol{rjs}\zeta=\boldsymbol{j}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}\zeta=\boldsymbol{jjt}\zeta=\boldsymbol{t}\zeta=\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta,$$

a więc z injektywności $\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}$ wynika, że

$$\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{js}\zeta=(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta.$$

Tak więc dla $\Delta=(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}^{-1}=\boldsymbol{r}^{-1}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})$ mamy $\zeta\in\mathrm{D}(\Delta^{\frac{1}{2}})$.[7] Stąd $\boldsymbol{js}\subset\Delta^{\frac{1}{2}}$, ale oba operatory są samosprzężone, więc

$$\boldsymbol{js}=\Delta^{\frac{1}{2}}.$$

Wreszcie korzystając ponownie z ostatniego wzoru ze stwierdzenia 14.5(5) w wersji $\boldsymbol{jrj}=(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})$ (względnie $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{j}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}$) sprawdzamy, że

$$\boldsymbol{j}\Delta^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{jr}^{-\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{j}=(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}=\Delta^{-\frac{1}{2}},$$

a stąd

$$\boldsymbol{j}\Delta^{-\frac{1}{2}}=\Delta^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{jj}\Delta^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{jsj}=\boldsymbol{f}.$$

$\square$

[7] $\mathrm{D}(\Delta^{\frac{1}{2}})=\big\{\gamma\in H\,\big|\,(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\gamma\in\mathrm{D}(\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}})\big\}=\big\{\gamma\in H\,\big|\,(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\gamma\in\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}H\big\}$

14.3. **Jedna rzeczywista podprzestrzeń zespolonej przestrzeni Hilberta.** Niech $\mathscr{H}$ będzie zespoloną przestrzenią Hilberta. $\mathscr{H}$ jest również rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\Re\left(\cdot|\cdot\right)$. Niech K będzie rzeczywistą domkniętą podprzestrzenią $\mathscr{H}$ taką, że

- $K \cap \mathrm{i}K = \{0\}$,
- podprzestrzeń $K + \mathrm{i}K$ jest gęsta w $\mathscr{H}$.

Para $(K, \mathrm{i}K)$ definiuje ograniczone $\mathbb{R}$-liniowe operatory

$$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{t}$$

na $\mathscr{H}$.

Stwierdzenie 14.8. *Operatory $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{t}$ są $\mathbb{C}$-liniowe,*

$$0 \leq \boldsymbol{r} \leq 2\mathbb{1}, \qquad , \boldsymbol{t} \geq 0, \tag{14.4}$$

natomiast operator $\boldsymbol{j}$ jest antyliniowy i samosprzężony (jako operator antyliniowy), tj.

$$(\xi|\boldsymbol{j}\eta) = (\eta|\boldsymbol{j}\xi)$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in \mathscr{H}$.

Uwaga 14.9. Niech φ będzie antyliniowym funkcjonałem na zespolonej przestrzeni wektorowej X. Wówczas φ jest wyznaczony jednoznacznie przez swoją częśc rzeczywistą, gdyż z jednej strony, dla $x \in X$

$$\varphi(\mathrm{i}x) = -\mathrm{i}\varphi(x) = -\mathrm{i}\big((\Re\varphi)(x) + \mathrm{i}(\Im\varphi)(x)\big) = (\Im\varphi)(x) - \mathrm{i}(\Re\varphi)(x),$$

a z drugiej

$$\varphi(\mathrm{i}x) = (\Re\varphi)(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}(\Im\varphi)(\mathrm{i}x).$$

Zatem $(\Im\varphi)(x) = (\Re\varphi)(\mathrm{i}x)$ dla wszystkich $x \in X$. Jeśli $(\cdot|\cdot)$ jest iloczynem skalarnym na X, to kładąc $\varphi(x) = (x|y)$ dla pewnego ustalonego y mamy

$$(x|y) = \varphi(x) = (\Re\varphi)(x) + \mathrm{i}(\Im\varphi)(x) = \Re\left(x|y\right) + \mathrm{i}(\Re\varphi)(\mathrm{i}x) = \Re\left(x|y\right) + \mathrm{i}\Re\left(\mathrm{i}x|y\right).$$

Tak więc iloczyn skalarny z ustalonym wektorem wyraża się przez część rzeczywistą iloczynu skalarnego.

Dowód stwierdzenia 14.8. Operatot $\boldsymbol{p}$ jest rzutem na K (ortogonalnym względem $\Re\left(\cdot|\cdot\right)$), a $\boldsymbol{q}$ jest rzutem na $\mathrm{i}K$. Zatem $\boldsymbol{p} = \mathrm{i}\circ\boldsymbol{q}\circ\mathrm{i}^{-1}$ i $\boldsymbol{p} = \mathrm{i}^{-1}\circ\boldsymbol{q}\circ\mathrm{i}$. Zatem $\mathrm{i}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}\mathrm{i}$ oraz $\boldsymbol{p}\mathrm{i} = \mathrm{i}\boldsymbol{q}$. Stąd

$$\mathrm{i}\boldsymbol{r} = \mathrm{i}\boldsymbol{p} + \mathrm{i}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\mathrm{i} + \boldsymbol{p}\mathrm{i} = \boldsymbol{r}\mathrm{i}.$$

Dalej $\boldsymbol{t} = f(\boldsymbol{r})$, gdzie $f(r) = \sqrt{r(2-r)}$ ($r \in [0, 2]$), więc $\boldsymbol{t}$ także jest $\mathbb{C}$-liniowy (jako normowa granica wielomianów od $\boldsymbol{r}$).

Pokażemy teraz, że $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^*$ w sensie sprzężenia względem zespolonego iloczynu skalarnego na $\mathscr{H}$. Pamiętamy, że $\boldsymbol{r}$ jest samosprzężony dla $\Re\left(\cdot|\cdot\right)$, a więc dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned}(\xi|\boldsymbol{r}\eta) &= \Re\left(\xi|\boldsymbol{r}\eta\right) + \mathrm{i}\Re\left(\mathrm{i}\xi|\boldsymbol{r}\eta\right) = \Re\left(\boldsymbol{r}\xi|\eta\right) + \mathrm{i}\Re\left(\boldsymbol{r}\mathrm{i}\xi|\eta\right) = \Re\left(\boldsymbol{r}\xi|\eta\right) + \mathrm{i}\Re\left(\mathrm{i}\boldsymbol{r}\xi|\eta\right)\\ &= \Re\left(\boldsymbol{r}\xi|\eta\right) + \mathrm{i}\Re\big(-\mathrm{i}\left(\boldsymbol{r}\xi|\eta\right)\big) = \Re\left(\boldsymbol{r}\xi|\eta\right) + \mathrm{i}\Im\left(\boldsymbol{r}\xi|\eta\right) = \left(\boldsymbol{r}\xi|\eta\right)\end{aligned}$$

(patrz uwaga 14.9). Teraz, skoro $(\xi|\boldsymbol{r}\xi) = (\boldsymbol{r}\xi|\xi)$, mamy $(\xi|\boldsymbol{r}\xi) = \Re\left(\xi|\boldsymbol{r}\xi\right) \geq 0$, czyli $R \geq 0$ w C*-algebrze $\mathrm{B}(\mathscr{H})$. Tak samo pokazujemy $\boldsymbol{t} \geq 0$ oraz, że $2\mathbb{1} - \boldsymbol{r} \geq 0$ w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$, czyli nierówności (14.4) są spełnione w $\mathrm{B}(\mathscr{H})$.

Operator $\boldsymbol{x}$ jest antyliniowy:

$$\mathrm{i}\boldsymbol{x} - \mathrm{i}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}\mathrm{i} - \boldsymbol{p}\mathrm{i} = -(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\mathrm{i} = -\boldsymbol{x}\mathrm{i}.$$

Skoro $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{x}$, operator $\boldsymbol{j}$ musi być antyliniowy.

Ponadto $\boldsymbol{j}$ jest samosprzężony dla iloczynu skalarnego $\Re\left(\cdot|\cdot\right)$. Zatem, na mocy uwagi 14.9

$$\begin{aligned}(\xi|\boldsymbol{j}\eta) &= \Re\left(\xi|\boldsymbol{j}\eta\right) + \mathrm{i}\Re\left(\mathrm{i}\xi|\boldsymbol{j}\eta\right) = \Re\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right) + \mathrm{i}\Re\left(\boldsymbol{j}\mathrm{i}\xi|\eta\right) = \Re\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right) - \mathrm{i}\Re\left(\mathrm{i}\boldsymbol{j}\xi|\eta\right)\\ &= \Re\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right) - \mathrm{i}\Re\big(-\mathrm{i}\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right)\big) = \Re\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right) + \mathrm{i}\Re\big(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right)\big)\\ &= \Re\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right) - \mathrm{i}\Im\left(\boldsymbol{j}\xi|\eta\right) = \overline{(\boldsymbol{j}\xi|\eta)} = (\eta|\boldsymbol{j}\xi)\,.\end{aligned}$$

□

Wiemy już, że $\boldsymbol{j}$ jest operatorem antyliniowym i samosprzężonym. Ponieważ $\boldsymbol{j}^2 = \mathbb{1}$, mamy

$$\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}^* = \boldsymbol{j}^*\boldsymbol{j} = \mathbb{1}.$$

Operatory takie nazywamy *antyunitarnymi*.

Przypominamy, że operator $\boldsymbol{r}$ spełnia $0 \leq \boldsymbol{r} \leq 2\mathbb{1}$ oraz $\ker\boldsymbol{r} = \ker(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}) = \{0\}$.

14.4. **Grupa modularna.** W części 14.2.1 wprowadziliśmy operator $\Delta = \boldsymbol{r}^{-1}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})$. W omawianej sytuacji jest on $\mathbb{C}$-liniowy, domknięty, dodatni i samosprzężony. W dalszym ciągu kluczową rolębędzie odgrywała mocno ciągła jednoparametrowa grupa operatorów unitanych $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ (czyli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\Delta^{\mathrm{i}t} = \boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}$). W kontekście teori Tomity-Takesakiego grupę tę nazywa się zazwyczaj *grupą modularną*.

Dygresja 14.10. Niech $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie operatorem dodatnim o zerowym jądrze. Dla $z \in \mathbb{C}$ takiego, że $\Im z \leq 0$ definiujemy $F(z) = a^{\mathrm{i}z}$. Innymi słowy $F(z) = f_z(a)$, gdzie f_z jest funkcją ciągłą na $\mathrm{Sp}\, a$ daną wzorem:

$$f_z(r) = \exp\big(\mathrm{i}z\log(r)\big)$$

dla $r > 0$ (ponieważ $\ker a = \{0\}$, wartość f_z w punkcie $r = 0$ jest nieistotna). Funkcja F ma następujące własności:

(1) jest mocna ciągła i (normowo) ograniczona poziomych paskach o skończonej szerokości,
(2) jest analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z < 0\}$.

Na początek zauważmy, że dla $r > 0$ mamy

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\log(r)}\right| = r^{-\Im z},$$

a więc $\left\|F(z)\right\| \leq \|a\|^{-\Im z}$ (czyli w szczególności $F(z) \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$) i funkcja F jest ograniczona na poziomych paskach skończonej szerokości. Weźmy $\xi \in \mathscr{H}$ i $\varepsilon > 0$ i niech $\mathscr{H}_\varepsilon$ będzie obrazem rzutu spektralnego $\chi_{]a,+\infty[}(a)$. Operator $a_\varepsilon = a\big|_{\mathscr{H}_\varepsilon}$ ma ograniczony logarytm. Dalej oznaczając $\xi_\varepsilon = \chi_{]a,+\infty[}(a)\xi$ mamy

$$F(z)\chi_{]a,+\infty[}(a)\xi = f_z(a_\varepsilon)\xi_\varepsilon = \exp\big(\mathrm{i}z\log(a_\varepsilon)\big)\xi_\varepsilon,$$

a więc dla $\eta \in \mathscr{H}$

$$\big(\eta\big|F(z)\chi_{]a,+\infty[}(a)\xi\big) = \left(\eta\middle|\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(\mathrm{i}z\log(a_\varepsilon))^n}{n!}\xi_\varepsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{z^n}{n!}\left(\eta|\mathrm{i}^n(\log a_\varepsilon)^n\xi_\varepsilon\right).$$

Widzimy więc, że jest to funkcja ciągła na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z \leq 0\}$ i analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z < 0\}$. Dalej, ponieważ $\ker a = \{0\}$, mamy

$$\chi_{]a,+\infty[}(a) \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{\mathrm{so}} \mathbb{1},$$

a więc

$$F(z)\chi_{]a,+\infty[}(a)\xi \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} a^{\mathrm{i}z}\xi,$$

a ponadto zbieżność ta jest jednostajna względem z na poziomych paskach skończonej szerokości:

$$\big\|F(z)\chi_{]a,+\infty[}(a)\xi - F(z)\xi\big| \leq \big\|F(z)\big\|\big\|\chi_{]a,+\infty[}(a)\xi - \xi\big\|.$$

Tak więc funkcja $z \mapsto a^{\mathrm{i}z}\xi$ jest niemal jednostajną granicą funkcji ciągłych na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z \leq 0\}$ i analitycznych na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z < 0\}$.

Dygresja 14.11. Będziemy rozważać również funkcje holomorficzne o wartościach w $\mathscr{H}$. Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i niech $F\colon D \to \mathscr{H}$. Powiemy, że F jest holomorficzna, jeśli dla każdego $\xi \in \mathscr{H}$ funckja

$$D \ni z \longmapsto (\xi|F(z))$$

jest holomorficzna. Jeśli F jest holomorficzna, to funkcja

$$\overline{D} \ni w \longmapsto \overline{(\xi|F(\overline{w}))} = (F(\overline{w})|\xi)$$

też jest holomorficzna. Będziemy z tego często korzystać.

Podobnie, jeśli F_1 i F_2 są funkcjami holomorficznymi o wartościach w $\mathscr{H}$, to funkcja

$$z \longmapsto (F_1(\overline{z})|F_2(z))$$

także jest holomorficzna (na odpowiedniej dziedzinie).

Stwierdzenie 14.12.
(1) $\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\Delta^{\mathrm{i}t}$ *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}$,
(2) $\Delta^{\mathrm{i}t}K = K$ *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Ustalmy $t \in \mathbb{R}$.

Ad (1). Mamy $\boldsymbol{jr} = (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{j}$ (stwierdzenie 14.5(5)). Zatem dla każdej funkcji ciągłej f na $\operatorname{Sp}\boldsymbol{r}$ mamy

$$\boldsymbol{j}f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j} = \overline{f}(\boldsymbol{jrj}) = \overline{f}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})$$

(bo tak jest dla wielomianów; zauważmy, że $\operatorname{Sp}\boldsymbol{r} = \operatorname{Sp}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})$). Funkcja mierzalna $r \mapsto r^{\mathrm{i}t}$ jest punktową granicą funkcji ciągłych, a więc $\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}$ jest mocną granicą fukncji ciągłych od $\boldsymbol{r}$. Stąd

$$\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{r} = (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\mathrm{i}t}.$$

W konseksencji (korzystamy z tego, że $\boldsymbol{j}^2 = \mathbb{1}$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}\\ &= (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}\\ &= (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t} = \Delta^{\mathrm{i}t}.\end{aligned}$$

Ad (2). $\Delta^{\mathrm{i}t}$ jest funkcją od $\boldsymbol{r}$, więc komutuje z $\boldsymbol{r}$, a więc i z $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}$. Na mocy (1) $\Delta^{\mathrm{i}t}$ komutuje z $\boldsymbol{j}$, a więc komutuje z $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{jt}$. Skoro $\Delta^{\mathrm{i}t}$ komutuje z $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{r}$, to komutuje także z $\boldsymbol{p}$ (i $\boldsymbol{q}$). W szczególności $\Delta^{\mathrm{i}t}K \subset K$. Ponieważ jest to prawdą także dla $\Delta^{-\mathrm{i}t}$, mamy $\Delta^{\mathrm{i}t}K = K$. □

14.5. **Warunek K.M.S.**

Definicja 14.13. Niech $\mathscr{H}$ będzie zespoloną przestrzenią Hilberta i niech K będzie rzeczywistą domkniętą podprzestrzenią $\mathscr{H}$ taką, że

- $K \cap \mathrm{i}K = \{0\}$,
- podprzestrzeń $K + \mathrm{i}K$ jest gęsta w $\mathscr{H}$.

Dalej, niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na $\mathscr{H}$. Powiemy, że grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem podprzestrzeni K, jeśli dla dowolnych $\xi, \eta \in K$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f\colon \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 \leq \Im z \leq 1\bigr\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$ taka, że

- $f(t) = (\xi|U_t\eta)$,
- $f(t + \mathrm{i}) = (U_t\eta|\xi)$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zauważmy od razu, że jeśli dla pewnych ξ i η funkcja f jak w definicji 14.13 istnieje, to jest ona jedyna. Istotnie, jeśli g byłaby inną taką funkcją, to $f - g$ byłaby analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$ i równa 0 na prostej rzeczywistej. Stąd f i g musiałby być sobie równe na całej swojej dziedzinie.

Stwierdzenie 14.14. *Jednoparametrowa grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem K wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\xi, \eta \in K$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja*

$$f\colon \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 \leq \Im z \leq \tfrac{1}{2}\bigr\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

analityczna na $\bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 < \Im z < \tfrac{1}{2}\bigr\}$ taka, że

- $f(t) = (\xi|U_t\eta)$,
- $f\bigl(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr) \in \mathbb{R}$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek sformułowany w tezie stwierdzenia. Innymi słowy dla $\xi, \eta \in K$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f\colon \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 \leq \Im z \leq \tfrac{1}{2}\bigr\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

analityczna na $\bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 < \Im z < \tfrac{1}{2}\bigr\}$ taka, że $f(t) = (\xi|U_t\eta)$ oraz $f\bigl(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Stosując zasadę symetrii otrzymamy funkcję

$$\widetilde{f}\colon \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 \leq \Im z \leq 1\bigr\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

taką, że

- $\widetilde{f}(z) = f(z)$ dla $z \in \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| 0 \leq \Im z \leq \tfrac{1}{2}\bigr\}$,
- $\widetilde{f}(w) = \overline{f(\overline{w} + \mathrm{i})}$ dla $w \in \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| \tfrac{1}{2} \leq \Im z \leq 1\bigr\}$.

Sprawdźmy, że wówczas $\widetilde{f}$ jest funkcją K.M.S. dla ξ i η: dla $t \in \mathbb{R}$ mamy $\widetilde{f}(t) = f(t) = (\xi|U_t\eta)$ oraz

$$\widetilde{f}(t + \mathrm{i}) = \overline{f(t)} = (U_t\eta|\xi)\,.$$

Zatem $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem K.

Załóżmy teraz, że $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem K. Niech $\xi,\eta\in K$ i niech $f\colon\{z\in\mathbb{C}\,|\,0\leq\Im z\leq 1\}\to\mathbb{C}$ będzie odpowiednią funkcją K.M.S. Zdefiniujmy

$$g\colon\bigl\{z\in\mathbb{C}\bigm|0\leq\Im z\leq 1\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

kładąc

$$g(z)=\overline{f(\overline{z}+\mathrm{i})}.$$

Wówczas g także jest funkcją K.M.S. dla ξ i η: jest ona ciągła i ograniczona na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0\leq\Im z\leq 1\}$ i analityczna na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\Im z<1\}$, a ponadto dla $t\in\mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}g(t)&=\overline{f(t+\mathrm{i})}=\overline{\overline{(\xi|U_t\eta)}}=(\xi|U_t\eta)\,,\\ g(t+\mathrm{i})&=\overline{f(t)}=\overline{(\xi|U_t\eta)}=(U_t\eta|\xi)\,.\end{aligned}$$

Stąd $f=g$, a więc w szczególności $g\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)=f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)$, czyli

$$\overline{f\bigl(\overline{(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2})}+\mathrm{i}\bigr)}=f\bigl(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr)$$

lub inaczej $f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)=\overline{f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)}$. □

Lemat 14.15. *Niech $\eta\in K$. Wówczas $\eta=\boldsymbol{r}^{\frac12}\zeta$, gdzie*

$$\zeta=\tfrac12\bigl(\boldsymbol{r}^{\frac12}+(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac12}\boldsymbol{j}\bigr)\eta.$$

Dowód. Mamy $\eta=\boldsymbol{p}\eta$, a więc

$$\begin{aligned}\eta=\boldsymbol{p}\eta&=\tfrac12(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\eta\\ &=\tfrac12(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x})\eta\\ &=\tfrac12(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{t})\eta\\ &=\tfrac12(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{j})\eta\\ &=\tfrac12\bigl(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}^{\frac12}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac12}\boldsymbol{j}\bigr)\eta\\ &=\boldsymbol{r}^{\frac12}\bigl(\tfrac12\bigl(\boldsymbol{r}^{\frac12}+(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac12}\boldsymbol{j}\bigr)\eta\bigr).\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy po kolei z tego, że $\boldsymbol{j}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}$, oraz że

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}^{\frac12}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac12}.$$

□

Twierdzenie 14.16. *Grupa $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem K.*

Dowód. Niech $\xi,\eta\in K$ i niech

$$f(t)=\bigl(\xi\bigm|\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\bigr)\,.$$

Rrozszerzymy f na pasek $\bigl\{z\in\mathbb{C}\bigm|0\leq\Im z\leq\frac12\bigr\}$. Korzystamy z lematu 14.15:

$$\begin{aligned}f(t)=\bigl(\xi\bigm|\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\bigr)&=\Bigl(\xi\Bigm|\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{r}^{\frac12}\zeta\Bigr)\\ &=\Bigl(\xi\Bigm|\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}\boldsymbol{r}^{\frac12}\zeta\Bigr)\\ &=\Bigl(\xi\Bigm|\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}(t-\frac{\mathrm{i}}{2})}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}\zeta\Bigr)\,.\end{aligned}$$

Powyższy rachunek podpowiada nam, aby dla $z \in \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\right\}$ zdefiniować

$$f(z) = \left(\xi \middle| \boldsymbol{r}^{\mathrm{i}(z-\frac{\mathrm{i}}{2})}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}z}\zeta\right)$$

(dla takich z mamy $\Im\bigl(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\bigr), \Im(-z) \leq 0$, więc operatory $\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}(z-\frac{\mathrm{i}}{2})}$ oraz $(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}z}$ są dobrze zdefiniowane i zależą holomorficznie od z na mocy dyskusji zawartej w dygresji 14.10).

Aby spełniony był warunek K.M.S. wartości f na prostej $\mathbb{R} + \frac{\mathrm{i}}{2}$ muszą być rzeczywiste. Mamy

$$f\bigl(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr) = \left(\xi \middle| \boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta\right).$$

Obliczamy

$$(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta = (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}} + (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{j}\bigr)\eta = \tfrac{1}{2}\bigl((2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}\eta + (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{j}\eta\bigr).$$

Na mocy wzoru $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}$ (stwierdzenie 14.5(2)) mamy więc

$$(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta = \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{t}\eta + (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{j}\eta\bigr),$$

a dalej

$$\begin{aligned}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta &= \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{x}\boldsymbol{j}\eta + (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{j}\eta\bigr)\\ &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x} + 2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{j}\eta\\ &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} + 2\mathbb{1} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\boldsymbol{j}\eta\\ &= (\mathbb{1} - \boldsymbol{q})\boldsymbol{j}\eta = \boldsymbol{j}\boldsymbol{p}\eta = \boldsymbol{j}\eta.\end{aligned}$$

Tak więc

$$f\bigl(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr) = \bigl(\xi \big| \Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}\eta\bigr) = \bigl(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi \big| \boldsymbol{j}\eta\bigr) = \Re\left(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi \big| \boldsymbol{j}\eta\right) + \mathrm{i}\Im\left(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi \big| \boldsymbol{j}\eta\right).$$

Wiemy, że $\boldsymbol{j}$ przeprowadza K na dopełnienie ortogonalne $\mathrm{i}K$ względem iloczynu skalarnego $\Re(\cdot|\cdot)$. Mamy więc

$$\Im\left(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi \big| \boldsymbol{j}\eta\right) = \Re\left(\mathrm{i}\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi \big| \boldsymbol{j}\eta\right) = 0,$$

bo $\Delta^{\mathrm{i}t}\xi \in K$ dla wszystkich t. Stąd $f\bigl(t + \frac{\mathrm{i}}{2}\bigr) \in \mathbb{R}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Twierdzenie 14.17. *Niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych taką, że $U_tK = K$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Jeśli $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem K, to $U_t = \Delta^{\mathrm{i}t}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.*

Dowód. W podprzestrzeni K jest gęsta podprzestrzeń wektorów całkowitych: dla $\xi \in K$ i $n \in \mathbb{N}$ wektor

$$\xi_n = \sqrt{\tfrac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2}U_t\xi\,dt$$

należy do K (K jest domknięta, a $\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nt^2} \in \mathbb{R}$), jest całkowity. Ponadto $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$.

Niech więc $\xi \in K$ będzie całkowity dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i niech $h\colon \mathbb{C} \to H$ będzie funkcją całkowitą taką, że $h(t) = U_t\xi$ dla $t \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcja h jest ograniczona na poziomych paskach skończonej szerokości: funkcje

$$z = t + \mathrm{i}s \longmapsto h(t + \mathrm{i}s) \quad \text{oraz} \quad z = t + \mathrm{i}s \longmapsto U_th(\mathrm{i}s)$$

są całkowite i równe na $\mathbb{R}$, a więc są równe.

Wykażemy, że dla $\eta \in K$ mamy
$$\big(\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}\eta\big|U_t\xi\big) = (\boldsymbol{j}\eta|\xi)$$
dla wszystkich t. Ponieważ $\Delta^{\mathrm{i}s}K = K$ (stwierdzenie 14.12), a K i $\boldsymbol{j}K$ są podzbiorami liniowo gęstymi w $\mathscr{H}$, wynika stąd, że $U_t = \Delta^{\mathrm{i}t}$ (pamiętamy, że całkowite wektory, które są całkowite dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ są gęste w K).

Zdefiniujmy funkcję $g\colon \big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\, 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\big\} \to \mathbb{C}$ wzorem
$$g(z) = \Big(\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}\overline{z}}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}(\overline{z}+\frac{\mathrm{i}}{2})}\zeta\Big|h(z)\Big)$$
gdzie ζ jest wektorem z lematu 14.15 (czyli mamy $\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}\zeta = \eta$ oraz $(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta = \boldsymbol{j}\eta$). Dzięki własnościom funkcji h i operatorów $\boldsymbol{r}$ oraz $2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}$, funkcja g jest ciągła i ograniczona na $\big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\, 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\big\}$ i holomorficzna na $\big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\, 0 < \Im z < \frac{1}{2}\big\}$ (patrz dygresja 14.11).

Mamy
$$g(t) = \Big(\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\zeta\Big|h(t)\Big) = \big(\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}\eta\big|U_t\xi\big) = \big(\boldsymbol{j}\eta\big|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\big)\,.$$
Ponieważ zarówno $\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi$ jak i η należą do K, mamy $g(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ (bo
$$\Im\big(\boldsymbol{j}\eta\big|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\big) = \Re\big(\mathrm{i}\boldsymbol{j}\eta\big|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\big) = -\Re\big(\boldsymbol{j}\mathrm{i}\eta\big|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\big) = 0$$
jako że $\boldsymbol{j}(\mathrm{i}K)$ jest dopełnieniem ortogonalnym K dla $\Re(\cdot|\cdot)$).

Na drugim brzegu paska mamy z kolei:
$$g\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big) = \Big(\boldsymbol{r}^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})^{-\mathrm{i}t}\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}\zeta\Big|h\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big)\Big) = \big(\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\big|h\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big)\big)\,.$$

Wykażemy teraz, że $g\big(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\big) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. W tym celu skorzystamy z warunku K.M.S. dla grupy $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ względem K. Dla ustalonego $s \in \mathbb{R}$ oraz pary wektorów $(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta, \xi)$ z przestrzeni K istnieje funkcja
$$f\colon \big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\, 0 \leq \Im z \leq \tfrac{1}{2}\big\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
ciągła i ograniczona na $\big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\, 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\big\}$, holomorficzna na $\big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\, 0 < \Im z < \frac{1}{2}\big\}$ oraz taka, że
$$f(t) = \big(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta\big|U_t\xi\big)\,.$$
i $f\big(t + \frac{\mathrm{i}}{2}\big) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Zauważmy dalej, że ponieważ
$$f(t) = \big(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta\big|h(t)\big)\,,$$
a h jest funkcją całkowitą, mamy
$$f\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big) = \big(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta\big|h\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big)\big)\,.$$
W szczególności (kiedy $s = t$) mamy
$$g\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big) = \big(\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\big|h\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big)\big) \in \mathbb{R}$$
dla wszystkich t.

Wykazaliśmy więc, że g ma wartości rzeczywiste na prostych $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} + \frac{\mathrm{i}}{2}$. Ponieważ jest ona również ciągła i ograniczona na $\big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\, 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\big\}$, korzystając z zasady symetrii Schwarza otrzymamy z g ograniczoną funkcję całkowitą. Innymi słowy g jest stała.

Zatem, w szczególności, dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $g(t) = g(0)$, czyli
$$\big(\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}\eta\big|U_t\xi\big) = (\boldsymbol{j}\eta|\xi)\,.$$

□

Twierdzenie 14.18. *Niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie mocna ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na przestrzeni Hilberta $\widetilde{\mathscr{H}}$. Niech K_0 będzie rzeczywistą (niekoniecznie domkniętą) podprzestrzenią $\widetilde{\mathscr{H}}$ taką, że $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem K_0. Wówczas $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem najmniejszej domkniętej rzeczywistej podprzestrzeni $K\subset\widetilde{\mathscr{H}}$ niezmienniczej dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i zawierającej K_0. Ponadto $K\cap \mathrm{i}K=\{0\}$, a więc jeśli oznaczymy przez $\mathscr{H}$ domknięcie $K+\mathrm{i}K$ i zdefiniujemy $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ na $\mathscr{H}$ tak jak powyżej, to $\mathscr{H}$ jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $U_t=\Delta^{\mathrm{i}t}$ na $\mathscr{H}$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$.*

Dowód. Niech K_1 będzie zbiorem tych wektorów $\xi\in\widetilde{\mathscr{H}}$, że dla każdego $\eta\in K_0$ istnieje funkcja K.M.S. dla pary (η,ξ), tj. istnieje ciągła i ograniczona funkcja
$$f\colon \bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq 1\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$
holomorficzna na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\Im z<1\}$ taka, że dla każdego $t\in\mathbb{R}$ mamy
$$f(t)=(\eta|U_t\xi)=\overline{f(t+\mathrm{i})}.$$

Zachodzą następujące fakty

- K_1 jest rzeczywistą podprzestrzenią $\widetilde{\mathscr{H}}$: jeśli $\xi_1,\xi_2\in K_1$, $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$ i f_1,f_2 są odpowiednimi funkcjami K.M.S., to $\theta_1 f_1+\theta_2 f_2$ jest funkcją K.M.S. dla $\theta_1\xi_1+\theta_2\xi_2$, gdyż dla $t\in\mathbb{R}$ mamy
$$(\theta_1 f_1+\theta_2 f_2)(t)=\theta_1\,(\eta|U_t\xi_1)+\theta_2\,(\eta|U_t\xi_2)=(\eta|U_t(\theta_1 U_t\xi_1+\theta_2\xi_2))$$
oraz
$$\begin{aligned}(\theta_1 f_1+\theta_2 f_2)(t+\mathrm{i})&=\theta_1 f_1(t+\mathrm{i})+\theta_2 f_2(t+\mathrm{i})\\&=\theta_1\overline{f_1(t)}+\theta_2\overline{f_2(t)}=\overline{(\theta_1 f_1+\theta_2 f_2)(t)}.\end{aligned}$$
- K_1 jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$: ustalmy $s\in\mathbb{R}$ i dla $\xi\in K_1$ oraz $\eta\in K_0$ niech f będzie funkcją K.M.S. dla (η,ξ). Wówczas funkcja
$$g\colon z\longmapsto f(z+s).$$
jest ciągła i ograniczona na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0\leq\Im z\leq 1\}$ i holomorficzna na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\Im z<1\}$. Ponadto
$$g(t)=f(t+s)=(\eta|U_{t+s}\xi)=(\eta|U_t(U_s\xi))$$
oraz
$$g(t+\mathrm{i})=f(t+s+\mathrm{i})=\overline{f(t+s+\mathrm{i})}=\overline{g(t)}.$$
Zatem g jest funkcją K.M.S. dla $(\eta,U_s\xi)$. Oznacza to, że $U_sK_1\subset K_1$.
- K_1 jest domknięta: niech $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów K_1 zbieznym do $\xi\in\widetilde{\mathscr{H}}$. Weźmy $\eta\in K_0$ i niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie odpowiednim ciagiem funckji K.M.S. Mamy
$$\bigl|f_n(t)-f_m(t)\bigr|=\bigl|(\eta|U_t(\xi_n-\xi_m))\bigr|\leq\|\eta\|\|\xi_n-\xi_m\|$$
oraz
$$\bigl|f_n(t+\mathrm{i})-f_m(t+\mathrm{i})\bigr|=\bigl|f_n(t)-f_m(t)\bigr|=\leq\|\eta\|\|\xi_n-\xi_m\|.$$
Zatem, na mocy własności funkcji holomorficznych na pasku, (patrz część 14.8.1)
$$\bigl|f_n(z)-f_m(z)\bigr|\leq\|\eta\|\|\xi_n-\xi_m\|$$
dla wszystkich z o części urojonej pomiędzy 0 a 1. Stąd funkcje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tworzą ciąg zbieżny jednostajnie, a co za tym idzie jego granica f jest funkcją ciągłą i ograniczoną

na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\}$ i holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$. Jest ona także funkcją K.M.S. dla (η, ξ). Istotnie,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} (\eta|U_t\xi_n) = (\eta|U_t\xi)$$

oraz

$$f(t+\mathrm{i}) = \lim_{n\to\infty} f_n(t+\mathrm{i}) = \lim_{n\to\infty} (U_t\xi_n|\eta) = (U_t\xi|\eta)\,.$$

- $K_1 \supset K_0$.

Z powyższych warunków ewidentnie wynika, że $K \subset K_1$.

Wykazalismy, że dla każdego $\eta \in K_0$ i $\xi \in K_1$ istnieje odpowiednia funkcja K.M.S. dla (η, ξ). Tym bardziej dla każdego $\eta \in K_0$ i $\xi \in K$ istnieje odpowiednia funkcja K.M.S. dla (η, ξ).

Niech K_2 będzie zbiorem tych $\eta \in \widetilde{\mathscr{H}}$, że dla dowolnego $\xi \in K$ istnieje funkcja K.M.S. dla pary (η, ξ). Wówczas

- K_2 jest rzeczywistą podprzestrzenią w $\widetilde{\mathscr{H}}$,
- K_2 jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$,
- K_2 jest domknięta,
- $K_0 \subset K_2$.

Wynika stąd, że $K \subset K_2$. W szczególności grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem K.

Teraz wykażemy, że $K \cap \mathrm{i}K = \{0\}$. Weźmy $\xi \in K \cap \mathrm{i}K$. Wówczas zarówno ξ jak i $\mathrm{i}\xi$ należą do K. Niech f będzie funkcją K.M.S. dla (ξ, ξ), a g funkcją K.M.S. dla $(\xi, \mathrm{i}\xi)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= (\xi|U_t\xi)\,, & f(t+\mathrm{i}) &= (U_t\xi|\xi)\,, \\ g(t) &= (\xi|U_t(\mathrm{i}\xi))\,, & g(t+\mathrm{i}) &= (U_t(\mathrm{i}\xi)|\xi)\,. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Z rowności w pierwszej kolumnie wynika, że $g(z) = \mathrm{i}f(z)$ dla z z dziedziny obu funkcji. W szczególności

$$g(t+\mathrm{i}) = \mathrm{i}f(t+\mathrm{i})$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Ale druga kolumna (14.5) pokazuje, że $g(t+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}f(t+\mathrm{i})$. Stąd f jest równa 0 na $\mathbb{R} + \mathrm{i}$, a więc jest stała (i równa 0). W szczególności

$$\|\xi\|^2 = f(0) = 0.$$

Oczywiście $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ zachowuje $\mathscr{H} = \overline{K + \mathrm{i}K}$, więc pozostałe punkty naszego twierdzenia wynikają z twierdzenia 14.17. □

14.6. **Początek teorii Tomity-Takesakiego.** Niech M będzie algebrą von Neumanna działającą na przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$. Niech $\Omega \in \mathscr{H}$ będzie (jednostkowym) wektorem cyklicznym i separującym dla M. Niech $K = \overline{\mathsf{M}_{\mathrm{h}}\Omega}$. Jest jasna, że

- K jest rzeczywistą podprzestrzenią w $\mathscr{H}$,
- $K + \mathrm{i}K$ jest gęsta w $\mathscr{H}$ (cykliczność Ω).

Pokażemy teraz, że $K \cap \mathrm{i}K = \{0\}$.[8] Zanim to wykażemy sprawdzimy, że dla podzbioru $L \subset \mathscr{H}$ mamy

$$\mathrm{i}(L)^{\perp_{\Re}} = (\mathrm{i}L)^{\perp_{\Re}},$$

[8] Jest absolutnie jasne, że $\mathsf{M}_{\mathrm{h}}\Omega \cap \mathrm{i}\mathsf{M}_{\mathrm{h}}\Omega = \{0\}$: jeśli $x, y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ i $x\Omega = \mathrm{i}y\Omega$, to $(x - \mathrm{i}y)\Omega = 0$, czyli $x = \mathrm{i}y$, bo Ω jest separujący dla M. To implikuje $x = y = 0$.

gdzie "$\perp_{\Re}$" oznacza dopełnienie ortogonalne dla iloczynu skalarnego $\Re\left(\cdot\middle|\cdot\right)$. Istontnie

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}(L)^{\perp_{\Re}} &= \left\{\mathrm{i}\xi \,\middle|\, \forall\,\eta\in L\ \Re\left(\eta\middle|\xi\right)=0\right\}\\
&= \left\{\xi' \,\middle|\, \forall\,\eta\in L\ \Re\left(\eta\middle|-\mathrm{i}\xi'\right)=0\right\}\\
&= \left\{\xi' \,\middle|\, \forall\,\eta\in L\ \Re\left(\mathrm{i}\eta\middle|\xi'\right)=0\right\}\\
&= \left\{\xi' \,\middle|\, \forall\,\eta'\in \mathrm{i}L\ \Re\left(\eta'\middle|\xi'\right)=0\right\} = (\mathrm{i}L)^{\perp_{\Re}}.
\end{aligned}$$

Na początek zauważmy, że $\mathsf{M'}_{\mathrm{h}}\Omega\subset(\mathrm{i}K)^{\perp_{\Re}}$. Istotnie: dla $x'\in\mathsf{M'}_{\mathrm{h}}$ i $x\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ mamy

$$\left(x'\Omega\middle|x\Omega\right)=\left(\Omega\middle|x'x\Omega\right)=\left(\Omega\middle|xx'\Omega\right)=\left(x\Omega\middle|x'\Omega\right),$$

czyli $(x'\Omega|x\Omega)\in\mathbb{R}$. Zatem

$$\Re\left(x'\Omega\middle|\mathrm{i}x\Omega\right)=\Re\big(\mathrm{i}\left(x'\Omega\middle|x\Omega\right)\big)=0.$$

Mamy więc

$$\mathsf{M'}\Omega=\mathsf{M'}_{\mathrm{h}}\Omega+\mathrm{i}\mathsf{M'}_{\mathrm{h}}\Omega\subset\mathrm{i}K^{\perp_{\Re}}+K^{\perp_{\Re}}.$$

Teraz

- $\mathrm{i}K^{\perp_{\Re}}+K^{\perp_{\Re}}\subset(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp_{\Re}}$. Istotnie: jeśli $\xi_1,\xi_2\in K^{\perp_{\Re}}$ oraz $\eta\in K\cap\mathrm{i}K$, to mamy $\Re\left(\mathrm{i}\xi_1+\xi_2\middle|\eta\right)=\Re\left(\mathrm{i}\xi_1\middle|\eta\right)+\Re\left(\xi_2\middle|\eta\right)$; drugi wyraz jest równy zero, bo $\eta\in K$ i $\xi_2\in K^{\perp_{\Re}}$, a pierwszy $\Re\left(\mathrm{i}\xi_1\middle|\eta\right)=-\Re\left(\xi_1\middle|\mathrm{i}\eta\right)$ jest równy zero, gdyż $\mathrm{i}\eta\in K$ i $\xi\in K^{\perp_{\Re}}$.
- $(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp_{\Re}}=(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp}$. Istotnie, jeśli $\eta\in K\cap\mathrm{i}K$, to $\eta,\mathrm{i}\eta\in K\cap\mathrm{i}K$. Stąd, dla $\xi\in(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp_{\Re}}$, mamy
  $$\Re\left(\xi\middle|\eta\right)=\Re\left(\mathrm{i}\eta\middle|\xi\right)=0.$$
  Ale $\Re\left(\mathrm{i}\eta\middle|\xi\right)=\Im\left(\eta\middle|\xi\right)$, czyli $\left(\eta\middle|\xi\right)=\Re\left(\eta\middle|\xi\right)=0$. To pokazuje, że
  $$(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp_{\Re}}\subset(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp},$$
  a przeciwne zawieranie jest oczywiste.

W końcu otrzymujemy

$$\mathsf{M'}\Omega=\mathsf{M'}_{\mathrm{h}}\Omega+\mathrm{i}\mathsf{M'}_{\mathrm{h}}\Omega\subset\mathrm{i}K^{\perp_{\Re}}+K^{\perp_{\Re}}\subset(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp_{\Re}}=(K\cap\mathrm{i}K)^{\perp}.$$

Ponieważ zbiór $\mathsf{M'}\Omega$ jest gęsty w $\mathscr{H}$, odostajemy $K\cap\mathrm{i}K=\{0\}$.

Wykazaliśmy, że K spełnia założenia z części 14.3 (i dalszych). Mamy więc operatory

$$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{x},\boldsymbol{j},\boldsymbol{t}$$

oraz grupę modularną $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$. Przystępujemy do dowodu najważniejszego twierdzenia teorii Tomity-Takesakiego:

Twierdzenie 14.19.
(1) *Dla dowolnego* $t\in\mathbb{R}$ *mamy* $\Delta^{\mathrm{i}t}\mathsf{M}\Delta^{-\mathrm{i}t}=\mathsf{M}$,
(2) $\boldsymbol{j}\mathsf{M}\boldsymbol{j}=\mathsf{M'}$.

14.7. **Teoria Tomity-Takesakiego.**

Lemat 14.20. *Niech $x' \in \mathsf{M}'_{\mathrm{h}}$. Wówczas dla dowlnej liczby λ takiej, ze $\Re\lambda > 0$ istnieje dokładnie jeden $x \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ taki, że*

$$\big(x'\Omega\big|y\Omega\big) = \Re\big(\lambda\,(x\Omega|y\Omega)\big)$$

dla wszystkich $y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$.

Dowód. Zacznijmy od następujących uproszczeń:

- możemy przyjąć, że $0 \leq x' \leq \mathbb{1}$, bo każdy x' jest $\mathbb{R}$-kombinacją liniową takich,
- możemy przyjąć, że $\Re\lambda = 1$ (przeskalowanie).

Na razie $x \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ będziemy traktować jako parametr. Definiujemy w-ciągłe funkcjonały $\psi, \psi_x \colon \mathsf{M}_{\mathrm{h}} \to \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned}\psi(y) &= \big(x'\Omega\big|y\Omega\big)\,,\\ \psi_x(y) &= \Re\big(\lambda\,(x\Omega|y\Omega)\big)\end{aligned}\right\} \qquad (y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}).$$

Mamy wykazać, że istnieje dokładnie jeden $x \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ taki, że

$$\psi = \psi_x.$$

Na początek skomentujmy jedyność: jeśli $\psi_{x_1} = \psi_{x_2}$, to $\psi_{x_1 - x_2} = 0$. Tak więc pisząc $x = x_1 - x_2$, mamy w szczególności

$$\psi_x(x) = 0.$$

innymi słowy

$$0 = \Re\big(\lambda\,(x\Omega|x\Omega)\big) = \Re(\lambda)\|x\Omega\|^2,$$

czyli $x = 0$.

Dowodzimy teraz istnienia rzeczonego elementu x. Niech

$$V = \big\{\psi_x \,\big|\, x \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}},\ \|x\| \leq 1\big\}.$$

V jest wypukłym podzbiorem $(\mathsf{M}_*)_{\mathrm{h}} = \big\{\varphi \in \mathsf{M}_* \,\big|\, \varphi = \varphi^*\big\}$ (każdy w-ciągły funkcjonał $\mathsf{M}_{\mathrm{h}} \to \mathbb{R}$ rozszerza się jednoznacznie do normalnego i samosprzężonego funkcjonału na M). Jest on również zbiorem słabo zwartym,[9] gdyż odwzorowanie $x \mapsto \psi_x$ jest ciągłe z M z w-topologią do M_* ze słabą topologią.[10]

Przypuśćmy, że $\psi \neq \psi_x$ dla wszystkich $x \in \mathsf{M}_1^{\mathrm{h}}$. Wówczas, na mocy twierdzenia Hahna-Banacha, istnieje $h \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ taki, że

$$\psi_x(h) < \psi(h)$$

dla wszytskich $x \in \mathsf{M}_1^{\mathrm{h}}$. Innymi słowy, dla wszystkich $x \in \mathsf{M}_1^{\mathrm{h}}$ mamy

$$\Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big) < \big(x'\Omega\big|h\Omega\big)$$

---

[9] Słaba topologia na M_* jest po prostu obcięciem słabej* topologii na M^* do M_*.

[10] Istotnie: niech $(x_i)_{i\in I}$ będzie ciągiem uogólnionym elementów M_{h}, który jest w-zbieżny do x. Dla $y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ mamy

$$\psi_{x_i}(y) - \psi_x(y) = \psi_{x_i - x}(y) = \Re\big(\lambda\,((x_i - x)\Omega|y\Omega)\big) \xrightarrow[i\in I]{} 0,$$

bo $z \mapsto \Re\big(\lambda\,(z\Omega|y\Omega)\big)$ jest w-ciągłym funkcjonałem.

Niech $h=u|h|$ będzie rozkładem biegunowym h. Kładąc $x=u$ w powyższym wzorze otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big)=\Re\big(\lambda\,(u\Omega|h\Omega)\big)&<\big(x'\Omega\big|h\Omega\big)\\&=\Big(\sqrt{x'}\Omega\Big|\sqrt{x'}h\Omega\Big)\\&=\Big(\sqrt{x'}\Omega\Big|h\sqrt{x'}\Omega\Big)\\&\leq\Big(\sqrt{x'}\Omega\Big||h|\sqrt{x'}\Omega\Big)\\&=\big(\Omega\big||h|x'\Omega\big)\\&=\Big(\sqrt{|h|}\Omega\Big|\sqrt{|h|}x'\Omega\Big)\\&=\Big(\sqrt{|h|}\Omega\Big|x'\sqrt{|h|}\Omega\Big)\\&\leq\Big(\sqrt{|h|}\Omega\Big|\sqrt{|h|}\Omega\Big)=\big(\Omega\big||h|\Omega\big)=(u\Omega|h\Omega)=(x\Omega|h\Omega)\,.\end{aligned}$$

Innymi słowy

$$\Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big)<(x\Omega|h\Omega)\,.$$

Ale

$$(x\Omega|h\Omega)=\Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big),$$

bo $\Re(\lambda)=1$, a $(x\Omega|h\Omega)\in\mathbb{R}$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że musi istnieć $x\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ taki, że $\psi=\psi_x$. ☐

Wniosek 14.21. *Dla każdego* $x'\in\mathsf{M}'$ *istnieje* $x\in\mathsf{M}$ *taki, że*

$$\boldsymbol{x}x'\Omega=x\Omega\qquad\textit{oraz}\qquad\boldsymbol{x}x'^*\Omega=x^*\Omega.$$

Dowód. Na początek weźmy $x'\in\mathsf{M}'_{\mathrm{h}}$. Stosujemy lemat 14.20 dla $\lambda=1$. Mamy więc $x\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ taki, że

$$\Re\,(x\Omega|y\Omega)=\big(x'\Omega\big|y\Omega\big)\,,\qquad(y\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}).$$

Stąd

$$\Re\,(x\Omega|\eta)=\big(x'\Omega\big|\eta\big)\,,\qquad(\eta\in K).$$

Oznacza to, że $x\Omega$ jest rzutem ortogonalnym (dla $\Re\,(\cdot|\cdot)$) wektora $x'\Omega$ na K, tzn.

$$x\Omega=\boldsymbol{p}x'\Omega.$$

Wiemy już, że $x'\Omega\in(\mathrm{i}K)^{\perp_\Re}$, a więc $\boldsymbol{q}x'\Omega=0$. Stąd

$$\boldsymbol{x}x'\Omega=(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})x'\Omega=\boldsymbol{p}x'\Omega=x\Omega.$$

Teraz dla $x'=x'_1+\mathrm{i}x'_2$, gdzie $x'_1,x'_2\in\mathsf{M}'_{\mathrm{h}}$ i odpowiadających im $x_1,x_2\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ takich, że

$$\boldsymbol{x}x'_k\Omega=x_k\Omega,\qquad(k=1,2)$$

mamy

$$\boldsymbol{x}x'\Omega=\boldsymbol{x}x'_1\Omega-\mathrm{i}\boldsymbol{x}x'_2\Omega=x_1\Omega-\mathrm{i}x_2\Omega=(x_1-\mathrm{i}x_2)\Omega$$

oraz

$$\boldsymbol{x}x'^*\Omega=\boldsymbol{x}x'_1\Omega+\mathrm{i}\boldsymbol{x}x'_2\Omega=x_1\Omega+\mathrm{i}x_2\Omega=(x_1-\mathrm{i}x_2)^*\Omega,$$

więc wystarczy $x=x_1-\mathrm{i}x_2$. ☐

Stwierdzenie 14.22. *Niech* $x' \in \mathsf{M}'$. *Wówczas dla każdej liczby* λ *takiej, że* $\Re\lambda > 0$ *istnieje* $x \in \mathsf{M}$ *taki, że*

$$\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}.$$

Dowód. Możemy przyjąć, że $x' \in \mathsf{M}'_{\mathrm{h}}$, gdyż dowolny element x' jest kombinacją liniową dwóch takich (odpowiedni x będzie wówczas analogiczną kombinacją liniową[11]). Lemat 14.20 zastosowany do $\overline{\lambda}$ oraz x' produkuje element $\widetilde{x} \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ taki, że

$$\big(x'\Omega\big|y\Omega\big) = \Re\big(\overline{\lambda}\,(\widetilde{x}\Omega|y\Omega)\big), \qquad (y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}).$$

Teraz niech $x = \frac{1}{2}\widetilde{x}$. Wówczas

$$\big(x'\Omega\big|y\Omega\big) = \overline{\lambda}\,(x\Omega|y\Omega) + \lambda\,(y\Omega|x\Omega)\,, \qquad (y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}).$$

Jeśli teraz $y = y_1 + \mathrm{i}y_2$, gdzie $y_1, y_2 \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$, to

$$\begin{aligned}\big(x'\Omega\big|y\Omega\big) = \big(x'\Omega\big|y_1 + \mathrm{i}y_2\Omega\big) &= \big(x'\Omega\big|y_1\Omega\big) + \mathrm{i}\,\big(x'\Omega\big|y_2\Omega\big)\\ &= \overline{\lambda}\,(x\Omega|y_1\Omega) + \lambda\,(y_1\Omega|x\Omega) + \mathrm{i}\big(\overline{\lambda}\,(x\Omega|y_2\Omega) + \lambda\,(y_2\Omega|x\Omega)\big)\\ &= \overline{\lambda}\,(x\Omega|(y_1 + \mathrm{i}y_2)\Omega) + \lambda\,((y_1 - \mathrm{i}y_2)\Omega|x\Omega)\end{aligned}$$

czyli

$$\big(x'\Omega\big|y\Omega\big) = \overline{\lambda}\,(x\Omega|y\Omega) + \lambda\,(y^*\Omega|x\Omega)$$

dla wszystkich $y \in \mathsf{M}$. Wstawiając z^*y w miejsce y otrzymujemy

$$\big(x'\Omega\big|z^*y\Omega\big) = \overline{\lambda}\,(x\Omega|z^*y\Omega) + \lambda\,(z\Omega|yx\Omega)$$

czy też

$$\big(x'z\Omega\big|y\Omega\big) = \overline{\lambda}\,(zx\Omega|y\Omega) + \lambda\,(z\Omega|yx\Omega) \tag{14.6}$$

dla wszystkich $y, z \in \mathsf{M}$.

Niech $y', z' \in \mathsf{M}'$. Na mocy wniosku 14.21 istnieją $y, z \in \mathsf{M}$ takie, że

$$\boldsymbol{x}y'\Omega = y\Omega \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{x}z'\Omega = z\Omega.$$

Dla takich y, z mamy dzięki (14.6)

$$\big(x'\boldsymbol{x}z'\Omega\big|\boldsymbol{x}y'\Omega\big) = \overline{\lambda}\,\big(zx\Omega\big|\boldsymbol{x}y'\Omega\big) + \lambda\,\big(\boldsymbol{x}z'\Omega\big|yx\Omega\big)\,.$$

Przekształcamy to równanie (pamiętając, że $x' = x'^*$)

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{tj}z'\Omega\big|x'\boldsymbol{tj}y'\Omega\big) &= \overline{\lambda}\,\big(zx\Omega\big|\boldsymbol{jt}y'\Omega\big) + \lambda\,\big(\boldsymbol{jt}z'\Omega\big|yx\Omega\big)\,,\\ \big(\boldsymbol{j}z'\Omega\big|\boldsymbol{t}x'\boldsymbol{tj}y'\Omega\big) &= \overline{\lambda}\,\big(\boldsymbol{t}y'\Omega\big|\boldsymbol{j}zx\Omega\big) + \lambda\,\big(\boldsymbol{j}yx\Omega\big|\boldsymbol{t}z'\Omega\big)\,,\\ \big(\boldsymbol{jt}x'\boldsymbol{tj}y'\Omega\big|z'\Omega\big) &= \overline{\lambda}\,\big(y'\Omega\big|\boldsymbol{tj}zx\Omega\big) + \lambda\,\big(\boldsymbol{tj}yx\Omega\big|z'\Omega\big)\,.\end{aligned} \tag{14.7}$$

Przypominamy teraz, że

- dla $u \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ mamy $\boldsymbol{p}u\Omega = u\Omega$, a więc

$$\boldsymbol{tj}u\Omega = \boldsymbol{x}u\Omega = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})u\Omega = (2\mathbb{1} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})u\Omega = (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})u\Omega.$$

---

[11] Jeśli $x' = x'_1 + \mathrm{i}x'_2$ przy $x'_1, x'_2 \in \mathsf{M}'_{\mathrm{h}}$ oraz

$$\boldsymbol{x}x'_i\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{r}x_i(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})x_i\boldsymbol{r}, \qquad (i = 1, 2)$$

dla pewnych $x_1, x_2 \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$, to kładąc $x = x_1 - \mathrm{i}x_2$ mamy

$$\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}.$$

- dla $u' \in \mathsf{M}'_{\mathrm{h}}$ mamy $\boldsymbol{q}u'\Omega = 0$, więc
$$\boldsymbol{tj}u'\Omega = \boldsymbol{x}u'\Omega = (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})u'\Omega = (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})u'\Omega = \boldsymbol{r}u'\Omega.$$

Stąd wynika, że

- dla $u \in \mathsf{M}$ mamy
$$\boldsymbol{tj}u\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})u^*\Omega.$$
- dla $u' \in \mathsf{M}'$
$$\boldsymbol{tj}u'\Omega = \boldsymbol{r}u'^*\Omega.$$

W świetle powyższych faktów mamy (nadal $x = x^*$)
$$\boldsymbol{tj}zx\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x^*z^*\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{x}z'^*\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{tj}z'\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}z'\Omega.$$
$$\boldsymbol{tj}yx\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x^*y^*\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x^*\boldsymbol{x}y'^*\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{tj}y'^*\Omega = (2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}y'\Omega.$$

Wstawiamy tę informację do ostatniego z równań (14.7):
$$\big(\boldsymbol{jt}x'\boldsymbol{tj}y'\Omega\big|z'\Omega\big) = \overline{\lambda}\left(y'\Omega\big|\boldsymbol{tj}zx\Omega\right) + \lambda\left(\boldsymbol{tj}yx\Omega\big|z'\Omega\right),$$
$$\big(\boldsymbol{jt}x'\boldsymbol{tj}y'\Omega\big|z'\Omega\big) = \overline{\lambda}\left(y'\Omega\big|(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}z'\Omega\right) + \lambda\left((2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}y'\Omega\big|z'\Omega\right).$$

Skoro podprzestrzeń $\mathsf{M}'\Omega$ jest gęsta w $\mathscr{H}$ mamy
$$\big(\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x}\eta\big|\zeta\big) = \big(\boldsymbol{jt}x'\boldsymbol{tj}\eta\big|\zeta\big) = \overline{\lambda}\left(\eta|(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}\zeta\right) + \lambda\left((2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}\eta|\zeta\right),$$
czyli ($x = x^*$)
$$\big(\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x}\eta\big|\zeta\big) = (\lambda\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\eta|\zeta) + \big(\overline{\lambda}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}\eta\big|\zeta\big),$$
co daje
$$\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r}) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}.$$

□

Stwierdzenie 14.23. *Niech $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}$ dla pewnego $\phi \in]-\pi,\pi[$. Weźmy $x' \in \mathsf{M}'$ i niech $x \in \mathsf{M}$ będzie taki, że*
$$\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r}) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}.$$
Wówczas
$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt.$$

Dowód. Ustalmy $\xi,\eta \in \mathscr{H}$ i zdefiniujmy funkcję $f\colon \left\{z \in \mathbb{C}\,\middle|\,|\Re z| \leq \frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{C}$ kładąc
$$f(z) = \left(\eta\middle|\boldsymbol{r}^{z+\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{-z+\frac{1}{2}}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{z+\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}^{-z+\frac{1}{2}}\xi\right).$$
(Pamiętamy funkcja $w \mapsto a^{\mathrm{i}w}$ jest dobrze określona dla $\Im w \leq 0$ i holomorficzna dla $\Im w < 0$. Mamy $z + \frac{1}{2} = \mathrm{i}\big(-\mathrm{i}z - \frac{\mathrm{i}}{2}\big)$ oraz $-z + \frac{1}{2} = \mathrm{i}\big(\mathrm{i}z - \frac{\mathrm{i}}{2}\big)$ tak więc oba wykładniki są postaci $\mathrm{i}w$ dla pewnego w takiego, że $\Im w \leq 0$.) Funkcja f jest ciągła i ograniczona na pionowym pasku $\left\{z \in \mathbb{C}\,\middle|\,|\Re z| \leq \frac{1}{2}\right\}$ i holomorficzna na jego wnętrzu.

Zauważmy dalej, że
$$\lambda f\big(\mathrm{i}t+\tfrac{1}{2}\big) = \lambda\left(\eta\big|\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\right),$$
$$\overline{\lambda}f\big(\mathrm{i}t-\tfrac{1}{2}\big) = \overline{\lambda}\left(\eta\big|\Delta^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\right).$$
dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Na mocy twierdzenia 14.35 mamy

$$f(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\big(\lambda f\big(\mathrm{i}t+\tfrac{1}{2}\big)+\overline{\lambda}f\big(\mathrm{i}t-\tfrac{1}{2}\big)\big)\,dt.$$

Z jednej strony

$$f(0)=\left(\eta\middle|\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}\xi\right)=(\boldsymbol{t}\eta|x\boldsymbol{t}\xi)\,,$$

a z drugiej

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}&\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\big(\lambda f\big(\mathrm{i}t+\tfrac{1}{2}\big)+\overline{\lambda}f\big(\mathrm{i}t-\tfrac{1}{2}\big)\big)\,dt\\
&=\left(\eta\middle|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\big(\lambda\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})+\overline{\lambda}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}\big)\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,\xi\right)\\
&=\left(\eta\middle|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x}\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,\xi\right)\\
&=\left(\eta\middle|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\boldsymbol{t}\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,\xi\right)\\
&=\left(\boldsymbol{t}\eta\middle|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,\boldsymbol{t}\xi\right).\end{aligned}$$

Tak więc

$$x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt,$$

gdyż obraz operatora $\boldsymbol{t}$ jest gęsty w $\mathscr{H}$. □

Stwierdzenie 14.24. *Dla każdego $x'\in\mathsf{M}'$ i dowolnego $t\in\mathbb{R}$ mamy*

$$\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\in\mathsf{M}.\tag{14.8}$$

Dowód. Ustalmy x'. Dla $\lambda=\mathrm{e}^{\frac{\phi}{2}}$ przy $\phi\in]-\pi,\pi[$ niech $x\in\mathsf{M}$ będzie taki, że

$$\boldsymbol{x}x'\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{r}x(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})+\overline{\lambda}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})x\boldsymbol{r}.$$

Niech $y'\in\mathsf{M}'$ oraz $\xi,\eta\in\mathscr{H}$ i niech

$$g(t)=\big(\eta\big|y'\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\big)-\big(\eta\big|\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}y'\xi\big)\,.$$

Na mocy wzoru

$$x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt$$

mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}g(t)\,dt=0,$$

dla dowolnego $\phi\in]-\pi,\pi[$, bo y' komutuje z x.

Wynika stąd, że $g=0$. Istotnie, jeśli zdefiniujemy

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}g(t)\,dt$$

dla z takich, że $|\Re z|<\pi$, to f będzie funkcją holomorficzną w tym obszarze, znikajacą dla $z\in]-\pi,\pi[$. Wówczas f jest tożsamościowo równa zero. W szczególności $f(\mathrm{i}s)=0$ dla wszystkich $s\in\mathbb{R}$, czyli

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}g(t)\,dt=0$$

dla wszystkich $s\in\mathbb{R}$. To oznacza, że funkcja,

$$t\longmapsto\frac{g(t)}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}$$

ma zerową transformatę Fouriera. Tak więc $g=0$ i jest tak dla wszystkich $\xi,\eta\in\mathscr{H}$. Stąd y' komutuje z $\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$. □

Wniosek 14.25. *Mamy* $\boldsymbol{j}\mathsf{M}'\boldsymbol{j}\subset\mathsf{M}$.

Dowód. Kładziemy $t=0$ we wzorze (14.8). □

Stwierdzenie 14.26. *Mamy* $\boldsymbol{j}\mathsf{M}\boldsymbol{j}\subset\mathsf{M}'$.

Dowód. Na początek wykażemy, że $\boldsymbol{j}\Omega=\Omega$. Mamy $\Omega\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}\Omega\subset K$, ale też $\Omega\in\mathsf{M}'_{\mathrm{h}}\Omega\subset(\mathrm{i}K)^{\perp_\Re}$. Tak więc $\Omega\in K\cap\mathrm{i}K^{\perp_\Re}$. Stąd $\boldsymbol{p}\Omega=\Omega$ i $\boldsymbol{q}\Omega=0$. Tym samym

$$\boldsymbol{r}\Omega=\Omega\quad\text{oraz}\quad\boldsymbol{x}\Omega=\Omega.$$

Skoro $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}^{\frac12}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac12}$, również $\boldsymbol{t}\Omega=\Omega$, a więc ($\boldsymbol{x}=\boldsymbol{j}\boldsymbol{t}$) mamy $\boldsymbol{j}\Omega=\Omega$.

Dalej Zauważmy, że skoro $\boldsymbol{j}K=(\mathrm{i}K)^{\perp_\Re}$, dla każdego $x,y\in\mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ mamy

$$(y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)\in\mathbb{R}.\tag{14.9}$$

Istotnie: $(y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)=\Re\,(y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)+\mathrm{i}\Im\,(y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)$, a

$$\Im\,(y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)=\Re\,(\mathrm{i}y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)=0.$$

Mamy dalej, na mocy (14.9) i samosprzężoności $\boldsymbol{j}$,

$$(y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)=(\boldsymbol{j}x\Omega|y\Omega)=(\boldsymbol{j}y\Omega|x\Omega)\,.$$

Teraz przekształcamy obie strony tego wzoru

$$\begin{aligned}(y\Omega|\boldsymbol{j}x\Omega)&=(\boldsymbol{j}y\Omega|x\Omega)\,,\\(y\Omega|\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j}\Omega)&=(\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega|x\Omega)\,,\\(\Omega|y\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j}\Omega)&=(x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega|\Omega)\end{aligned}$$

(x i y są samosprzężone). Teraz dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ i $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $y = x_1 + \mathrm{i}y_2$ mamy

$$\begin{aligned}
(\Omega|y\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j}\Omega) &= (\Omega|(y_1+\mathrm{i}y_2)\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j}\Omega)\\
&= (\Omega|y_1\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j}\Omega) + \mathrm{i}\,(\Omega|y_2\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j}\Omega)\\
&= (\Omega|y_1\boldsymbol{j}(x_1+\mathrm{i}x_2)\boldsymbol{j}\Omega) + \mathrm{i}\,(\Omega|y_2\boldsymbol{j}(x_1+\mathrm{i}x_2)\boldsymbol{j}\Omega)\\
&= (\Omega|y_1\boldsymbol{j}x_1\boldsymbol{j}\Omega) - \mathrm{i}\,(\Omega|y_1\boldsymbol{j}x_2\boldsymbol{j}\Omega) + \mathrm{i}\,(\Omega|y_2\boldsymbol{j}x_1\boldsymbol{j}\Omega) + (\Omega|y_2\boldsymbol{j}x_2\boldsymbol{j}\Omega)\\
&= (x_1\boldsymbol{j}y_1\boldsymbol{j}\Omega|\Omega) - \mathrm{i}\,(x_2\boldsymbol{j}y_1\boldsymbol{j}\Omega|\Omega) + \mathrm{i}\,(x_1\boldsymbol{j}y_2\boldsymbol{j}\Omega|\Omega) + (x_2\boldsymbol{j}y_2\boldsymbol{j}\Omega|\Omega)\\
&= ((x_1+\mathrm{i}x_2)\boldsymbol{j}y_1\boldsymbol{j}\Omega|\Omega) + ((x_1+\mathrm{i}x_2)\boldsymbol{j}\mathrm{i}y_2\boldsymbol{j}\Omega|\Omega)\\
&= (x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega|\Omega)\,,
\end{aligned}$$

czyli

$$(\Omega|y\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j}\Omega) = (x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega|\Omega)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathsf{M}$. Na mocy wniosku (14.25) możemy zamiast y położyć $y\boldsymbol{j}y'\boldsymbol{j}$ dla dowolnego $y' \in \mathsf{M}'$. Zatem

$$\big(\Omega\big|y(\boldsymbol{j}y'\boldsymbol{j})(\boldsymbol{j}x\boldsymbol{j})\Omega\big) = \big(x(\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j})y'\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}\Omega\big|\Omega\big)\,,\qquad (x, y \in \mathsf{M},\ y' \in \mathsf{M}').$$

Przyjmując ponownie, że x i y są samosprzężone możemy nieco uprościć powyzsze wyrażenie, gdyż wtedy lewa strona jest równa

$$\big(\Omega\big|y\boldsymbol{j}y'x\Omega\big) = \big(y\Omega\big|\boldsymbol{j}y'x\Omega\big) = \big(y'x\Omega\big|\boldsymbol{j}y\Omega\big) = \big(xy'\Omega\big|\boldsymbol{j}y\Omega\big) = \big(xy'\Omega\big|\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega\big) = \big(y'\Omega\big|x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega\big)\,,$$

natomiast prawa

$$\big(x(\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j})y'\Omega\big|\Omega\big) = \big(\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}y'\Omega\big|x\Omega\big) = \big(\boldsymbol{j}x\Omega\big|y\boldsymbol{j}y'\Omega\big) = \big(y\boldsymbol{j}x\Omega\big|\boldsymbol{j}y'\Omega\big) = \big(y'\Omega\big|\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}x\Omega\big)\,.$$

Tym samym dostajemy

$$\big(y'\Omega\big|x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega\big) = \big(y'\Omega\big|\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}x\Omega\big)\,,\qquad (x, y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}},\ y' \in \mathsf{M}'_{\mathrm{h}}).$$

Skoro $\mathsf{M}'\Omega$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathscr{H}$ otrzymujemy

$$x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega = \boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}x\Omega,\qquad (x, y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}). \tag{14.10}$$

Podobnie jak poprzednio znajdujemy, że powyższa równość zachodzi dla wszystkich $x, y \in \mathsf{M}$.

Teraz we wzorze (14.10) wstawiamy xz zamiast z (dla $z \in \mathsf{M}$), by otrzymać

$$xz\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega = \boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}xz\Omega.$$

Ale $z\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}\Omega = \boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}z\Omega$, czyli mamy

$$x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}z\Omega = \boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}xz\Omega,\qquad (x, y, z \in \mathsf{M})$$

Skoro $\overline{\mathsf{M}\Omega} = \mathscr{H}$, dostajemy

$$x\boldsymbol{j}y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}y\boldsymbol{j}x$$

dla wszytskich $x, y \in \mathsf{M}$. W szczególności $\boldsymbol{j}\mathsf{M}\boldsymbol{j} \subset \mathsf{M}'$. □

Dowód twierdzenia 14.19. Punkt (2) wynika z wniosku 14.25 i stwierdzenia 14.26. Teraz punkt (1) wynika ze stwierdzenia 14.24. □

Twierdzenie 14.27. *Niech* M *będzie algebrą von Neumanna i niech* ω *będzie wiernym stanem normalnym na* M. *Wówczas istnieje jedyna* w*-ciągła jednoparametrowa grupa* $(\sigma_t^\omega)_{t\in\mathbb{R}}$ *automorfizmów* M *spełniająca warunek K.M.S. względem* ω, *tj. taka, że dla dowolnych* $x, y \in \mathsf{M}$ *istnieje ciągła i ograniczona funkcja*

$$f\colon \big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\,0 \le \Im z \le 1\big\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorficzna na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$ *taka, że*

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \omega\big(y\sigma_t^\omega(x)\big), \\ f(t+\mathrm{i}) &= \omega\big(\sigma_t^\omega(x)y\big), \end{aligned}\right\} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Jeśli ω *jest postaci*

$$\omega(x) = (\Omega|a\Omega)\,, \qquad (a \in \mathsf{M}), \tag{14.11}$$

dla cyklicznego i separującego wektora Ω*, wówczas*

$$\sigma_t^\omega(x) = \Delta^{\mathrm{i}t} x \Delta^{-\mathrm{i}t}, \qquad (x \in \mathsf{M}\ t \in \mathbb{R}),$$

gdzie $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ *jest grupą modularną stowarzyszoną z rzeczywistą podprzestrzenią* $K = \overline{\mathsf{M}_{\mathrm{h}}\Omega}$.

Dowód. Ponieważ reprezentacja G.N.S. związana ze stanem ω jest normalnym izomorfizmem (na swój obraz) możemy założyć, że $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ i ω jest postaci (14.11) dla pewnego wektora $\Omega \in \mathscr{H}$ cyklicznego i separującego dla M.

Niech $K = \overline{\mathsf{M}_{\mathrm{h}}\Omega}$ i niech $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ będzie stowarzyszoną grupą modularną. Wówczas możemy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zdefiniować automorfizm σ_t^ω algebry M kładąc

$$\sigma_t^\omega(x) = \Delta^{\mathrm{i}t} x \Delta^{-\mathrm{i}t}.$$

Jest jasne, że dla ustalonego $x \in \mathsf{M}$ funkcja $x \mapsto \sigma_t^\omega(x)$ jest w-ciągła (jest ewidentnie mocno ciągła w topologii $\mathrm{B}(\mathscr{H})$). Jest również jasne, że $(\sigma_t^\omega)_{t\in\mathbb{R}}$ jest jednoparametrową grupą automorfizmów M.

Przypomnijmy, że $\boldsymbol{r}\Omega = \Omega$, więc $\Delta^{\mathrm{i}t}\Omega = \Omega$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Dla $x, y \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$ para wektorów $(y\Omega, x\Omega)$ należy do $K \times K$, a więc istnieje odpowiadająca im funkcja K.M.S.

$$f\colon \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \Im z \leq 1\} \to \mathbb{C}$$

(ciągła i ograniczona, holomorficzna na wnetrzu paska). Mamy dla $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \big(y\Omega\big|\Delta^{\mathrm{i}t}x\Omega\big) = f(t) = \big(y\Omega\big|\Delta^{\mathrm{i}t}x\Delta^{-\mathrm{i}t}\Omega\big) = \omega\big(y\sigma_t^\omega(x)\big)$$

oraz

$$f(t+\mathrm{i}) = \overline{f(t)} = \overline{\omega\big(y\sigma_t^\omega(x)\big)} = \omega\big(\big(y\sigma_t^\omega(x)\big)^*\big) = \omega\big(\sigma_t^\omega(x)y\big).$$

Teraz niech $a, b \in \mathsf{M}$ i $a = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $b = y_1 + \mathrm{i}y_2$, dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathsf{M}_{\mathrm{h}}$. Niech $f_{i,j}$ będzie odpowiednią funkcją K.M.S. dla (y_i, x_j) przy $i, j = 1, 2$:

$$f_{i,j}(t) = \omega\big(y_i\sigma_t^\omega(x_j)\big), \qquad f_{i,j}(t+\mathrm{i}) = \omega\big(\sigma_t^\omega(x_j)y_i\big).$$

Wówczas $f = f_{1,1} - f_{2,2} + \mathrm{i}(f_{1,2} + f_{2,1})$ jest funkcją K.M.S. dla (y, x):

$$f(t) = \omega\big(y\sigma_t^\omega(x)\big), \qquad f(t+\mathrm{i}) = \omega\big(\sigma_t^\omega(x)y\big).$$

Innymi słowy $(\sigma_t^\omega)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem ω.

Niech teraz $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie jednoparametrową grupą automorfizmów M spełniającą warunek K.M.S. względem ω. Wówczas stan ω jest niezmenniczy dla $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$: kładąc $y = \mathbb{1}$ w warunku K.M.S. uzyskujemy ciągłą i ograniczoną funkcję f na pasku taką, że $f(t) = f(t + \mathrm{i})$ dla wszytkich t — funkcja taka musi być stała.

Zdefiniujmy jednoparametrową mocno ciągłą grupę $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ operatorów unitarnych na $\mathscr{H}$ wzorem

$$U_t x\Omega = \alpha_t(x)\Omega.$$

- Unitarność wynika z niezmienniczości ω:

$$(U_t x\Omega|U_t y\Omega) = (\Omega|\alpha_t(x^*y)\Omega) = \omega\big(\alpha_t(x^*y)\big) = \omega(x^*y) = (x\Omega|y\Omega)\,.$$

- Ciągłość wynika z ciągłości $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Istotnie, funkcja $t \mapsto U_t$ jest słabo ciągła, tj. dla wszystkich $\xi, \eta \in \mathscr{H}$ funkcje $t \mapsto (\eta|U_t\xi)$ są ciągłe. Aby to sprawdzić wystarczy wykazać, że $(\eta|U_t\xi)$ dąży do $(\eta|\xi)$ gdy $t \to 0$, ponieważ
$$(\eta|U_{t_1}\xi) - (\eta|U_{t_2}\xi) = (\eta|(U_{t_1} - U_{t_2})\xi) = (U_{-t_2}\eta|U_{t_1-t_2}\xi - \xi)\,.$$
Dla danych $\xi, \eta \in \mathscr{H}$ istnieje $x \in \mathsf{M}$ taki, że $\|x\Omega - \xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3\|\eta\|}$. Zatem
$$\begin{aligned}\big|(\eta|U_t\xi) - (\eta|\xi)\big| &= \big|(\eta|U_t\xi - \xi)\big| \\ &\leq \big|(\eta|U_t\xi - U_tx\Omega)\big| + \big|(\eta|U_tx\Omega - x\Omega)\big| + \big|(\eta|x\Omega - \xi)\big| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \big|(\eta|(\alpha_t(x) - x)\xi)\big| + \tfrac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$
Skoro grupa $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ jest w-ciągła, funkcja $t \mapsto (\eta|(\alpha_t(x) - x)\xi)$ jest ciągła, a więc
$$\big|(\eta|(\alpha_t(x) - x)\xi)\big| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$
dla $|t|$ dostatecznie małych.
Mocna ciągłość $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ wynika ze standardowego argumentu:
$$\begin{aligned}\|U_t\xi - \xi\|^2 &= \|U_t\xi\|^2 - (U_t\xi|\xi) - (\xi|U_t\xi) - \|\xi\|^2 \\ &= \|\xi\|^2 - (U_t\xi|\xi) - (\xi|U_t\xi) - \|\xi\|^2 \\ &= 2\Re\,(\xi|U_t\xi)\,.\end{aligned}$$

Grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ewidentnie implementuje automorfizmy $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$:
$$U_tyU_t^*x\Omega = U_ty\alpha_{-t}(x)\Omega = \alpha_t\big(y\alpha_{-t}(x)\big)\Omega = \alpha_t(y)x\Omega.$$
Skoro dla każdego $x, y \in \mathsf{M}$ mamy funkcję f taką, że
$$f(t) = \omega\big(y\alpha_t(x)\big) \quad \text{oraz} \quad f(t+\mathrm{i}) = \omega(\alpha_t(x)y),$$
biorąc $x = x^*$ i $y = y^*$ otrzymujemy $f(t+\mathrm{i}) = \overline{f(t)}$. Z drugiej strony
$$\omega\big(y\alpha_t(x)\big) = (\Omega|y\alpha_t(x)\Omega) = (\Omega|yU_txU_t^*\Omega) = (y\Omega|U_txU_t^*\Omega) = (y\Omega|U_tx\Omega)\,,$$
bo $U_s\Omega = \Omega$ dla wszystkich s. Innymi słowy grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem podprzestrzeni $K_0 = \mathsf{M}_{\mathrm{h}}\Omega$. Z twierdzenia 14.18 wynika, że $U_t = \Delta^{\mathrm{i}t}$ dla wszytskich $t \in \mathbb{R}$. W szczególności
$$\alpha_t(x) = \Delta^{\mathrm{i}t}x\Delta^{-\mathrm{i}t}$$
dla wszystkich $x \in \mathsf{M}$ i $t \in \mathbb{R}$. □

Definicja 14.28. Funkcjonał liniowy φ na C*-algebrze A nazywamy *śladowym* lub *centralnym*, jeśli dla dlawolnych $a, b \in \mathsf{A}$ mamy
$$\varphi(ab) = \varphi(ba).$$

Uwaga 14.29. Niech φ będzie dodatnim funlcjonałem na C*-algebrze A. Wówczas φ jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\varphi(a^*a) = \varphi(aa^*), \qquad (a \in \mathsf{A}). \tag{14.12}$$
Istotnie, śladowość φ oczywiście implikuje (14.12). Z drugiej strony tożsamość polaryzacyjna pokazuje, że z (14.12) wynika, że φ jest śladowy.

Twierdzenie 14.30. *Niech M będzie algebrą von Neumanna in niech ω będzie wiernym stanem normalnym na M. Wówczas ω jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ automorfizm σ_t^ω jest trywialny.*

Dowód. Jeśli ω jest stanem śladowym, to dla dowolnych $x,y \in \mathsf{M}$ funkcja K.M.S. f jest stała, a więc $\omega\bigl(y\bigl(\sigma_t^\omega(x)-x\bigr)\bigr)=0$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$. W szczególności, ustalając t i kładąc $y=\bigl(\sigma_t^\omega(x)-x\bigr)^*$ otrzymujemy $\sigma_t^\omega(x)=x$ (na mocy wierności ω). □

14.8. **Inne spojrzenie na operatory teorii Tomity-Takesakiego.**

Dygresja 14.31. Niech T będzie gęsto zdefiniowanym operatorem liniowym na $\mathscr{H}$. Definiujemy operator sprzężony T^* w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix}\xi\in\mathrm{D}(T^*)\\ \eta=T^*\xi\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\,\zeta\in\mathrm{D}(T)\\ (\xi|T\zeta)=(\eta|\zeta)\end{pmatrix}. \tag{14.13}$$

Operator T^* jest dobrze zdefiniowany, bo dziedzina T jest gęsta. Łatwo też sprawdzić, że T^* jest zawsze operatorem domkniętym. Mamy również:

$$\Bigl(T^*\text{ jest gęsto zdefiniowany}\Bigr)\Longrightarrow\Bigl(T\text{ jest domykalny}\Bigr)$$

(patrz stwierdzenie 15.2).

Operacja sprzężenia jest również zdefiniowana dla operatorów antyliniowych: jeśli T jest antyliniowy, to definicja (14.13) przyjjmuje postać

$$\begin{pmatrix}\xi\in\mathrm{D}(T^*)\\ \eta=T^*\xi\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\,\zeta\in\mathrm{D}(T)\\ (T\zeta|\xi)=(\eta|\zeta)\end{pmatrix}. \tag{14.14}$$

Możemy też zapomnieć, że $\mathscr{H}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i rozważać tylko rzeczywistą strukturę przestrzeni Hilberta daną przez $\Re(\cdot|\cdot)$. Wówczas opertaor T (liniowy lub antyliniowy na zespolonej przestrzeni $\mathscr{H}$) stjae się po prostu $\mathbb{R}$-liniowym operatorem na rzeczywistej przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$ i możemy zdefiniować jego sprzężenie $T^\star$ kładąc

$$\begin{pmatrix}\xi\in\mathrm{D}(T^\star)\\ \eta=T^\star\xi\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\,\zeta\in\mathrm{D}(T)\\ \langle\xi,T\zeta\rangle=\langle\eta,\zeta\rangle\end{pmatrix}, \tag{14.15}$$

gdzie przez $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznaczyliśmy część rzeczywistą $(\cdot|\cdot)$.

Fakt 14.32. *Jeśli T jest $\mathbb{C}$-liniowy lub antyliniowy, to $T^\star=T^*$.*

Jest jasne, że prawa strona (14.15) wynika z prawej strony (14.13) jak i z prawej strony (14.14). Z drugiej strony, ponieważ dla $\alpha,\beta\in\mathscr{H}$ mamy $\Im(\alpha|\beta)=-\Re(\alpha|\mathrm{i}\beta)=\langle\alpha,-\mathrm{i}\beta\rangle$, z prawej strony (14.15) wynika, że

$$\Im(\xi|T\zeta)=\langle\xi,-\mathrm{i}T\zeta\rangle\quad\text{oraz}\quad\Im(\eta|\zeta)=\langle\eta,-\mathrm{i}\zeta\rangle.$$

Tak więc jeśli T jest $\mathbb{C}$-liniowy, to otrzymujemy $(\xi|T\zeta)=(\eta|\zeta)$, a jeśli T jest antyliniowy, to $(\xi|T\zeta)=\overline{(\eta|\zeta)}=(\zeta|\eta)$.

Wracając do teorii Tomity-Takesakiego rozważmy teraz następującą konstrukcję: ponieważ Ω jest separujący operacja

$$\boldsymbol{s}_0\colon x\Omega\longmapsto x^*\Omega,\qquad(x\in\mathsf{M})$$

jest dobrze zdefiniowana. Dzięki cylkiczności Ω operator antyliniowy $\boldsymbol{s}_0$ jest gęsto zdefiniowany. Tak samo definiujemy gęsto zdefiniowany antyliniowy operator $\boldsymbol{f}_0$:

$$\boldsymbol{f}_0\colon x'\Omega\longmapsto x'^*\Omega,\qquad(x'\in\mathsf{M}').$$

Dla $x\in\mathsf{M}$ i $x'\in\mathsf{M}'$ mamy

$$\bigl(\boldsymbol{s}_0x\Omega\big|x'\Omega\bigr)=\bigl(x^*\Omega\big|x'\Omega\bigr)=\bigl(\Omega\big|xx'\Omega\bigr)=\bigl(\Omega\big|x'x\Omega\bigr)=\bigl(x'^*\Omega\big|x\Omega\bigr)=\bigl(\boldsymbol{f}_0x'\Omega\big|x\Omega\bigr).$$

Zatem $\boldsymbol{f}_0\subset\boldsymbol{s}_0^*$ i $\boldsymbol{s}_0\subset\boldsymbol{f}_0^*$. Zatem oba operatory są domykalne.

Pokażemy, że domknięcie $\boldsymbol{s}_0$ jest operatorem $\boldsymbol{s}$ rozważanym w części 14.2.1 (tak samo uzyskujemy $\overline{\boldsymbol{f}_0} = \boldsymbol{f}$). Jest jasne, że $\boldsymbol{s}_0 \subset \boldsymbol{s}$, a $\boldsymbol{s}$ jest domknięty, więc $\overline{\boldsymbol{s}_0} \subset \boldsymbol{s}$. Niech $\zeta \in \mathrm{D}(\boldsymbol{s})$. Oznacza to, że $\zeta = \xi + \eta$, gdzie $\xi \in K$ i $\eta \in \mathrm{i}K$. Weźmy dwa ciągi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów M_{h} takie, że

$$x_n\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi, \qquad \mathrm{i}y_n\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta.$$

Kładąc $\zeta_n = x_n\Omega + \mathrm{i}y_n\Omega$ mamy $\zeta_n \in \mathrm{D}(\boldsymbol{s}_0)$. Jest jasne, że

$$\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \zeta$$

oraz

$$\boldsymbol{s}_0\zeta_n = x_n\Omega - \mathrm{i}y_n\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi - \eta = \boldsymbol{s}\zeta.$$

Stąd $\boldsymbol{s} \subset \overline{\boldsymbol{s}_0}$.

Teraz zauważmy, że stwierdzenie 14.7(3) mówi, że

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{j}\Delta^{\frac{1}{2}} \quad \mathrm{i} \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}\Delta^{-\frac{1}{2}}. \tag{14.16}$$

Ponieważ operator $\Delta^{\pm\frac{1}{2}}$ jest dodatni i samosprzężony, a operator $\boldsymbol{j}$ jest antyunitarny, więc (14.16) są rozkładami biegunowymi operatorów $\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{f}$. W tradycyjnym ujęciu teorii Tomity-Takesakiego punktem wyjścia jest operator $\boldsymbol{s}$ i jego rozkład biegunowy.

14.8.1. *Dodatek: kilka słów o funkcjach holomorficznych.*

Twierdzenie 14.33. *Niech* $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \Im z \leq 1\}$ *i niech*

$$f \colon P \longrightarrow \mathbb{C}$$

będzie ciągłą i ograniczoną funkcją, holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$. *Niech*

$$A = \sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl|f(t)\bigr|, \qquad B = \sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl|f(t+\mathrm{i})\bigr|.$$

Wówczas dla dowolnego $z \in P$ *mamy*

$$\bigl|f(z)\bigr| \leq A^{1-\Im z}B^{\Im z}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$\varphi \colon z \longmapsto f(z)A^{-(1+\mathrm{i}z)}B^{\mathrm{i}z}$$

Jest ona ciągła na P i analityczna na wnętrzu P. Ponadto

$$A^{-(1+\mathrm{i}z)}B^{\mathrm{i}z} = \exp\bigl(-(1+\mathrm{i}z)\log A + \mathrm{i}z\log B\bigr),$$

czyli

$$\bigl|\varphi(z)\bigr| = \bigl|f(z)\bigr|\exp\bigl((\Im z - 1)\log A - \Im z\log B\bigr) = \bigl|f(z)\bigr|A^{(\Im z-1)}B^{-\Im z}.$$

Zatem φ jest ograniczona na P oraz

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl|\varphi(t)\bigr| = \sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl|\varphi(t+\mathrm{i})\bigr| = 1.$$

Wykażemy, że $\bigl|\varphi(z)\bigr| \leq 1$ dla wszytskich $z \in P$. Jeśli $\varphi(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, to fakt ten wynika z zasady maksimum.[12]

Jeśli $\varphi(z)$ nie dąży do 0 w nieskończoności, rozważmy

$$\varphi_n(z) = \varphi(z)\exp\bigl(\tfrac{-1-z^2}{n}\bigr).$$

[12] Przez $\varphi(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ rozumiemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje R takie, że $|z| > R$ implikuje $\bigl|\varphi(z)\bigr| < \varepsilon$.

Mamy $\left|\exp\left(\frac{-1-z^2}{n}\right)\right| = \exp\left(\frac{(\Im z)^2-1-(\Re z)^2}{n}\right) \leq 1$ i oczywiście dla każdego z

$$\varphi_n(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0.$$

Zatem $\left|\varphi_n(z)\right| \leq 1$ dla wszystkich $z \in P$. Ponato $\varphi_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(z)$, z więc mamy także $\left|\varphi_n(z)\right| \leq 1$ dla wszystkich $z \in P$. □

Ponieważ dla $A, B > 0$ funkcja

$$u\colon [0,1] \ni \theta \longmapsto A^{1-\theta}B^{\theta}$$

jest wypukła ($u'' = (\log B - \log A)^2 u > 0$), mamy $u(\theta) \leq \max\left\{u(0), u(1)\right\}$, skąd dostajemy

Wniosek 14.34. *Niech* $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \Im z \leq 1\}$ *i niech*

$$f\colon P \longrightarrow \mathbb{C}$$

będzie ciągłą i ograniczoną funkcją, holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$*. Wówczas dla każdego* $z \in P$

$$\left|f(z)\right| \leq \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f(t)\right|, \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f(t+\mathrm{i})\right|\right\}.$$

Twierdzenie 14.35. *Niech* $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}$ *dla pewnego* $\phi \in]-\pi,\pi[$*. Niech* f *będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na pasku* $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\Re z| \leq \frac{1}{2}\right\}$*, holomorficzną na jego wnętrzu. Wówczas*

$$f(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}}\left(\lambda f\left(\mathrm{i}t + \tfrac{1}{2}\right) + \overline{\lambda} f\left(\mathrm{i}t - \tfrac{1}{2}\right)\right) dt$$

Dowód. Definiujemy $g(z) = \pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi z}\frac{f(z)}{\sin \pi z}$. Wówczas g ma biegun pierwszego rzędu w $z = 0$ z residuum $f(0)$. Ponadto $g(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, bo f jest ograniczona, a $|\phi| < \pi$. Zatem

$$f(0) = \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(\mathrm{i}t + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{i}\,dt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(\mathrm{i}t - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{i}\,dt\right).$$

Wzór, którego dowodzimy wynika z faktu, że

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} g\left(\mathrm{i}t + \tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{\mathrm{i}}\lambda \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} f\left(\mathrm{i}t + \tfrac{1}{2}\right),\\
-\tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} g\left(\mathrm{i}t - \tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{\mathrm{i}}\overline{\lambda} \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} f\left(\mathrm{i}t - \tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

15. Operatory niograniczone

Niech $\mathscr{H}$ bę dzie przestrzenią Hilberta i niech T będzi operatorem na $\mathscr{H}$. Dziedzinę operatora T będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{D}(T)$.

Dla operatora T na $\mathscr{H}$ symbolem $\mathrm{G}(T)$ będziemy oznaczać wykres T:

$$\mathrm{G}(T) = \left\{\begin{bmatrix}\gamma\\ T\gamma\end{bmatrix} \,\middle|\, \gamma \in \mathrm{D}(T)\right\}.$$

Powiemy, że operator T zawiera się w operatorze S jeśli $\mathrm{G}(T) \subset \mathrm{G}(S)$ (innymi słowy $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(S)$ i $S\big|_{\mathrm{D}(T)} = T$). Zapisujemy to jako $T \subset S$.

Niech T będzie operatorem liniowym na $\mathscr{H}$. Jeśli dziedzina $\mathrm{D}(T)$ jest gęsta w $\mathscr{H}$, to możemy zdefiniować operator T^* przez relację

$$\Big(\zeta \in \mathrm{D}(T^*) \text{ i } \eta = T^*\zeta\Big) \iff \Big(\forall\, \xi \in \mathrm{D}(T) \;\; (\zeta|T\xi) = (\eta|\xi)\Big).$$

Innymi słowy do $\mathrm{D}(T^*)$ należą te wektory ζ, dla których funkcjonał $\mathrm{D}(T) \ni \xi \mapsto (\zeta|T\xi)$ jest ciągły. Ponieważ $\mathrm{D}(T)$ jest gęsta w $\mathscr{H}$ funkcjonał ten rozszerza się jednoznacznie na całą przestrzeń $\mathscr{H}$ i (na mocy lematy Riesza) jest on dany przez iloczyn skalarny z pewnym (jedynym) wektorem η. Ten wektor jest właśnie wartością T^* na ξ.

Definicja 15.1. Operator T nazywamy *domkniętym* jeśli $\mathrm{G}(T)$ jest domkniętą podprzestrzenią w $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Operator T jest *domykalny*, jeśli $\overline{\mathrm{G}(T)}$ jest wykresem operatora. W takim wypadku operator ten oznaczamy symbolem $\overline{T}$ inazywamy *domknięciem* T.

Stwierdzenie 15.2. *Niech T będzie gęsto zdefiniowanym operatorem na $\mathscr{H}$. Jeśli T^* ma gęstą dziedzinę, to T jest domykalny.*

Dowód. Jeśli T nie jest domykalny, to istnieje ciąg $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathrm{D}(T)$ taki, że

$$\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{oraz} \quad T\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma \neq 0.$$

Wówczas jeśli $\xi \in \mathrm{D}(T^*)$, to $(T^*\xi|\zeta_n) = (\xi|T\zeta_n)$, a więc przechodząc do granicy otrzymujemy $0 = (\xi|\gamma)$. Stąd niezerowy wektor γ jest ortogonalny do $\mathrm{D}(T^*)$. □

Fakt 15.3. *Dla gęsto zdefiniowanego T mamy*

$$\mathrm{G}(T^*) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{G}(T)^{\perp}.$$

Jeśli S i T są operatorami na $\mathscr{H}$, to ich złożenie ST definiujemy na

$$\mathrm{D}(ST) = \big\{\xi \in \mathrm{D}(T) \,\big|\, T\xi \in \mathrm{D}(S)\big\}.$$

Nie ma gwarancji, że $\mathrm{D}(ST)$ jest gęsta w $\mathscr{H}$. Natomiast, jeśli $\mathrm{D}(ST)$ jest gęsta, to istnieje operator $(ST)^*$ i mamy

$$T^*S^* \subset (ST)^*.$$

Istotnie, jeśli $\zeta \in \mathrm{D}(T * S^*)$, to dla dowolnego $\xi \in \mathrm{D}(ST)$ mamy

$$(\zeta|ST\xi) = (S^*\zeta|T\xi) = (T^*ST^*\zeta|\xi)\,,$$

a więc $\zeta \in \mathrm{D}\big((ST)^*\big)$ i $(ST)^*\zeta = T^*S^*\zeta$.

Od teraz będziemy rozważać wyłącznie operatory gęsto zdefiniowane.

Stwierdzenie 15.4. *Niech T będzie operatorem na $\mathscr{H}$ i $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$. Wówczas $(xT)^* = T^*x^*$.*

Dowód. Mamy, $\mathrm{D}(xT) = \mathrm{D}(T)$, więc operator xT jest gęsto zdefiniowany. Wiemy już, że $(xT)^* \supset T^*x^*$. Weźmy $\eta \in \mathrm{D}\big((xT)^*\big)$. Wówczas dla $\xi \in \mathrm{D}(T)$ mamy

$$((xT)^*\eta|\xi) = (\eta|xT\xi) = (x^*\eta|T\xi)$$

Zatem $x^*\eta \in \mathrm{D}(T^*)$ i $T^*(x^*\eta) = (xT)^*\eta$. Innymi słowy $\mathrm{D}\big((xT)^*\big) \subset \mathrm{D}(T^*x^*)$ i

$$(T^*x^*)\big|_{\mathrm{D}((xT)^*)} = (xT)^*,$$

tzn. $(xT)^* \subset T^*x^*$. □

Definicja 15.5.

(1) Operator T nazywamy *samosprzężonym*, jeśli $T = T^*$.

(2) Operator T nazywamy *dodatnim*, jeśli dla każdego $\xi \in \mathrm{D}(T)$ mamy $(\xi|T\xi) \geq 0$.

Dla operatorów samosprzężonych mamy rachunek funkcji ciągłych i borelowskich podobnie jak w przypadku operatorów ograniczonych. W szczególności dla dodatniego i samosprzężonego operatora T (uwaga: dla operatorów niegraniczonych z dodatniości nie wynika samosprzężoność) istnieje dokładnie jeden dodatni i samosprzężony pierwiastek z T.

Fakt 15.6. *Niech T będzie domkniętym operatoremna $\mathscr{H}$. Wówczas istniejedokładnie jedna para (v, A) złożnona z częściowej izometrii v i dodatniego i samosprzężonego operatora A taka, że*

- *$T = vA$,*
- *v^*v jest rzutem na* $\ker A^{\perp}$.

Powyższy rozkład operatora T nazywamy jego *rozkładem birgunowym.*

15.1. **Operatory stowarzyszone z algebrą von Neumanna.**

Definicja 15.7. Niech $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrąvon Neumanna i niech T będzie domkniętym i gęsto zdefiniowanym operatorem na $\mathscr{H}$. Powiemy, że T jest *stowarzyszony* z M, jeśli dla kazdego $x' \in \mathsf{M}'$ mamy $x'T \subset Tx'$. Relację stowarzyszenia zapisujemy tak: $T \,\eta\, \mathsf{M}$.

W szczególności ograniczony operator stowarzyszony z M należy do M. Zauważmy także, że $T \,\eta\, \mathsf{M}$ implikuje, że każdy dla każdego $x' \in \mathsf{M}'$ operator Tx' jest gęsto zdefiniowany.

Stwierdzenie 15.8. *Niech T będzie domkniętym i gęsto zdefiniowanym operatorem na $\mathscr{H}$. Wówczas $T \,\eta\, \mathsf{M}$wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \mathrm{G}(T) \subset \mathrm{G}(T), \qquad (x' \in \mathsf{M}'). \tag{15.1}$$

Dowód. Warunek (15.1) oznacza, że jeśli $x' \in \mathsf{M}'$, to dla każdego $\xi \in \mathrm{D}(T)$ wektor $\xi' = x'\xi$ należy do $\mathrm{D}(T)$ i $T\xi' = x'T\xi$. To jest dokładnie relacja $x'T \subset Tx'$. □

Wniosek 15.9. *Jeśli T jest domknięciem operatora T_0 i*

$$\begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \mathrm{G}(T_0) \subset \mathrm{G}(T_0), \qquad (x' \in \mathsf{M}'),$$

to $T \,\eta\, \mathsf{M}$.

Wniosek 15.10. *Niech $T \,\eta\, \mathsf{M}$. Wówczas $T^* \,\eta\, \mathsf{M}$.*

Dowód. Weźmy dowolny $x' \in \mathsf{M}'$. Mamy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \mathrm{G}(T^*) \subset \mathrm{G}(T^*) &= \begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{G}(T)^{\perp} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{G}(T)^{\perp} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \mathrm{G}(T)^{\perp} \\
&\subset \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{G}(T)^{\perp} = \mathrm{G}(T^*),
\end{aligned}$$

gdzie przy zawieraniu wykorzystaliśmy fakt, że M' jest $*$-algebrą. □

Twierdzenie 15.11. *Niech* $\mathsf{M} \subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ *będzie algebrą von Neumanna i niech* T *będzie domkniętym i gęsto zdefiniowanym operatorem na* $\mathscr{H}$ *o rozkładzie biegunowym* $T = U|T|$*. Załóżmy, że* T *jest stowarzyszony z* M*. Wówczas* $U \in \mathsf{M}$ *i* $\chi_E\big(|T|\big) \in \mathsf{M}$ *dla wszystkich borelowskich* $E \subset [0, +\infty[$*.*

Dowód. Weźmy $u' \in \mathcal{U}(\mathsf{M}')$. Mamy $u'|T| \subset |T|u'$ i $u'^*|T| \subset |T|u'^*$. Mnożąc pierwszą z tych relacji z prawej przez u'^*, a drugą z lewej przez u' otrzymujemy

$$u'|T|u'^* \subset |T| \subset u'|T|u'^*,$$

czyli $|T| = u'|T|u'^*$. Tak samo pokazujemy, że $u'Tu'^* = T$. Niech

$$S = u'Uu'^*u'|T|u'^* \tag{15.2}$$

Operator S jest domknity i gęsto zdefiniowany, a ponieważ

$$(u'Uu'^*)^*(u'Uu'^*) = u'U^*Uu'^* = u'\,\boldsymbol{s}\big(|T|\big)u'^* = \boldsymbol{s}\big(u'|T|u'^*\big).$$

zapis (15.2) jest jego rozkładem biegunowym. Ale jest jasne, że

$$S = u'U|T|u'^* = u'Tu'^* = T.$$

W szczególności $u'|T|u'^* = |T|$ (to już wiemy) i $u'Uu'^* = U$, Skoro tak jest dla wszystkich $u' \in \mathcal{U}(\mathsf{M}')$, widzimy, że $U \in \mathsf{M}$. Teraz

$$u'\chi_E\big(|T|\big)u'^* = \chi_E\big(u'|t|u'^*\big) = \chi_E\big(|T|\big), \qquad (u' \in \mathcal{U}(\mathsf{M}')),$$

więc $\chi_E\big(|T|\big) \in \mathsf{M}$ dla wszystkich borelowskich $E \subset [0, +\infty[$. □

16. Wagi

Definicja 16.1. Niech A będzie C*-algebrą. Podzbióe $\mathfrak{F} \subset \mathsf{A}_+$ nazywamy *ścianą*, jeśli

1. dla dowolnej nieujemnej liczby t i $x \in \mathfrak{F}$ mamy $tx \in \mathfrak{F}$,
2. jeśli $a, b \in \mathfrak{F}$ i $c \leq a + b$, to $c \in \mathfrak{F}$.

Stwierdzenie 16.2. *Niech* A *będzie* C*-*algebrą i niech* $\mathfrak{F}$ *będzie ścianą w* A*. Niech*

$$\mathfrak{N} = \big\{x \in A \,\big|\, x^*x \in \mathfrak{F}\big\},$$
$$\mathfrak{M} = \left\{\sum_{k=1}^n y_k^*x_k \,\middle|\, y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{N}\right\} = \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}.$$

Wówczas

1. $\mathfrak{N}$ *jest lewym ideałem w* A*,*
2. $\mathfrak{M}$ *jest* $*$*-podalgebrą* A*,*
3. $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap \mathsf{A}_+$*,*
4. $\mathfrak{M} = \operatorname{span}\mathfrak{F}$*.*

Dowód. Ad (1). Weźmy $x, y \in \mathfrak{F}$. Wtedy

$$(x + y)^*(x + y) = x^*x + y^*y + x^*y + y^*x. \tag{16.1}$$

Teraz skoro

$$\begin{aligned} x^*x - x^*y + y^*y - y^*x &= x^*(x - y) + y^*(y - x) \\ &= x^*(x - y) - y^*(x - y) \\ &= (x - y)^*(x - y) \geq 0, \end{aligned}$$

mamy $x^*y+y^*x\leq x^*x+y^*y$, a więc (16.1) można przepisać jako

$$(x+y)^*(x+y)\leq 2(x^*x+y^*y)\in\mathfrak{F},$$

co daje $x+y\in\mathfrak{N}$. Niech $\lambda\in\mathbb{C}$ i $x\in\mathfrak{F}$. Wówczas $(\lambda x)^*(\lambda x)=|\lambda|^2x^*x\in\mathfrak{F}$, a więc mamy też $\lambda x\in\mathfrak{N}$. Stąd $\mathfrak{N}$ jest podprzestrzenią w A. Wreszcie dla $a\in\mathsf{A}$ i $x\in\mathfrak{F}$ mamy $(ax)^*(ax)=x^*a^*ax^*\leq\|a\|^*x^*x\in\mathfrak{F}$, a więc $ax\in\mathfrak{N}$.

Ad (2). Zdefinicji $\mathfrak{M}$ jest podprzestrzenią A. Jeśli $x,y\in\mathfrak{N}$, to $(y^*x)^*=x^*y\in\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, a więc $\mathfrak{M}$ jest podzbiorem samosprzężonym. Dalej, jeśli $x,y,z,w\in\mathfrak{N}$, to $x^*y,w^*z\in\mathfrak{N}$, bo $\mathfrak{N}$ jest lewym ideałem. Tak więc

$$(y^*x)(w^*z)=(x^*y)^*(w^*z)\in\mathfrak{N}^*\mathfrak{N},$$

a zatem $\mathfrak{M}$ jest podalgebrą A.

Ad (3). Niech $a\in\mathfrak{F}$. Wówczas $a=x^*x$ dla pewnego $x\in\mathsf{A}$ i oczywiście $x\in\mathfrak{N}$ (z definicji). Zatem $a\in\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$. Skoro $\mathfrak{F}\subset\mathsf{A}_+$, mamy $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{M}\cap\mathsf{A}_+$.

Z drugiej strony, jeśli $a\in\mathfrak{M}\cap\mathsf{A}_+$, to $a=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^*x_k$, gdzie $y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{N}$ i a jest dodatni. W szczególności a jest samosprzężony, a więc $a=\frac{1}{2}(a+a^*)$. Stąd

$$\begin{aligned}
a&=\tfrac{1}{2}\biggl(\sum_{k=1}^{n}y_k^*x_k+\sum_{k=1}^{n}x_k^*y_k\biggr)\\
&=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\bigl(y_k^*x_k+x_k^*y_k\bigr)\\
&=\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\bigl((x_k+y_k)^*(x_k+y_k)-(x_k-y_k)^*(x_k-y_k)\bigr)\\
&\leq\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^*(x_k+y_k)\in\mathfrak{F},
\end{aligned}\tag{16.2}$$

jako że dla dowolonych $r,s\in A$ mamy

$$\begin{aligned}
(r+s)^*(r+s)-(r-s)^*(r-s)&=(r^*+s^*)(r+s)-(r^*-s^*)(r-s)\\
&=r^*r+r^*s+s^*r+s^*s-\bigl(r^*r-r^*s-s^*r+s^*s\bigr)\\
&=2r^*s+2s^*r=2(r^*s+s^*r).
\end{aligned}$$

Z (16.2) wynika, że $a\in\mathfrak{F}$, a co za tym idzie $\mathfrak{M}\cap\mathsf{A}_+\subset\mathfrak{F}$.

Ad (4). Z definicji $\mathfrak{M}$ jest podprzestrzenią wektorową w A, a więc $\operatorname{span}\mathfrak{M}\cap\mathsf{A}_+\subset\mathfrak{M}$. Odwrotnie, dowolny element $\mathfrak{M}$ jest sumą elementów postaci y^*x, gdzie $y,x\in\mathfrak{N}$. Teraz

$$y^*x=\tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k(x+\mathrm{i}^ky)^*(x+\mathrm{i}^ky),$$

a więc y^*x jest kombinacją liniową dodatniech elementów $\mathfrak{M}$ (jako, że każdy $(x+\mathrm{i}^ky)$ należy do $\mathfrak{N}$, a zatem $(x+\mathrm{i}^ky)^*(x+\mathrm{i}^ky)\in\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$). □

Definicja 16.3. Niech A będzie C*-algebrą. Odwzorowanie $\varphi\colon\mathsf{A}_+\to[0,+\infty]$ nazywmy *wagą*, jeśli

(1) dla $a,b\in\mathsf{A}$ mamy $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$,
(2) dla $t\geq 0$ i $a\in\mathsf{A}_+$ mamy $\varphi(ta)=t\varphi(a)$.

Uwaga 16.4. Niech A będzie C*-algebrą i niech φ będzie wagą na A_+. Wówczas

$$\mathfrak{F}_\varphi = \bigl\{x \in A_+ \,\big|\, \varphi(x) < +\infty\bigr\}$$

jest ścianą. Zgodnie z tezą stwierdzenia 16.2 zbiory

$$\mathfrak{N}_\varphi = \bigl\{x \in A \,\big|\, x^*x \in \mathfrak{F}_\varphi\bigr\} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^*\mathfrak{N}_\varphi$$

są odpowiednio lewym ideałem i $*$-podalgebrą w A. Ponadto φ rozszerza się jednoznacznie do dodatniego funkcjonału $\mathfrak{M}_\varphi \to \mathbb{C}$. Istotnie, skoro $\mathfrak{M}_\varphi = \operatorname{span}\mathfrak{F}_\varphi$, wystarczy wykazać, że rozszerzenie istnieje. Niech $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{F}_\varphi$ i załóżmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = 0.$$

Dla pewnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Tak więc

$$\sum_{k=1}^{n} \Re\lambda_k a_k = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{n} \Im\lambda_k a_k = 0.$$

Niech $\{1, \dots, n\} = A \cup B$, gdzie $\Re\lambda_j \geq 0$ dla $j \in A$ i $\Re\lambda_j < 0$ dla $j \in B$. Wtedy

$$\sum_{j\in A} \Re\lambda_j a_j = \sum_{j \in B} (-\Re\lambda_j) a_j$$

są kombinacjami liniowymi elementów dodatnich z dodatnimi współczynnikami. Stąd

$$\sum_{j\in A} \Re\lambda_j \varphi(a_j) = \sum_{j \in B} (-\Re\lambda_j) \varphi(a_j)$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{n} \Re\lambda_k \varphi(a_k) = 0.$$

Tak samo uzyskujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \Im\lambda_k \varphi(a_k) = 0,$$

a więc

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(a_k) = 0,$$

co dowodzi istnienia rozszerzenia φ na $\mathfrak{M}_\varphi$.

Uwaga 16.5. Niech φ będzie wagą na A_+. Wówczas dla $a, b \in \mathfrak{M}_\varphi$ mamy $a^*b, a^*a, b^*b \in \mathfrak{M}_\varphi$ i mamy nierówność Schwarza:

$$\bigl|\varphi(a^*b)\bigr| \leq \varphi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \varphi(b^*b)^{\frac{1}{2}}. \tag{16.3}$$

Dowód jest taki sam jak dla dodatnich funkcjonałów: dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy $a + \lambda b \in \mathfrak{M}_\varphi$. Ponadto

$$\varphi\bigl((a + \lambda b)^*(a + \lambda b)\bigr) \geq 0.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
\varphi\bigl((a + \lambda b)^*(a + \lambda b)\bigr) &= \varphi(a^*a) + \lambda\varphi(a^*b) + \overline{\lambda}\varphi(b^*a) + |\lambda|^2\varphi(b^*b) \\
&= \varphi(a^*a) + \lambda\varphi(a^*b) + \overline{\lambda\varphi(a^*b)} + |\lambda|^2\varphi(b^*b).
\end{aligned}$$

Jeśli $\varphi(a^*b)=0$, to nierówność (16.3) jest oczywista. A jeśli $\varphi(a^*b)\neq 0$, to kładąc $\lambda=t\frac{|\varphi(a^*b)|}{\varphi(a^*b)}$ przy $t\in\mathbb{R}$ uzyskujemy

$$\varphi(a^*a)+2t\bigl|\varphi(a^*b)\bigr|+t^2\varphi(b^*b)\geq 0,\qquad (t\in\mathbb{R}).$$

Stąd $4\bigl|\varphi(a^*b)\bigr|^2-4\varphi(a^*a)\varphi(b^*)\leq 0$.

DOKOŃCZYĆ!!!

---

17. Teoria Tomity-Takesakiego dla wag

17.1. **Uogólnione wektory cykliczne i separujące.** Niech $\mathsf{M}\subset \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie algebrą von Neumanna i niech η będzie so-gęsto zdeiniowanym odwzorowaniem liniowym $\mathsf{M}\to\mathscr{H}$ takim, że $\mathrm{D}(\eta)$ jest lewym ideałem w M i dla każdego $x\in\mathrm{D}(\eta)$, $y\in\mathsf{M}$ mamy

$$\eta(yx)=y\eta(x).$$

Załóżmy dalej, że

(1) η jest odwozrowaniem so $\times\ \|\cdot\|$-domkniętym,
(2) $\ker\eta=\{0\}$,
(3) obraz η jest gęsty w $\mathscr{H}$.

Odwozorwanie η o wymienionych wyżej własnościach nazywamy *uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym.*

Twierdzenie 17.1. *Niech η będzie uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym. Zdefiniujmy odwozorwanie $\eta'\colon\mathsf{M}'\to\mathscr{H}$ kładąc*

$$\Bigl(a'\in\mathrm{D}(\eta'),\ \xi=\eta'(a')\Bigr)\iff\Bigl(\forall\,x\in\mathrm{D}(\eta)\ a'\eta(x)=x\xi\Bigr).$$

Wówczas

(1) *η' jest uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym dla M',*
(2) *oznaczając przez η'' odwzorowanie uzyskane z η' w wyniku procedury analogicznej do $\eta\mapsto\eta'$, mamy $\eta''=\eta$.*

DOKOŃCZYĆ!!!

17.2. **Teoria Tomity-Takesakiego dla uogólnionego wektora cyklicznego i separującego.** Niech η będzie uogólnionym wektorem cyklicznym i separjącym dla M. Jeśli $a, b \in \mathrm{D}(\eta)$, to $a^*b \in \mathrm{D}(\eta)$ oraz $b^*a \in \mathrm{D}(\eta)$. Zatem $a^*b \in \mathrm{D}(\eta)^* \cap \mathrm{D}(\eta)$.

Lemat 17.2. *Zbiory*
$$\left\{\eta(a^*b)\,\middle|\,a, b \in \mathrm{D}(\eta)\right\} \quad \textit{oraz} \quad \left\{\eta'(a'^*b')\,\middle|\,a', b' \in \mathrm{D}(\eta')\right\}$$
są gęste w $\mathscr{H}$.

Dowód. Niech $\xi \perp \left\{\eta(a^*b)\,\middle|\,a, b \in \mathrm{D}(\eta)\right\}$. Tak więc dla $a, b \in \mathrm{D}(\eta)$ mamy
$$0 = (\xi|\eta(a^*b)) = (\xi|a^*\eta(b)) = (a\xi|\eta(b))\,.$$
Wektory $\eta(b)$ przy b przebiegającym $\mathrm{D}(\eta)$ tworzą zbiór gęsty w $\mathscr{H}$, a zatem $a\xi = 0$. Ponieważ $\mathrm{D}(\eta)$ jest so-gęsta w M, możemy operatorem a dążyć mocno do $\mathbb{1}$, co daje $\xi = 0$. Gęstości zbioru $\left\{\eta'(a'^*b')\,\middle|\,a', b' \in \mathrm{D}(\eta')\right\}$ dowodzimy tak samo. □

Przyjmijmy oznaczenie $\mathscr{A}_\eta = \mathrm{D}(\eta)^* \cap \mathrm{D}(\eta)$. Wówczas $\mathscr{A}_\eta$ jest so-gęstą $*$-podalgebrą M. Zdefiniujmy operator antyliniowy $\boldsymbol{s}_0$ na $\mathscr{H}$ kładąc $\mathrm{D}(\boldsymbol{s}_0) = \left\{\eta(a)\,\middle|\,a \in \mathscr{A}_\eta\right\}$ i
$$\boldsymbol{s}_0\eta(a) = \eta(a^*), \qquad (a \in \mathscr{A}_\eta).$$
Z lematu 17.2 wynika natychmiast, że $\boldsymbol{s}_0$ jest gęsto zdefiniowany.

Stwierdzenie 17.3. *Operator $\boldsymbol{s}_0$ jest domykalny.*

Dowód. Dla $a', b' \in \mathrm{D}(\eta')$ i $a \in \mathscr{A}_\eta$ mamy
$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{s}_0\eta(a)\big|\eta'(a'^*b')\big) &= \big(\eta(a^*)\big|\eta'(a'^*b')\big)\\ &= \big(\eta(a^*)\big|a'^*\eta'(b')\big)\\ &= \big(a'\eta(a^*)\big|\eta'(b')\big)\\ &= \big(a^*\eta'(a')\big|\eta'(b')\big)\\ &= \big(\eta'(a')\big|a\eta'(b')\big)\\ &= \big(\eta'(a')\big|b'\eta(a)\big)\\ &= \big(b'^*\eta'(a')\big|\eta(a)\big)\\ &= \big(\eta'(b'^*a')\big|\eta(a)\big) = \big(\eta'\big((a'^*b')^*\big)\big|\eta(a)\big)\,.\end{aligned} \tag{17.1}$$
Powyższy rachunek oznacza, że gęsto zdefiniowany operator (patrz lemat 17.2)
$$\left\{\eta'(c')\,\middle|\,c' \in \mathrm{D}(\eta')^*\,\mathrm{D}(\eta')\right\} \ni \eta'(c') \longmapsto \eta'(c'^*) \in \mathscr{H}$$
zawiera się w $\boldsymbol{s}_0^*$. Innymi słowy $\boldsymbol{s}_0^*$ jest gęsto zdefiniowany. □

Oznaczmy symbolem $\boldsymbol{s}$ domknięcie operatora $\boldsymbol{s}_0$. Operator ten ma dość prosty opis: niech
$$K_0 = \left\{\eta(a)\,\middle|\,a \in \mathscr{A}_\eta,\ a = a^*\right\}.$$
Jest jasne, że K_0 jest rzeczywistą podprzestrzenią w $\mathscr{H}$ i $\mathrm{D}(\boldsymbol{s}_0) = K_0 + \mathrm{i}K_0$. Ponadto dla $\xi_x, \xi_2 \in K_0$ mamy
$$\boldsymbol{s}_0(\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2) = \xi_1 - \mathrm{i}\xi_2.$$
Teraz, podobnie jak w części 14.2.1, możemy przeprowadzić dokładniejszą analizę operatora $\boldsymbol{s}$. Oznaczmy przez K domknięcie podprzestrzeni K_0. Na początek zauważmy, że $K + \mathrm{i}K \subset \mathrm{D}(\boldsymbol{s})$.

Istotnie, weźmy $\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2 \in K + \mathrm{i}K$ i niech $(\xi_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(\xi_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami elementów K_0 takimi, że

$$\xi_n^1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma_2 \quad \text{oraz} \quad \xi_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma_2.$$

Wówczas ciąg $(\xi_n^2 + \mathrm{i}\xi_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathrm{D}(\boldsymbol{s}_0)$ jest zbieżny do $\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2$, a ciąg

$$\big(\boldsymbol{s}_0(\xi_n^1 + \xi_n^2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

także jest zbieżny (oczywiście do $\gamma_1 - \mathrm{i}\gamma_2$). Stąd $\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2 \in \mathrm{D}(\boldsymbol{s})$ i $\boldsymbol{s}(\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2) = \gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2$. Z drugiej strony, jest jasne, że operator o dziedzinie $K + \mathrm{i}K$ posyłający $\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2$ na $\gamma_1 - \mathrm{i}\gamma_2$ jest domknięty. Stąd wniosek, że

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{s}) = K + \mathrm{i}K$$

oraz

$$\boldsymbol{s}(\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2) = \gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2, \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in K).$$

Przy okazji otrzymujemy następujący fakt:

$$K \cap \mathrm{i}K = \{0\}.$$

Gdyby tak nie było, operator $\boldsymbol{s}_0$ nie byłby domykalny, gdyż jeśli $\xi \in K \cap \mathrm{i}K$, to wybierając ciągi $(\xi_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\xi_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów K_0 takie, że $\xi_n^1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \xleftarrow[n\to\infty]{} \mathrm{i}\xi_n^2$. Wówczas mamy $\boldsymbol{s}_0\xi_n^1 = \xi_n^1$ oraz $\boldsymbol{s}_0\mathrm{i}\xi_n^2 = -\mathrm{i}\xi_n^2$ dla wszystkich n, a więc z jednej strony $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^1$ należy do $\mathrm{D}(\boldsymbol{s})$ i $\boldsymbol{s}\xi = \xi$, a z drugiej strony $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{i}\xi_n^2$ należy do $\mathrm{D}(\boldsymbol{s})$ i $\boldsymbol{s}\xi = -\xi$. Stąd $\xi = -\xi$.

W części 14.2.1 opisaliśmy operator sprzężony do $\boldsymbol{s}$, który oznaczyliśmy tam symbolem $\boldsymbol{f}$. Podamy teraz inny jego opis.

Zamiast powtarzać dowód wniosku 14.26 zrobimy małą dygresję:

Dygresja 17.4. Niech $a \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie operatorem o normie nie większej niż 1. Wówczas ciąg operatorów $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowany wzorem

$$b_n = \mathbb{1} - (\mathbb{1} - aa^*)^n, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

dąży w so-topologii do $\boldsymbol{s}(aa^*) = \boldsymbol{l}(a)$ (patrz część 1.2). Podobnie ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowany jako

$$c_n = \mathbb{1} - (\mathbb{1} - a^*a)^n, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

dąży do $\boldsymbol{l}(a^*)$.

Rozwiniemy teraz rachunek (17.1). Mamy

$$\big(\boldsymbol{s}_0\eta(a)\big|\eta'(a'^*b')\big) = \big(\eta'\big((a'^*b')^*\big)\big|\eta(a)\big), \qquad (a \in \mathscr{A}_\eta,\ a', b' \in \mathrm{D}(\eta')). \tag{17.2}$$

Załóżmy teraz, że $b' \in \mathscr{A}_{\eta'}$. Ponieważ $\mathrm{D}(\eta)$ jest so-gęstą $*$-podalgebrą w M (nawet ideałem) istnieje ciąg uogólniony $(a_\lambda)_{\alpha\in A}$ elementów $\mathrm{D}(\eta)$ zbieżny w so-topologii do $\mathbb{1}$. Zatem

$$\eta'(b') = \lim_{\alpha\in A} a_\lambda\eta'(b') = \lim_{\alpha\in A} b'\eta(a_\lambda).$$

Stąd $\eta'(b')$ należy do domknięcia obrazu b'. Stąd $\eta'(b') = \boldsymbol{l}(b')\eta(b')$. Podobnie $\eta'(b'^*) = \boldsymbol{l}(b'^*)\eta(b'^*)$.

Załóżmy, że $\|b'\| \leq 1$. Korzystając z (17.2) z $a' = \mathbb{1} - (\mathbb{1} - b'b'^*)^n = f_n(b'b'^*)$, gdzie $f_n(t) = 1 - (1-t)^n$ jest funkcją ciągłą i tego, że

$$f_n(b'b'^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{so}} \boldsymbol{l}(b') \quad \text{oraz} \quad f_n(b'^*b') \xrightarrow[n\to\infty]{\text{so}} \boldsymbol{l}(b'^*)$$

obliczamy

$$\begin{aligned}\big(\eta'(b'^*)\big|\eta(a)\big) &= \big(\boldsymbol{l}(b'^*)\eta'(b'^*)\big|\eta(a)\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(f_n(b'^*b')\eta'(b'^*)\big|\eta(a)\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(\eta'\big(f_n(b'^*b')b'^*\big)\big|\eta(a)\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(\eta'\big(b'^*f_n(b'b'^*)\big)\big|\eta(a)\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(\eta(a^*)\big|\eta'\big(f_n(b'b'^*)b'\big)\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(\eta(a^*)\big|f_n(b'b'^*)\eta'(b')\big)\\ &= \big(\eta(a^*)\big|\,\boldsymbol{l}(b')\eta'(b')\big) = \big(\eta(a^*)\big|\eta'(b')\big)\end{aligned} \tag{17.3}$$

(skorzystaliśmy też z faktu, że $f_n(b'^*b')b'^* = b'^*f_n(b'b'^*)$). Oczywiście ten sam wzór mamy także dla b' o dowlonej normie.

Niech $\boldsymbol{f}_0$ będzie operatorem $\eta'(a') \mapsto \eta'(a'^*)$ zdefiniowanym na $\eta'(\mathscr{A}_{\eta'})$. Tak samo jak $\boldsymbol{s}_0$ jest on domykalny i oznaczymy jego domknięcie przez $\boldsymbol{f}$. Na mocy (17.3) mamy $\boldsymbol{f}_0 \subset \boldsymbol{s}_0^*$, a więc

$$\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{s}^*. \tag{17.4}$$

Stwierdzenie 17.5. *Operator $\boldsymbol{f}$ jest sprzężony do $\boldsymbol{s}$.*

Dowód. Niech $\xi \in \mathrm{D}(\boldsymbol{s}_0^*)$ i $\zeta = \boldsymbol{s}_0^*\xi$. Rozważmy operator liniowy A_0 o dziedzinie

$$\mathrm{D}(A_0) = \big\{\eta(x)\,\big|\,x \in \mathrm{D}(\eta)\big\}$$

danu przez

$$A_0\eta(a) = a\xi, \qquad (a \in \mathrm{D}(\eta)).$$

Operator ten jest domykalny, gdyż operator

$$\eta(a) \longmapsto a\zeta, \qquad (a \in \mathrm{D}(\eta)) \tag{17.5}$$

jest zawarty w A_0^*:

$$\left.\begin{aligned}(\eta(b)|A_0\eta(a)) &= (\eta(b)|a\xi)\\ &= (a^*\eta(b)|\xi)\\ &= (\eta(a^*b)|\xi)\\ &= (\zeta|\eta(b^*a))\\ &= (\zeta|b^*\eta(a))\\ &= (b\zeta|\eta(a))\,,\end{aligned}\right\} \qquad (a,b \in \mathrm{D}(\eta)).$$

Oznaczmy symbolem A' domknięcie operatora A_0.

Ponieważ dla dowlnego $x \in \mathsf{M}$ mamy ewidentnie

$$\begin{bmatrix} x & 0\\ 0 & x\end{bmatrix}\mathrm{G}(A_0) \subset \mathrm{G}(A_0),$$

na mocy wniosku 15.9 mamy $A'\,\eta\,\mathsf{M}'$. Niech $A' = u'|A'|$ będzie jego rozkładem biegunowym i niech

$$e_n' = \chi_{[0,n]}(|A'|), \qquad (n \in \mathbb{N})$$

oraz

$$a_n' = u'e_n'|A'|, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mamy $e'_n, a'_n \in \mathsf{M}'$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wykażemy teraz że $a'_n \in \mathscr{A}_{\eta'}$ i

$$\eta'(a'_n) = u'e'_n u'^* \xi \quad \text{oraz} \quad \eta'({a'_n}^*) = e'_n \zeta. \tag{17.6}$$

Istotnie, dla dowolnego $a \in \mathrm{D}(\eta)$ mamy

$$au'e'_n u'^* \xi = u'e'_n u'^* a\xi = u'e'_n u'^* A'\eta(a) = u'e'_n |A'|\eta(a) = a'_n \eta(a),$$

co pokazuje, że $a'_n \in \mathrm{D}(\eta')$ i $\eta'(a'_n) = u'e'_n u'^* \xi$. Podobnie, ponieważ operator (17.5) jest zawarty w A'^*, mamy

$$ae'_n \zeta = e'_n a\zeta = e'_n A'^* \eta(a) = e'_n |A'| u'^* \eta(a) = {a'_n}^* \eta(a), \qquad (a \in \mathrm{D}(\eta)),$$

a to znaczy, że ${a'_n}^* \in \mathrm{D}(\eta')$ i $\eta'(a'^*_,) = e'_n \zeta$.

Z (17.6) natychmiast wynika, że

$$\eta'(a'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} u'u'^* \xi \quad \text{oraz} \quad \eta'({a'_n}^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} \zeta.$$

Zauważmy, że ponieważ w $\mathrm{D}(\eta')$ istnieje ciąg uogólniony so-zbieżny do $\mathbb{1}$, a w obrazie A_0 leżą wektory postaci

$$a\xi, \qquad (a \in \mathrm{D}(\eta))$$

widzimy, że ξ należy do domknięcia obrazu operatora A'. Stąd $u'u'^*\xi = \xi$ i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} \in \overline{\mathrm{G}(\boldsymbol{f}_0)} = \mathrm{G}(\boldsymbol{f}).$$

Stąd $\boldsymbol{s}^* = \boldsymbol{s}_0^* \subset \boldsymbol{f}$. W zestawieniu z (17.4) otrzymujemy $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{s}^*$. □

Przypominamy, że operator $\boldsymbol{f}$ ma rozkład biegunowy

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}\Delta^{-\frac{1}{2}},$$

gdzie $\boldsymbol{j}$ jest tym samym operatorem antyunitarnym, którey występuje w rozkładzie biegunowym operatora $\boldsymbol{s}$ (patrz część 14.2.1).

Wracając do teorii Tomity-Takesakiego, mając opis operatora $\boldsymbol{s}$ w terminach podprzestrzeni K możemy zastosować wyniki części 14 i zdefiniować operatory $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{t}$:

- $\boldsymbol{p}$ rzut ortogonalny na K (względem iloczynu skalarnego $\Re(\cdot|\cdot)$),
- $\boldsymbol{q}$ rzut ortogonalny na $\mathrm{i}K$,
- $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$,
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$,
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{t}$ jest rozkładem biegunowym (nad $\mathbb{R}$).

Wmocy pozostają wszystkie wyiki części 14.2 (w szczególności 14.2.1), 14.3, 14.4 i 14.5. W szczególności operator $\boldsymbol{s}$ ma rozkład biegunowy

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{j}\Delta^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\Delta = (2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}^{-1}$$

($\boldsymbol{r}$ jest $\mathbb{C}$-liniowy, a $\boldsymbol{j}$ jest antyunitarny).

Niech $\mathscr{A}_{\eta'}$ oznacza zbiór $\mathrm{D}(\eta')^* \cap \mathrm{D}(\eta')$. Przyjmiemy też $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t < 0\}$.

Twierdzenie 17.6. *Niech $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ i $a' \in \mathscr{A}_{\eta'}$. Wówczas istnieje $\boldsymbol{a} \in \mathscr{A}_\eta$ taki, że*

$$\eta(\boldsymbol{a}) = (\Delta + \mu\mathbb{1})^{-1}\eta'(a').$$

Dowód. Niech $\xi = (\Delta + \mu \mathbb{1})^{-1}\eta'(a')$. Mamy $\xi \in \mathrm{D}(\Delta) \subset \mathrm{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{D}(S)$. Rozważmy operator $\boldsymbol{a}_0$ o dziedzinie

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{a}_0) = \big\{\eta'(b') \,\big|\, b' \in \mathrm{D}(\eta')\big\}$$

zdefiniowany przez

$$\boldsymbol{a}_0\eta'(c') = c'\xi.$$

Jest to operator liniowy i gęsto zdefiniowany. Teraz zauważmy, że dla $b', c' \in \mathrm{D}(\eta)$ mamy

$$\begin{aligned}\big(\eta'(c')\big|b'\boldsymbol{s}\xi\big) &= \big(b'^*\eta'(c')\big|\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(\eta'(b'^*c')\big|\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(\xi\big|\boldsymbol{s}^*\eta'(b'^*c')\big)\,.\end{aligned}$$

W rachunku 17.1 stwierdziliśmy, że na wektorach postaci $\eta'(b'^*c')$ operator $\boldsymbol{s}^* = \boldsymbol{s}_0^*$ przyjmuje wartość $\eta'(c'^*b')$, a więc

$$\big(\eta'(c')\big|b'\boldsymbol{s}\xi\big) = \big(\xi\big|\eta'(c'^*b')\big) = \big(\xi\big|c'^*\eta'(b')\big) = \big(c'\xi\big|\eta'(b')\big)\,.$$

Innymi słowy

$$\big(\eta'(c')\big|b'\boldsymbol{s}\xi\big) = \big(\boldsymbol{a}_0\eta'(c')\big|\eta'(b')\big)\,, \qquad (b', c' \in \mathrm{D}(\eta')).$$

Tak więc operator $\boldsymbol{a}_0^*$ zawiera gęsto zdefiniowany operator

$$\big\{\eta'(x') \,\big|\, x' \in \mathrm{D}(\eta')\big\} \ni \eta'(b') \longmapsto b'\boldsymbol{s}\xi. \tag{17.7}$$

Stąd $\boldsymbol{a}_0$ jest domykalny i definiujemy $\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}_0}$. Operator $\boldsymbol{a}$ jest stowarzyszony z M, gdyż jest jasne, że

$$\begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix} \mathrm{G}(\boldsymbol{a}_0) \subset \mathrm{G}(\boldsymbol{a}_0), \qquad (x' \in \mathsf{M}'),$$

i możemy skorzystać z wniosku 15.9.

Niech $\boldsymbol{a}^* = vQ$ będzie rozkładem biegunowym $\boldsymbol{a}^*$ i oznaczmy v^* symbolem U. Wówczas $\boldsymbol{a} = QU$ (stwierdzenie 15.4). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & t < n, \\ \frac{1}{t} & t \geq n, \end{cases} \qquad (t \geq 0).$$

Wykażemy, że dla każdego n

(1) $Qf_n(Q) \in \mathrm{D}(\eta)$ i $\eta\big(Qf_n(Q)\big) = f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi$,
(2) $f_n(Q) \in \mathrm{D}(\eta)$ i $\eta\big(f_n(Q)\big) = f_n(Q)^2U\boldsymbol{s}\xi$,
(3) $Qf_n(Q)^2U \in \mathrm{D}(\eta)$ i $\eta\big(Qf_n(Q)^2U\big) = f_n(Q)^2\xi$

(operatory $Qf_n(Q), f_n(Q)$ i $Qf_n(Q)^2U$ należą do M na mocy twierdzenia 15.11).

Ad (1). Dla dowolnego $b' \in \mathrm{D}(\eta')$ mamy

$$\begin{aligned}b'f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi &= f_n(Q)Ub'\boldsymbol{s}\xi = f_n(Q)U\boldsymbol{a}^*\eta'(b')\\ &= f_n(Q)UU^*Q\eta'(b') = f_n(Q)v^*vQ\eta'(b')\\ &= f_n(Q)Q\eta'(b') = Qf_n(Q)\eta'(b').\end{aligned}$$

Stąd $Qf_n(Q) \in \mathrm{D}(\eta)$ i $\eta\big(Qf_n(Q)\big) = f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi$.

Ad (2). Dziedzina η jest lewym ideałem więc

$$f_n(Q) = f_n(Q)Qf_n(Q) \in \mathrm{D}(\eta)$$

na mocy (1) (mamy $tf_n(t)^2 = f_n(t)$ dla wszystkich $t \geq 0$). Dalej

$$\eta\big(f_n(Q)\big) = \eta\big(f_n(Q)Qf_n(Q)\big) = f_n(Q)\eta\big(Qf_n(Q)\big) = f_n(Q)f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi = f_n(Q)^2U\boldsymbol{s}\xi.$$

Ad (3). Dla dowolnego $c' \in \mathrm{D}(\eta')$ mamy

$$c'f_n(Q)^2\xi = f_n(Q)^2c'\xi = f_n(Q)^2\boldsymbol{a}\eta'(c') = f_n(Q)^2QU\eta'(c') = Qf_n(Q)^2U\eta'(c').$$

Oznaczato, że $Qf_n(Q)^2U \in \mathrm{D}(\eta)$ i $\eta\big(Qf_n(Q)^2U\big) = f_n(Q)^2\xi$.

Teraz możemy obliczyć

$$\begin{aligned}\big(\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big|\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big) &= \big(\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big|f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(U^*f_n(Q)\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big|\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(\eta\big(U^*Qf_n(Q)^2\big)\big|\boldsymbol{s}\xi\big).\end{aligned}$$

Na mocy (3) element $U^*Qf_n(Q)^2$ należy do $\mathscr{A}_\eta$ i możemy rachunek kontynuować:

$$\begin{aligned}\big(\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big|\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big) &= \big(\eta\big(U^*Qf_n(Q)^2\big)\big|\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(\boldsymbol{s}\eta\big(Qf_n(Q)^2U\big)\big|\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(\boldsymbol{s}f_n(Q)^2\xi\big|\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(\boldsymbol{s}^*\boldsymbol{s}\xi\big|f_n(Q)^2\xi\big)\\ &= \big(\Delta\xi\big|f_n(Q)^2\xi\big)\\ &= (f_n(Q)\Delta\xi|f_n(Q)\xi).\end{aligned} \tag{17.8}$$

W szczególności $(f_n(Q)\Delta\xi|f_n(Q)\xi)$ jest liczbą nieujemną.

Teraz szcujemy

$$\begin{aligned}\big(2|\mu| + \mu + \overline{\mu}\big)\,(f_n(Q)\Delta\xi|f_n(Q)\xi) &\leq 2|\mu|\big\|f_n(Q)\Delta\xi\big\|\big\|f_n(Q)\xi\big\| + 2\Re\,(f_n(Q)\Delta\xi|\mu f_n(Q)\xi)\\ &\leq \big\|f_n(Q)\Delta\xi\big\|^2 + \big\|\mu f_n(Q)\xi\big\|^2 + 2\Re\,(f_n(Q)\Delta\xi|\mu f_n(Q)\xi)\\ &= \big\|f_n(Q)(\Delta + \mu\mathbb{1})\xi\big\|^2\\ &= \big\|f_n(Q)\eta'(a')\big\|^2\\ &= \big\|a'\eta\big(f_n(Q)\big)\big\|^2\\ &\leq \|a'\|^2\big\|\eta\big(f_n(Q)\big)\big\|^2\end{aligned} \tag{17.9}$$

(skorzystaliśmy z (2) i definicji wekotra ξ).

Biorąc pod uwagę (17.8) i (17.9) uzyskujemy

$$\big(2|\mu| + \mu + \overline{\mu}\big)\big\|\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big\|^2 \leq \|a'\|^2\big\|\eta\big(f_n(Q)\big)\big\|^2 \tag{17.10}$$

Korzystając z (1) i (2) szacujemy:

$$\begin{aligned}\big\|\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big\|^2 - n^2\big\|\eta\big(f_n(Q)\big)\big\|^2 &= \big\|f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi\big\|^2 - n^2\big\|f_n(Q)^2U\boldsymbol{s}\xi\big\|^2\\ &= (f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi|f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi) - \big(nf_n(Q)^2U\boldsymbol{s}\xi\big|nf_n(Q)^2U\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= (f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi|f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi) - \big(f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi\big|n^2f_n(Q)^2f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &= \big(f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi\big|\big(\mathbb{1} - n^2f_n(Q)^2\big)f_n(Q)U\boldsymbol{s}\xi\big)\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

bo $n^2 f_n(Q)^2 \leq \mathbb{1}$. Stąd

$$n^2 \big\|\eta\big(f_n(Q)\big)\big\|^2 \leq \big\|\eta\big(Qf_n(Q)\big)\big\|^2. \tag{17.11}$$

Zestawiając nierówności (17.10) i (17.11) otrzymujemy

$$\big(2|\mu| + \mu + \overline{\mu}\big)n^2 \big\|\eta\big(f_n(Q)\big)\big\|^2 \leq \|a'\|^2 \big\|\eta\big(f_n(Q)\big)\big\|^2. \tag{17.12}$$

Ale jeśli $n > \frac{\|a'\|}{(2|\mu|+\mu+\overline{\mu})^{\frac{1}{2}}}$, to nierówność (17.12) możebyć spełniona tylko wtedy, gdy

$$\big\|\eta\big(f_n(Q)\big)\big\| = 0.$$

Wtedy jednak $f_n(Q) = 0$. To oznacza, że widmo Q zawiera się w przedziale

$$\big[0, \|a'\|\big(2|\mu| + \mu + \overline{\mu}\big)^{-\frac{1}{2}}\big].$$

W szczególności operator Q (a więc i $\boldsymbol{a}$) jest ograniczony. Tak więc $\boldsymbol{a} \in \mathsf{M}$, a z definicji operatora $\boldsymbol{a}$ wynika, że

$$\boldsymbol{a}\eta'(c') = c'(\Delta + \mu\mathbb{1})^{-1}\eta'(a'), \qquad (c' \in \mathrm{D}(\eta')).$$

To oznacza, że $\boldsymbol{a} \in \mathrm{D}(\eta)$ i $\eta(\boldsymbol{a}) = (\Delta + \mu\mathbb{1})^{-1}\eta'(a')$. Wreszcie $\boldsymbol{a} \in \mathscr{A}_\eta$, gdyż (ograniczony) operator zdefiniowany wzorem (17.7) jest sprzężony do $\boldsymbol{a}$ i spełnia

$$\boldsymbol{a}^*\eta'(b) = b'\boldsymbol{s}\xi, \qquad (b' \in \mathrm{D}(\eta')).$$

Stąd $\boldsymbol{a}^* \in \mathrm{D}(\eta)$. □

Teraz zajmiemy się analogonem stwierdzenia 14.22.

Stwierdzenie 17.7. *Niech $a' \in \mathscr{A}_{\eta'}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ spełnia $\Re\lambda > 0$. Wówczas istnieje $a_\lambda \in \mathscr{A}_\eta$ taki, że*

$$\eta(a_\lambda^*) = \big(\overline{\lambda}\Delta + \lambda\mathbb{1}\big)^{-1}\eta'(a').$$

Ponadto

$$\boldsymbol{x}a'\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{r}a_\lambda(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r}) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1} - \boldsymbol{r})a_\lambda\boldsymbol{r}.$$

Proof. Na mocy twierdzenia 17.6 istnieje element $\boldsymbol{a} \in \mathscr{A}_\eta$ taki, że

$$\eta(a) = \big(\Delta + \tfrac{\lambda}{\overline{\lambda}}\mathbb{1}\big)^{-1}\eta'(a')$$

(bo $\frac{\lambda}{\overline{\lambda}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$). Połóżmy

$$a_\lambda = \tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}^*.$$

Wówczas

$$\eta(a_\lambda^*) = \tfrac{1}{\overline{\lambda}}\eta(\boldsymbol{a}) = \tfrac{1}{\overline{\lambda}}\big(\Delta + \tfrac{\lambda}{\overline{\lambda}}\mathbb{1}\big)^{-1}\eta'(a') = \big(\overline{\lambda}\Delta + \lambda\mathbb{1}\big)^{-1}\eta'(a').$$

Niech $b', c' \in \mathscr{A}_{\eta'}$ i niech $b, c \in \mathscr{A}_\eta$ będą takie, że

$$\eta(b^*) = (\Delta + \mathbb{1})^{-1}\eta'(b') \quad \text{oraz} \quad \eta(c^*) = (\Delta + \mathbb{1})^{-1}\eta'(c').$$

Mamy

$$\big(\big(\overline{\lambda}\Delta + \lambda\mathbb{1}\big)\eta(a_\lambda^*)\big|\eta(b^*c)\big) = \big(\eta'(a')\big|\eta(b^*c)\big)\,. \tag{17.13}$$

Rozpisujemy lewą stronę (17.13):

$$\big(\big(\overline{\lambda}\Delta + \lambda\mathbb{1}\big)\eta(a_\lambda^*)\big|\eta(b^*c)\big) = \lambda\,\underbrace{(\Delta\eta(a_\lambda^*)|\eta(b^*c))}_{\mathrm{I}} + \overline{\lambda}\,\underbrace{(\eta(a_\lambda^*)|\eta(b^*c))}_{\mathrm{II}}.$$

Pierwszy człon jest równy

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} &= (S^*S\eta(a_\lambda^*)\,|\,\eta(b^*c)) \\
&= (S\eta(b^*c)\,|\,S\eta(a_\lambda^*)) \\
&= (\eta(c^*b)\,|\,\eta(a_\lambda)) \\
&= (c^*\eta(b)\,|\,\eta(a_\lambda)) \\
&= (\eta(b)\,|\,c\eta(a_\lambda)) \\
&= (\eta(b)\,|\,\eta(ca_\lambda)) \\
&= (S\eta(b^*)\,|\,S\eta(a_\lambda^*c^*)) \\
&= (\eta(a_\lambda^*c^*)\,|\,S^*S\eta(b^*)) \\
&= (\eta(a_\lambda^*c^*)\,|\,\Delta\eta(b^*)) \\
&= (a_\lambda^*\eta(c^*)\,|\,\Delta\eta(b^*)) \\
&= (\eta(c^*)\,|\,a_\lambda\Delta\eta(b^*)) \\
&= \big((\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(c')\big|a_\lambda\Delta(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(b')\big) \\
&= \big(\eta'(c')\big|(\Delta+\mathbb{1})^{-1}a_\lambda\Delta(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(b')\big)\,.
\end{aligned}$$

Natomiast

$$\begin{aligned}
\mathbb{III} &= (\eta(a_\lambda^*)\,|\,b^*\eta(c)) \\
&= (b\eta(a_\lambda^*)\,|\,\eta(c)) \\
&= (\eta(ba_\lambda^*)\,|\,\eta(c)) \\
&= (S\eta(a_\lambda b^*)\,|\,S\eta(c^*)) \\
&= (S^*S\eta(c^*)\,|\,\eta(a_\lambda b^*)) \\
&= (\Delta\eta(c^*)\,|\,\eta(a_\lambda b^*)) \\
&= (\Delta\eta(c^*)\,|\,a_\lambda\eta(b^*)) \\
&= (\eta(c^*)\,|\,\Delta a_\lambda\eta(b^*)) \\
&= \big((\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(c')\big|\Delta a_\lambda(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(b')\big) \\
&= \big(\eta'(c')\big|(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\Delta a_\lambda(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(b')\big)\,.
\end{aligned}$$

Prawą stronę (17.13) zapisujemy tak:

$$\begin{aligned}
\big(\eta'(a')\big|\eta(b^*c)\big) &= \big(\eta'(a')\big|b^*\eta(c)\big) \\
&= \big(b\eta'(a')\big|\eta(c)\big) \\
&= \big(a'\eta(b)\big|\eta(c)\big) \\
&= \big(a'S\eta(b^*)\big|S\eta(c^*)\big) \\
&= \big(\eta(c^*)\big|S^*a'S\eta(b^*)\big) \\
&= \Big(\eta(c^*)\Big|\Delta^{\frac{1}{2}}Ja'J\Delta^{\frac{1}{2}}\eta(b^*)\Big) \\
&= \Big((\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(c')\Big|\Delta^{\frac{1}{2}}Ja'J\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(b')\Big) \\
&= \Big(\eta'(c')\Big|(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\Delta^{\frac{1}{2}}Ja'J\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\eta'(b')\Big)
\end{aligned}$$

Tak więc uzyskujemy równość (ograniczonych) operatorów

$$\lambda(\Delta+\mathbb{1})^{-1}a_\lambda\Delta(\Delta+\mathbb{1})^{-1}+\overline{\lambda}(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\Delta a_\lambda(\Delta+\mathbb{1})^{-1}=(\Delta+\mathbb{1})^{-1}\Delta^{\frac{1}{2}}Ja'J\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta+\mathbb{1})^{-1}. \tag{17.14}$$

Teraz korzystając ze wzorów
- $\Delta=\boldsymbol{r}^{-1}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})$,
- $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})^{\frac{1}{2}}$,
- $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{j}\boldsymbol{t}$,

łatwo pokazujemy, że
- $(\Delta+\mathbb{1})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}$,
- $\Delta(\Delta+\mathbb{1})^{-1}=\frac{1}{2}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})$,
- $\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta+\mathbb{1})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{t}$.

Te wzory oraz fakt, że $\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\boldsymbol{t}$ pozwalają przepisać (17.14) jako

$$\lambda\boldsymbol{r}a_\lambda(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})+\overline{\lambda}a_\lambda\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}a'\boldsymbol{x}.$$

□

Mamy następujący wynik analogiczny do stwierdzenia 14.23:

Stwierdzenie 17.8. *Niech $\lambda=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}$ dla pewnego $\phi\in\,]-\pi,\pi[$. Weźmy $a'\in\mathscr{A}_{\eta'}$ i niech $a_\lambda\in\mathscr{A}_\eta$ będzie taki, że*

$$\boldsymbol{x}a'\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{r}a_\lambda(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})+\overline{\lambda}(2\mathbb{1}-\boldsymbol{r})a_\lambda\boldsymbol{r}.$$

Wówczas

$$x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt.$$

Dowód jest identyczny z dowodem stwierdzenia 14.23. Mamy też analogon stwierdzenia 14.24

Stwierdzenie 17.9. *Dla każdego $x'\in\mathsf{M}'$ i dowolnego $t\in\mathbb{R}$ mamy*

$$\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}x'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\in\mathsf{M}. \tag{17.15}$$

Dowód. Na początek zamiast $x'\in\mathsf{M}'$ weźmy $a'\in\mathscr{A}_{\eta'}$. Wówczas dowód stwierdzenia 14.24 daje nam

$$\Delta^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{j}a'\boldsymbol{j}\Delta^{-\mathrm{i}t}\in\mathsf{M}.$$

Wynik ogólny wynika natychmiast z tego, że $*$-podalgebra $\mathscr{A}_{\eta'}$ jest so-gęsta w M'. □

Teraz kładąc $t=0$ we wzorze (17.15) otrzymujemy wniosek 14.25 w obecnym kontekście:

Wniosek 17.10. *Mamy $\boldsymbol{j}\mathsf{M}'\boldsymbol{j}\subset\mathsf{M}$.*

Teraz możemy przeprowadzić całe rozumowanie od nowa zamieniając pary (M,η) i (M',η') miejscami. Zamiast operatora $\boldsymbol{s}$ będziemy wówczas mieli operator $\boldsymbol{f}$, który w rozkładzie biegunowym ma tę samą część antyunitarną. Stąd

$$\boldsymbol{j}\mathsf{M}\boldsymbol{j}\subset\mathsf{M}' \tag{17.16}$$

co daje natychmiast

Twierdzenie 17.11. *Mamy*

(1) $\boldsymbol{j}\mathsf{M}\boldsymbol{j}=\mathsf{M}$,
(2) *dla każdego* $t\in\mathbb{R}$ *zachodzi* $\Delta^{\mathrm{i}t}\mathsf{M}\Delta^{-\mathrm{i}t}=\mathsf{M}$.

Dowód. Punkt (1) wynika natychmiast z wniosku 17.10 i (17.16), natomiast punkt (2) jest konsekwencją stwierdzenia 17.8 i punktu (1). □

Literatura

[1] W. Arveson: *An invitation to* C*-*algebras.*
[2] B. Blackaddar: *Operator algebras. Theory of* C*-*algebras and von Neumann algebras.*
[3] O. Bratteli & D. Robinson: *Operator algebras and quantum statistical mechanics. Vol. I.*
[4] J. Dixmier: *Von Neumann algebras.*
[5] G.K. Pedersen: C*-*algebras and their automorphism groups.*
[6] M.A. Rieffel & A. Van Daele: A bounded operator approach to Tomita-Takesaki theory, *Pac. J. Math.* **69** No. 1 (1977), 187–221.
[7] S. Sakai: C*-*algebras and* W*-*algebras.*
[8] J.T. Schwartz: W*-*algebras.*
[9] S. Stratila & L. Zsidó: *Lectures on von Neumann algebras.*
[10] M. Takesaki: *Theory of Operator algebras.*
[11] S.L. Woronowicz: Nieopublikowane notatki.
[12] W. Żelazko: *Algebry Banacha.*