

Józef H. Przytycki

Przygody badacza węzłów

Od 3-kolorowań Foxa do homologii operatora
Yanga-Baxtera z wielomianem Jonesa i homologiami
Khovanova w tle

7 września 2015

spisał Wojciech Politarczyk

Spis treści

Wstęp	vii
Wykład 1	1
1.1 Krótki wstęp historyczny	1
Wykład 2	9
2.1 3-kolorowania Foxa	9
Wykład 3	13
3.1 Monoid operacji binarnych	13
3.2 Niezmienniki splotów otrzymane z diagramów	13
Wykład 4	19
4.1 Operatory Yanga-Baxtera	19
4.2 Wielomian Jonesa	22
Wykład 5	27
5.1 Nawias Kauffmanna	27
Wykład 6	33
6.1 Homologie	33
Wykład 7	37
7.1 Homologie – kontynuacja	37
Wykład 8	41
8.1 Homologie Khovanova splotów	41
8.2 Homologie małej kategorii o wsp. w funktorze	44
Wykład 9	47
9.1 Jednowyrazowe homologie dystrybtywne	47

Wykład 10	51
10.1 Jednowyrazowe homologie dystrybutywne – kontynuacja . . .	51
10.2 Niezmienniki splotów przy użyciu homologii kwantlowych . . .	53
10.3 Spekulacje dot. homologii operatorów Yanga-Baxtera	56
English summary	57
Bibliografia	59

Spis rysunków

1.1	Markery Listinga	2
1.2	Ilustracja metody Taita konstrukcji splotów.	3
1.3	Przykład zastosowania metody Taita do konstrukcji prostych splotów. Na szaro zaznaczono wyjściowy graf.	3
1.4	Metoda Taita dla dodatniej i ujemnej krawędzi.	3
1.5	Odwrotna konstrukcja Taita.	4
1.6	Relacje w prezentacji Wirtingera	5
1.7	Ruchy generujące izotopie węzłów kratowych	6
1.8	Δ -ruch Reidemeistera	6
1.9	Dwa warianty pierwszego ruchu Reidemeistera	6
1.10	Drugi ruch Reidemeistera	7
1.11	Trzeci ruch Reidemeistera	7
2.1	Nietrywialne kolorowanie trójlistnika	10
2.2	Diagram węzła ósemkowego.	10
3.1	Warunek nałożony na kolorowania diagramów	14
3.2	Własności operacji $*$ i $\bar{*}$ na podstawie pierwszego ruchu Reidemeistera	14
3.3	Własności operacji $*$ i $\bar{*}$ na podstawie drugiego ruchu Reidemeistera	15
3.4	Własności operacji $*$ i $\bar{*}$ na podstawie drugiego ruchu Reidemeistera	15
3.5	Własności operacji $*$ na podstawie trzeciego ruchu Reidemeistera	16
4.1	Warunek dla kolorowań półłuków	19
4.2	Własności operatora Yanga-Baxtera na podstawie drugiego ruchu Reidemesitera	20
4.3	Własności operatora Yanga-Baxtera na podstawie trzeciego ruchu Reidemeistera	20
4.4	Współczynnik skrzyżowania otrzymany z operatora Yanga-Baxtera	22
4.5	Computation of the Jones polynomial of the trivial link T_2	23
4.6	Wyglądzenia pojedynczego skrzyżowania w splocie Hopfa	24

4.7	Wygładzenia pojedynczego skrzyżowania dla diagramu praworęcznego trójlistnika	25
5.1	Skrzyżowanie dodatnie (po lewej) i ujemne (po prawej)	29
5.2	Rozwiązywanie skrzyżowań diagramów	31
8.1	Symboliczne oznaczenie wartości przyjmowanych na skrzyżowaniach przez rozszerzone stany Kauffmana	42
8.2	Wszystkie możliwe sytuacje gdy $[S, S'] \neq 0$ w różniczce Chovanowa.	43
8.3	Elementarne kobordyzmy odpowiadające mnożeniu i komnożeniu, odpowiednio.	44
8.4	Aksjomaty gwarantujące, że $\partial^2 = 0$ dla różniczki w kompleksie Khovanova.	45
10.1	Geometryczna interpretacja różniczki $d_i^{(*)}: C_n^R(X) \rightarrow C_{n-1}^R(X)$	54
10.2	Aksjomaty modułu symplecjonalnego dla d_1^* i d_2^* w terminach diagramów.	54

Wstęp

W maju 2015, na zaproszenie Krzysztofa Pawałowskiego, wygłosiłem na Uniwersytecie Adama Mickiewicza w Poznaniu 10 podwójnych wykładów. Jednym z moich celów było pokazanie, że teoria węzłów jest bogata w problemy dziedziny matematyki i że możemy stosunkowo szybko, w ciągu 20 godzin, dojść od elementarnych rozważań/definicji, izotopii i ruchów Reidemeistera, do otwartych problemów. Szczególnie rozwijam związki pomiędzy homologiami struktur dystrybutywnych i pochodzącymi od nich (ko)cyklowych niezmienników węzłów, a homologiami Khovanova. Sugeruję powiązanie przechodzące przez homologie operatorów Yanga-Baxtera, lub szerzej podaję idee, że związek można osiągnąć interpretując obie teorie w języku mechaniki statystycznej.

Wykład 1

1.1 Krótki wstęp historyczny

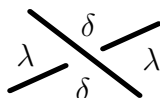
Teoria węzłów wraz z kombinatoryką i teorią grafów mają wspólne początki w ideach Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716) jako *ars combinatoria* i *geometria situs*. W przypadku *ars combinatoria* Leibniz był pod wpływem Ramona Llulla (1232–1315) i Athanasiusa Kirchera (1602–1680)¹.

Geometria situs miała być nauką, która abstrahuje od rozmiarów obiektów geometrycznych biorąc pod uwagę tylko ich względne położenie. Jako pierwszy przykład rozważań w duchu *geometrii situs* można podać problem mostów królewieckich. Problem ten został zaproponowany przez gdańskiego matematyka, urodzonego i wykształconego w Królewcu, Heinricha Kühna (1690–1769)²

Po raz pierwszy węzły pojawiły się w matematycznym kontekście w pracy Alexandre-Theophile’a Vandermonde’a (1735–1796). Vandermonde w pracy *Remarques sur les problemes de situation* (“Uwagi o problemach położenia”)

¹Istnieje też pogląd, przedstawiony w [Fin04, Gla12] że w zasadzie wszystkie większe naukowe, lingwistyczne czy historyczne projekty, które Leibniz przedsięwziął były bezpośrednio inspirowane młodzieńczą lekturą dzieł Kirchera.

²Kühn został sprowadzony do Gdańska w 1733 roku przez patrycjusza gdańskiego i miłośnika nauki, późniejszego burmistrza Gdańska, Leonharda Gottlieba Ehlera (1685–1753). Ehler spotkał Leonarda Eulera (1707–1783) w Petersburgu pod koniec 1734 roku lub na początku 1735. Był on członkiem delegacji gdańskiej do carycy Anny negocjującej zmniejszenie reperacji wojennych wymuszonych na Gdańsku gdy Rosja zdobyła miasto 9 lipca 1734 roku. Delegacja opuściła Petersburg 3 czerwca 1735 roku. Prawdopodobnie to Ehler przekazał Eulerowi problem mostów królewieckich w czasie swojego pobytu w Petersburgu. Już 26 sierpnia 1735 Euler złożył w akademii Petersburskiej informacje o rozwiązaniu problemu mostów Królewieckich. Prywatne dyskusje Ehlera i Eulera w Petersburgu są przedmiotem spekulacji, za to zachował się list Ehlera do Eulera z 9 marca 1736 roku: “Wyświadczyłbyś mnie i mojemu przyjacielowi Kühnowi niezwykle wartościową przysługę, zasługując na nasz wieczny dług, najbardziej wykształcony Panie, gdybyś mógł przesłać nam rozwiązanie, które znasz dobrze, problemu siedmiu mostów Królewieckich, razem z dowodem. Będzie to służyło jako wyjątkowy przykład **Calculi Situs**, warty Twojego wielkiego geniuszu. Załączyłem szkic tych mostów...” [BLW86, HW04, Cze06, Kop10, SSW88, Szn15, Prz11b, Prz11c]



Rysunek 1.1: Markery Listinga

z 1771 roku pisze, że warkocze i węzły powinny być przedmiotem badań geometrii położenia.

W pozostawionych notatkach Carla Friedricha Gaussa (1777–1855) możemy znaleźć wiele rysunków węzłów (wraz z kodami Gaussa) poczynając od roku 1794, gdy Gauss miał 17 lat. Poza tym, Gauss, zdefiniował w 1833 roku indeks zaczepiania dwóch krzywych w przestrzeni przy pomocy pewnej całki.

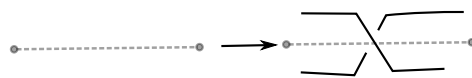
Johann Benedict Listing (1808–1882), który był uczniem Gaussa, jako pierwszy zaczął badać węzły. Zdawał sobie sprawę, że aktualny stan wiedzy nie daje żadnych precyzyjnych narzędzi do badania tego typu obiektów. W pracy *Vorstudien zur Topologie* pisze, że topologia musi przetłumaczyć pojęcia związane z położeniem na pewien zestaw symboli na których będzie można operować. Jako próbę realizacji tej idei można traktować kombinatoryczną definicję indeksu zaczepienia podaną przez Listinga. Warto też nadmienić, że Listing jako pierwszy użył terminu *topologia* zamiast *geometria situs*.

Listing rozpatrywał diagramy węzłów, razem z dodatkowymi markerami λ i δ jak na Rysunku 1.1. Zauważmy, że diagram węzła na płaszczyźnie dzieli tę płaszczyznę na pewną ilość regionów ograniczonych wielokątami krzywoliniowymi i jeden nieograniczony region. Markery Listinga w naturalny sposób przyporządkowują markery kątom wielokątów krzywoliniowych. Następująca obserwacja pochodzi od Listinga.

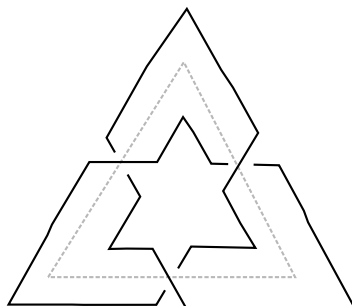
Twierdzenie 1.1 ([Lis47]). *Jeśli spójny diagram D splotu jest alternujący, to dla danego regionu płaszczyzny każdy jego wierzchołek ma to samo oznaczenie.*

Wczesne badania w teorii węzłów były inspirowane zagadnieniami z fizyki i chemii. Peter Guthrie Tait (1831–1901), który był zafascynowany pracami Hermanna Helmholtza (1821–1894) dotyczącymi wirów, opracował metodę wytwarzania wirów dymu. William Thomson (1824–1907) (znany jako Lord Kelvin) gdy zobaczył eksperyment Taita z wirami wysunął hipotezę, która mówiła, że atomy są wirami w eterze. Ta hipoteza dała motywację Taitowi, aby zajmować się teorią węzłów.

Tait pokazał metodę konstruowania węzłów z grafów planarnych. W metodzie tej zastępuje się każdą krawędź grafu przez skrzyżowanie tak jak na Rysunku 1.2. Następnie łączy się pozostałe końce zgodnie z tym w jaki sposób połączone są wierzchołki w wyjściowym grafie, zob. Rysunek 1.3. Metoda



Rysunek 1.2: Ilustracja metody Taita konstrukcji splotów.



Rysunek 1.3: Przykład zastosowania metody Taita do konstrukcji prostych splotów. Na szaro zaznaczono wyjściowy graf.

ta dawała tylko węzły alternujące, co zostało zauważone przez Taita.

Twierdzenie 1.2 ([Tai77]). *Diagram $D(G)$ jest alternujący.*

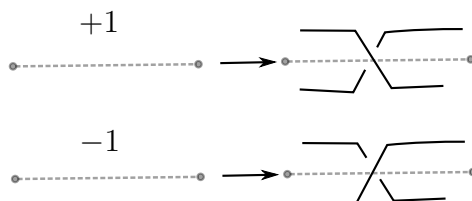
Następująca modyfikacja metody Taita pozwalała otrzymać także węzły, które nie są alternujące. Rozważmy najpierw poniższą definicję.

Definicja 1.3. *Znakowanym grafem płaskim nazywamy parę (G, f) , gdzie G jest grafem planarnym oraz*

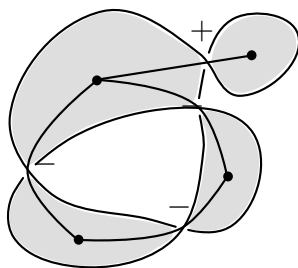
$$f: E(G) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

Jedyna różnica pomiędzy nieznakowaną a znakowaną konstrukcją polega na tym, że w drugiej konstrukcji rozróżniamy dodatnie i ujemne krawędzie i przypisujemy im różne skrzyżowania zgodnie z regułą na Rysunku 1.4.

Oprócz dwóch powyższych konstrukcji Tait podał też konstrukcję odwrotną, która każdemu diagramowi węzła przyporządkowuje graf planarny. Punktem wyjściowym była następująca obserwacja.



Rysunek 1.4: Metoda Taita dla dodatniej i ujemnej krawędzi.



Rysunek 1.5: Odwrotna konstrukcja Taita.

Twierdzenie 1.4 (Tait). *Jeśli G jest grafem płaskim, którego każdy wierzchołek ma parzysty stopień, to ściany G można pokolorować w szachownicę.*

Zauważmy, że diagram splotu, po zignorowaniu informacji dotyczących rodzajów skrzyżowań, wyznacza graf planarny na płaszczyźnie, którego wszystkie wierzchołki mają stopień 4. Zatem możemy pokolorować ściany tego grafu w szachownicę tak, aby nieograniczona ściana miała kolor biały. Dalej każdej czarnej ścianie odpowiada wierzchołek nowego grafu, a skrzyżowania diagramu wyznaczają krawędzie nowego grafu. Biorąc pod uwagę fakt czy skrzyżowanie jest prawoskrętne czy lewo skrętne możemy otrzymać graf znakowany, zob. Rysunek 1.5.

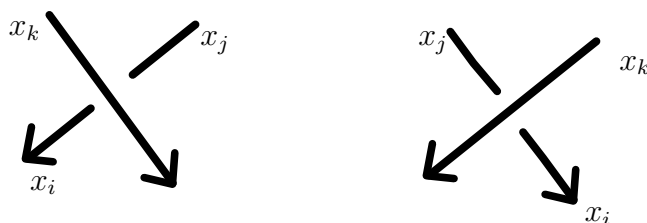
Warto zauważyć, że Tait w [Tai77] pisze, że Felix Klein (1849–1925) zauważył, że w wymiarze cztery każdy węzeł może być rozsupłany. Obserwacja ta została spożytkowana przez amerykańskiego magika Henry’ego Slade’a, który pokazywał sztuczki magiczne twierdząc, że rozwiązuje węzły w czwartym wymiarze.

James Clerk Maxwell (1831–1879) również rozpatrywał pewne zagadnienia z teorii węzłów. Interesował go problem kiedy dwa diagramy reprezentują równoważne węzły. W jego notatkach możemy znaleźć rysunki ruchów na diagramach węzłów później nazwanych ruchami Reidemeistera.

XIX wieczni badacze węzłów (Tait, Thomson, Penyngton Kirkman, Charles Newton Little, Oskar Simony)³ rozumieli węzły jako krzywe zamknięte w przestrzeni, które możemy deformować bez rozcinania i sklejanía. Takie podejście pozwoliło im na sporządzenie tablic węzłów do dziesięciu skrzyżowań, jednak nie dawało ścisłych metod pozwalających na badanie węzłów.

Przełom nastąpił po ukazaniu się w 1895 pracy Henri Poincarégo *Analysis situs*, która zawierała, między innymi, definicję grupy podstawowej. W 1905 roku Wilhelm Wirtinger podał prezentację grupy podstawowej węzła [Wir05].

³Również w tym duchu badała węzły Mary Gertrude Haseman (1889-1979), która obroniła doktorat w 1917 i była pierwszą kobietą która opublikowała pracę z teorii węzłów [Has17].



Rysunek 1.6: Relacje w prezentacji Wirtingera

Inna prezentacja została podana przez Maxa Dehna w 1907 roku. Wyniki te umożliwiły badanie węzłów przy użyciu ścisłych metod z teorii grup i topologii.

Niech D będzie diagramem splotu. Łukami diagramu D nazywamy krzywe, wyznaczone przez diagram D , których początkiem i końcem są tunele, zawierające w swoim wnętrzu tylko mosty. Z kolei półłuki to krzywe, które mają początek i koniec w jakimś skrzyżowaniu (most albo tunel) i nie zawierają w swoim wnętrzu żadnego innego skrzyżowania. Niech ℓ_1, \dots, ℓ_k będą łukami diagramu D . Wirtinger podał prezentację grupy podstawowej węzła, w której generatory x_1, \dots, x_k odpowiadają łukom diagramu D . Dodatkowo, każde ujemne skrzyżowanie wyznacza relację postaci

$$x_j x_k^{-1} x_i x_k$$

oraz każde dodatnie skrzyżowanie wyznacza relację

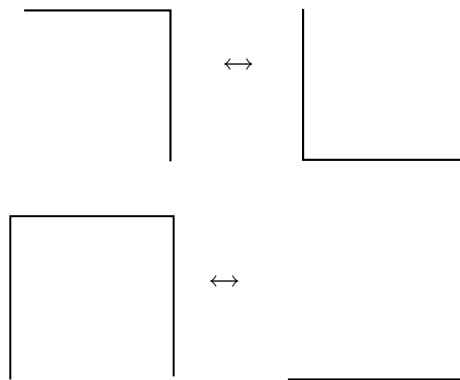
$$x_j x_k x_i^{-1} x_k^{-1},$$

przy założeniu, że stosujemy oznaczenia jak na Rysunku 1.6.

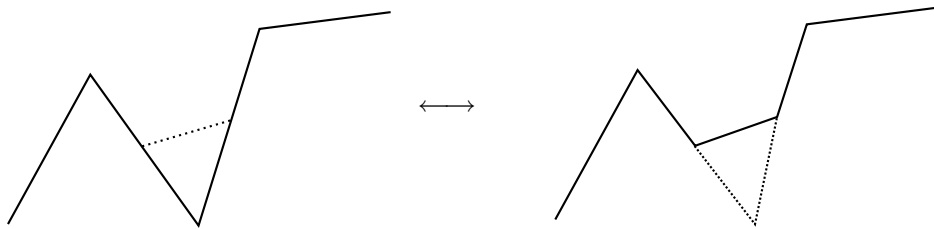
W tym samym czasie zaczęły się pojawiać pierwsze próby uściślenia pojęcia węzła. Pierwsza próba została podjęta przez Maxa Dehna i Poula Heegaarda. Wprowadzili oni pojęcie węzła kratowego i w sposób ścisły zdefiniowali pojęcie kratowej równoważności węzłów, zob. Rysunek 1.7. Relację tę nazwali izotopią [DH07].

Inne podejście pokazał Kurt Reidemeister, który węzły rozpatrywał jako krzywe łamane, a równoważność wyrażała się przy pomocy tzw. Δ -ruchu. Kulminacją tych rozważań było następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.5 (Reidemeister, Alexander–Briggs, [AB26, Rei26]). *Dwa diagramy reprezentują równoważne sploty jeśli od jednego do drugiego można dojść przy pomocy skończonej ilości ruchów Reidemeistera, zob. Rysunek 1.9, 1.10 i 1.11.*



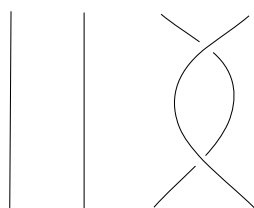
Rysunek 1.7: Ruchy generujące izotopie węzłów kratowych

Rysunek 1.8: Δ -ruch Reidemeistera

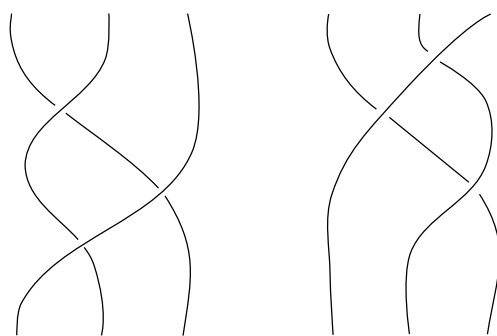
Twierdzenie zachodzi także dla zorientowanych diagramów; zakładamy wtedy, że diagramy przed i po ruchu Reidemeistera są zgodnie zorientowane.



Rysunek 1.9: Dwa warianty pierwszego ruchu Reidemeistera



Rysunek 1.10: Drugi ruch Reidemeistera



Rysunek 1.11: Trzeci ruch Reidemeistera

Wykład 2

2.1 3-kolorowania Foxa

Definicja 2.1. Niech D będzie diagramem splotu.

- 3-kolorowaniem diagramu D nazywamy funkcję

$$f: \text{łuki}(D) \rightarrow X,$$

gdzie X jest zbiorem kolorów $X = \{0, 1, 2\}$. Dodatkowo wymagamy, aby funkcja f spełniała warunek taki, że w każdym skrzyżowaniu występują albo wszystkie, albo tylko jeden kolor.

- Dodatkowo przez $\text{col}_3(D)$ i $\text{Col}_3(D)$ oznaczamy, odpowiednio, liczbę oraz zbiór kolorowań diagramu D elementami zbioru $X = \{0, 1, 2\}$.

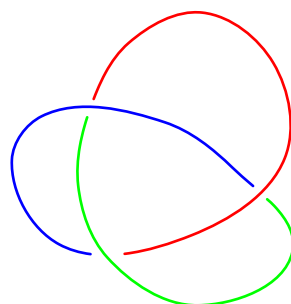
Przykład 2.2. Rozważmy diagram T_n splotu trywialnego o n składowych, który nie posiada żadnych skrzyżowań. Nietrudno się przekonać, że liczba wszystkich kolorowań równa jest 3^n .

Przykład 2.3. W przypadku trójlistnika (zob. Rysunek 1.3) mamy trzy trywialne kolorowania (tj. wszystkie łuki kolorujemy tym samym kolorem). Dodatkowo, nietrudno zauważyć, że w przypadku dowolnego nietrywialnego kolorowania wybór koloru dla dowolnych dwóch łuków wyznacza kolor trzeciego łuku, co daje dodatkowe 6 kolorowań, zob. Rysunek 2.1. W sumie

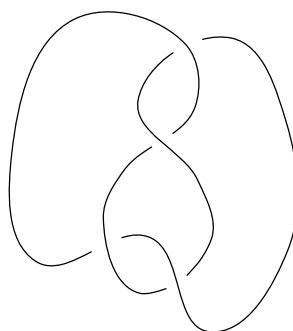
$$\text{col}_3(3_1) = 3 + 6 = 9.$$

Przykład 2.4. Rozważmy węzeł ósemkowy (zob. Rysunek 2.2). W tym przypadku mamy tylko trywialne kolorowania, zatem

$$\text{col}_3(4_1) = 3.$$



Rysunek 2.1: Nietrywialne kolorowanie trójlistnika



Rysunek 2.2: Diagram węzła ósemkowego.

Przykład 2.5. Rozważmy splot $T(2, n)$, który powstaje przez zastosowanie konstrukcji Taita z poprzedniego wykładu do n -kąta foremego. Wówczas mamy trzy trywialne kolorowania. Jeśli $3 \nmid n$, wówczas są to wszystkie 3-kolorowania. Jeśli $3 \mid n$, wówczas mamy nietrywialne kolorowania. Każde z tych nietrywialnych kolorowań jest wyznaczone przez kolory nadane dowolnym dwóm łukom posiadającym wspólne skrzyżowanie. Zatem

$$\text{col}_3(T(2, n)) = \begin{cases} 3, & 3 \nmid n, \\ 9, & 3 \mid n. \end{cases}$$

Fakt 2.6. Liczba 3-kolorowań jest niezmiennikiem splotów, tj. jeśli D i D' są diagramami splotów takimi, że D' powstaje z D przez zastosowanie ruchu Reidemesitera, to $\text{col}_3(D) = \text{col}_3(D')$.

Wniosek 2.7. 3-kolorowania pozwalają nam odróżnić trójlistnik od węzła trywialnego i od węzła ósemkowego. Niestety nie pozwalają nam odróżnić węzła ósemkowego od węzła trywialnego.

Dowód. Zob. Stwierdzenie 3.6 z następnego wykładu. □

Fakt 2.8. *Jeśli D jest dowolnym splotem, wówczas istnieje liczba całkowita nieujemna λ taka, że*

$$\text{col}_3(D) = 3^\lambda.$$

Dowód. Niech zbiorem naszych kolorów będzie $\mathbb{Z}/3$. Wówczas warunek w definicji 3-kolorowania jest równoważny warunkowi

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{3}$$

gdy a, b, c są kolorami występującymi w pojedynczym skrzyżowaniu. Kolorowania Foxa są podzbiorem zbioru $(\mathbb{Z}/3)^k$, gdzie k to liczba łuków diagramu. Powyższy warunek pokazuje, że kolorowania Foxa tworzą przestrzeń wektorową nad $\mathbb{Z}/3$. Stąd konkluzja. \square

Uwaga 2.9. *Warto zaznaczyć, że każde 3-kolorowanie diagramu D wyznacza reprezentację grupy splotu w grupie dihedralnej D_3 (tj. grupie symetrii trójkąta foremnego). Ponumerujmy boki trójkąta foremnego kolejno 0, 1, 2. Wówczas jeśli łuk ℓ jest pokolorowany kolorem i , to odpowiadający mu generator w prezentacji Wirtingera jest przekształcany na odbicie względem środkowej boku i . Zachęcamy czytelnika do sprawdzenia, że takie odwzorowanie rzeczywiście wyznacza homomorfizm grup.*

R. Fox (1913-1973), znając tę interpretację, wprowadził elementarne podejście do 3-kolorowania gdy w 1956 roku uczył początkujących studentów w Haverford College (jak sam pisze we wstępie do [CF63]: “Chciałem uczynić przedmiot dostępnym dla każdego”); por. [Prz98].

Weźmy teraz dowolną grupę abelową G i określmy nowe działanie w G następującym wzorem

$$a * b = 2b - a.$$

Tego typu struktury mogą posłużyć nam do określenia niezmienników splotów, analogicznie jak w przypadku kolorowań Foxa.

W przypadku gdy grupa G jest nieprzemienna powyższe działanie możemy określić w następujący sposób.

$$a * b = ba^{-1}b.$$

Wykład 3

3.1 Monoid operacji binarnych

Definicja 3.1. Niech X będzie zbiorem, wówczas przez $\text{Bin}(X)$ oznaczamy rodzinę działań binarnych na X , tj.

$$\text{Bin}(X) = \{*: X \times X \rightarrow X\}.$$

Dodatkowo, będziemy używali następującej notacji

$$*(a, b) = a * b.$$

Stwierdzenie 3.2. Zbiór $\text{Bin}(X)$ jest monoidem, tj. półgrupą z elementem neutralnym, gdzie złożenie dwóch operacji binarnych na X zadane jest następującym wzorem.

$$a *_1 *_2 b = (a *_1 b) *_2 b.$$

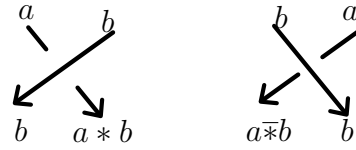
Element neutralny to następująca operacja binarna $*_0$.

$$a *_0 b = a.$$

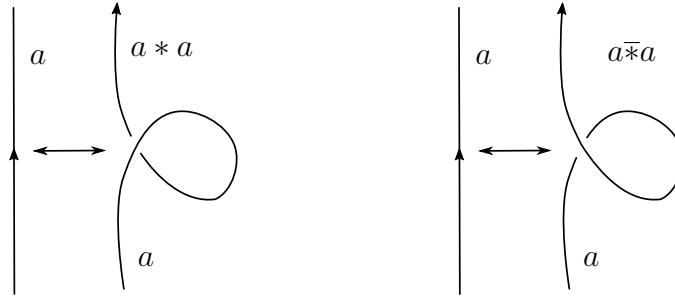
3.2 Niezmienniki splotów otrzymane z diagramów

Niech D będzie zorientowanym diagramem splotu bez trywialnych składowych oraz niech X będzie zbiorem skończonym. Naszą pierwszą próbą określenia niezmiennika splotu reprezentowanego przez D będzie rozpatrzenie kolorowań łuków diagramu elementami zbioru D .

Definicja 3.3. Niech X będzie zbiorem wraz z dwiema operacjami binarnymi $*$ i $\bar{*}$. Niech $\text{Col}_{(X,*,\bar{*})}(D)$ oznacza zbiór odwzorowań ze zbioru łuków diagramu D do zbioru X , które spełniają warunek przedstawiony na Rysunku 3.1. Dodatkowo niech $\text{col}_{(X,*,\bar{*})}(D)$ oznacza moc zbioru $\text{Col}_{(X,*,\bar{*})}(D)$.



Rysunek 3.1: Warunek nałożony na kolorowania diagramów

Rysunek 3.2: Własności operacji $*$ i $\bar{*}$ na podstawie pierwszego ruchu Reidemeistera

W tym miejscu nasuwa się pytanie o własności działań $*$ i $\bar{*}$, które będą nam gwarantowały, że $\text{Col}_{(X,*,\bar{*})}(D)$ i $\text{col}_{(X,*,\bar{*})}(D)$ będą niezmiennicze ze względu na zorientowane ruchy Reidemeistera. Spróbujmy rozpatrzyć przypadek dwóch dodatniej i ujemnej wersji pierwszego ruchu Reidemeistera. Sytuacja została przedstawiona na Rysunku 3.2.

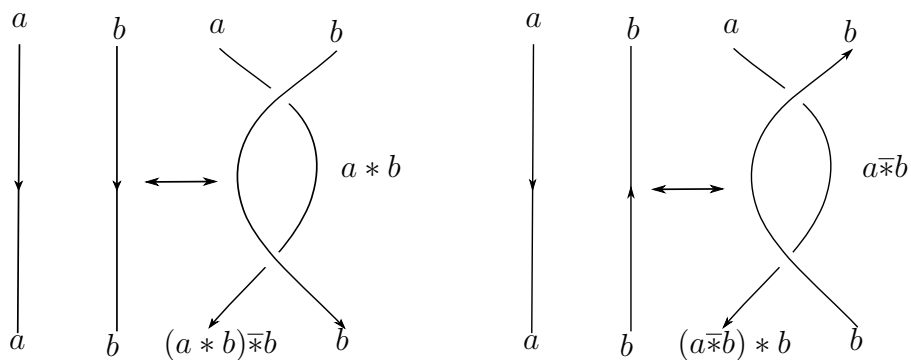
Zauważmy, że wymaganie, aby zachodziła niezmienniczość ze względu na pierwszy ruch Reidemeistera, będzie spełnione, gdy na Rysunku 3.2 oba fragmenty diagramu będą miały odpowiadające fragmenty łuków wchodzących i wychodzących pokolorowane tymi samymi kolorami. To wymaganie powoduje, że działania $*$ i $\bar{*}$ muszą spełniać tzw. *warunek idempotentności*, tj. dla dowolnego $a \in X$ spełnione jest $a * a = a$ i $a \bar{*} a = a$.

Analogicznie rozpatrzmy drugi ruch Reidemeistera, zob. Rysunek 3.3 i Rysunek 3.4. Rozumując jak poprzednio, wnioskujemy, że operacje $*$ i $\bar{*}$ są do siebie odwrotne w $\text{Bin}(X)$, gdzie składanie operacji binarnych rozumiemy jak w Stwierdzeniu 3.2.

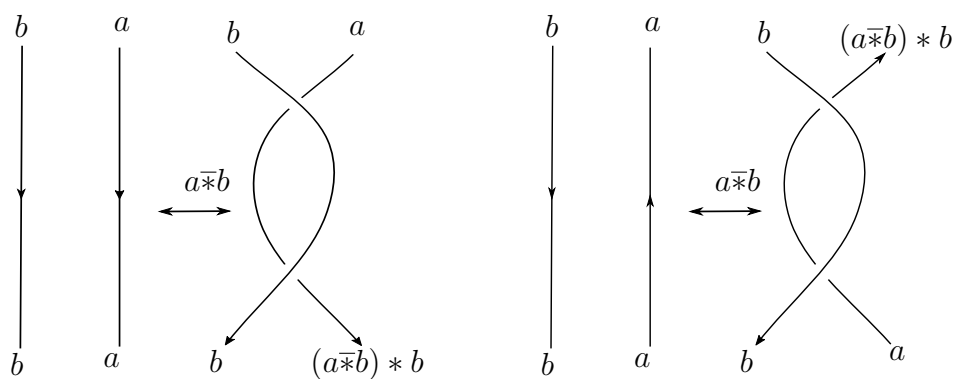
Jako ostatni rozważmy jeden z możliwych wariantów trzeciego ruchu Reidemeistera, w którym wszystkie skrzyżowania są dodatnie. Ograniczenie jakie dostajemy tym razem pokazuje, że operacja $*$ jest rozdzielna względem siebie, tj. dla dowolnych $a, b, c \in X$ spełniona jest następująca tożsamość.

$$(a * b) * c = (a * c) * (b * c).$$

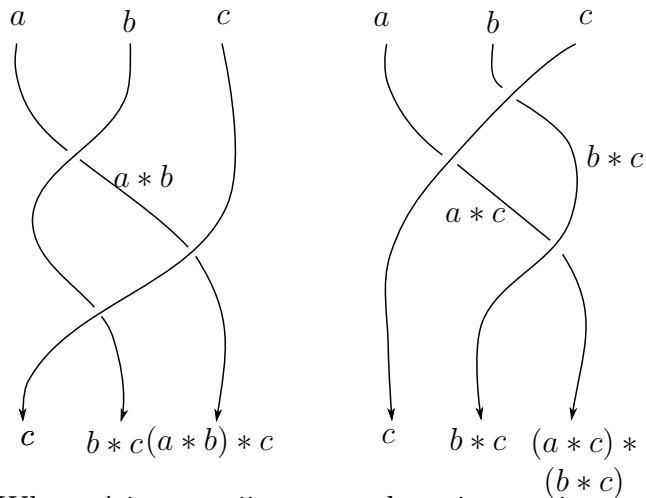
Rozpatrując analogicznie inne wersje trzeciego zorientowanego ruchu Reide-



Rysunek 3.3: Własności operacji $*$ i $\bar{*}$ na podstawie drugiego ruchu Reidemeistera



Rysunek 3.4: Własności operacji $*$ i $\bar{*}$ na podstawie drugiego ruchu Reidemeistera



Rysunek 3.5: Własności operacji $*$ na podstawie trzeciego ruchu Reidemeistera

meistera otrzymamy również rozdzielność $\bar{*}$ względem siebie oraz rozdzielność operacji $*$ względem $\bar{*}$ i na odwrót.

Podsumowując powyższe rozważania zdefiniujemy następujący obiekt algebraiczny, który po raz pierwszy był rozważany w 1979 w pracy doktorskiej S.Joyce'a [Joy79, Joy82] i nazwany tam kwandlem. Niezależnie obiekt ten rozważany był przez S.Matveeva i nazywany "distributive groupoid" [Mat82].

Definicja 3.4. *Struktura algebraiczna składająca się ze zbioru X oraz operacji binarnej $*$ na X nazywa się kwandlem (ang. quandle) gdy spełnia następujące trzy warunki.*

1. *idempotentność:* $\forall_{a \in X} a * a = a$,
2. *odwracalność:* $*$ jest odwracalna w $\text{Bin}(X)$, odwrotność $*$ oznaczamy $\bar{*}$,
3. *dystrybutywność (rozdzielność):* $\forall_{a,b,c \in X} (a * b) * c = (a * c) * (b * c)$.

Uwaga 3.5. *Można rozpatrywać różne słabsze wersje kwandla.*

1. *Gdy $*$ = $\bar{*}$, wówczas, za [Joy82], taki kwandl nazywamy kwandlem inwolutywnym lub kei [Tak42],*
2. *jeśli spełnione są tylko własności 2 i 3 z powyższej definicji, wówczas takiej strukturze nadajemy nazwę wrak (ang. rack),*
3. *gdy spełniona jest tylko własność 3, wówczas taką strukturę nazywamy półką (ang. shelf),*

4. gdy spełnione są własności 1 i 3, wówczas tak otrzymaną strukturę nazywamy wrzecionem (ang. spindle).

Podsumowując powyższe rozważania otrzymujemy następujący wniosek.

Stwierdzenie 3.6. *Jeśli $(X, *)$ jest kwandlem, wówczas $\text{col}_{(X,*)}(D)$ nie zależy od wyboru diagramu D i jest niezmiennikiem splotów.*

Przykład 3.7. *Jeśli G jest dowolną grupą i na G określimy operację binarną wzorem*

$$a * b = b^{-1}ab, \quad a \bar{*} b = bab^{-1},$$

wówczas otrzymamy kwandl nazywany kwandlem sprzężenia grupy G i oznaczany $\text{cong}(G)$.

Przykład 3.8. *Niech D będzie diagramem splotu L , oraz niech π będzie grupą podstawową dopełnienia L . Wówczas $Q(L) = \text{conj}(\pi)$ nazywamy kwandlem podstawowym splotu L . Kwandl $Q(L)$ posiada prezentację, w której generatorami są łuki diagramu D oraz relacje zadane są przez skrzyżowania D tak jak na Rysunku 3.1, zob. również [Man04].*

Przykład 3.9. *Jeśli H jest grupą abelową i wprowadzimy operację binarną*

$$a * b = 2b - a,$$

wówczas otrzymamy kwandl. Takasaki w [Tak42] próbował uogólnić ten przypadek dla grup nieprzemiennej próbując definiować

$$\begin{aligned} a * b &= b^2 a^{-1}, \\ a * b &= a^{-1} b^2, \end{aligned}$$

Okazuje się, że prawidłowym uogólnieniem jest przyjęcie

$$a * b = ba^{-1}b.$$

W ten sposób otrzymujemy tzw. kwandl rdzenny grupy G , który oznaczamy $\text{core}(G)$. Tak otrzymany kwandl jest kei jako że $(a * b) * b = (ba^{-1}b) * b = b(ba^{-1}b)^{-1}b = a$.

Przykład 3.10. *Niech M będzie modułem nad pierścieniem wielomianów Laurenta $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Określmy operację binarną na M następującym wzorem.*

$$a * b = t \cdot a + (1 - t) \cdot b.$$

W ten sposób otrzymujemy kwandl Alexandera.

Zauważmy, że dla kwandli Alexandra zachodzą następujące tożsamości

$$\begin{aligned} a * b &= t^2 \cdot a + (1 - t^2) \cdot b, \\ a *^n b &= t^n \cdot a + (1 - t^n) \cdot b, \\ a \bar{*} b &= t^{-1} \cdot a + (1 - t^{-1}) \cdot b, \end{aligned}$$

powyższe tożsamości są szczególnym przypadkiem poniższego stwierdzenia.

Definicja 3.11. Niech $S \subset \text{Bin}(X)$. Zbiór S nazywamy zbiorem dystrybutywnym, gdy spełniony jest poniższy warunek

$$\forall_{*\alpha, *\beta \in X} (a *_{\alpha} b) *_{\beta} c = (a *_{\beta} c) *_{\alpha} (b *_{\beta} c).$$

Stwierdzenie 3.12 ([Prz11a]). Jeśli $S \subset \text{Bin}(X)$ jest zbiorem dystrybutywnym, wówczas monoid $M(S)$ generowany przez S jest również zbiorem dystrybutywnym.

Wniosek 3.13. Jeśli $(X, *)$ jest kwandlem, wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ para $(X, *^n)$ jest również kwandlem.

Dowód. Sprawdzimy dystrybutywność tylko dla przypadku $n = 2$. Pozostałe przypadki można otrzymać analogicznie przez zastosowanie indukcji matematycznej.

$$\begin{aligned} (a *^2 b) *^2 c &= (((a * b) * b) * c) * c, \\ (a *^2 c) *^2 (b *^2 c) &= ((a * c) * c) *^2 ((b * c) * c) = \\ &= (((a * c) * c) * ((b * c) * c)) * ((b * c) * c) = \\ &= (((a * c) * (b * c)) * c) * ((b * c) * c) = \\ &= (((a * b) * c) * c) * ((b * c) * c) = \\ &= (((a * b) * c) * (b * c)) * c = \\ &= (((a * b) * b) * c) * c. \end{aligned}$$

□

Po raz pierwszy struktury dystrybutywne były rozpatrywane dogłębnie przez Burstina i Mayera w pracy [BM29]¹

¹Walter Mayer jest dobrze znany z ciągu Mayera-Vietorisa i z tego, że był asystentem Einsteina w Institute for Advanced Study w Princeton. Celestyn Burstin (28 stycznia 1888 – 21 października 1938) urodził się w Tarnopolu, ukończył liceum w Tarnopolu (zaocznie w 1907), przeniósł się do Wiednia, gdzie zrobił doktorat (1912), potem do Mińska (1929) z rekomendacji Einsteina, gdzie był członkiem Białoruskiej Akademii Nauk i Dyrektorem Matematycznego Instytutu Akademii Nauk. Został aresztowany w 1937 pod zarzutem, że jest polskim i austriackim szpiegiem. Zmarł w 1938 roku podczas przesłuchania (w więzieniu w Mińsku). Zrehabilitowany 2 marca 1956 [07, Zyg07, Bur13, Bur33, Mal08, Mio98, Woł88].

Wykład 4

4.1 Operatory Yanga-Baxtera

Rozważmy teraz kolorowania diagramów z tą różnicą, że teraz rozpatrujemy kolorowania półluków elementami zbioru X , na którym zadane są dwie operacje

$$R, \bar{R}: X \times X \rightarrow X \times X.$$

Będą nas interesowały tylko kolorowania spełniające warunek jak na Rysunku 4.1. Tym razem będą nas interesowały niezmienniki splotów obramowanych, czyli będzie nas interesowała niezmienniczość ze względu na drugi i trzeci ruch Reidemesitera.

Analizując drugi ruch Reidemeistera ze zgodnymi orientacjami jak poprzednio otrzymujemy, że niezmienniczość ze względu na drugi ruch Reidemeistera odpowiada temu, że R i \bar{R} są odwzorowaniami odwrotnymi, tj.

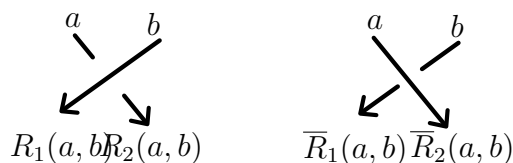
$$R \circ \bar{R} = \bar{R} \circ R = \text{id}_{X \times X}.$$

Z kolei niezmienniczość ze względu na trzeci ruch Reidemeistera odpowiada tzw. równaniu Yanga-Baxtera.

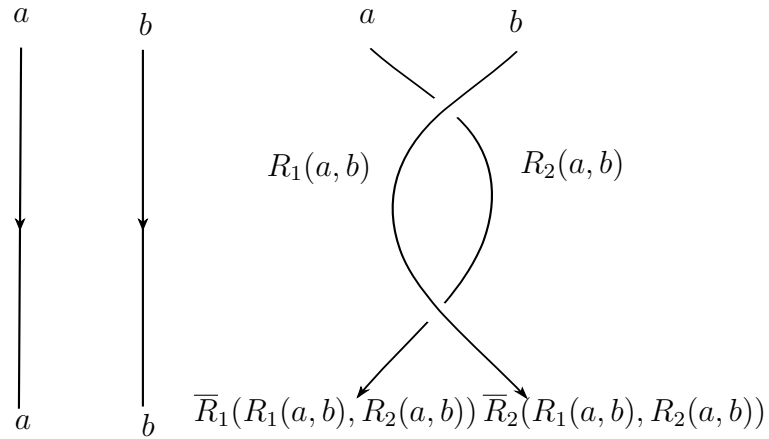
$$(R \times \text{id}) \circ (\text{id} \times R) \circ (R \times \text{id}) = (\text{id} \times R) \circ (R \times \text{id}) \circ (\text{id} \times R).$$

Definicja 4.1. Niech X będzie zbiorem oraz niech

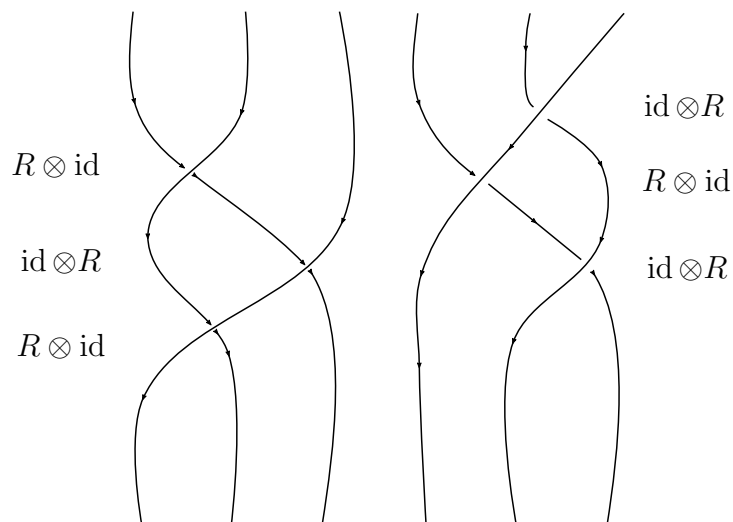
$$R: X \times X \rightarrow X \times X.$$



Rysunek 4.1: Warunek dla kolorowań półluków



Rysunek 4.2: Własności operatora Yanga-Baxtera na podstawie drugiego ruchu Reidemesitera



Rysunek 4.3: Własności operatora Yanga-Baxtera na podstawie trzeciego ruchu Reidemeistera

Odwzorowanie R nazywamy teoriomnogościowym operatorem Yanga-Baxtera gdy spełnione są poniższe warunki.

1. R jest bijekcją,
2. spełnione jest równanie Yanga-Baxtera

$$(R \times \text{id}) \circ (\text{id} \times R) \circ (R \times \text{id}) = (\text{id} \times R) \circ (R \times \text{id}) \circ (\text{id} \times R).$$

Niech teraz $V = k\langle X \rangle$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k (lub ogólniej wolnym modulem nad pierścieniem przemiennym k z bazą X) rozpiętą przez zbiór X . Operator Yanga-Baxtera na X określa operator liniowy

$$R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V,$$

który spełnia dwie własności

1. R jest odwracalny,
2. R spełnia równanie Yanga-Baxtera

$$(R \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes R).$$

Definicja 4.2. *Operator liniowy*

$$R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$$

spełniający powyższe warunki nazywamy operatorem Yanga-Baxtera.

Uwaga 4.3. *Operator liniowy*

$$R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V,$$

który spełnia tylko drugą własność nazywamy preoperatorem Yanga-Baxtera. Analogicznie definiujemy teoriomnogościowy preoperator Yanga-Baxtera.

Aby otrzymać niezmiennik splotów z operatorów Yanga-Baxtera rozważmy operator Yanga-Baxtera

$$R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$$

oraz niech X będzie bazą przestrzeni V . Dla $a, b \in X$ niech

$$R(a, b) = \sum_{(c,d) \in X^2} R_{cd}^{ab}(c, d).$$



Rysunek 4.4: Współczynnik skrzyżowania otrzymany z operatora Yanga-Baxtera

Jeśli pokolorujemy pólki diagramu D elementami zbioru X , wówczas każdemu skrzyżowaniu możemy przyporządkować współczynnik z ciała k tak jak na Rysunku 4.4. Niezmiennikiem obramowanego splotu będzie następująca wielkość

$$\sum_{x \in \text{Col}_X(D)} \prod_{\text{Cr}(D)} \hat{R}_{cd}^{ab},$$

gdzie \hat{R}_{cd}^{ab} równa się R_{cd}^{ab} dla dodatniego skrzyżowania, a \bar{R}_{cd}^{ab} dla ujemnego skrzyżowania.

Przykład 4.4. Niech $X = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $k = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ oraz

$$R_{cd}^{ab} = \begin{cases} -q, & a = b = c = d, \\ 1, & a = d \neq b = c, \\ q^{-1} - q, & a = c < b = d, \\ 0, & \text{w p. przyp.} \end{cases}$$

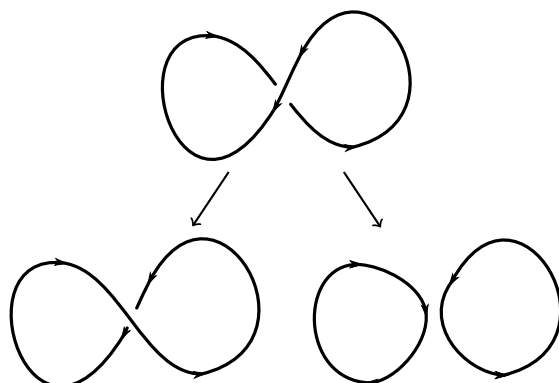
$$\bar{R}_{cd}^{ab} = \begin{cases} -q^{-1}, & a = b = c = d, \\ 1, & a = d \neq b = c, \\ q - q^{-1}, & a = c > b = d, \\ 0, & \text{w p. przyp.} \end{cases}$$

Niezmiennikiem splotów, który otrzymamy z powyższego operatora Yanga-Baxtera Yanga-Baxtera dla $m = 2$ jest wielomian Jonesa, a ogólniej dla każdego m dostaniemy pewne podstawienie w wielomianie HOMFLYPT (uogólnionym wielomianie Jonesa [FYH⁺85, PT88]).

Uwaga 4.5. Polecamy uwadze zainteresowanego czytelnika pracę [Tur88, Jon89], w której dużo dokładniej omówiono zagadnienia dot. operatorów Yanga-Baxtera i niezmienników węzłów, które można z nich otrzymać. Jako dodatkową literaturę można polecić [Kas95, KRT97, Tur10].

4.2 Wielomian Jonesa

W Przykładzie 4.4 podano jawną postać operatora Yanga-Baxtera, który prowadzi do niezmiennika splotów, który nazywa się wielomianem Jonesa. W



Rysunek 4.5: Computation of the Jones polynomial of the trivial link T_2 .

dalszej części wykładu omówimy własności tego wielomianu, a na początku następnego podamy jego konstrukcję w terminach pewnej sumy statystycznej.


W 1985 roku w pracy [Jon85] V.F.R. Jones podał konstrukcję, która każdemu zorientowanemu splotowi przyporządkowuje wielomian

$$L \mapsto V_L(t) \in \mathbb{Z} [t, t^{-1}].$$

Wielomian ten, zwany dziś wielomianem Jonesa, jest wyznaczony jednoznacznie przez poniższe dwa warunki.

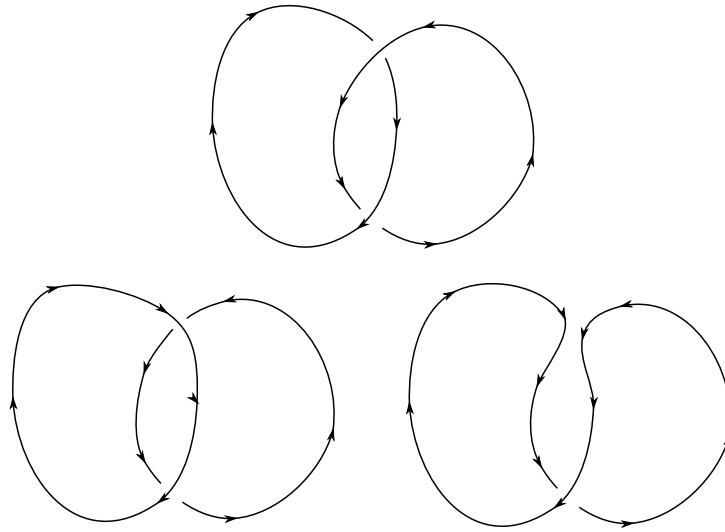
$$t^{-1}V_{\text{left}}(t) - tV_{\text{right}}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{\text{middle}}(t), \quad (4.1)$$

$$V_{T_1}(t) = 1, \quad (4.2)$$

gdzie dla n całkowitego dodatniego T_n oznacza splot trywialny o n składowych. Relacja 4.1 nazywana jest relacją motkową (ang. skein relation). Należy ją rozumieć w ten sposób, że mając diagram pewnego splotu wyróżniamy w nim pewne skrzyżowanie . Relacja motkowa mówi nam jak wyraża się wielomian Jonesa wyjściowego splotu w terminach wielomianu splotu, w którym wybrane skrzyżowanie zmieniliśmy na przeciwne i wielomianu Jonesa splotu, w którym wybrane skrzyżowanie zostało rozwiązane. Zobaczmy jak działa relacja motkowa w konkretnych przykładach.

Przykład 4.6. *Spróbujmy policzyć wielomian Jonesa dla splotu trywialnego T_n dla $n > 1$. Rozważmy trójkę diagramów z Rysunku 4.5. Relacja motkowa daje następującą tożsamość.*

$$t^{-1} - t = t^{-1}V_{T_1}(t) - tV_{T_1}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{T_2}(t).$$



Rysunek 4.6: Wygładzenia pojedynczego skrzyżowania w splocie Hopfa

Stąd

$$V_{T_2}(t) = -(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}).$$

Podobne rozumowanie daje ogólny wynik

$$V_{T_n}(t) = (-1)^{n-1}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}.$$

Przykład 4.7. Niech H_+ oznacza dodatni splot Hopfa. Gdy zastosujemy relację motkową do diagramów z rysunku 4.6 otrzymamy

$$\begin{aligned} V_{H_+}(t) &= t^2 V_{T_2}(t) + t(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{T_1}(t) = \\ &= t^2(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) + t(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= -t^{\frac{3}{2}}(t + t^{-1}). \end{aligned}$$

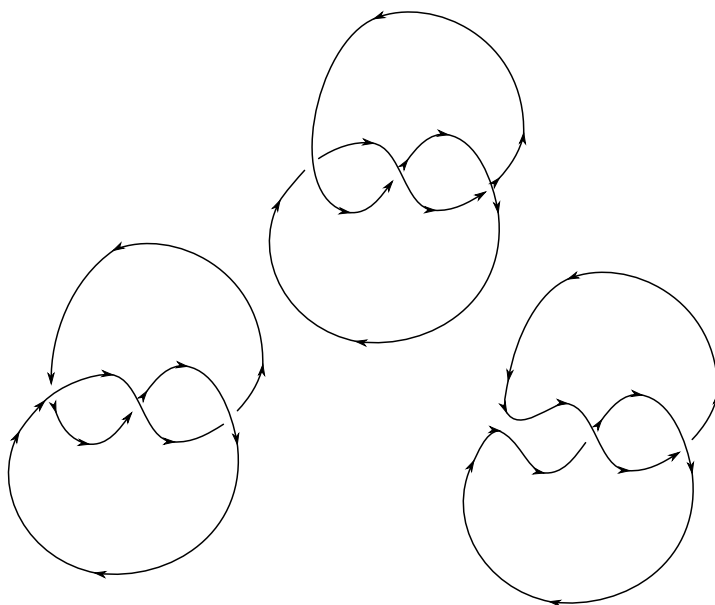
Fakt 4.8. Niech \bar{L} oznacza odbicie lustrzane splotu L . Wówczas

$$V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1}).$$

Dowód. Jest to prosta konsekwencja relacji motkowej. □

Przykład 4.9. Niech $\bar{3}_1$ będzie praworęcznym trójlistnikiem. Korzystając z Rysunku 4.7 możemy policzyć wielomian Jonesa dla

$$\begin{aligned} V_{\bar{3}_1}(t) &= t^2 V_{T_1}(t) + t(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{H_+}(t) = \\ &= t^2 + (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(-t^{\frac{3}{2}})(t + t^{-1}) = \\ &= t^4 + t^3 + t = (t - 1)(t^3 - 1) + 1. \end{aligned}$$



Rysunek 4.7: Wygładzenia pojedynczego skrzyżowania dla diagramu praworęcznego trójlistnika

Przykład 4.10. *Policzmy jeszcze wielomian Jonesa dla węzła ósemkowego oznaczanego 4_1 , zob. Rysunek 2.2.*

$$\begin{aligned}
 V_{4_1}(t) &= t^2 V_{T_1}(t) + t(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{H_-}(t) = \\
 &= t^2 + (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{5}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = \\
 &= t^{-2}(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1) = \\
 &= t^{-2}(1 - t)(t^3 - 1) + 1.
 \end{aligned}$$

Na podstawie dwóch poprzednich przykładów możemy poczynić spostrzeżenie dotyczące podzielności wielomianu Jonesa węzłów. Okazuje się, że jest to ogólna własność wielomianu Jonesa.

Twierdzenie 4.11. *Jeśli K jest węzłem, wówczas $V_K(t) - 1$ jest podzielny przez $(t - 1)(t^3 - 1)$.*

Stąd wniosek, że można by, za Jonesem [Jon85], określić inny niezmiennik węzłów wzorem

$$W_K(t) = \frac{V_K(t)}{(1 - t)(t^3 - 1)}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}W_{T_1}(t) &= 0, \\W_{\bar{3}_1}(t) &= 1, \\W_{4_1}(t) &= -t^{-2}.\end{aligned}$$

Jednakże okazuje się, że dużo łatwiej pracuje się z wielomianem Jonesa, ponieważ nie ma odpowiednika relacji motkowej dla wielomianu W_K .

Ćwiczenie 4.12. Pokazać, że wielomian Jonesa może być otrzymany używając operatora Yanga-Baxtera z Przykładu 4.4 dla $m = 2$. Otrzymana suma statystyczna wymaga jeszcze zbalansowania tak, by zachowywał ją pierwszy ruch Reidemeistera; warunek początkowy dla trywialnego węzła powinien dawać 1.

Wykład 5

5.1 Nawias Kauffmanna

W poprzednim wykładzie omówiliśmy wielomian Jonesa i jego podstawowe własności. Celem tego wykładu będzie pokazanie jednej z możliwych konstrukcji tego wielomianu używając podejścia Kauffmana z [Kau87]. W przeciwieństwie do oryginalnego podejścia Jonesa, podejście Kauffmana jest bardzo elementarne i daje punkt wyjściowy do konstrukcji homologii Khovanova, zob. Rozdział 8.1.

Punktem wyjściowym jest przyporządkowanie każdemu diagramowi splotu D jego nawiasu Kauffmana

$$D \mapsto \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$$

zgodnie z następującą regułą

$$\langle \text{diagram} \rangle = A \langle \text{diagram} \rangle + B \langle \text{diagram} \rangle$$

wraz z warunkiem normalizacyjnym

$$\langle T_n \rangle = d^{n-1}.$$

Lemat 5.1. *Zachodzi następująca tożsamość*

$$\langle D \cup T_1 \rangle = d \langle D \rangle.$$

Dowód. Łatwa indukcja ze względu na ilość skrzyżowań. □

Stwierdzenie 5.2. *Nawias Kauffmana jest niezmiennikiem diagramu.*

Dowód. Pokażemy, że wartość nawiasu Kauffmana nie zależy od kolejności rozwiązywania skrzyżowań. Wybierzmy dwa skrzyżowania ustalonego diagra-

mu D . Wówczas

$$\begin{aligned} \langle \text{X}, \text{X} \rangle &= A \langle \text{S}, \text{X} \rangle + B \langle \text{O}, \text{X} \rangle = \\ &= A^2 \langle \text{S}, \text{S} \rangle + AB \langle \text{S}, \text{O} \rangle + \\ &+ AB \langle \text{O}, \text{S} \rangle + B^2 \langle \text{O}, \text{O} \rangle \end{aligned}$$

gdy rozwiązujemy skrzyżowania w odwrotnej kolejności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle \text{X}, \text{X} \rangle &= A \langle \text{X}, \text{S} \rangle + B \langle \text{X}, \text{O} \rangle = \\ &= A^2 \langle \text{S}, \text{S} \rangle + AB \langle \text{O}, \text{S} \rangle + \\ &+ AB \langle \text{S}, \text{O} \rangle + B^2 \langle \text{O}, \text{O} \rangle. \end{aligned}$$

Powyższe obliczenia pokazują, że wartość nawiasu Kauffmana jest niezależna od kolejności rozwiązywania skrzyżowań, co kończy dowód. \square

Nietrudno się przekonać, że powyżej zdefiniowany wielomian zależy w sposób istotny od diagramu. W dalszej części wykładu spróbujemy się zastanowić jakie relacje muszą być spełnione pomiędzy niewiadomymi A , B i d , aby nawias Kauffmana był niezmienniczy ze względu na ruchy Reidemeistera.

Zacznijmy od drugiego ruchu Reidemeistera.

$$\begin{aligned} \langle \text{S} \rangle &= B \langle \text{S} \rangle + A \langle \text{X} \rangle = \\ &= AB \langle \text{S} \rangle + B^2 \langle \text{S} \rangle + \\ &= A^2 \langle \text{S} \rangle + AB \langle \text{O} \rangle = \\ &= (ABd + B^2 + A^2) \langle \text{S} \rangle + AB \langle \text{O} \rangle \end{aligned}$$

Zatem niezmienniczość ze względu na drugi ruch Reidemeistera implikuje, że muszą być spełnione następujące tożsamości.

$$\begin{aligned} AB = 1 &\iff B = A^{-1} \\ ABd + A^2 + B^2 = 0 &\iff d = -A^2 - A^{-2}. \end{aligned}$$

W przypadku trzeciego ruchu Reidemeistera okazuje się, że niezmienniczość ze względu na drugi ruch automatycznie implikuje niezmienniczość ze względu na trzeci ruch. Rozważmy poniższe dwie tożsamości.



Rysunek 5.1: Skrzyżowanie dodatnie (po lewej) i ujemne (po prawej)

$$\begin{aligned} \langle \text{skrzyżowanie dodatnie} \rangle &= A \langle \text{skrzyżowanie ujemne} \rangle + A^{-1} \langle \text{skrzyżowanie dodatnie} \rangle \\ \langle \text{skrzyżowanie ujemne} \rangle &= A \langle \text{skrzyżowanie dodatnie} \rangle + A^{-1} \langle \text{skrzyżowanie ujemne} \rangle \end{aligned}$$

Korzystając z niezmienniczości nawiasu Kauffmana ze względu na drugi ruch Reidemeistera otrzymujemy

$$\langle \text{skrzyżowanie dodatnie} \rangle = \langle \text{skrzyżowanie ujemne} \rangle.$$

Zatem pokazaliśmy, że nawias Kauffmana jest niezmienniczy ze względu na drugi i trzeci ruch Reidemeistera, innymi słowy nawias Kauffmana jest niezmiennikiem regularnej izotopii splotów.

Aby otrzymać niezmiennik splotów musimy jeszcze sprawdzić zachowanie nawiasu Kauffmana ze względu na pierwszy ruch Reidemeistera.

$$\begin{aligned} \langle \text{skrzyżowanie dodatnie} \rangle &= ((-A^2 - A^{-2})A + A^{-1}) \langle \text{skrzyżowanie ujemne} \rangle = -A^3 \langle \text{skrzyżowanie ujemne} \rangle \\ \langle \text{skrzyżowanie ujemne} \rangle &= (A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})) \langle \text{skrzyżowanie dodatnie} \rangle = -A^{-3} \langle \text{skrzyżowanie dodatnie} \rangle \end{aligned}$$

Definicja 5.3. Niech D będzie zorientowanym diagramem. Możemy wyróżnić dwa rodzaje skrzyżowań: skrzyżowania dodatnie i ujemne, zob. Rysunek 5.1. Przez $w(D)$ będziemy oznaczali skrętność diagramu, która jest zdefiniowana następującym wzorem.

$$w(D) = \sum_{c \in \text{Cr } D} \text{sign}(c),$$

gdzie $\text{Cr } D$ oznacza zbiór skrzyżowań diagramu D , a $\text{sign}(c)$ oznacza znak skrzyżowania c .

Uwaga 5.4. Zauważmy, że skrętność nie zmienia się gdy używamy drugiego lub trzeciego ruchu Reidemeistera, a w przypadku pierwszego zachowuje się następująco.

$$\begin{aligned} w(\text{skrzyżowanie dodatnie}) &= w(\text{skrzyżowanie ujemne}) + 1 \\ w(\text{skrzyżowanie ujemne}) &= w(\text{skrzyżowanie dodatnie}) - 1. \end{aligned}$$

Definicja 5.5. Niech D będzie zorientowanym diagramem splotu. Zdefiniujemy następujący wielomian.

$$f(D)(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}].$$

Twierdzenie 5.6. Wielomian f z powyższej definicji splotu jest niezmiennikiem splotów i spełnia następującą relację motkową.

$$(-A^4)f\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) + A^{-4}f\left(\begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array}\right) = (A^2 - A^{-2})f\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array}\right). \quad (5.1)$$

Zatem po podstawieniu $t = -A^{-4}$ do f otrzymujemy wielomian Jonesa.

Dowód. Niezmienniczość wielomianu f wynika z poprzednich rozważań oraz z własności skrętności wymienionych w Uwadze 5.4.

Aby sprawdzić, że wielomian f spełnia relację motkową (5.2) spróbujmy najpierw sprawdzić czy nawias Kauffmana spełnia jakiś wariant relacji motkowej. Okazuje się, że spełniona jest następująca tożsamość.

$$A \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \rangle - A^{-1} \langle \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle. \quad (5.2)$$

Rzeczywiście, powyższą równość otrzymamy po odjęciu stronami poniższych dwóch równości, które są konsekwencją własności definiującej nawias Kauffmana.

$$\begin{aligned} A \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \rangle &= A^2 \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle + \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle, \\ A^{-1} \langle \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle &= \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle + A^{-2} \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle \end{aligned}$$

Stosując tożsamość (5.2) do diagramu zorientowanego D oraz mnożąc obie strony równości przez $(-A^3)^{-w}$, gdzie $w = w\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array}\right)$, otrzymamy

$$A(-A^3)^{-w} \langle \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \rangle - A^{-1} \langle \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} \rangle = (A^2 - A^{-2})f\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array}\right).$$

Zauważmy teraz, że

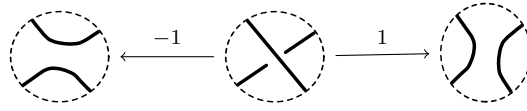
$$\begin{aligned} w\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) &= w + 1, \\ w\left(\begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array}\right) &= w - 1 \end{aligned}$$

zatem wielomian f spełnia relację (5.1).

Po wykonaniu podstawienia jak w treści twierdzenia, tożsamość (5.1) przekształci się w relację (4.1). Tożsamość

$$\langle T_1 \rangle = -A^2 - A^{-2}$$

po podstawieniu przekształci się w tożsamość (4.2). □



Rysunek 5.2: Rozwiązywanie skrzyżowań diagramów

Definicja 5.7. Niech D będzie diagramem splotu. Stanem Kauffmana diagramu D nazywamy dowolne odwzorowanie

$$s: \text{Cr } D \rightarrow \{\pm 1\}.$$

Jeśli s jest stanem Kauffmana, niech D_s oznacza diagram otrzymany z D , w którym wszystkie skrzyżowania rozwiązujemy zgodnie z regułą z Rysunku 5.1.

Twierdzenie 5.8. Nawias Kauffmana diagramu D można wyrazić w postaci poniższej sumy.

$$\langle D \rangle = \sum_s A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|D_s|-1},$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich stanach Kauffmana diagramu D , $|D_s|$ oznacza ilość składowych splotu trywialnego reprezentowanego przez D_s , oraz

$$\sigma(s) = |s^{-1}(1)| - |s^{-1}(-1)|.$$

Powyższą sumę nazywamy sumą statystyczną.

Wykład 6

6.1 Homologie

W dalszej części tego wykładu wprowadzimy kilka podstawowych pojęć algebry homologicznej, których będziemy używać w następnych wykładach. Zaczniemy od następującej definicji.

Definicja 6.1. Niech $\{C_n\}_n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, będzie ciągiem grup abelowych oraz niech $\{\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}\}_n$ będzie ciągiem homomorfizmów takich, że dla dowolnego n zachodzi

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

wówczas $\mathcal{C}_* = (C_n, \partial_n)_n$ nazywamy kompleksem łańcuchowym.

Dodatkowo, dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ definiujemy n -tą grupę homologii $H_n(\mathcal{C}_*)$ kompleksu \mathcal{C}_* jako

$$H_n(\mathcal{C}_*) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

Kompleksy łańcuchowe i ich grupy homologii mają swoje źródło w topologii algebraicznej, gdzie zostały wprowadzone aby badać własności topologiczne brył kompleksów sympleksyjnych.

Definicja 6.2. Abstrakcyjnym kompleksem sympleksyjnym nazywamy parę $K = (V, P)$, gdzie V jest pewnym zbiorem, a P jest rodziną podzbiorów V spełniającą następujące trzy warunki.

1. jeśli $v \in V$, to $\{v\} \in P$,
2. jeśli $s \in P$, to s jest skończony,
3. jeśli $s \in P$ oraz $s' \subset s$, to $s' \in P$.

Zbiór V będziemy nazywać zbiorem wierzchołków kompleksu K , a zbiór P będziemy nazywać zbiorem sympleksów kompleksu K .

Przykład 6.3. Załóżmy teraz, że zbiór wierzchołków pewnego kompleksu jest uporządkowany. Kompleks łańcuchowy stowarzyszony z K jest określony następująco.

- dla $n \geq 0$ niech $C_n^{ord}(K)$ będzie wolną grupą abelową generowaną przez ciągi wierzchołków

$$v_0 < v_1 < \dots < v_n$$

kompleksu K takie, że $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ jest sympleksem K .

- różniczka jest zadana

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i,$$

gdzie d_i to tzw. odwzorowania ścian i zdefiniowane są następująco.

$$d_i(v_0, v_1, \dots, v_n) = (v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n),$$

gdzie napis \hat{v}_i rozumiemy jako pominięcie wierzchołka v_i .

Homologie kompleksu $C_*^{ord}(K)$ nazywamy homologiami symplecjajnymi kompleksu K i oznaczmy $H_*^{symp}(K)$.

Stwierdzenie 6.4. *Odwzorowania ścian w powyższym przykładzie spełniają następującą tożsamość.*

$$d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i, \quad i < j \tag{6.1}$$

Dowód. Elementarne sprawdzenie, które pozostawiamy czytelnikowi. \square

Definicja 6.5. *Niech $\{C_n\}_n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ będzie ciągiem grup abelowych oraz niech*

$$\{d_i^n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{0 \leq i \leq n, n \geq 0}$$

będzie ciągiem homomorfizmów spełniających warunek 6.1. Wówczas $C_ = (C_n, d_i^n)$ nazywamy modułem presymplecjajnym¹.*

Lemat 6.6. *Jeśli $C_* = (\{C_n\}, \{d_i\})$ jest modułem presymplecjajnym i określony*

$$\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$$

wzorem

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i,$$

wówczas $(\{C_n\}, \{\partial_n\})$ jest kompleksem łańcuchowym.

¹Formalnie, modułem presymplecjajnym nad pierścieniem \mathbb{Z} . Ogólnie moduł presymplecjajny może być nad dowolnym przemiennym pierścieniem.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n-1} &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j = \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} d_{j-1} \circ d_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j = \\ &= \sum_{k \leq m} (-1)^{k+m+1} d_m \circ d_k + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j = 0. \end{aligned}$$

□

Przykład 6.7. Niech $K = (V, P)$ będzie kompleksem symplecjajalnym. Podobnie jak w Przykładzie 6.3 określimy kompleks łańcuchowy stowarzyszony z kompleksem symplecjajalnym.

- $C_n(K)$ niech będzie wolną grupą abelową generowaną przez ciągi wierzchołków (v_0, v_1, \dots, v_n) takich, że zbiór $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ jest sympleksem K . Tym razem dopuszczamy możliwość wystąpienia powtórzeń w ciągach wierzchołków stanowiących bazę $C_n(K)$,
- dla $0 \leq i \leq n$ odwzorowania $d_i: C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ zdefiniowane są jak w Przykładzie 6.3,
- dla $0 \leq i \leq n$ określamy również odwzorowania degeneracji $s_i: C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(K)$ wzorem

$$s_i(v_0, v_1, \dots, v_n) = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Homologie kompleksu $C_*(K)$ są izomorficzne z homologiami kompleksu $C_*^{ord}(K)$ z Przykładu 6.3.

Stwierdzenie 6.8. Odwzorowania ścian d_i oraz odwzorowania degeneracji s_i z poprzedniego przykładu spełniają następujące tożsamości.

$$s_i \circ s_j = s_{j+1} \circ s_i, \quad i \leq j, \quad (6.2)$$

$$d_i \circ s_j = \begin{cases} s_{j+1} \circ d_i, & i < j, \\ s_j \circ d_{i+1}, & i > j + 1, \end{cases} \quad (6.3)$$

$$d_i \circ s_i = d_{i+1} \circ s_i = \text{id}. \quad (6.4)$$

Definicja 6.9. Ciąg grup abelowych $\{C_n\}_{n \geq 0}$ wraz z dwiema rodzinami homomorfizmów

- $\{d_i^n: C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{0 \leq i \leq n, n \geq 0}$,
- $\{s_i^n: C_n \rightarrow C_{n+1}\}_{0 \leq i \leq n, n \geq 0}$

spełniającymi warunki (6.1), (6.2), (6.3) i (6.4) nazywamy modułem symplecjajalnym.

Wykład 7

7.1 Homologie – kontynuacja

Definicja 7.1. Dla $n \geq 0$ rozważmy n -wymiarowy sympleks

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i = 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

Dla $0 \leq i \leq n$ zdefiniujemy odwzorowania ścian

$$\begin{aligned} d^i : \Delta^{n-1} &\rightarrow \Delta^n \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

oraz odwzorowania degeneracji

$$\begin{aligned} s^i : \Delta^{n+1} &\rightarrow \Delta^n \\ (x_0, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Stwierdzenie 7.2. Odwzorowania ścian d^i i degeneracji s^i , z poprzedniej definicji, spełniają następujące tożsamości.

$$d^j \circ d^i = d^i \circ d^{j-1}, \quad i < j, \quad (7.1)$$

$$s^j \circ s^i = s^i \circ s^{j+1}, \quad i \leq j, \quad (7.2)$$

$$s^j \circ d^i = \begin{cases} d^i \circ s^{j-1}, & i < j, \\ d^{i-1} \circ s^j, & i > j + 1, \end{cases} \quad (7.3)$$

$$s^i \circ d^i = s^i \circ d^{i+1} = \text{id}. \quad (7.4)$$

Przykład 7.3. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Z przestrzenią X możemy stowarzyszyć pewien moduł symplecjalny w następujący sposób.

- $C_n^{\text{sing}}(X)$ jest wolną grupą abelową generowaną przez ciągłe odwzorowania

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X,$$

- odwzorowania ścian $d_i: C_n^{sing}(X) \rightarrow C_{n-1}^{sing}(X)$ zdefiniowane są

$$d_i(f) = f \circ d^i,$$

- odwzorowania degeneracji określone są następującym wzorem

$$s_i(f) = f \circ s^i.$$

Stwierzenie 7.2 gwarantuje, że tak zadane odwzorowania ścian i degeneracji spełniają aksjomaty modułu symplecjajnego.

Jeśli K jest kompleksem symplecjajnym, wówczas możemy stowarzyszyć pewną przestrzeń topologiczną X , która nazywa się realizacją geometryczną kompleksu symplecjajnego.

Definicja 7.4. *Zbiorem presymplecjajnym nazywamy rodzinę zbiorów $\{X_n\}_n$ wraz z odwzorowaniami $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$, gdzie $0 \leq i \leq n$, gdy spełniona jest tożsamość (6.1).*

Definicja 7.5. *Niech $\mathcal{X} = (X_n, d_i)$ będzie zbiorem presymplecjajnym. Wówczas realizacją geometryczną zbioru presymplecjajnego \mathcal{X} nazywamy następującą przestrzeń topologiczną.*

$$|\mathcal{X}| = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n / (d_i(x), t) \sim (x, d^i(t)),$$

gdzie zbiory X_n są wyposażone w topologię dyskretną.

Zauważmy, że dowolny kompleks symplecjajny K jest również zbiorem presymplecjajnym. Jeśli uporządkujemy zbiór wierzchołków kompleksu K i jako K_n rozważymy zbiór sympleksów n -wymiarowych, tj. sympleksów rozpinających $C_n^{ord}(K)$ i odwzorowania d_i określimy analogicznie jak w Przykładzie 6.3, wówczas $\mathcal{K} = (K_n, d_i)$ jest zbiorem presymplecjajnym. Okazuje się, że istnieje naturalny izomorfizm

$$H_*^{symp}(K) \cong H_*^{sing}(|\mathcal{K}|).$$

Niech teraz G będzie grupą. W topologii i algebrze rozważa się homologie grupy G , które są niezmiennikami grupowymi. Okazuje się jednak, że konstrukcja tego niezmiennika może być przeprowadzona w ogólniejszym przypadku gdy G jest tylko półgrupą.

- Niech $C_n(G) = \mathbb{Z}[G^n]$, tj. $C_n(G)$ jest wolną grupą abelową generowaną przez elementy zbioru G^n ,

- odwzorowania ścian $d_i: C_n(G) \rightarrow C_{n-1}(G)$ określamy wzorem

$$\begin{aligned} d_0(g_1, \dots, g_n) &= (g_2, \dots, g_n), \\ d_n(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_{n-1}), \\ d_i(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_i \cdot g_{i+1}, \dots, g_n), \quad 0 < i < n. \end{aligned}$$

Przykład 7.6. Niech g_1, g_2, g_3 , wówczas

$$\begin{aligned} \partial_2 \circ \partial_3(g_1, g_2, g_3) &= \partial_2 [(g_2, g_3) - (g_1 \cdot g_2, g_3) + (g_1, g_2 \cdot g_3) - (g_1, g_2)] = \\ &= [(g_3) - (g_2 \cdot g_3) + (g_2)] - [(g_3) - ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3) + (g_1 \cdot g_2)] + \\ &+ [(g_2 \cdot g_3) - (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)) + (g_1)] - [(g_2) - (g_1 \cdot g_2) + (g_1)] = \\ &= ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3) - (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)) \end{aligned}$$

Zatem łączność mnożenia w G gwarantuje, że różniczki ∂_n spełniają odpowiednie aksjomaty.

Jeśli G jest monoidem, wówczas można określić odwzorowania degeneracji

$$s_i: C_n(G) \rightarrow C_{n+1}(G)$$

wzorem

$$s_i(g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_{i-1}, e, g_i, \dots, g_n),$$

gdzie e jest elementem neutralnym w G . Zatem z każdym monoidem możemy stowarzyszyć moduł symplecjalny $(C_n(G), d_i, s_i)$, który nazywa się bar rezolwentą monoidu G . Gdy G jest grupą, wówczas homologie bar rezolwenty dają klasyczne homologie grupy G .

Podobnie można zdefiniować tzw. homologie Hochschilda dla półgrup.

- $C_n^{Hoch}(G) = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$
- odwzorowania ścian określone są następującym wzorem

$$d_i(g_0, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_0, \dots, g_{i-1}, g_i \cdot g_{i+1}, g_{i+1}, \dots, g_n), & i < n, \\ (g_n \cdot g_0, \dots, g_{n-1}), & i = n. \end{cases}$$

Zaletą homologii Hochschilda jest to, że można je określić nie tylko dla półgrupy, G (lub pierścienia grupowego $A = ZG$) ale dla dowolnego pierścienia lub algebry A . Zaczynamy wtedy od $C_n^{Hoch} = A^{\otimes(n+1)}$ i powyższego wzoru na funkcje ściany d_i .

Wykład 8

8.1 Homologie Khovanova splotów

Opiszemy teraz konstrukcję homologii Khovanova w oparciu o podejście O. Viro [Vir04] przy pomocy nawiasu Kauffmana. Konstrukcja nawiasu Kauffmana podana w Wykładzie 4.2 może być nieznacznie zmodyfikowana by otrzymać tzw. niezredukowany nawias Kauffmana (por. Twierdzenie 5.8).

Definicja 8.1. Niech D będzie diagramem splotu. Niezredukowanym nawiasem Kauffmana splotu D nazywamy następujący wielomian.

$$[D] = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle = \sum_s A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|D_s|}.$$

Definicja 8.2. Rozszerzonym stanem Kauffmana diagramu D nazywamy parę $S = (s, r)$, gdzie s jest stanem Kauffmana D , a r jest odwzorowaniem

$$r: D_s \rightarrow \{\pm 1\},$$

tj. r przypisuje znacznik ± 1 każdej składowej diagramu D_s .

Zauważmy, że suma statystyczna z Twierdzenia 5.8 może zostać przekształcona do następującej postaci.

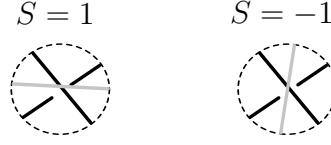
$$[D] = \sum_S A^{\sigma(s)} A^{2\tau(s)} (-1)^{|D_s|} = \sum_S (-1)^{\tau(s)} A^{\sigma(s) + 2\tau(s)}, \quad (8.1)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich rozszerzonych stanach Kauffmana S oraz

$$\tau(s) = |r^{-1}(1)| - |r^{-1}(-1)|.$$

Definicja 8.3. Niech $\mathcal{S}(D)$ oznacza zbiór rozszerzonych stanów Kauffmana diagramu D , oraz dla $i, j \in \mathbb{Z}$ określmy podzbiór \mathcal{S}

$$\mathcal{S}_{i,j} = \{S \mid \sigma(s) = i, \quad \sigma(s) + 2\tau(s) = j\}.$$



Rysunek 8.1: Symboliczne oznaczenie wartości przyjmowanych na skrzyżowaniach przez rozszerzone stany Kauffmana

Zauważmy, że $|D_s|$ przystaje do $r(s)$ modulo 2.

Definicja 8.4. Niech będzie dany diagram splotu D .

- Określmy następującą grupę abelową

$$C(D) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} C_{i,j}(D),$$

gdzie $C_{i,j}(D)$ jest wolną grupą abelową generowaną przez $\mathcal{S}_{i,j}$,

- wprowadzimy w $C(D)$ strukturę kompleksu łańcuchowego. Różniczka zadana jest następującym wzorem.

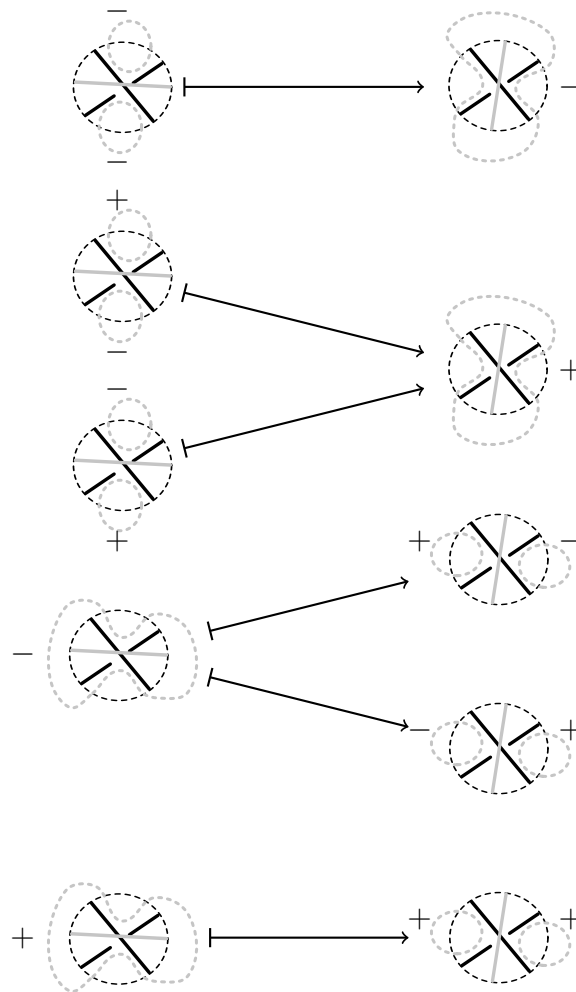
$$\begin{aligned} \partial_{i,j}: C_{i,j}(D) &\rightarrow C_{i-2,j}(D) \\ \partial_{i,j}(S) &= \sum_{S' \in \mathcal{S}_{i-2,j}} (-1)^{t(S,S')} [S, S'] S', \end{aligned}$$

gdzie $[S, S'] = 0, 1$ oraz $[S, S'] = 1$ tylko gdy $S(w) = S'(w)$ poza jednym skrzyżowaniem v dla którego mamy $S(v) = 1, S'(v) = -1$ oraz $\tau(S') = \tau(S) + 1$, przy czym okręgi, które nie dotykają skrzyżowania v zachowują swoje znaki. Aby zdefiniować $t(S, S')$ uporządkujmy wszystkie skrzyżowania diagramu D , wówczas $t(S, S')$ jest równe liczbie skrzyżowań D mniejszych od v , dla których S przyjmuje wartość -1 .

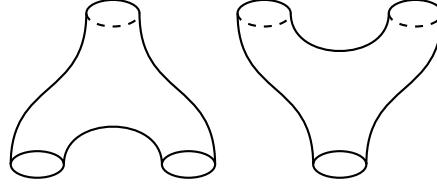
- Homologie kompleksu $C(D)$ nazywamy homologiami Chowanowa splotu reprezentowanego przez diagram D .

Poglądowo, różniczkę w kompleksie Chowanowa można opisać przy pomocy pewnych działań na diagramach. Po pierwsze, jeśli S jest rozszerzonym stanem Kauffmana diagramu D , wówczas wartości stanu S na skrzyżowaniach D możemy zobrazować przy pomocy znaczników jak na Rysunku 8.1. Rysunek 8.2 przedstawia wszystkie możliwe sytuacje gdy $[S, S'] \neq 0$.

Oryginalne podejście Chowanowa z [Kho00] przypisywało każdemu rozszerzonemu stanowi Kauffmana element w białgebrze $\mathcal{A}^{\otimes |D_s|}$, gdzie $\mathcal{A} =$



Rysunek 8.2: Wszystkie możliwe sytuacje gdy $[S, S'] \neq 0$ w różniczce Chohanowa.



$$\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \quad \mu: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

Rysunek 8.3: Elementarne kobordyzmy odpowiadające mnożeniu i komnożeniu, odpowiednio.

$\mathbb{Z}[X]/(X^2)$. Różniczkę w kompleksie Chowanowa wyraża się w terminach mnożenia i komnożenia w \mathcal{A} , gdy okręgom z $r^{-1}(-1)$ przypiszemy jedynekę z \mathcal{A} , a okręgom z $r^{-1}(1)$ element X .

Różniczkę w kompleksie Chowanowa można też opisać bardziej geometrycznie w terminach kobordyzmów pomiędzy diagramami odpowiadającymi stanom Kauffmana. Podstawowe operacje typu łączenie dwóch okręgów i rozdzielanie pojedynczego okręgu na dwa opisywalne są w terminach elementarnych kobordyzmów, zob. Rysunek 8.3. Odwrotnie, Khovanov pokazał, że jeśli odwzorowania μ i Δ , odpowiadające elementarnym kobordyzmom spełniają aksjomaty z Rysunku 8.4 (mówimy, że tworzą system Frobeniusa).

8.2 Homologie małej kategorii o wsp. w functorze

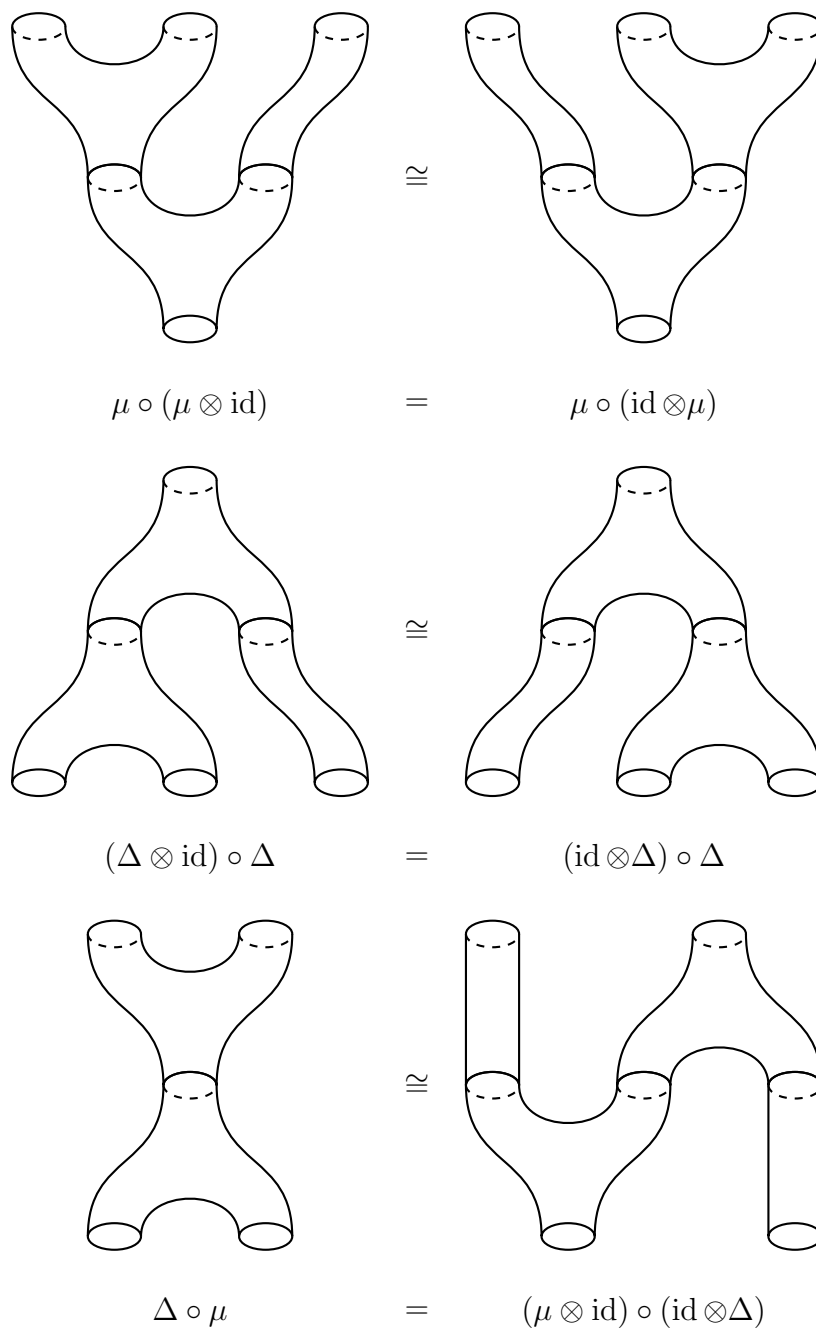
Definicja 8.5. *Kategoria \mathcal{C} to para złożona z klasy obiektów, oznaczanej $\text{Ob}(\mathcal{C})$, oraz zbioru morfizmów $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Dodatkowo, dla każdej trójki obiektów $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mamy określoną łączną operację składania morfizmów*

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g. \end{aligned}$$

Ponadto, dla każdego obiektu A istnieje wyróżniony element $\text{id}_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ taki, że dla dowolnych $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ i $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A)$ zachodzi

$$\begin{aligned} f \circ \text{id}_A &= f, \\ \text{id}_A \circ g &= g. \end{aligned}$$

Definicja 8.6. *Kategorię \mathcal{C} nazywamy małą, gdy klasa jej obiektów jest zbiorem.*



Rysunek 8.4: Aksjomaty gwarantujące, że $\partial^2 = 0$ dla różniczki w kompleksie Khovanova.

Definicja 8.7. Niech \mathcal{C} i \mathcal{D} będą kategoriami funktorem $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ nazywamy odwzorowanie $\mathcal{F}: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ oraz dla rodziny odwzorowań $\mathcal{F}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$, które spełniają następujące dwa warunki.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\text{id}_A) &= \text{id}_{\mathcal{F}(A)}, \\ \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) &= \mathcal{F}(f \circ g).\end{aligned}$$

Niech teraz \mathcal{C} będzie małą kategorią oraz niech $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow k - \text{Mod}$ będzie funktorem z \mathcal{C} do kategorii modułów nad pewnym pierścieniem przemiennym k . Rozważmy następujący moduł presymplicjalny.

- dla $n \geq 0$ definiujemy

$$C_n(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n} \mathcal{F}(x_0),$$

gdzie x_0, x_1, \dots, x_n są obiektami \mathcal{C} a strzałki oznaczają pewne morfizmy w \mathcal{C} ,

- odwzorowania ścian określone są następująco.

$$\begin{aligned}d_0(\lambda, x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n) &= (\mathcal{F}(f_0)(\lambda), x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n), \\ d_n(\lambda, x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n) &= (\lambda, x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} x_{n-1}), \\ d_i(\lambda, x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n) &= \\ &= (\lambda, x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-1}} x_i \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} x_{i+1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n)\end{aligned}$$

dla $0 < i < n$.

Uwaga 8.8. Możemy użyć morfizmów identycznościowych w małej kategorii \mathcal{C} do zdefiniowania morfizmów zdegenerowanych:

$$s_i(\lambda, x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n) = (\lambda, x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-1}} x_i \xrightarrow{\text{Id}_{x_i}} x_i \xrightarrow{f_i} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n).$$

Nietrudno sprawdzić, że (\mathcal{C}, d_i, s_i) spełnia warunki modułu symplicjalnego.

Przykład 8.9. Niech G będzie grupą. Zdefiniujmy kategorię \mathcal{C}_G z pojedynczym obiektem X_G oraz $\text{Mor}_{\mathcal{C}_G}(X_G, X_G) = G$ i składanie jest dane przez mnożenie elementów w grupie G . Jeśli określimy funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ tak, że

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(X_G) &= \mathbb{Z}, \\ \forall_{g \in G} \mathcal{F}(g) &= \text{id}_{\mathbb{Z}},\end{aligned}$$

Wówczas nietrudno się przekonać, że presymplicjalny moduł $C_*(\mathcal{C}_G, \mathcal{F})$ jest izomorficzny z modulem presymplicjalnym $C_n(G)$.

Wykład 9

9.1 Jednowyrazowe homologie dystrybutywne

Badania nad homologiami struktur dystrybutywnych zostały zapoczątkowane w [FRS93, FRS95, FRS96]. Homologie wrakowe (zob. Definicję 10.7) są tam zdefiniowane jako homologie pewnej przestrzeni klasyfikującej BX dla danego wraka X , której grupy homotopii $\pi_n(BX)$ parametryzują klasy kobordyzmów splotów kowymiaru 2 w \mathbb{R}^{n+1} wraz z homomorfizmem z kwandla podstawowego do X .

W pracy [CJK⁺03] podano definicję homologii kwandlowych. Teoria homologii kwandlowych jest obiektem algebraicznym, w którym żyją tzw. kwandlowe niezmienniki splotów, zob. [CS03].

Tak jak w przypadku klasycznych homologii grup, lub homologii Hochschilda, można skonstruować analog bar-rezolwenty dla homologii wrakowych (jest to kubiczny kompleks komórkowy pewnego modelu BX). Kompleks ten można rozpatrywać dla dużo ogólniejszych struktur dystrybutywnych. To będzie nasz punkt wyjściowy w tym wykładzie.

Niech $(X, *)$ będzie półką. Wówczas możemy jej przypisać następujący moduł presymplicjalny.

- $C_n^{(*)}(X) = \mathbb{Z}X^{n+1}$
- odwzorowania ścian określone są następująco.

$$\begin{aligned}d_0(x_0, x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n), \\d_i(x_0, x_1, \dots, x_n) &= (x_0 * x_i, x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Fakt 9.1. *Spełniona jest poniższa tożsamość.*

$$d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i, \quad i < j.$$

Przykład 9.2. Sprawdźmy powyższą tożsamość w jednym przypadku.

$$\begin{aligned}d_1 \circ d_2(x_0, x_1, x_2) &= d_1(x_0 * x_2, x_1 * x_2) = (x_0 * x_2) * (x_1 * x_2), \\d_1 \circ d_1(x_0, x_1, x_2) &= d_1(x_0 * x_1, x_2) = (x_0 * x_1) * x_2.\end{aligned}$$

Zatem dystrybutywność działania $*$ implikuje, że

$$d_1 \circ d_2(x_0, x_1, x_2) = d_1 \circ d_1(x_0, x_1, x_2).$$

Fakt 9.3. Jeżeli $(X, *)$ jest wrakiem, to kompleks $C_*^{(*)}(X)$ jest acykliczny, tzn. $H^{(*)}(X) = H_*(C^{(*)}(X)) = 0$.

Aby udowodnić powyższy fakt musimy wprowadzić kilka dodatkowych pojęć z algebry homologicznej.

Definicja 9.4. Niech C_* i C'_* będą kompleksami łańcuchowymi. Rodzinę homomorfizmów $f = \{f_n: C_n \rightarrow C'_n\}_{n \geq 0}$ nazywamy odwzorowaniem łańcuchowym gdy dla każdego n spełniona jest następująca tożsamość.

$$f_{n+1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n.$$

Fakt 9.5. Każde odwzorowanie łańcuchowe $f: C_* \rightarrow C'_*$ indukuje homomorfizm na grupach homologii.

$$f_*: H_*(C) \rightarrow H_*(C').$$

Definicja 9.6. Niech $f, g: C_* \rightarrow C'_*$ będą odwzorowaniami łańcuchowymi. Mówimy, że f i g są łańcuchowo homotopijne, gdy istnieje rodzina homomorfizmów $H = \{H_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}\}_{n \geq 0}$ taka, że dla dowolnego n spełniona jest poniższa tożsamość.

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ H_n + H_{n-1} \circ \partial_n.$$

Rodzinę H nazywamy homotopią łańcuchową pomiędzy f a g .

Fakt 9.7. Jeśli odwzorowania łańcuchowe f i g są łańcuchowo homotopijne, wówczas homomorfizmy indukowane na homologiach

$$f_*, g_*: H_*(C) \rightarrow H_*(C')$$

są równe.

Definicja 9.8. Niech $(X, *)$ będzie półką oraz niech $b \in X$. Zdefiniujemy następujące odwzorowanie

$$\begin{aligned}*_b: X &\rightarrow X, \\x &\mapsto x * b.\end{aligned}$$

Stwierdzenie 9.9. *Jeśli pólka $(X, *)$ zawiera element b taki, że $*_b$ jest bijekcją, wówczas kompleks $C_*^{(*)}(X)$ jest acykliczny.*

Dowód. Rozważmy następujące odwzorowanie łańcuchowe

$$f_b: C_n^{(*)}(X) \rightarrow C_n^{(*)}(X), \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_0 * b, x_1 * b, \dots, x_n * b).$$

Z założenia wynika, że powyższe odwzorowanie jest izomorfizmem i w konsekwencji odwzorowanie indukowane na homologiach $(f_b)_*$ jest izomorfizmem. W dalszej części dowodu pokażemy, że $(f_b)_* = 0$, co implikuje, że kompleks $C_*^{(*)}$ jest acykliczny.

Rozważmy następujące homomorfizmy

$$F_n: C_n^{(*)}(X) \rightarrow C_{n+1}^{(*)}(X), \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-1)^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, b).$$

F jest homotopią łańcuchową pomiędzy f_b a homomorfizmem zerowym. Istotnie,

$$\begin{aligned} & (\partial_{n+1} \circ F_n + F_{n+1} \circ \partial_n)(x_0, \dots, x_n) = \\ & = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, b) + (x_0 * b, \dots, x_n * b) - \\ & - (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, b) = \\ & = f_b(x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Zatem f_b jest łańcuchowo homotopijne z odwzorowaniem zerowym, co kończy dowód. \square

Moduł presymplicjalny $C_*^{(*)}(X)$ stowarzyszony z pólką $(X, *)$ można wyposażyć w odwzorowania degeneracji określone następująco.

$$s_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dla dowolnego n możemy określić podgrupę $C_n^D(X) \subset C_n^{(*)}(X)$ zdegenerowanych elementów, gdzie

$$C_n^D(X) = \text{span} \left(s_0(C_{n-1}^{(*)}(X)), \dots, s_{n-1}(C_{n-1}^{(*)}(X)) \right).$$

Możemy się zapytać kiedy podgrupy zdegenerowanych elementów tworzą podkompleks w $C_n^{(*)}(X)$? Na to pytanie odpowiada poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 9.10. *Podgrupy elementów zdegenerowanych tworzą podkompleks wtedy i tylko wtedy, gdy $(X, *)$ jest wrzecionem.*

Dowód.

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}(x_0, \dots, x_{j-1}, x_j, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) &= \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i(x_0, \dots, x_{j-1}, x_j, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i (x_0 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + \\
&+ (-1)^j (x_0 * x_j, \dots, x_{j-1} * x_j, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + \\
&+ (-1)^{j+1} (x_0 * x_j, \dots, x_{j-1} * x_j, x_j * x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + \\
&+ \sum_{i=j+1}^{n+1} (-1)^i (x_0 * x_i, \dots, x_{j-1} * x_i, x_j * x_i, x_j * x_i, x_{j+1} * x_i, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Z powyższych obliczeń otrzymujemy, że stwierdzenie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy poniższa równość jest prawdziwa

$$\begin{aligned}
(x_0 * x_j, \dots, x_{j-1} * x_j, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) &= \\
&= (x_0 * x_j, \dots, x_{j-1} * x_j, x_j * x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

co jest równoważne temu, że

$$x_j * x_j = x_j.$$

Z dowolności elementu x_j otrzymujemy żadaną równoważność. \square

Jeśli $(X, *)$ jest wrzecionem, wówczas otrzymujemy następujący ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych.

$$0 \rightarrow C_*^D(X) \rightarrow C_*^{(*)}(X) \rightarrow C_*^{(*)}(X)/C_*^D(X) \rightarrow 0. \quad (9.1)$$

Definicja 9.11. *Kompleks ilorozowy*

$$C_*^N(X) = C_*^{(*)}(X)/C_*^D(X)$$

nazywamy kompleksem znormalizowanym.

Twierdzenie 9.12 ([LN03, NP09, Prz11a]). *Ciąg dokładny (9.1) rozszczepia się, zatem*

$$H_n^{(*)}(X) = H_n^D(X) \oplus H_n^N(X).$$

Wykład 10

Pokazujemy tutaj, że dla wrzeciona możemy zdefiniować słaby moduł symplecticzny i znormalizowane homologie jednoczłonowe (tzn. kompleks łańcuchowy dzielimy przez podkompleks elementów zdegenerowanych). Pokażemy także jak zdefiniować wieloczłonowe homologie dystrybucyjne (w szczególności homologie wrakowe i kwandlowe. Użyjemy tego do konstrukcji 2-kocykli niezmienniczych ze względu na ruchy Reidemeistera. Pokażemy jak naszą geometryczną wizualizację można użyć do zdefiniowania homologii Yanga-Baxtera i spekulujemy o związkach z homologiami Khovanova.

10.1 Jednowyrazowe homologie dystrybucyjne – kontynuacja

W poprzednim wykładzie pokazaliśmy, że z każdą półką $(X, *)$ można stowarzyszyć pewien moduł presymplecticzny, którego homologie są niezmiennikiem półki. W przypadku gdy półka $(X, *)$ jest wrzecionem można również określić odwzorowania degeneracji, które spełniają aksjomaty (6.2) i (6.3). Aksjomat (6.4) nie jest spełniony, ale zachodzi jego osłabiona wersja.

$$d_i \circ s_i = d_{i+1} \circ s_i. \quad (10.1)$$

Definicja 10.1. *Jeśli moduł presymplecticzny dopuszcza odwzorowania degeneracji, które spełniają warunki (6.2), (6.3) i (10.1), wówczas taki moduł presymplecticzny nazywamy słabym modułem symplecticznym.*

Gdy spełnione są tylko warunki (6.2) i (6.3), wówczas taki moduł presymplecticzny nazywamy wątłym modułem presymplecticznym (ang. frail simplicial module).

Przykład 10.2. *Rozważmy czteroelementową półkę, w której działanie zadane jest przy pomocy Tabeli 10.1. Obliczenia pokazują, że homologie kompleksu modułu presymplecticznego stowarzyszonego posiadają nietrywialną torsję. Przykładowo*

$$H_1^{(*)}(X) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}^2.$$

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	2	1	1	4

Tabela 10.1:

*	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	1	2	4	3
3	2	1	3	4
4	2	1	3	4

Tabela 10.2:

Przykład 10.3. Podobnie jak w poprzednim przykładzie homologie półki z Tabeli 10.2 zawierają nietrywialną torsję.

$$H_1^{(*)}(X) = (\mathbb{Z}/2)^4 \oplus \mathbb{Z}.$$

Przykłady 10.2 i 10.3 są jedynymi przykładami półek o nie więcej niż 4 elementach, które posiadają torsję w jednoczłonowych pierwszych homologiach [CPP14].

Wszystkie opisane powyżej konstrukcje można powtórzyć w przypadku gdy mamy nie jedną, a więcej operacji na zadanym zbiorze X .

Definicja 10.4. Niech X będzie zbiorem oraz niech $S \subset \text{Bin}(X)$. Mówimy, że zbiór S jest dystrybutywny, gdy dla dowolnych $*_\alpha, *_\beta \in S$ i dla dowolnych $a, b, c \in X$ zachodzi

$$(a *_\alpha b) *_\beta c = (a *_\beta c) *_\alpha (b *_\beta c).$$

Definicja 10.5. Niech $S = \{*_1, \dots, *_n\} \subset \text{Bin}(X)$ będzie zbiorem dystrybutywnym oraz niech $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Zdefiniujemy następujący kompleks łańcuchowy.

- $C_n^{(a_1, \dots, a_n)}(X) = \mathbb{Z}[X^{n+1}]$,
- $\partial_k^{(a_1, \dots, a_n)} = \sum_{i=1}^n a_i \partial_k^{(*_i)}$.

Homologie powyższego kompleksu będzie nazywać wielowyrazowymi homologiami X .

Przykład 10.6 ([PP13]). Niech $(X, *_\cup, *_\cap)$ będzie algebrą Boole'a. Wówczas operacje $*_\cup$ i $*_\cap$ są dystrybutywne, więc możemy rozpatrywać dwuwyzrazowe, trzywyzrazowe i czterowyzrazowe homologie X , gdzie trzecie działanie jest zdefiniowane jako złożenie $*_\sim = *_\cap *_\cup$, tzn. $a *_\sim b = b$, a czwarte działanie to działanie trywialne $a *_0 b = a$. W [PP13] liczymy czterowyzrazowe homologie dla skończonych algebr Boole'a i ogólniej skończonych krat rozdzielnych.

Definicja 10.7. Niech $(X, *)$ będzie wrakiem. Zdefiniujemy następujący moduł presymplicjalny stowarzyszony z X .

- $C_n^R(X) = \mathbb{Z}[X^n]$,
- $\partial^R = \partial^{(*_0)} - \partial^{(*)}$.

Homologie kompleksu $(C_*^R(X), \partial^R)$ nazywamy homologiami wrakowymi X i oznaczamy $H_*^R(X)$. Z kolei gdy podzielimy wyjściowy kompleks przez podkompleks elementów zdegenerowanych

$$C_*^Q(X) = C_*^R(X) / C_*^D(X).$$

Homologie powyższego kompleksu nazywamy homologiami kwandlowymi oznaczamy $H_*^Q(X)$.

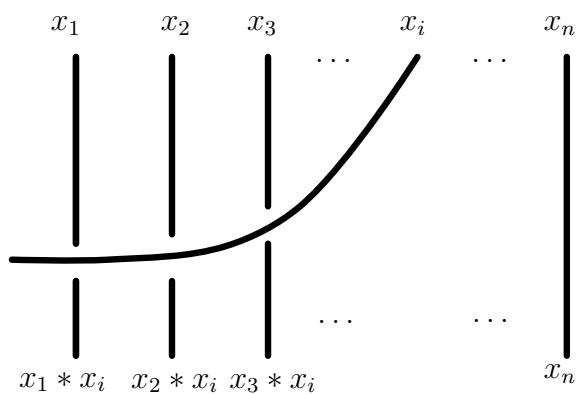
Uwaga 10.8. Homologie wrakowe i kwandlowe mają naturalne interpretacje w terminach homologii kubicznych, zob. [FRS96, FRS93, FRS95].

Różniczka ∂^* posiada naturalną interpretację geometryczną, zob. Rysunek 10.1. Dzięki temu, aksjomaty modułu presymplicjalnego wyrażają się przez analogi ruchów Reidemeistera dla odpowiednich diagramów, zob. Rysunek 10.2.

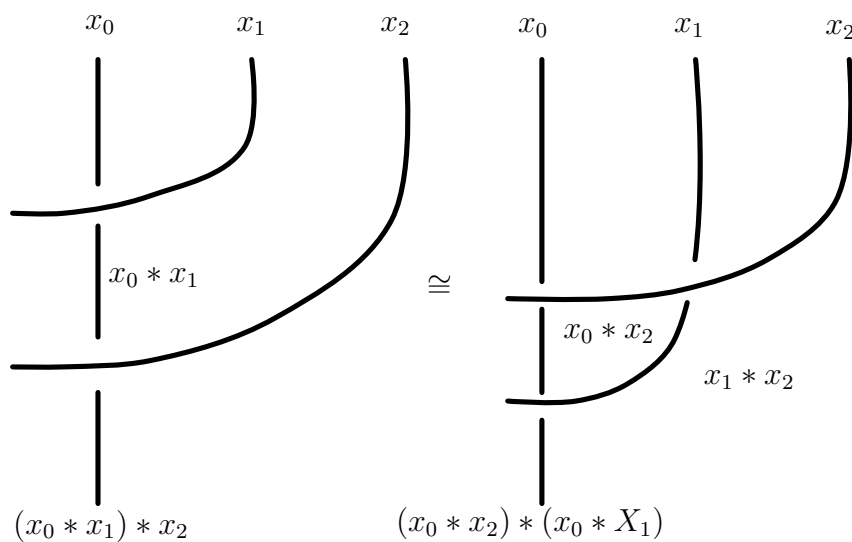
10.2 Niezmienniki splotów przy użyciu homologii kwandlowych

Na sam koniec przedstawimy metodę konstrukcji niezmienników splotów przy użyciu narzędzi opisanych wcześniej. Czytelnika zainteresowanego bardziej szczegółowym przedstawieniem konstrukcji odsyłamy do [PR14, CKS04].

Niech D będzie diagramem węzła oraz niech X będzie kwandlem. Rozważmy kolorowanie $\varphi: Q(D) \rightarrow X$, gdzie $Q(D)$ oznacza kwandl podstawowy splotu reprezentowanego przez D . Rozważmy skrzyżowanie τ diagramu D tak jak na Rysunku 3.1. Skrzyżowaniu τ możemy przyporządkować element



Rysunek 10.1: Geometryczna interpretacja różniczki $d_i^{(*)}: C_n^R(X) \rightarrow C_{n-1}^R(X)$



Rysunek 10.2: Aksjomaty modułu symplecjajnego dla d_1^* i d_2^* w terminach diagramów.

z $c_2(\tau, \varphi) \in C_2^Q(X)$ w następujący sposób (używamy notacji mnożymy dla oznaczenia działania w $C_2^Q(X)$).

$$c_2(\tau, \varphi) = \begin{cases} (a, b), & \tau \text{ jest dodatnie,} \\ (a\bar{\tau}b, b)^{-1}, & \tau \text{ jest ujemne,} \end{cases}$$

oraz $a, b \in X$ są takie jak na Rysunku 3.1. Rozważmy teraz następujący element z $C_2^Q(X)$

$$c_2(D, \varphi) = \prod_{\tau} c_2(\tau, \varphi),$$

gdzie produkt jest wzięty po wszystkich skrzyżowaniach diagramu D .

Twierdzenie 10.9. *Dla dowolnego diagramu D oraz dowolnego kolorowania φ element $c_2(D, \varphi)$ jest cyklem. Zatem wyznacza pewien element w $H_2^Q(X)$.*

Jak się okazuje element $c_2(D, \varphi)$ nie jest niezmiennikiem splotów, ale można pokazać, że klasa homologii w $H_2^Q(X)$ wyznaczona przez ten element jest niezmiennicza ze względu na ruchy Reidemeistera.

Twierdzenie 10.10. *Klasa homologii $[c_2(D, \varphi)] \in H_2^Q(X)$ jest niezmiennikiem splotu.*

Uwaga 10.11. *Ciekawym faktem jest, że jeśli rozważymy kolorowanie identycznościowe $\varphi_{\text{id}}: Q(D) \rightarrow Q(D)$, wówczas $[c_2(D, \varphi_{\text{id}})]$ jest generatorem w $H_2^Q(Q(D)) \cong \mathbb{Z}$, zob. [Eis03]. Zatem $c_2(D, \varphi_{\text{id}})$ jest uniwersalnym niezmiennikiem tego typu i wszystkie inne powstają przez rozpatrywanie kolorowań $\varphi: Q(D) \rightarrow X$, które indukują homomorfizm $\varphi_*: H_2^Q(Q(D)) \rightarrow H_2^Q(X)$. Wówczas*

$$c_2(D, \varphi) = \varphi_*(c_2(D, \varphi_{\text{id}})).$$

Oznaczmy $h_2(D, \varphi) = [c_2(D, \varphi)] \in H_2^Q(X)$. Niezmienniczość $h_2(D, \varphi)$ ze względu na pierwszy ruch Reidemeistera wynika z faktu, że na mocy definicji, generatory postaci (a, a) są trywialne w $C_2^Q(X)$. Niezmienniczość ze względu na drugi ruch Reidemeistera wynika z własności odwracalności działania $*$.

Szkic dowodu Tw. 10.10. Uzasadnienie niezmienniczości ze względu na trzeci ruch Reidemeistera wymaga nieco więcej pracy. Przyjmijmy oznaczenia jak na Rysunku 3.5. Diagramom z Rysunku 3.5 będą odpowiadały następujące cykle.

$$\begin{aligned} c_2(D_{\text{lewy}}) &= (a, b) + (a * b, c) + (b, c), \\ c_2(D_{\text{prawy}}) &= (b, c) + (a, c) + (a * c, b * c). \end{aligned}$$

Z kolei dla łańcucha $(a, b, c) \in C_3^Q(X)$ mamy

$$\partial^R(a, b, c) = (a, c) - (a * b, c) - (a, b) + (a * c, b * c).$$

Zatem

$$c_2(D_{\text{lewy}}) - c_2(D_{\text{prawy}}) = -\partial^R(a, b, c).$$

□

10.3 Spekulacje dot. homologii operatorów Yanga-Baxtera

Jeśli X jest wrakiem, wówczas możemy określić odwzorowanie

$$\begin{aligned} R: X \times X &\rightarrow X \times X, \\ R: (a, b) &\mapsto (b, a * b). \end{aligned}$$

Własności działania w X gwarantują, że R jest teoriomnogościowym operatorem Yanga-Baxtera. Zatem homologie wraka X można traktować jako homologie odpowiadające operatorowi Yanga-Baxtera. Konstrukcja ta została uogólniona w [CES04], gdzie przedstawiono konstrukcję teorii homologii dla dowolnego teoriomnogościowego operatora Yanga-Baxtera.

W pracy [CES04] pokazano jak można uogólnić niezmienniki splotów zdefiniowane przy pomocy teoriomnogościowych operatorów Yanga-Baxtera do niezmienników o wartościach w grupach homologii operatorów Yanga-Baxtera na wzór konstrukcji opisanych w poprzedniej sekcji. Rysunek 10.1 sugeruje jak można zdefiniować homologie operatora Yanga-Baxtera bezpośrednio uogólniając jednoczłonowe dystrybutywne homologie. Po dokładnym sprawdzeniu aksjomatów modułu presymplicjalnego widać, że metoda działa gdy założyć że kolumny w macierzy R dodają się do 1, tzn.

$$\sum_{(c,d)} R_{c,d}^{a,b} = 1$$

dla każdej pary $(a, b) \in X^2$, gdzie X jest bazą modułu V ($R = (R_{c,d}^{a,b})$) nazywa się wtedy macierzą kolumnowo *unitalną*). W ogólnym przypadku niekoniecznie unitalnej macierzy R definicja homologii wymaga rozpatrzenia modułu ściany i aksjomatu podobnego do warunku z Rysunku 10.2 (porównaj [Leb12, Leb13, Prz12, Prz15b, Prz15a]). Naszym, jeszcze nie osiągniętym, celem jest połączenie homologii operatorów Yanga-Baxtera z homologiami Khovanova i Khovanova-Rozanskiego splotów.

English summary

Adventures of Knot Theorist

From Fox 3-colorings to Yang-Baxter homology with the Jones polynomial and the Khovanov homology in a background (summary)

In May of 2015, invited by Krzysztof Pawałowski, I gave the series of 10 double talks at the University of Adam Mickiewicz in Poznań. One of my goals was to show that Knot Theory is rich in open problems discipline of mathematics, and that we can relatively quickly, in 20 hours, progress from elementary considerations and definitions of isotopy and Reidemeister moves to open problems. In particular, I develop connections between homology of distributive structures yielded by them (co)cycle invariants of knots, and Khovanov homology. I suggest relation involving homology of Yang-Baxter operators, or more generally by interpreting both theories in the language of statistical mechanics.

Bibliografia

- [AB26] J. W. Alexander and G. B. Briggs, *On types of knotted curves*, Ann. of Math. (2) **28** (1926/27), no. 1-4, 562–586.
- [BLW86] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson, *Graph theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [BM29] C. Burstin and W. Mayer, *Distributive Gruppen von endlicher Ordnung*, J. Reine Angew. Math. **160** (1929), 111–130. Translation by Ansgar Wenzel, arXiv:1403.6326 [math.GR].
- [Bur13] C. Burstin, *Belorusskij “Memorial”*, 2013. available online: <http://nekropole.info/en/Celestin-Burstin>, accessed November 29.
- [Bur33] ———, *List do A. Einsteina*, 1933. Mińsk.
- [CES04] J. S. Carter, M. Elhamdadi, and M. Saito, *Homology theory for the set-theoretic Yang-Baxter equation and knot invariants from generalizations of quandles*, Fund. Math. **184** (2004), 31–54.
- [CF63] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Based upon lectures given at Haverford College under the Philips Lecture Program, Ginn and Co., Boston, Mass., 1963.
- [CJK⁺03] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.
- [CKS04] S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, *Surfaces in 4-space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 142, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Low-Dimensional Topology, III.
- [CPP14] A. S. Crans, J. H. Przytycki, and K. K. Putyra, *Torsion in one-term distributive homology*, Fund. Math. **225** (2014), no. 1, 75–94. e-print: arXiv:1306.1506 [math.GT].
- [CS03] J. S. Carter and M. Saito, *Quandle homology theory and cocycle knot invariants*, Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001), 2003, pp. 249–268.
- [Cze06] M. Czerniakowska, *Leonard Euler (1707-1783) i Polska*, Gdańsk, 2006. ISBN 83-924379-2-6.
- [DH07] M. Dehn and P. Heegard, *Analysis situs*, Encykl. math. wiss., 1907, pp. 153–220.

- [Eis03] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131–157.
- [Fin04] P. Findlen, *Athanasius Kircher: the last man who knew everything*, Routledge New York and London, 2004.
- [FRS93] R. Fenn, C. Rourke, and B. Sanderson, *An introduction to species and the rack space*, Topics in knot theory (Erzurum, 1992), 1993, pp. 33–55.
- [FRS95] ———, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995), no. 4, 321–356.
- [FRS96] R. Fenn, C. Rourke, and B. Sanderson, *James bundles and applications*, 1996. Preprint <http://www.maths.warwick.ac.uk/~cpr/ftp/james.ps>.
- [FYH⁺85] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 2, 239–246.
- [Gla12] J. Glassie, *A man of misconceptions: the life of an eccentric in an age of change*, Riverhead Books, New York, 2012.
- [Has17] M. G. Haseman, *On knots, with a census of the amphicheirals with twelve crossings*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh **52** (1917), 235–255.
- [HW04] B. Hopkins and R. Wilson, *The Truth about Königsberg*, The College Mathematics Journal **35** (2004), 198–207.
- [Jon85] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111.
- [Jon89] V. F. R. Jones, *On knot invariants related to some statistical mechanical models*, Pacific J. Math. **137** (1989), no. 2, 311–334.
- [Joy79] D. Joyce, *An Algebraic Approach to Symmetry with Applications to Knot Theory*, Ph.D. Thesis, 1979. Praca doktorska pod kierunkiem P. Freyda.
- [Joy82] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.
- [Kas95] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Kau87] L. H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), no. 3, 395–407.
- [Kho00] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 3, 359–426.
- [Kop10] J. A. Kopielewicz, *Początki związków Petersbuskiej Akademii Nauk z uczonymi Gdańska*, 2010.
- [KRT97] C. Kassel, M. Rosso, and V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 1997.
- [Leb12] V. Lebed, *Braided objects: unifying algebraic structures and categorifying virtual braids*, Ph.D. Thesis, 2012.

- [Leb13] ———, *Homologies of algebraic structures via braidings and quantum shuffles*, J. Algebra **391** (2013), 152–192.
- [Lis47] J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, Vol. 1, Göttingen Studien, 1847. Abtheilung 1.
- [LN03] R. A. Litherland and S. Nelson, *The Betti numbers of some finite racks*, J. Pure Appl. Algebra **178** (2003), no. 2, 187–202.
- [Mal08] L. Maligranda, *Antoni Łomnicki (1881 – 1941)*, Wiadomości Matematyczne **XLIV** (2008), 61–112.
- [Man04] V. Manturov, *Knot theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [Mat82] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Matem. Sbornik **119(161)** (1982), no. 1, 78–88. tłumaczenie na angielski w *Math. USSR-Sbornik*, 47(1), 73–83, 1984.
- [Mio98] J. Mioduszewski, *Celestyn Burstyn (1888–1938) – członek Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Matematycy polskiego pochodzenia na obczyźnie, xi Szkoła Historii Matematyki, Kołobrzeg, maj 1997, 1998, pp. 161–165.
- [NP09] M. Niebrzydowski and J. H. Przytycki, *Homology of dihedral quandles*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 5, 742–755.
- [07] *Nowa Reforma*, 1907. wydanie popołudniowe, 285 Kraków.
- [PP13] J. H. Przytycki and K. K. Putyra, *Homology of distributive lattices*, J. Homotopy Relat. Struct. **8** (2013), no. 1, 35–65.
- [PR14] J. H. Przytycki and W. Rosicki, *Cocycle invariants of codimension 2 embeddings of manifolds*, Banach Center Publications **103** (2014), 251–289.
- [Prz11a] J. H. Przytycki, *Distributivity versus associativity in the homology theory of algebraic structures*, Demonstratio Math. **44** (2011), no. 4, 823–869.
- [Prz11b] ———, *From Goeritz matrices to quasi-alternating links*, The mathematics of knots: Theory and Applications, 2011, pp. 257–316.
- [Prz11c] ———, *Teoria węzłów i związane z nią struktury dystrybutywne; trzynaście gdańskich wykładów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 2011.
- [Prz12] J. H. Przytycki, *Distributivity versus associativity in the homology theory of algebraic structures*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach – Oberwolfach Reports – Invariants in Low-Dimensional Topology and Knot Theory, 2012, pp. 1719–1722. Report No. 28/2012.
- [Prz15a] ———, *Curtain homology: 2-(co)cycle invariants from Yang-Baxter operators*, 2015. prepared for JKTR devoted to memory of Sergei Duzhin (1956 - 2015).
- [Prz15b] ———, *Knots and distributive homology: from arc colorings to Yang-Baxter homology*, New ideas in low dimensional topology, 2015, pp. 413–488.
- [Prz98] J. H. Przytycki, *3-coloring and other elementary invariants of knots*, Knot theory (Warsaw, 1995), 1998, pp. 275–295. e-print: <http://arxiv.org/abs/math.GT/0608172>.
- [PT88] J. H. Przytycki and P. Traczyk, *Invariants of links of Conway type*, Kobe J. Math. **4** (1988), no. 2, 115–139.

- [Rei26] K. Reidemeister, *Elementare begründung der knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1926), 24–32.
- [SSW88] H. Sachs, M. Stiebitz, and R. J. Wilson, *A Historical Note - Euler Königsberg Letters*, Journal of Graph Theory **12** (1988), no. 1, 133–139.
- [Szn15] R. Sznajder, *On known and less known relations of Leonhard Euler with Poland*, 2015. e-print: arXiv:1505.02411 [math.HO].
- [Tai77] P. G. Tait, *On knots I*, Trans. R. Soc. Edin. **28** (1877), 35–79. Zawarte także w: P.G.Tait, *On knots I, II, III*, Scientific Papers, Cambridge University Press, 1898-1900. Reprinted by Amphion Press, Washington D.C., 1993.
- [Tak42] M. Takasaki, *Abstraction of symmetric transformation (jap.)*, Tohoku Math. J. **49** (1942/3), 145–207.
- [Tur10] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, revised, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010.
- [Tur88] V. G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), no. 3, 527–553.
- [Vir04] O. Viro, *Khovanov homology, its definitions and ramifications*, Fund. Math. **184** (2004), 317–342.
- [Wir05] W. Wirtinger, *Über die verzweigungen bei funktionen von zwei veränderlichen*, Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vereinigung **14** (1905), 517. Tytuł wykładu zapowiedzianego 26 września 1905 roku na rocznym zjeździe Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego w Meran (dzisiaj Włochy).
- [Woł88] O. Wołyński, *Głos z Gulagu*, 1988. rozmowa z Ewą Berberyusz, Londyn.
- [Zyg07] W. Zygmunt, *Słowo Polskie*, 1907. wydanie poranne, 287, Lwów.