



Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu



Środowiskowe Studia Doktoranckie
z Nauk Matematycznych

SKOJARZENIA W GRAFACH

WYKŁADY 1–4

Piotr Sankowski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
sank@mimuw.edu.pl



Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Streszczenie

Wykład będzie poświęcony odwiecznemu problemowi kojarzenia obiektów w pary, czyli skojarzeniom w grafach. Wykład będzie skoncentrowany na przedstawieniu efektywnych algorytmów rozwiązujących ten problem, a także na przedstawieniu wyników strukturalnych, które pozwalają tworzyć te algorytmy. Pierwsza część wykładu będzie poświęcona skojarzeniom w grafach dwudzielnych. W ramach tej części przedstawię algorytm Hopcrofta–Karpa, metodę węgierską, algorytm skalujący, oraz algorytmy algebraiczne. Następna część wykładu będzie poświęcona skojarzeniom w grafach niedwudzielnych. Tutaj omówimy algorytmy Edmonsa, algorytmy dla grafów planarnych, oraz metodę algebraiczną. Ostatnimi tematami wykładu będą algorytmy równoległe, a także metody zliczania skojarzeń.

Spis treści

Wykład 1: Skojarzenia a grafach nie-dwudzielnych	2
1.1. Lemat o ściąganiu cykli	2
1.2. Algorytm Edmonsa	3
1.3. Szczegóły implementacji algorytmu Edmonsa	5
Wykład 2: Struktura skojarzeń	6
2.4. Rozkład Gallai–Edmonsa	6
2.5. Wnioski dla grafów dwudzielnych	9
Wykład 3 i 4: Algorytmy skalujące dla dwudzielnych ważonych skojarzeń	10
3.6. Algorytm Gabowa	10
3.7. Algorytm Gabowa–Tarjana	12
Literatura	16
Piotr Sankowski	16

Wykład 1: Skojarzenia a grafach nie-dwudzielnych

W tym wykładzie skupimy się na problemie znajdowania skojarzeń w dowolnych grafach. Zaczniemy od postawienia twierdzenia Berge'a i udowodnienia jego słabszej wersji. Następnie udowodnimy lemat o ściąganiu cykli. Wykorzystując ten lemat pokażemy algorytmu Edmonsa [1] znajdujący doskonałe skojarzenia w czasie $O(n^3)$, gdzie n to liczba wierzchołków w grafie. Algorytm ten będzie jednocześnie końcem dowodu twierdzenia Berge'a.

W grafach dwudzielnych aby pokazać poprawność algorytmu znajdowania doskonałych skojarzeń korzystamy z twierdzenia Berge'a, które mówi, że skojarzenie jest maksymalne gdy nie istnieje względem niego ścieżka powiększająca. Tutaj skorzystamy z komplementarnego podejścia, a mianowicie wykorzystamy poniższy lemat. Jednak przed jego sformułowaniem wprowadźmy kilka oznaczeń. Niech $c_n(H)$ oznacza liczbę spójnych składowych grafu H o nieparzystej liczbie wierzchołków.

Lemat 1. *Dla dowolnego skojarzenia M w grafie $G = (V, E)$ i dowolnego podzbioru wierzchołków $X \subseteq V$ zachodzi*

$$|M| \leq \frac{1}{2} (|V| - (c_n(G - X) - |X|)). \quad (1)$$

Dowód: Zauważmy, że jeżeli nieparzystej składowej z grafu $G - X$ nie skojarzymy z wierzchołkiem z X , to pozostanie w niej co najmniej jeden wierzchołek wolny. Ponieważ z $c_n(G - X)$ nieparzystych składowych możemy skojarzyć w ten sposób co najwyżej $|X|$, to dla dowolnego skojarzenia M w grafie pozostanie co najmniej $c_n(G - X) - |X|$ wierzchołków wolnych. Czyli skojarzonych wierzchołków będzie co najwyżej $|V| - (c_n(G - X) - |X|)$ a co za tym idzie rozmiar M jest ograniczony tak jak w (1). \square

Lemat ten mówi, że w celu udowodnienia, że skojarzenie M jest maksymalne musimy pokazać zbiór $X \subseteq V$ taki, że w (1) będzie zachodziła równość. Niestety lemat ten nie mówi, że taki zbiór musi istnieć. Jednak algorytm Edmonsa który za chwilę przedstawimy, pozwoli na konstrukcję takiego zbioru, a tym samym pozwoli nam na udowodnienie następującej silniejszej wersji Lematu 1.

Twierdzenie 1 (Berge'a). *Niech M będzie maksymalnym skojarzeniem w grafie $G = (V, E)$, wtedy*

$$|M| = \min \left\{ \frac{1}{2} (|V| - (c_0(G - X) - |X|)) \mid X \subseteq V(G) \right\}.$$

1.1. Lemat o ściąganiu cykli

Głównym problemem w konstrukcji algorytmu znajdującego maksymalne skojarzenie w grafach dowolnych jest problem znalezienia ścieżek powiększających. Niestety konstrukcja używana dla grafów dwudzielnych tutaj nie zadziała, ponieważ w grafie do wierzchołka może istnieć naprzemienna ścieżka kończąca się krawędzią skojarzoną i nie skojarzoną. Nie możemy więc po prostu pamiętać, czy wierzchołek został już odwiedzony i użyć dzięki temu prostego przeszukiwania grafu. W celu poradzenia sobie z takimi trudnymi przypadkami użyjemy następującego lematu.

Lemat 2 (O ściągnięciu cykli). *Dla grafu G niech:*

- M będzie skojarzeniem w G ,
- Z będzie cyklem długości $2k + 1$ zawierającym k krawędzi z M i rozłącznym z resztą M .

Skonstruujemy nowy graf G' z G poprzez ściągnięcie Z do jednego wierzchołka. Skojarzenie $M' = M - E(Z)$ jest maksymalne w G' wtedy i tylko wtedy gdy skojarzenie M jest maksymalne w G .

Dowód: Udowodnijmy najpierw, że jeżeli M' jest skojarzeniem maksymalnym to także M jest maksymalne. Załóżmy przeciwnie, że M nie jest maksymalnym skojarzeniem w G . Wtedy istnieje ścieżka powiększająca P względem M . Jeżeli P jest rozłączna z Z , to P także jest ścieżką powiększającą względem M' , i M' nie jest maksymalne. Zatem P przecina się z Z . Ponieważ Z ma jeden wierzchołek wolny to, co najmniej jeden z końców P nie leży na Z , oznaczmy ten wierzchołek przez x . Poczynając od x niech z będzie pierwszym punktem na ścieżce Z leżącym na P . Wtedy $P[x, z]$ jest ścieżką powiększającą względem M' w G' , ponieważ Z po ściągnięciu do z jest wolny.

Pokażemy teraz, że w lemacie zachodzi także wynikanie w drugim kierunku. Niech M' nie będzie maksymalnym skojarzeniem w G' oraz niech N' będzie liczniejszym skojarzeniem w G' . Rozwińmy cykl Z aby odtworzyć G . Wtedy N' będzie skojarzeniem w G kojarzącym co najwyżej jeden wierzchołek z Z . Możemy wtedy N' powiększyć o k krawędzi z Z otrzymując skojarzenie N , o rozmiarze:

$$|N| = |N'| + k > |M'| + k = |M|.$$

Czyli M nie jest maksymalnym skojarzeniem w G , co kończy dowód lematu. □

Zauważmy, że jeżeli znajdziemy większe skojarzenie od M' w G' , to nie tylko wiemy, że M nie jest maksymalnym skojarzeniem, ale także umiemy skonstruować to większe skojarzenie. Zanim wykorzystamy tę obserwację w konstrukcji algorytmu Edmonsa wprowadźmy pewne oznaczenia.

1.2. Algorytm Edmonsa

Niech M będzie pewnym skojarzeniem oraz niech S oznacza zbiór wierzchołków wolnych dla M . *Lasem M -alternującym* nazwiemy las L taki, że:

- korzeniem każdego drzewa w L jest wierzchołek S i drzewo to nie zawiera innych wierzchołków z S ,
- każdy wierzchołek S należy do jednej składowej F ,
- każda krawędź w odległości nieparzystej od korzenia należy do M .

Zauważmy, że każdy punkt w lesie L w odległości parzystej od S ma stopień 2, takie punkty nazywać będziemy *wewnętrznymi*. Pozostałe punkty w L nazywać będziemy *zewnątrznymi*. Na przykład las składający się tylko z punktów S jest M -alternujący.

Algorithm 1 Algorytm Edmondsa znajdujący maksymalne skojarzenie w grafie $G = (V, E)$.

```

1:  $M = \emptyset$ 
2: las  $L$  to zbiór wierzchołków wolnych
3: repeat
4:   if istnieje zewnętrzny wierzchołek  $x \in L$  sąsiedni z wierzchołkiem  $y \notin L$  then
5:     znajdź wierzchołek  $z$  taki, że  $yz \in M$ 
6:      $L = L + xy + yz$ 
7:   else if  $x_1, x_2 \in L$  to wierzchołki zewnętrzne połączone krawędzią then
8:     if  $x_1, x_2$  należą do różnych składowych  $L$  then
9:       niech  $P_i$  to ścieżka z  $x_i$  do korzenia jego składowej
10:      rozwiń wszystkie ściągnięte cykle w grafie  $G$ 
11:       $M = M \oplus (P_1 + P_2 + x_1x_2)$ 
12:      las  $L$  to zbiór wierzchołków wolnych
13:    else
14:      niech  $C$  będzie cyklem utworzonym przez krawędź  $x_1x_2$  oraz ścieżkę  $x - y$ 
      w  $L$ 
15:      niech  $P$  będzie ścieżką w  $L$  łączącą  $C$  z korzeniem drzewa
16:       $M = M \oplus P$ 
17:      utwórz graf  $G'$  poprzez ściągnięcie  $C$ 
18:       $G = G'$ 
19:    end if
20:  else
21:    rozwiń wszystkie ściągnięte cykle w grafie  $G$ 
22:    return  $M$ 
23:  end if
24: until FALSE

```

Twierdzenie 2. Algorytm Edmondsa znajduje maksymalne skojarzenie M w grafie G .

Dowód: Algorytm Edmondsa kończy działanie gdy każdy wierzchołek zewnętrzny w L ma jako sąsiadów wierzchołki wewnętrzne. Oznaczmy przez W zbiór wierzchołków wewnętrznych w L a przez Z zbiór wierzchołków zewnętrznych. Mamy wtedy $|Z| - |W| = |V| - 2|M|$, ponieważ w każdym drzewie jest jeden wierzchołek zewnętrzny więcej i jest to wierzchołek wolny. Jeżeli usuniemy wierzchołki W z G , to otrzymamy graf składający się z izolowanych wierzchołków zewnętrznych. Dlatego $c_n(G - W) = |Z|$ i

$$\frac{1}{2} (|V| - (c_n(G - W) - |W|)) = \frac{1}{2} (|V| - |Z| + |W|) = \frac{1}{2} (2|M|) = |M|,$$

czyli nierówność w Lemacie 1 zachodzi z równością. Skojarzenie M jest więc maksymalne. Zauważmy, że z Lematu o ściąganiu cykli wynika, że będzie ono też maksymalne po rozwinięciu wszystkich ściągniętych cykli. \square

1.3. Szczegóły implementacji algorytmu Edmondsa

Wprost zaimplementowany algorytm Edmondsa zgodnie z tym schematem działać będzie w czasie $O(n^2m)$. W celu zagwarantowania czasu działania $O(n^3)$ musimy uzupełnić jeszcze kilka szczegółów implementacyjnych. Po pierwsze nie będziemy usuwać wierzchołków należących do ściąganych cykli, tylko etykietować je jako nieaktywne. Natomiast aby reprezentować wierzchołki otrzymane ze ściągnięcia cykli będziemy dodawać nowe wierzchołki je reprezentujące – zwane pseudowierzchołkami. Dzięki temu łatwiej będzie nam odtwarzać sieć przy rozwijaniu ściągniętych cykli. Krawędzie mające jeden koniec będący wierzchołkiem nieaktywnym nazywać będziemy także nieaktywnymi. Pozostałe krawędzie są aktywne. W trakcie działania algorytmu ignorujemy wierzchołki i krawędzie nieaktywne.

Trzymanie informacji o krawędziach nieaktywnych w grafie może zwiększyć długość list sąsiedztwa. Po ściągnięciu kielicha wszystkie sąsiednie do niego wierzchołki wierzchołki mają listy sąsiedztwa dłuższe o 1. Jednak jest co najwyżej $n/2$ kontrakcji więc listy te są długości co najwyżej $\frac{3}{2}n$.

Pokażemy teraz, że między znalezieniem kolejnych ścieżek powiększających upłynie czas $O(n^2)$. Pomijając czas potrzebny na ściąganie i rozwijanie cykli czas potrzebny na przetworzenie każdego wierzchołka wynosi $O(n)$. Każdy wierzchołek przetworzony będzie tylko raz, w momencie dodania go do lasu L , dlatego całkowity czas to $O(n^2)$. Pokażemy teraz, że na ściągnięcie wszystkich cykli i ich późniejsze rozwinięcie potrzeba także czasu $O(n^2)$.

Zajmijmy się teraz ściąganiem cykli. Niech $i_1 - i_2 - \dots - i_k - i_1$ to cykl C . Problemem jest tutaj stworzenie listy sąsiadów $\Gamma(b) = \Gamma(i_1) \cup \Gamma(i_2) \cup \dots \cup \Gamma(i_k)$, dla pseudowierzchołka b reprezentującego B po ściągnięciu. W tym celu:

- przeglądamy wierzchołki i_j należące do kielicha i zaznaczmy wierzchołki z $\Gamma(i_j)$,
- przeglądamy teraz wierzchołki grafu i tworzymy listę wierzchołków zaznaczonych – to jest właśnie $\Gamma(b)$,
- dodajemy b jako sąsiada wierzchołków $\Gamma(b)$.

Zauważmy, że każdy wierzchołek tylko raz może należeć do kielicha. Przejrzenie list $\Gamma(i_j)$ i markowanie wierzchołków zajmie więc w sumie czas $O(n^2)$. Pozostałe czynności w zajmują zawsze czas $O(n)$ co w sumie daje czas $O(n^2)$.

Przejdźmy teraz do problemu rozwinięcia cykli. Samo rozwinięcie cykli może być zrealizowane w czasie $O(n^2)$, poprzez przejście wszystkich wierzchołków oraz krawędzi w grafie w trakcie którego usuwamy wszystkich pseudowierzchołki i markujemy nieaktywne elementy grafu jako aktywne. Robiąc to musimy jednak pamiętać także o rozwijaniu ścieżki $P = P_1 + P_2 + x_1x_2$. Najpierw przechodząc tą ścieżkę markujemy wszystkie wierzchołki v do niej należące i zapisujemy dla niech w zmiennej $p(v)$ ich poprzedników na ścieżce oraz w zmiennej $n(v)$ ich następników. Jeżeli teraz rozwijamy pseudowierzchołek v , który leży na ścieżce, to:

- markujemy najpierw wierzchołki należące do ściągniętego cyklu reprezentowanego przez pseudowierzchołek v ,
- przeszukujemy listę sąsiadów $p(v)$ w celu znalezienia zamarkowanego wierzchołka k_p .

- przeszukujemy listę sąsiadów $q(v)$ w celu znalezienia zamarkowanego wierzchołka k_q .
- przechodzimy ściągnięty cykl w kierunku zadany przez parzystość ścieżki, od wierzchołka k_p do wierzchołka k_q .

W ten sposób dla każdego rozwijanego kielicha musimy wykonać $O(n)$ dodatkowych operacji, co przy rozwijaniu $n - 1$ kielichów daje złożoność $O(n^3)$.

Wykład 2: Struktura skojarzeń

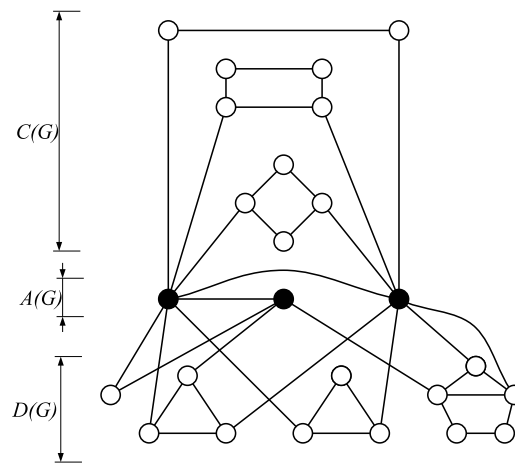
2.4. Rozkład Gallai–Edmondsa

Aby pokazać, że graf nie ma doskonałego skojarzenia możemy pokazać zbiór S naruszający twierdzenie Berge’a – tak zwany *zbiór Berge’a*. Takich zbiorów może być wiele. Czy istnieje jakiś kanoniczny zbiór Berge’a? Możemy też chcieć wiedzieć, które krawędzie należą do pewnego maksymalnego skojarzenia, bądź które wierzchołki są skojarzone w każdym maksymalnym skojarzeniu itp.. Konstrukcje takiego kanonicznego zbioru Berge’a daje nam rozkład Gallai–Edmondsa.

Zdefiniujmy następujące pojęcia

- $D(G)$ – to wierzchołki nieskojarzone w pewnym maksymalnym skojarzeniu.
- $A(G)$ – to wierzchołki sąsiednie z $D(G)$.
- $C(G)$ – to pozostałe wierzchołki.

Definicja ta została przedstawiona na Rysunku 1.



Rysunek 1. Rozkład Gallai–Edmondsa.

Rozkład Gallai–Edmondsa będzie mówił o właściwościach zbiorów $A(G)$, $C(G)$ i $D(G)$ w grafie G . Do opisu tych właściwości będziemy potrzebować następujących pojęć. Graf G jest *krytyczny* jeżeli dla każdego $v \in V(G)$ graf $G - v$ ma doskonałe skojarzenie. Skojarzenie *prawiedoskonałe* to skojarzenie, w którym pary nie ma tylko jeden wierzchołek grafu. Oznaczmy też przez $\mu(G)$ licznosc maksymalnego skojarzenia w G .

Twierdzenie 3 (Rozkład Gallai–Edmondsa). *Dla definicji $A(G)$, $C(G)$ i $D(G)$ jak powyżej zachodzi*

- (a) spójne składowe $D(G)$ są krytyczne,
 (b) jeżeli M jest maksymalnym skojarzeniem w G , to zawiera prawie doskonale skojarzenie składowych $D(G)$, doskonale skojarzenie $C(G)$, oraz kojarzy wszystkie wierzchołki $A(G)$ z różnymi składowymi $D(G)$.
 (c) rozmiar maksymalnego skojarzenia to,

$$\mu(G) = \frac{1}{2} (|V(G)| - c(D(G)) + |A(G)|),$$

gdzie $c(H)$ to liczba spójnych składowych w H .

Nasz dowód tego twierdzenia będzie się opierał na użyciu dwóch lematów. Pierwszym z nich jest Lemat o stabilności.

Lemat 3 (O stabilności). *Jeżeli $u \in A(G)$, to $A(G - u) = A(G) - u$, $C(G - u) = C(G)$ i $D(G - u) = D(G)$.*

Dowód: Pokażemy najpierw, że $D(G - u) = D(u)$. Wtedy $A(G - u) = A(G) - u$, bo $u \in A(G)$ a wierzchołków sąsiednich z $D(G)$ jest tylko mniej o u , dlatego także $C(G - u) = C(G)$.

Niech M będzie najliczniejszym skojarzeniem w G . Wtedy M kojarzy u , bo $u \notin D(G)$. Dlatego $M(G - u) = \mu(G) - 1$. Co więcej $M - u$ jest najliczniejszym skojarzeniem w $G - u$.

Zacznijmy od pokazania $D(G) \subseteq D(G - u)$. Wybierzmy dowolne $v \in D(G)$. Niech M_v będzie najliczniejszym skojarzeniem niekojarzącym v . Wtedy $M_v - u$ jest najliczniejszym skojarzeniem w $G - u$ oraz $M_v - u$ nie kojarzy v . Dlatego $v \in D(G - u)$ i $D(G) \subseteq D(G - u)$.

Aby pokazać, że $D(G - u) \subseteq D(G)$ wybierzmy wierzchołek $v \in D(G - u)$. Zatem z definicji istnieje najliczniejsze skojarzenie M' w $G - u$ nie kojarzące v . Niech w będzie dowolnym wierzchołkiem w $D(G)$ sąsiadującym z u w G , oraz niech M będzie najliczniejszym skojarzeniem G nie kojarzącym w . Jeżeli M nie kojarzy v to $v \in D(V)$, więc założmy, że M kojarzy v . Rozważmy sumę $M \cup M'$. Z definicji M' nie kojarzy v , a M kojarzy v . Czyli składowa $M \cup M'$ zawierająca v musi być ścieżką naprzemienną P zaczynającą się w v krawędzią z $M - M'$. Założmy, że P kończy się krawędzią M' . Wtedy $M \oplus P$ jest maksymalnym skojarzeniem nie kojarzącym v , a więc $v \in D(G)$. Rozważmy teraz przypadek gdy P kończy się krawędzią M . Skonstruujmy skojarzenie $M_3 = M' \oplus P$. Mamy wtedy $|M_3| > |M'|$, więc $M_3 \notin E(G - u)$, bo M' jest najliczniejsze w $G - u$. Dlatego P musi się kończyć w u . Teraz $M \oplus (P + uw)$ jest najliczniejszym skojarzeniem nie kojarzącym v , a więc $v \in D(G)$. To kończy dowód lematu o stabilności. \square

Drugim potrzebnym nam wynikiem jest Lemat Gallai.

Lemat 4 (Gallai). *Jeżeli G jest spójny oraz $\mu(G - u) = \mu(G)$ dla każdego $u \in V(G)$, to G jest krytyczny.*

Dowód: Weźmy $X \subseteq V(G)$ takie, że zachodzi równość w twierdzeniu Berge'a

$$n - 2\mu(G) = c_0(G - X) - |X|.$$

Jeżeli $X \neq \emptyset$ to weźmy $u \in X$ i wtedy

$$\begin{aligned} n - 1 - 2\mu(G - u) &\geq c_0((G - u) - (X - u)) - |X - u|, \\ n - 1 - 2\mu(G - u) &\geq c_0(G - X) - |X| + 1, \\ n - 1 - 2\mu(G) &\geq n - 2\mu(G) + 1, \\ \mu(G) &\geq \mu(G) + 1. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, dlatego w twierdzeniu Berge'a równość zachodzi tylko dla $X = \emptyset$. Oznacza to, że $n - 2\mu(G) = c_0(G)$. Wiemy, że $|V(G)|$ jest nieparzyste, bo G nie ma doskonałego skojarzenia. Mamy więc $\mu(G) = (n - 1)/2$ i dlatego G ma prawie doskonałe skojarzenie. Co więcej dla każdej wierzchołka u mamy $\mu(G - u) = \mu(G)$, a więc każdy wierzchołek może być nieskojarzony, czyli G jest krytyczny. \square

Przejdźmy do dowodu twierdzenia o rozkładzie Gallai-Edmondsa.

Dowód: Niech M będzie maksymalnym skojarzeniem G oraz niech $u \in A(G)$. M kojarzy u , bo $u \notin D(G)$, więc $\mu(G - u) = \mu(G) - 1$. Co więcej jeżeli M jest maksymalnym skojarzeniem w G , to $M - u$ jest maksymalnym skojarzeniem w $G - u$. Usuńmy teraz z G wszystkie wierzchołki z $A(G)$, wtedy

$$\mu(G - A) = \mu(G) - |A|.$$

i

$$C(G - A) = C(G) \quad \text{i} \quad D(G - A) = D(G),$$

oraz jeżeli M jest maksymalnym skojarzeniem w G , to $M \cap E(G - A)$ jest maksymalnym skojarzeniem w $G - A$. Oznaczmy przez G_1, \dots, G_t spójne składowe $G - A$ leżące w D . Żadna krawędź nie łączy D i C . Niech H oznacza graf indukowany przez C . Każde maksymalne skojarzenie w $G - A$ kojarzy wierzchołki z H . Każdy wierzchołek G_i jest niekojarzony przez jakieś maksymalne skojarzenie. Z lematu Gallai wiemy więc, że G_i jest krytyczny (dowód punktu (a)).

Ponieważ $M - A$ jest maksymalnym skojarzeniem w $G - A$, to M jest doskonałym skojarzeniem w C oraz M jest prawie doskonałym skojarzeniem w składowych D . Ponieważ $|M - A| = |M| - |A|$ to M nie zawiera krawędzi wewnątrz A , M nie kojarzy wierzchołków z A z C i nie kojarzy dwóch wierzchołków z A z tą samą składową G_i . To kończy dowód punktu (b). Widzimy teraz, że

$$\begin{aligned} \mu(G) &= \mu(G - A) + |A| = \\ &= \sum_{i=1}^t \frac{|V(G_i)| - 1}{2} + \frac{|C(G)|}{2} + |A| = \\ &= \frac{1}{2} (|V(G)| - t + |A(G)|). \end{aligned}$$

To dowodzi punktu (c). \square

2.5. Wnioski dla grafów dwudzielnych

Dla grafów dwudzielnych z twierdzenia Gallai–Edmonsa łatwo wyprowadzić dodatkowe obserwacje. Niech $\Gamma(X)$ oznacza zbiór wierzchołków sąsiednich w grafie G ze zbiorem $X \subseteq V$.

Twierdzenie 4 (O dwudzielnym rozkładzie Gallai–Edmonsa). *Niech $G = (U_1, U_2)$ oraz niech dla $i = 1, 2$, $A_i = A(G) \cap U_i$, $C_i = C(G) \cap U_i$ i $D_i = D(G) \cap U_i$. Wtedy*

- (1) $D = D_1 \cup D_2$ jest zbiorem niepołączonych wierzchołków.
- (2) Podgraf $C_1 \cup C_2$ ma doskonałe skojarzenie i $|C_1| = |C_2|$.
- (3) $\Gamma(D_1) = A_2$ i $\Gamma(D_2) = A_1$.
- (4) Maksymalne skojarzenie G kojarzy doskonale $C_1 \cup C_2$ oraz wierzchołki A_1 z D_2 i A_2 z D_1 .
- (5) Jeżeli T jest minimalnym pokryciem G to

$$A_1 \cup A_2 \subseteq T \subseteq A_1 \cup A_2 \cup C_1 \cup C_2.$$

- (6) $C_1 \cup A_1 \cup A_2$ i $C_2 \cup A_1 \cup A_2$ to minimalne pokrycia wierzchołkowe, a $A_1 \cup A_2$ to przecięcie wszystkich minimalnych pokryć.
- (7) Grafy $A_1 \cup D_2$ i $A_2 \cup D_1$ mają dodatnią nadwyżkę z punktu widzenia odpowiednio A_1 i A_2 . Czyli $|X| < |\Gamma(X) \cap D_2|$ dla każdego $X \in A_1$.

Dowód: Dowód przeprowadzimy po kolei dla wszystkich punktów twierdzenia.

- (1) Składowe $D(G)$ są krytyczne, więc nie mogą być dwudzielne.
- Fakty (2), (3) i (4) wynikają w rozkładu Gallai–Edmonsa i tego że G jest dwudzielne.
- (5) Niech $a \in A_1 - T$, wtedy istnieje punkt $d \in D$ taki, że $ad \in E$ w związku z tym $d \in T$. Co więcej w D jest dokładnie jeden punkt d sąsiedni z a . Jeżeli byłoby ich więcej to $\{d_1, \dots, d_r\} \subseteq \Gamma_D(a)$, i wtedy $T - \{d_1, \dots, d_r\} \cup \{a\}$ jest pokryciem mniejszej liczności. Niech teraz M będzie maksymalnym skojarzeniem G nie kojarzącym d . Czyli M kojarzy a krawędzią z $G(A_1 \cup A_2)$ co jest sprzeczne z punktem (b) rozkładu Gallai–Edmonsa, więc $A_1 \subseteq T$ oraz podobnie $A_2 \subseteq T$. Załóżmy teraz, że $d \in T \cap D$ i $d \in D_2$. Wtedy $\Gamma_G(d) \subseteq A_1 \subseteq T$ oraz $T - d$ jest pokryciem G przecząc minimalności T . $T \cap D_2 = \emptyset$ i podobnie $T \cap D_1 = \emptyset$.
- (6) Wynika z twierdzenia Königa, bo

$$\mu(G) = |C_1| + |A_1| + |A_2| = |C_2| + |A_1| + |A_2| = \tau(G).$$

Ponieważ $C_i + A_1 + A_2$ to pokrycie, więc muszą być minimalne.

- (7) Załóżmy przeciwnie, że dla pewnego $X \subseteq A_1$ mamy $|X| \geq |\Gamma(X) \cap D_2|$. Wtedy $T = (A_1 - X) \cup (\Gamma(X) \cap D_2) \cup A_2 \cup C_1$ jest pokryciem G . Ponieważ $|T| \leq |A_1| + |A_2| + |C_1| = \tau(G)$ to jest to pokrycie minimalne i musi zawierać A_1 .

□

Wykład 3 i 4: Algorytmy skalujące dla dwudzielnych ważonych skojarzeń

Rozważmy dowolny problem optymalizacyjny określony parametrami y_i . Ogólna idea algorytmów skalujących jest taka, że

- rozwiązujemy problem dla $y'_i = \lfloor \frac{y_i}{2} \rfloor$;
- następnie korzystając z tego rozwiązania rozwiązujemy problem dla y_i .

Jeżeli rozwiązanie dla y_i jest podobne do rozwiązania dla y'_i , to możemy je spróbować szybciej policzyć. Algorytm taki wykonywać będzie $\lfloor \log W \rfloor + 1$ wywołań rekurencyjnych, gdzie W to maksymalna wartość parametru problemu. W tym rozdziale przedstawimy dwa algorytmy rozwiązujące problem ważonych skojarzeń w grafach dwudzielnych przy użyciu skalowania. Pierwszym będzie algorytm Gabowa [2], który działa w czasie $O(n^{\frac{3}{4}} m \log W)$ oraz algorytm Gabowa–Tarjana [3], który działa w czasie $O(n^{\frac{1}{2}} m \log(nW))$.

3.6. Algorytm Gabowa

Metoda węgierska działa szybko jeżeli zaczniemy od dobrego pokrycia wierzchołkowego – wartości dualnych. Zdefiniujmy

$$D = \sum_{i \in U \cup V} y_i - w(M^*),$$

gdzie y_i to wejściowe pokrycie wierzchołkowe, a M^* do najcięższe doskonałe skojarzenie.

Niech f będzie liczbą wierzchołków wolnych w aktualnym skojarzeniu. Niech Δ_{tot} będzie sumą wartości Δ z wykonanych kroków metody Węgierskiej.

Lemat 5. *W każdym kroku mamy*

$$f \Delta_{tot} \leq D.$$

Dowód: Rozważmy wagę pokrycia wierzchołkowego $y(U \cap V) = \sum_{i \in U \cup V} y_i$. Każda zmiana wartości dualnych zmienia $y(U \cap V)$ o co najmniej $g\Delta$, gdzie g to liczba wierzchołków wolnych kiedy zmiana miała miejsce.

- jeżeli i jest wolny to y_i zmniejsza się o Δ ,
- jeżeli i jest skojarzony krawędzią ij to $y_i + y_j$ się nie zmienia.

Liczbą wierzchołków wolnych może się tylko zmniejszyć – po znalezieniu ścieżki powiększającej, więc $g \geq f$. Całkowita zmiana $y(U \cap V)$ do aktualnego stanu algorytmu wynosi więc co najmniej

$$\sum g_i \Delta_i \geq f \sum \Delta_i = f \Delta_{tot}.$$

Z drugiej strony maksymalna całkowita zmiana $y(U \cap V)$ to $D = \sum_{i \in U \cup V} y_i - w(M^*)$, czyli $f \Delta_{tot} \leq D$. \square

Będziemy używać algorytmu Hopcrofta–Karpa do powiększania skojarzenia. Algorytm ten

- otrzymuje na wejściu skojarzenie M od którego rozpoczynane będzie wyszukiwanie,

– zwraca najliczniejsze skojarzenie w grafie.

Algorytm Gabowa działa w następujący sposób:

0. Jeżeli wszystkie $w_{ij} = 0$ to zwróć dowolne doskonałe skojarzenie i pokrycie wierzchołkowe $y_i = 0$.
1. Znajdź rekurencyjnie najcięższe doskonałe skojarzenie oraz pokrycie wierzchołkowe dla grafu \bar{G} w którym $\bar{w}_{ij} = \lfloor \frac{w_{ij}}{2} \rfloor$.
2. Niech M będzie pustym skojarzeniem. Dla każdego $i \in U$ niech $y_i = 2y_i + 1$, a dla każdego $i \in V$ niech $y_i = 2y_i$.
3. Powtarzaj co następuje dopóki M nie jest doskonałym skojarzeniem.
 - 3.1. Uruchom metodę węgierską aż znajdzie ścieżkę powiększającą.
 - 3.2. Niech $G_y = (V, E_y)$, gdzie $E_y = \{uv \in E : y(u) + y(v) = w(uv)\}$ będzie grafem równościowym dla y . Używając algorytmu Hopcrofta Karpa powiększ M do najliczniejszego skojarzenia w G_y .
4. Zwróć M i pokrycie wierzchołkowe y .

Lemat 6. *Algorytm Gabowa zwraca najcięższe doskonałe skojarzenie i najliczniejsze pokrycie wierzchołkowe.*

Dowód: Krok 0 jest poprawny. Po kroku 2 otrzymujemy poprawne pokrycie wierzchołkowe. W każdym wykonaniu kroku 3 liczność skojarzenia rośnie. \square

Przeanalizujemy teraz czas działania algorytmu Gabowa. W trakcie wykonania kroku 3 zachodzi

$$f \Delta_{tot} \leq D.$$

Zauważmy, że przepłot z algorytmem Hopcrofta–Karpa nic tutaj nie psuje. Pokażemy, że

Lemat 7. *W algorytmie Gabowa*

- (i) *krok 3 wykonany jest mniej niż $n^{\frac{1}{2}}$ razy;*
- (ii) *krok 3 wykonany jest co najwyżej $n^{\frac{1}{4}}$ razy dla $f \geq n^{\frac{3}{4}}$.*

Dowód: Niech \bar{M}^* to najcięższe skojarzenie w \bar{G} , a M^* to najcięższe skojarzenie w G . Wtedy

$$D = \sum_i y_i - w_G(M^*) \leq n$$

bo

$$w_G(M^*) \geq w_G(\bar{M}^*) \geq 2w_{\bar{G}}(\bar{M}^*) = 2 \sum_i \bar{y}_i = \sum_i y_i - n.$$

Policzmy ilość kroków wykonanych

- dla $f \geq n^{\frac{1}{2}}$ – z lematu mamy $\Delta_{tot} \leq \frac{D}{f} \leq n^{\frac{1}{2}}$. Ponieważ w każdym kroku $\Delta > 0$, bo nie ma ścieżek powiększających zawartych w grafie równościowym. Takich kroków jest $\leq n^{\frac{1}{2}}$.
- dla $f < n^{\frac{1}{2}}$ – ponieważ każdy krok kojarzy co najmniej dwa wierzchołki, więc tych kroków jest $\leq n^{\frac{1}{2}}$.

A więc krok 3 wykonany jest mniej niż $n^{\frac{1}{2}}$ razy, co dowodzi (i).

Jeżeli $f \geq n^{\frac{3}{4}}$ to wtedy $\Delta_{tot} \leq \frac{D}{f} \leq n^{\frac{1}{4}}$. Ponieważ $\Delta > 0$ to liczba kroków jest mniejsza niż $n^{\frac{1}{4}}$. Dlatego krok 3 wykonany jest co najwyżej $n^{\frac{1}{4}}$ razy dla $f \geq n^{\frac{3}{4}}$, co dowodzi (ii). \square

Każde uruchomienie metody węgierskiej zajmuje $O(m)$ czasu czyli wszystkie uruchomienia zajmują co najwyżej $O(n^{\frac{1}{2}}m)$ czasu.

Algorytm Hopcrofta–Karpa działa w czasie $O(\min(n^{\frac{1}{2}}, a)m)$, gdzie a to liczba znalezionych ścieżek powiększających. Na podstawie (ii) mamy

- kroki z $f \geq n^{\frac{3}{4}}$ zajmują co najwyżej $O(n^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}m) = O(n^{3/4}m)$ czasu.
- kroki z $f < n^{\frac{3}{4}}$ znajdują w sumie co najwyżej $\frac{n^{\frac{3}{4}}}{2}$ ścieżek powiększających, a więc zajmują w sumie $O(n^{\frac{3}{4}}m)$ czasu.

Liczba wywołań rekurencyjnych to $\lfloor \log W \rfloor + 2$, gdzie W to maksymalna waga krawędzi w grafie i dlatego otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Najcięższe doskonałe skojarzenie w grafie dwudzielnym może zostać znalezione w czasie $O(n^{\frac{3}{4}}m \log W)$.*

Dowód: Czas działania wynika z powyższych obserwacji pozostaje nam tylko udowodnić, że liczby na których pracujemy nie stają się zbyt duże. W każdym z $\lfloor \log W \rfloor$ kroków wartość pokrycia zmienia się o co najwyżej $\Delta \leq D \leq n$. W i -tym kroku mamy

$$a_{i+1} \leq 2a_i + 1 + n,$$

czyli wynosi najwyżej

$$\left(2^{\lfloor \log W \rfloor + 1} - 1\right)(n + 1) \leq W(2n + 2).$$

Dlatego liczby w zapisie bitowym pokrycia wierzchołkowego są długości $O(\log(nW))$ i operacje na nich możemy wykonywać w czasie stałym. \square

3.7. Algorytm Gabowa–Tarjana

W algorytmie Gabowa połączyliśmy dwie techniki:

- Metodę Węgierską – która znajdowała najlżejsze ścieżki powiększające;
- Algorytm Hopcrofta–Karpa – który znajdował najkrótsze ścieżki powiększające.

Chcielibyśmy jednak znajdować jednocześnie wiele rozłącznych wierzchołkowo ścieżek powiększających, które byłyby jednocześnie krótkie i miały małą wagę. Przedstawimy teraz algorytm Gabowa–Tarjana, który właśnie to robi. Algorytm ten jest troszkę łatwiej opisać, gdy będziemy szukać najlżejszych doskonałych skojarzeń, a nie najcięższych doskonałych skojarzeń jak w algorytmie Gabowa. Obydwa te problemy są równoważne, bo po zmianie znaków wszystkich wag, najlżejsze doskonałe skojarzenia odpowiadają najcięższym doskonałym skojarzeniom w grafie wejściowym. Problemem dualnym jest tutaj problem najcięższe upakowania wierzchołkowego. *Upakowanie wierzchołkowe* to przypisanie wierzchołkom wag $y: V \rightarrow \mathcal{R}$ w taki sposób, że dla każdej krawędzi vw w grafie zachodzi $y_v + y_w \leq w_{vw}$.

Będziemy potrzebować następujących definicji: *1-dozwolone skojarzenie* to skojarzenie M wraz z wartościami upakowania wierzchołkowego y , takimi, że dla każdej krawędzi uv zachodzi,

$$y_v + y_w \leq w_{vw} + 1,$$

oraz

$$y_v + y_w = w_{vw}, \text{ jeżeli } vw \in M.$$

1-optymalne skojarzenie to doskonałe skojarzenie, które jest 1-dozwolone.

Będziemy używać następujących dwóch obserwacji. Niech M będzie 1-optymalnym skojarzeniem wtedy:

(a) Dla dowolnego skojarzenia P zachodzi $w(P) \geq w(M) - n$. Jest tak dlatego, że:

$$\begin{aligned} w(M) &= \sum_{uv \in M} w(uv) = \sum_{v \in U \cup V} y(v) \leq \\ &\leq \sum_{uv \in P} w(uv) + 1 = w(P) + n. \end{aligned}$$

(b) Jeżeli pewne k , $k > n$, dzieli wszystkie koszty $w(e)$, to wtedy M jest najbliższym doskonałym skojarzeniem. Jest tak dlatego, że:

$$w(M^*) \leq w(M) \leq w(M^*) + n,$$

czyli $w(M) = w(M^*)$.

Algorytm Gabowa–Tarjana działa w następujący sposób

- Niech $\bar{w}(uv) = w(uv) \times (n + 1)$.
- Ustaw $w(e) = 0$, oraz $y(v) = 0$.
- Dla i od 1 do $\lceil \log Wn \rceil + 1$ wykonuj
 - dla każdej krawędzi $w(e) = 2w(e) + (i\text{-ty bit } \bar{w}(e))$,
 - dla każdego wierzchołka $y(v) = 2y(v) - 1$,
 - znajdź 1-optymalne skojarzenie przy użyciu procedury `scale_match`.

Używana procedura `scale_match` działa w następujący sposób

- zmienia koszty na

$$w(uv) := w(uv) - y(v) - y(u).$$

- wywołuje procedurę `match` do znalezienia 1-optimalnego skojarzenia M i pokrycia y^* ,
- dodaje y^* do y ,
- zwraca M i y .

Powyżej M i y to 1-optymalne skojarzenie dla w . Przed skalowaniem mamy

$$y_v + y_w \leq w_{vw} + 1,$$

Natomiast po skalowaniu mamy,

$$\begin{aligned} y'_v + y'_w &= 2y_v - 1 + 2y_w - 1 \leq \\ &\leq 2w_{vw} \leq 2w_{vw} + (i\text{-ty bit } \bar{w}_{vw}) = w'_{vw}. \end{aligned}$$

Czyli puste skojarzenie jest 1-dozwolone oraz

$$w'_{uv} - y'_v - y'_w \geq 0.$$

Zauważmy, że wartości y przekazane do `match` są ≥ -1 . Z drugiej strony jeżeli uv jest krawędzią 1-optimalnego skojarzenia M to po przeskalowaniu

$$\begin{aligned} y'(u) + y'(v) &= 2y(u) + 2y(v) - 2 = \\ &= 2w(uv) - 2 = w'(uv) - (i\text{-ty bit } \bar{w}_{uv}) - 2 \geq \\ &\geq w'(uv) - 3. \end{aligned}$$

Mamy więc $w'(uv) - y'(u) - y'(v) \leq 3$ i waga M w wagach po przeskalowaniu wynosi co najwyżej $3n$, czyli najlżejsze skojarzenie waży $\leq 3n$.

Pokażemy teraz procedure `match` która przy założeniach, że wagi ≥ 0 oraz, że istnieje skojarzenie o wadze $\leq 3n$ znajduje najlżejsze doskonałe skojarzenie w czasie $O(\sqrt{nm})$.

Zdefiniujmy *wago-długość* krawędzi e względem skojarzenia M jako

$$wd(e) = w(e) + \begin{cases} 1 & \text{jeli } w \notin M \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Całkowita wago-długość zbioru krawędzi S względem M to

$$wd(S) = \sum_{e \in S - M} wd(e) - \sum_{e \in S \cap M} wd(e).$$

Czyli jest to waga S względem M plus liczba nieskojarzonych krawędzi.

Powiemy, że krawędź uv jest *dozwolona* jeżeli $y(u) + y(v) = wd(uv)$, tzn. warunek 1-dozwoloności zachodzi z równością.

Zauważmy, że krawędzie skojarzone są dozwolone. Pokażemy, że ścieżki powiększające składające się z dozwolonych krawędzi mają najmniejszą całkowitą wago-długość.

Procedura `match` działa w następujący sposób. Zainicjalizuj $y_v = 0$ oraz $M = \emptyset$. Następnie powtarzaj dopóki M nie jest doskonałe

1. Znajdź maksymalny zbiór \mathcal{A} wierzchołkowo rozłącznych ścieżek powiększających. Dla każdej $P \in \mathcal{A}$, powiększ M względem P , oraz dla każdego wierzchołka $w \in V \cap P$ zmniejsz $y(w)$ o 1.
2. Użyj metody węgierskiej do zmiany wartości dualnych (zachowując 1-dozwoloność) i znajdź ścieżkę powiększającą z dozwolonych krawędzi.

Kroki procedury `match` zachowują 1-dozwoloność. Każde wywołanie metody węgierskiej tworzy ścieżkę powiększającą, która następnie zostanie użyta do powiększenia skojarzenia.

Czyli ostatecznie doskonałe skojarzenie zostanie znalezione, dlatego procedura `match` kończy działanie znajdując 1-dozwolone skojarzenie.

Przeanalizujmy teraz jej czas działania. Dla dowolnego kroku algorytmu zdefiniujmy

- F to zbiór wierzchołków wolnych w U ,
- Δ_{tot} suma wszystkich wartości Δ z kroków metody węgierskiej.

Zauważmy, że zmiany wartości dualnych są takie, że dla $v \in F$ mamy $y(v) = \Delta$, oraz dla wolnego wierzchołka w V mamy $y(v) = 0$. Niech M^* będzie najlżejszym doskonałym skojarzeniem, a M aktualnym skojarzeniem. Zbiór $M \oplus M^*$ składa się z ścieżek powiększających P_v dla każdego $v \in F$, oraz zbioru cykli naprzemiennych C_w . Mamy więc

$$n + w(M^*) - w(M) \geq wd(M^* \oplus M) = \sum_{v \in F} wd(P_v) + \sum_w wd(C_w).$$

Oszacujmy lewą stronę tej nierówności. Rozważmy ścieżkę naprzemienną od $u \in U$ do $m \in U$, w której u należy do krawędzi nieskojarzonej a m do krawędzi skojarzonej. Wtedy dla krawędzi $vw \notin M$ zachodzi

$$y(v) + y(w) \leq wd(vw),$$

a dla $wn \in M$ mamy

$$y(w) + y(n) = wd(wn),$$

mamy więc

$$y(v) \leq y(n) + wd(vw) - wd(wm).$$

Korzystając z tej nierówności dla wszystkich par krawędzi na P otrzymujemy

$$y(u) \leq y(m) + wd(P).$$

Z nierówności tej wynika że dla każdego naprzemiennego cyklu C_w mamy

$$wd(C_w) \geq 0.$$

Oraz dla ścieżki powiększającej z $v \in F$ do $t \in V$ mamy

$$y(v) + y(t) \leq wd(P_v).$$

Ponieważ metoda węgierska utrzymuje $y(v) = \Delta_{tot}$ oraz $y(t) = 0$, więc $\Delta_{tot} \leq wd(P_v)$ i

$$\sum_{v \in F} wd(P_v) + \sum_w wd(C_w) \geq |F| \Delta_{tot}.$$

Ponieważ $c(M^*) \leq 3n$ oraz $c(M) \geq 0$. Więc

$$4n \geq n + w(M^*) - w(M).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$4n \geq |F|\Delta_{tot}.$$

Jeżeli pokażemy, że każde wykonanie metody węgierskiej zwiększa Δ_{tot} , to:

- co najwyżej $2\sqrt{n} + 1$ iteracji jest wykonanych dla $|F| \leq 2\sqrt{n}$, bo po każdym wykonaniu metody węgierskiej skojarzenie się powiększa.
- jeżeli $|F| > 2\sqrt{n}$ to $\Delta_{tot} < 2\sqrt{n}$ i takich iteracji też będzie co najwyżej $2\sqrt{n}$.

Aby pokazać, że każde wywołanie metody Węgierskiej zwiększa Δ_{tot} wystarczy pokazać, że zmienia ono wartości dualne. Mogłoby ich nie zmienić tylko wtedy gdyby istniała przed jej wykonaniem naprzemienna ścieżka P składająca się z krawędzi dozwolonych. Ścieżka P przecina się ze ścieżką znaną w kroku 1 procedury `match`. P zawiera nieskojarzoną krawędź vw taką, że w należy do ścieżki z kroku 1, a v nie, oraz $w \in V$. Ale po kroku 1 krawędź vw nie może być dozwolona bo y_w jest zmniejszone,

$$y_v + y_w \leq w_{vw} + 1.$$

Każde wykonanie pętli w procedurze `match` zajmuje $O(m)$ czasu, bo:

- wyszukiwanie maksymalnego zbioru dozwolonych ścieżek zajmuje $O(m)$ – tak jak algorytm Hopcrofta–Karpa;
- metoda węgierska może być wykonana w czasie $O(m + n \log n)$. Można ten czas poprawić na $O(m)$ zauważając, że wartości w kopcu są z przedziału $1, \dots, 4n$ i zawsze rosną – kopiec w tablicy.

Literatura

- [1] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *Journal of Research National Bureau of Standards-B.*, 69B:125–130, 1965. [2](#)
- [2] H. N. Gabow. Scaling Algorithms for Network Problems. *J. Comput. Syst. Sci.*, 31(2):148–168, 1985. [10](#)
- [3] H. N. Gabow and R. E. Tarjan. Faster Scaling Algorithms for Network Problems. *SIAM Journal on Computing*, 18(5):1013–1036, 1989. [10](#)

Piotr Sankowski

Piotr Sankowski jest od 2010 r. profesorem informatyki w Instytucie Informatyki UW, jest także czynnym naukowo fizykiem. Habilitował się z informatyki w 2009 r. na UW. Doktoryzował się z informatyki na UW w 2005 r. i z fizyki w PAN w 2009 r. W latach 2006–2010 był kolejno post-dokiem na Univ. Sapienza w Rzymie, na ETH w Zurichu i z powrotem w Rzymie. Kieruje grantem ERC. Prezentował swoje wyniki na kluczowych konferencjach informatycznych (m.in. STOC 2011, FOCS 2010, 2008, 2004 r.), publikuje także prace z fizyki ciała stałego. W zakresie informatyki zajmuje się: algebraicznymi metodami w teorii grafów, dynamicznymi algorytmami grafowymi, algorytmami Monte Carlo i grafami planarnymi. W zakresie fizyki prowadzi badania na temat spinotroniki, teorii ciała stałego i tzw. *ab-initio calculations*.