ZBIORY BORELOWSKIE I ANALITYCZNE ORAZ ICH ZASTOSOWANIA.

PIOTR ZAKRZEWSKI

1. Wykłady 1/2

Definicja 1.1. Przestrzeń polska to przestrzeń topologiczna ośrodkowa, metryzowalna w sposób zupełny.

Przykład 1.2.

- *przeliczalne przestrzenie z topologią dyskretną np.:* $2 = \{0, 1\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- $I = [0, 1]$, $\mathbb{R}$, I^n, $\mathbb{R}^n$, *kostka Hilberta* $I^{\mathbb{N}}$,
- *ośrodkowe przestrzenie Banacha, w szczególności przestrzeń* $C(X)$ *funkcji rzeczywistych ciągłych na zwartej metrycznej przestrzeni* X*, z topologią zbieżności jednostajnej,*
- *hiperprzestrzeń* $K(X)$ *podzbiorów zwartych przestrzeni polskiej* X*, z topologią Vietorisa,*
- *zbiór Cantora* $2^{\mathbb{N}}$*, przestrzeń Baire'a* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*.*

Twierdzenie 1.3.

- *Przeliczalny produkt przestrzeni polskich jest przestrzenią polską.*
- *(Alexandrow) Podprzestrzeń przestrzeni polskiej* X *jest przestrzenią polską wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzbiorem typu* G_δ *w* X*.*

Definicja 1.4.

- Przestrzeń topologiczna jest doskonała, jeśli nie ma punktów izolowanych.
- Podzbiór przestrzeni topologicznej nazywamy podzbiorem doskonałym, jeśli jest domknięty oraz nie ma punktów izolowanych.

- $A^{<\mathbb{N}}$ – zbiór wszystkich skończonych ciągów o wyrazach ze zbioru A.

Twierdzenie 1.5.
- *Każda (niepusta) doskonała przestrzeń polska zawiera homeomorficzną kopię zbioru Cantora.*
- *Każda (niepusta) przestrzeń polska jest ciągłym i otwartym obrazem przestrzeni Baire'a.*

Dowód. Żeby znaleźć zanurzenie homeomorficzne $2^{\mathbb{N}}$ w daną doskonałą przestrzeń polską $X \neq \emptyset$, indukcyjnie konstruujemy odpowiedni schemat Cantora na zbiorze X, tzn. rodzinę indeksowaną $(A_s : s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}})$ jego podzbiorów, spełniającą warunki:
- $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$ dla $s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$,
- $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$ dla $s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, $i \in \{0,1\}$.

Robimy to w taki sposób, by funkcja f, która każdemu $x \in 2^{\mathbb{N}}$ przyporządkowuje jedyny element zbioru $\bigcap_n A_{x|n}$ była poprawnie określona, ciągła i różnowartościowa.

Żeby znaleźć ciągłą suriekcję $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ na daną przestrzeń polską $X \neq \emptyset$, indukcyjnie konstruujemy odpowiedni schemat Suslina na zbiorze X, tzn. rodzinę indeksowaną $(A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ jego podzbiorów. Robimy to w taki sposób, by funkcja f, która każdemu $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ przyporządkowuje jedyny element zbioru $\bigcap_n A_{x|n}$ była poprawnie określona, ciągła i na X. □

Twierdzenie 1.6 (Rozkład Cantora-Bendixsona)**.** *Każda nieprzeliczalna przestrzeń topologiczna X ciężaru przeliczalnego rozkłada się na sumę rozłączną podzbioru doskonałego P i (co najwyżej) przeliczalnego C.*

Dowód. Niech $(U_n : n \in \mathbb{N})$ będzie przeliczalną bazą topologii przestrzeni X. Wystarczy zdefiniować:

$$C = \bigcup \{U_n : |U_n| \leqslant \omega\}, \quad P = X \setminus C.$$

□

Twierdzenie 1.7. *Każda nieprzeliczalna przestrzeń polska doskonała zawiera homeomorficzną kopię zbioru Cantora. Ma zatem moc $\mathfrak{c}$.*

Twierdzenie 1.8. *Każda przestrzeń polska zanurza się homeomorficznie w kostce Hilberta (jako jej podzbiór typu G_δ).*

Twierdzenie 1.9. *Istnieje przestrzeń polska, w której każda przestrzeń polska zanurza się izometrycznie (jako jej podzbiór domknięty).*

- $\mathcal{B}(X)$ – rodzina zbiorów borelowskich przestrzeni X.

Definicja 1.10. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcja $f : X \to Y$ jest borelowskim izomorfizmem tych przestrzeni, jeśli jest bijekcją z X na Y oraz

$$A \in \mathcal{B}(X) \Leftrightarrow f[A] \in \mathcal{B}(Y)$$

dla każdego zbioru $A \subseteq X$.

Przykład 1.11. *Kanoniczne przekształcenie $g : 2^{\mathbb{N}} \to I$ dane wzorem:*

$$g((x_n)) = \sum_n \frac{1}{2^{n+1}}$$

wyznacza (w wyniku modyfikacji na zbiorach przeliczalnych) borelowski izomorfizm zbioru Cantora i odcinka $[0, 1]$.

Twierdzenie 1.12 (Twierdzenie Cantora-Bernsteina)**.** *Jeśli $f : X \to Y$ jest borelowskim izomorfizmem pomiędzy X i $f[X]$ oraz $f[X] \in \mathcal{B}(Y)$ a $g : Y \to X$ jest borelowskim izomorfizmem pomiędzy Y i $g[Y]$ oraz $g[Y] \in \mathcal{B}(X)$, to przestrzenie X i Y są borelowsko izomorficzne.*

Twierdzenie 1.13 (O borelowskim izomorfizmie przestrzeni polskich)**.** *Dowolne dwie nieprzeliczalne przestrzenie polskie są borelowsko izomorficzne.*

Dowód. Niech X będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską. Wtedy: $2^{\mathbb{N}}$ zanurza się w X, X zanurza się w kostce $I^{\mathbb{N}}$, która na mocy przykładu 1.11 jest borelowsko izomorficzna z $2^{\mathbb{N}}$. □

Definicja 1.14 (Hierarchia borelowska)**.** Przez indukcję definiujemy dla $\alpha < \omega_1$:

- $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$ – rodzina podzbiorów otwartych przestrzeni X.
- $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ – rodzina dopełnień zbiorów z $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$; $\alpha \geqslant 1$.
- $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ – rodzina przeliczalnych sum zbiorów z $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta(X)$; $\alpha > 1$.

Twierdzenie 1.15.

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X).$$

Twierdzenie 1.16. *Każdy niepusty podzbiór borelowski przestrzeni polskiej X jest ciągłym obrazem przestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Dowód. Najpierw pokazujemy, że rodzina zbiorów o dowodzonej własności zawiera zbiory otwarte i domknięte oraz jest zamknięta na przeliczalne sumy i przecięcia. Następnie przez indukcję po $\alpha < \omega_1$ dowodzimy, że własność tę ma każdy zbiór, należący do klasy $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$. □

Twierdzenie 1.17. *Jeśli X i Y są przestrzeniami polskimi oraz $f : X \to Y$ – funkcją ciągłą o nieprzeliczalnym zbiorze wartości, to istnieje kopia zbioru Cantora $C \subseteq X$ taka, że obcięcie $f|C$ jest funkcją różnowartościową.*

Twierdzenie 1.18 (Alexandrow, Hausdorff)**.** *Każdy nieprzeliczalny podzbiór borelowski przestrzeni polskiej zawiera homeomorficzną kopię zbioru Cantora. W szczególności, ma moc $\mathfrak{c}$ oraz jest borelowsko izomorficzny z dowolną przestrzenią polską.*

Twierdzenie 1.19 (Silver)**.** *Dla każdej borelowskiej relacji równoważności E o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji na przestrzeni polskiej X istnieje homeomorficzna kopia zbioru Cantora zawarta w X, której punkty są parami nierównoważne w sensie relacji E.*

Twierdzenie 1.20. *Dla każdego borelowskiego podzbioru B przestrzeni polskiej (X, τ) istnieje rozszerzenie topologii τ do takiej topologii polskiej τ' na X, że spełnione są warunki:*

- $\mathcal{B}(X, \tau) = \mathcal{B}(X, \tau')$,
- *zbiór B jest otwarto-domknięty w topologii τ' i, w szczególności, jest przestrzenią polską w topologii podprzestrzeni przestrzeni (X, τ').*

2. Wykłady 3/4

Definicja 2.1. Podzbiór przestrzeni polskiej jest zbiorem analitycznym, jeśli jest ciągłym obrazem przestrzeni polskiej.

- $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ – rodzina podzbiorów analitycznych przestrzeni X.

Twierdzenie 2.2.

- *Każdy borelowski podzbiór przestrzeni polskiej jest analityczny.*
- *Każdy nieprzeliczalny zbiór analityczny zawiera homeomorficzną kopię zbioru Cantora; w szczególności, ma moc $\mathfrak{c}$.*
- *Każdy niepusty zbiór analityczny jest ciągłym obrazem przestrzeni Baire'a.*

Twierdzenie 2.3. *Klasa zbiorów analitycznych jest zamknięta na przeliczalne sumy i przecięcia oraz na obrazy i przeciwobrazy względem funkcji borelowskich. Dokładniej:*

- *Jeśli (A_n) jest ciągiem analitycznych podzbiorów przestrzeni polskiej X, to zbiory $\bigcup_n A_n$ oraz $\bigcap_n A_n$ są analityczne.*

- *Jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją borelowską pomiędzy przestrzeniami polskimi X, Y, to zbiory $f[A]$ oraz $f^{-1}[B]$ są analityczne, o ile zbiory A oraz B są analityczne (w odpowiednich przestrzeniach).*

Dowód. Zamkniętość na przeliczalne operacje pokazaliśmy wcześniej. Dla dowodu drugiej z powyższych własności wystarczy zauważyć, że zbiory $f[A]$ oraz $f^{-1}[B]$ są rzutami na odpowiednie osie pewnych borelowskich podzbiorów produktu $X \times Y$ (istotne jest to, że wykres funkcji borelowskiej $f : X \to Y$ jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $X \times Y$). □

Twierdzenie 2.4 (Suslin)**.** *W dowolnej nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X istnieje podzbiór analityczny nieborelowski.*

Dowód. Wystarczy taki zbiór znaleźć w przestrzeni $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Będzie nim tzw. zbiór analityczny uniwersalny, tzn. taki zbiór $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$, że $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \{A_x : \ x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, gdzie $A_x = \{y : (x, y) \in A\}$ jest przekrojem pionowym zbioru A. □

Twierdzenie 2.5 (Twierdzenie Luzina o oddzielaniu)**.** *Rozłączne zbiory analityczne można oddzielić zbiorem borelowskim. Dokładniej, jeśli C i D są rozłącznymi podzbiorami analitycznymi przestrzeni polskiej X, to istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $C \subseteq B$ i $B \cap D = \emptyset$.*

Definicja 2.6. Podzbiór przestrzeni polskiej jest zbiorem koanalitycznym, jeśli jest dopełnieniem podzbioru analitycznego tej przestrzeni.

- $\mathbf{\Pi}^1_1(X)$ – rodzina podzbiorów koanalitycznych przestrzeni X.

Twierdzenie 2.7 (Suslin)**.** *Jeśli X jest przestrzenią polską*

$$\mathbf{\Sigma}^1_1(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_1(X) = \mathcal{B}(X).$$

Definicja 2.8.

- Mając daną rodzinę indeksowaną (schemat Suslina) $(A_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ definiujemy operację Suslina $\mathcal{A}$:
$$\mathcal{A}(A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}) = \bigcup_{z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_n A_{z|n}.$$
- Mając daną rodzinę Γ podzbiorów zbioru X definiujemy:
$$\mathcal{A}\Gamma = \{\mathcal{A}(A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}) : \ \{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\} \subseteq \Gamma\}.$$

Uwaga 2.9.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}) &= proj_X\Big[\bigcap_n \{(x,z) \in X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x \in A_{z|n}\}\Big] \\ &= proj_X\Big[\bigcap_n \bigcup \{A_s \times N_s : lh(s) = n\}\Big],\end{aligned}$$

gdzie $N_s = \{z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : z|lh(s) = s\}$.

Wniosek 2.10. *Klasa zbiorów analitycznych jest zamknięta na operację Suslina.*

Twierdzenie 2.11.
Dla dowolnego zbioru X i rodziny $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$ mamy:

- $\Gamma \subseteq \mathcal{A}\Gamma$.
- *Rodzina $\mathcal{A}\Gamma$ jest zamknięta na przeliczalne sumy i przecięcia.*
- *Rodzina $\mathcal{A}\Gamma$ jest zamknięta na operację Suslina, tzn.*

$$\mathcal{A}\mathcal{A}\Gamma = \mathcal{A}\Gamma.$$

Twierdzenie 2.12. *Dla dowolnej przestrzeni polskiej X i zbioru $A \subseteq X$ następujące warunki są równoważne:*

- $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$.
- *Zbiór A jest rzutem domkniętego podzbioru przestrzeni $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*
- $A \in \mathcal{A}\mathbf{\Pi}^0_1(X)$.

Dowód. Jeśli $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$, to $A = f[\mathbb{N}^{\mathbb{N}}]$ dla pewnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$. Wówczas:

- $A = proj_X\Big[\{(x,z) \in X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} :\ x = f(z)\}\Big]$.
- $A = \mathcal{A}(\overline{f[N_s]} : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$, gdzie $N_s = \{z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : z|lh(s) = s\}$.

□

Definicja 2.13.

- Dla danego σ-ciała $\mathcal{C}$ podzbiorów zbioru X rodzinę $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$ nazywamy σ-ideałem w $\mathcal{C}$, jeśli jest zamknięta na przeliczalne sumy oraz podzbiory należące do $\mathcal{C}$ (tzn., jeśli $A \in \mathcal{I}$, to $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$).
- Para $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$, gdzie $\mathcal{C}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru X a $\mathcal{I}$ – σ-ideałem w $\mathcal{C}$, ma własność mierzalnej otoczki, jeśli
  Dla każdego zbioru $Y \subseteq X$ istnieje zbiór $B \in \mathcal{C}$ taki, że $Y \subseteq B$ oraz dla każdego $C \in \mathcal{C}$ jeśli $C \subseteq B \setminus Y$, to $C \in \mathcal{I}$.

Twierdzenie 2.14. *Następujące pary $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ mają własność mierzalnej otoczki:*

- *$\mathcal{C}$ jest dowolnym σ-ciałem a σ-ideał $\mathcal{I}$ jest ccc w $\mathcal{C}$, tzn. nie istnieje nieprzeliczalna rodzina rozłączna zbiorów należących do $\mathcal{C} \setminus \mathcal{I}$.*
- *$\mathcal{C}$ jest σ-ciałem zbiorów mierzalnych wględem danej σ-skończonej miary borelowskiej na przestrzeni polskiej X a $\mathcal{I}$ jest rodziną zbiorów miary zero względem tej miary.*
- *$\mathcal{C}$ jest rodziną podzbiorów z własnością Baire'a danej przestrzeni topologicznej X a $\mathcal{I}$ jest rodziną podzbiorów I kategorii Baire's tej przestrzeni.*

Twierdzenie 2.15 (Marczewski)**.** *Jeśli para $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$, gdzie $\mathcal{C}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru X a $\mathcal{I}$ – σ-ideałem w $\mathcal{C}$, zamkniętym na branie dowolnych podzbiorów (tzn., jeśli $A \in \mathcal{I}$, to $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{I}$), ma własność mierzalnej otoczki, to σ-ciało $\mathcal{C}$ jest zamknięte na operację Suslina.*

Twierdzenie 2.16. *Każdy analityczny podzbiór przestrzeni polskiej (X, τ) jest mierzalny względem dowolnej σ-skończonej miary borelowskiej na przestrzeni polskiej X oraz ma własność Baire'a względem każdej topologii na X rozszerzającej topologię τ.*

3. Wykłady 5/6

Definicja 3.1. Niech R będzie relacją dwuargumentową na zbiorze X. Zbiór $C \subseteq X$ jest zbiorem wolnym względem relacji R, jeśli $(x, y) \notin R$ dla każdej pary różnych elementów $x, y \in C$.

Przykład 3.2.

- *(Lázár) Jeśli $R \subseteq \mathbb{R}^2$ jest relacją taką, że $|R_x| < \aleph_0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to istnieje zbiór wolny względem R mocy $\mathfrak{c}$.*
- *Istnieje relacja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ taka, że $|R_x| < \mathfrak{c}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, ale nie ma zbioru wolnego mocy $\mathfrak{c}$ względem R.*

Twierdzenie 3.3 (Kuratowski, Mycielski)**.** *Niech X będzie przestrzenią polską doskonałą.*

- *Jeśli relacja R jest I kategorii Baire'a w produkcie X^2, to X zawiera homeomorficzną kopię C zbioru Cantora, będącą zbiorem wolnym względem relacji R.*
- *Jeśli $(R_i)_i$ jest ciągiem relacji takim, że $R_i \subseteq X^{n_i}$ jest relacją n_i-argumentową, I kategorii Baire'a w przestrzeni X^{n_i}, to X zawiera homeomorficzną kopię C zbioru Cantora, spełniającą dla każdego $i \in \mathbb{N}$ warunek: $(C)^{n_i} \cap R_i = \emptyset$, gdzie $(C)^k$ oznacza podzbiór przestrzeni X^k, złożony z ciągów różnowartościowych.*

Dowód. Należy zdefiniować przez indukcję schemat Cantora, spełniający warunki gwarantujące, że zdefiniowany z jego pomocą zbiór Cantora, będzie zbiorem wolnym względem relacji R. □

- $[X]^\kappa$ – zbiór wszystkich podzbiorów mocy κ zbioru X.
- $[X]^{<\kappa}$ – zbiór wszystkich podzbiorów mocy mniejszej niż κ zbioru X.

Definicja 3.4. Niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem zbioru $[X]^\kappa$. Zbiór $C \subseteq X$ jest zbiorem jednorodnym dla podziału P, jeśli istnieje blok $P \in \mathcal{P}$ taki, że $[C]^\kappa \subseteq P$.

Przykład 3.5.

- *(Ramsey) Jeśli X jest jest zbiorem nieskończonym oraz $n \in \mathbb{N}$, to dla każdego skończonego podziału zbioru $[X]^n$ istnieje nieskończony zbiór jednorodny.*
- *(Sierpiński) Istnieje podział zbioru $[\mathbb{R}]^2$ na dwa bloki, bez nieprzeliczalnego zbioru jednorodnego.*

Twierdzenie 3.6 (Galvin)**.** *Niech X będzie przestrzenią polską doskonałą.*

Jeśli $\mathcal{P}$ jest skończonym podziałem zbioru $[X]^2$ na bloki z własnością Baire'a (W tym sensie, że zbiór $P^* = \{(x,y) \in X^2 : \{x,y\} \in P\}$ ma własność Baire'a dla każdego bloku $P \in \mathcal{P}$), to X zawiera homeomorficzną kopię C zbioru Cantora, będącą zbiorem jednorodnym dla podziału P.

Dowód. Najpierw sprowadzamy ogólną sytuację do przypadku podziału na dwa bloki: $[X]^2 = P_0 \cup P_1$, dla których zbiory P_i^* są otwarte w X^2.

Następnie definiujemy przez indukcję schemat Cantora, spełniający warunki gwarantujące, że zdefiniowany z jego pomocą zbiór Cantora, będzie zbiorem jednorodnym dla podziału P. □

Przykład 3.7.
Istnieje podział zbioru $[\mathbb{N}]^\omega$ na dwa bloki, bez nieskończonego zbioru jednorodnego.

Definicja 3.8. Zbiór $P \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ nazywamy zbiorem ramseyowskim, jeśli istnieje nieskończony zbiór jednorodny dla podziału $[\mathbb{N}]^\omega = P \cup -P$, tzn. taki zbiór $H \in [\mathbb{N}]^\omega$, że $[H]^\omega \subseteq P$ lub $[H]^\omega \subseteq [\mathbb{N}]^\omega \setminus P$.

W dalszym części, zbiór $[\mathbb{N}]^\omega$ rozpatrujemy z topologią podprzestrzeni zbioru Cantora (dzięki utożsamieniu podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ z ich funkcjami charakterystycznymi).

Twierdzenie 3.9.

- *(Galvin i Prikry) Dla każdego skończonego podziału przestrzeni $[\mathbb{N}]^\omega$ na zbiory borelowskie istnieje nieskończony zbiór jednorodny.*
- *(Silver) Każdy analityczny podzbiór przestrzeni $[\mathbb{N}]^\omega$ jest ramseyowski.*

Dowód. Twierdzenie G.-P. wynika łatwo z twierdzenia S. (przez sprowadzenie do przypadku podziału na dwa bloki).

Dla dowodu twierdzenia Silvera wprowadzamy na przestrzeni $[\mathbb{N}]^\omega$ tzw. topologię Ellentucka τ_E za pomocą bazy, złożonej ze zbiorów postaci

$$[s, A] = \{Y \in [\mathbb{N}]^\omega : s \subseteq A \subseteq s \cup A\},$$

gdzie $s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ oraz $s < A$ w tym sensie, że $\max(s) < \min(A)$ – topologia ta rozszerza wyjściową topologię polską na $[\mathbb{N}]^\omega$.

Następnie pokazujemy, że każdy zbiór $P \in [\mathbb{N}]^\omega$ o własności Baire'a w przestrzeni $([\mathbb{N}]^\omega, \tau_E)$ jest ramseyowski a nawet jest całkowicie ramseyowski, tzn. ma następującą silniejszą własność: dla dowolnych zbiorów $s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ i $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ takich, że $s < A$, istnieje zbiór $H \in [A]^\omega$ taki, że $[s, H] \subseteq P$ lub $[s, H] \subseteq [\mathbb{N}]^\omega \setminus P$. $\square$

Twierdzenie 3.10 (Rosenthal)**.** *Każdy ciąg $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podzbiorów danego zbioru X ma podciąg $(A_n)_{n\in C}$, gdzie $C \in [\mathbb{N}]^\omega$, który jest zbieżny (tzn. ciąg funkcji charakterystycznych jego wyrazów jest punktowo zbieżny) lub niezależny (tzn. dla dowolnych rozłącznych $s, t \in [C]^{<\omega}$, zbiór*

$$\bigcap_{n\in s} A_n \cap \bigcap_{n\in t} (X \setminus A_n)$$

jest niepusty).

4. Wykłady 7/8

Definicja 4.1. Drzewem na zbiorze A nazywamy dowolny zbiór $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ zamknięty na prefiksy. Drzewo T jest przycięte, jeśli każdy ciąg $s \in T$ jest prefiksem dłuższego ciągu $t \in T$. Ciąg nieskończony $x \in A^{\mathbb{N}}$ jest nieskończoną gałęzią drzewa T na zbiorze A, jeśli wszystkie jego skończone prefiksy są w T. Drzewo T jest ufundowane, jeśli nie ma nieskończonych gałęzi; w przeciwnym razie jest nieufundowane.

- $[T]$ – zbiór wszystkich nieskończonych gałęzi drzewa $[T]$.

Stwierdzenie 4.2. *Przycięte drzewa na A są w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej z domkniętymi podzbiorami przestrzeni $A^{\mathbb{N}}$ (gdzie A jest przestrzenią z topologią dyskretną). Dokładniej, odpowiedniość tę zadaje odwzorowanie $T \mapsto [T]$.*

Definicja 4.3. Niech T będzie drzewem na zbiorze $B \times C$.

- Jeśli $x \in B^{\mathbb{N}}$, to drzewo na C zdefiniowane tak:
$$T(x) = \{s \in C^{<\mathbb{N}} : (x|lh(s), s) \in T\}$$
nazywamy przekrojem drzewa T wyznaczonym przez x.
- Rzutem drzewa T (na oś $B^{\mathbb{N}}$) nazywamy zbiór
$$p[T] = \{x \in B^{\mathbb{N}} : \ [T(x)] \neq \emptyset\}.$$

Uwaga 4.4. Z dokładnościa do kanonicznego utożsamienia przestrzeni $(B \times C)^{\mathbb{N}}$ i $B^{\mathbb{N}} \times C^{\mathbb{N}}$, każdy domknięty podzbiór F przestrzeni $B^{\mathbb{N}} \times C^{\mathbb{N}}$ jest postaci $[T]$ dla pewnego (przyciętego) drzewa T na zbiorze $B \times C$ i wówczas $p[T]$ jest rzutem zbioru F na oś $B^{\mathbb{N}}$.

Twierdzenie 4.5. *Dla danego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ następujące warunki są równoważne:*

- *Zbiór A jest analitycznym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*
- *Zbiór A jest rzutem pewnego (przyciętego) drzewa na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

W dalszej części, jeśli A jest zbiorem przeliczalnym, to zbiór $\mathcal{P}(A^{<\mathbb{N}})$ rozpatrujemy z topologią zbioru Cantora (dzięki utożsamieniu przeliczalnego zbioru $A^{<\mathbb{N}}$ z $\mathbb{N}$, a następnie podzbiorów zbioru $A^{<\mathbb{N}}$ z ich funkcjami charakterystycznymi).

- Tr – przestrzeń wszystkich drzew na $\mathbb{N}$.
- WF – zbiór wszystkich ufundowanych drzew na $\mathbb{N}$.
- IF – zbiór wszystkich nieufundowanych drzew na $\mathbb{N}$.

Stwierdzenie 4.6.

- *Zbiór Tr jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$; jest więc przestrzenią polską.*
- *Zbiór IF jest analitycznym podzbiorem przestrzeni Tr.*

Definicja 4.7. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ze zbioru X w zbiór Y i niech $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$. Jeśli $A = f^{-1}[B]$, to mówimy, że funkcja f redukuje zbiór A do zbioru B (jest redukcją A do B).

Twierdzenie 4.8.

- *Jeśli A jest analitycznym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oraz T jest przyciętym drzewem na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takim, że $A = p[T]$, to funkcja $x \mapsto T(x)$ jest ciągłą redukcją zbioru A do zbioru IF.*
- *Jeśli A jest analitycznym podzbiorem przestrzeni polskiej X, to istnieje borelowska redukcja $f : X \to Tr$ zbioru A do zbioru IF.*
- *Zbiór IF jest analitycznym nieborelowskim podzbiorem przestrzeni Tr.*

Twierdzenie 4.9.

- *Jeśli C jest koanalitycznym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oraz T jest drzewem na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takim, że $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus C = p[T]$, to funkcja $x \mapsto T(x)$ jest ciągłą redukcją zbioru C do zbioru WF.*
- *Jeśli C jest koanalitycznym podzbiorem nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X, to istnieje borelowska redukcja $f : X \to Tr$ zbioru C do zbioru WF.*
- *Zbiór WF jest koanalitycznym nieborelowskim podzbiorem przestrzeni Tr.*

Definicja 4.10. Porządek Kleene'ego-Brouwera $\leqslant_{KB}$ to liniowy porządek na $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, zdefiniowany w następujący sposób: jeśli $s,\ t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, to

$$s \leqslant_{KB} t \quad \Leftrightarrow \quad \Big((t \subseteq s) \quad \text{lub} \quad s <_{lex} t\Big).$$

Twierdzenie 4.11. *Dla danego drzewa $T \in Tr$ następujące warunki są równoważne:*

- *Porządek $\leqslant_{KB}$ jest dobrym porządkiem zbioru T.*
- *Drzewo T jest ufundowane.*

- LO – przestrzeń wszystkich liniowych porządków zbioru $\mathbb{N}$ (podzbiór domknięty przestrzeni $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ wszystkich dwuargumentowych relacji na $\mathbb{N}$).
- WO – zbiór wszystkich dobrych porządków zbioru $\mathbb{N}$.
- $NWO = LO \setminus WO$.

Twierdzenie 4.12.

- *Istnieje ciągła funkcja $f : Tr \to LO$, która redukuje WF do WO (oraz IF do NWO).*
- *Jeśli C jest dowolnym koanalitycznym podzbiorem nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X, to istnieje borelowska funkcja $f : X \to LO$, która redukuje C do WO (i jednocześnie $X \setminus C$ do NWO).*

- *Zbiór WO jest koanalitycznym nieborelowskim podzbiorem przestrzeni LO (zbiór NWO jest analitycznym nieborelowskim podzbiorem tej przestrzeni.*

Dowód. Z dokładnością do utożsamienia (kodowania) skończonych ciągów o wyrazach naturalnych z liczbami naturalnymi za pomocą ustalonej bijekcji $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, funkcja $f : Tr \to LO$ przyporządkowuje drzewu $T \in Tr$ porządek liniowy $f(T)$ zbioru $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, w którym wszystkie ciągi spoza T tworzą odcinek początkowy, dobrze uporządkowany zgodnie z porządkiem kodów, po którym następują elementy drzewa T w porządku $\leqslant_{KB}$. $\square$

- Jeśli $x \in WO$, to $|x|$ jest typem porządkowym dobrego porządku x.

Uwaga 4.13. Funkcja $x \mapsto |x|$ odwzorowuje WO na zbiór ω_1 wszystkich przeliczalnych liczb porządkowych.

Definicja 4.14. Niech C będzie koanalitycznym podzbiorem nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X. Funkcję $\varphi : C \to \omega_1$ nazywamy $\mathbf{\Pi}^1_1$-normą (o wartościach w ω_1) na C, jeśli relacje $\leqslant^*_\varphi$ oraz $<^*_\varphi$ na X, zdefiniowane w następujący sposób:

$$x \leqslant^*_\varphi y \;\Leftrightarrow\; \Big((x \in C \wedge y \in X \setminus C) \vee (x, y \in C \wedge \varphi(x) \leqslant \varphi(y))\Big),$$

$$x <^*_\varphi y \;\Leftrightarrow\; \Big((x \in C \wedge y \in X \setminus C) \vee (x, y \in C \wedge \varphi(x) < \varphi(y))\Big),$$

są koanalitycznymi podzbiorami przestrzeni $X \times X$.

Twierdzenie 4.15.
- *Funkcja $x \mapsto |x|$ jest $\mathbf{\Pi}^1_1$-normą na zbiorze WO.*
- *Jeśli A jest dowolnym koanalitycznym podzbiorem nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X, to istnieje $\mathbf{\Pi}^1_1$-norma na A.*

Dowód. Najpierw definiujemy zbiór $E, D \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times LO \times LO$ w następujący sposób:

$$(f, x, y) \in E \Leftrightarrow f \text{ jest zanurzeniem porządkowym } (\mathbb{N}, x) \text{ w } (\mathbb{N}, y),$$

$$(f, x, y) \in D \Leftrightarrow f \in E \text{ i zbiór } f[\mathbb{N}] \text{ jest współkończowy w } (\mathbb{N}, y).$$

Zauważamy, że $E, D \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^\mathbb{N} \times LO \times LO)$, ponieważ

$$(f, x, y) \in E \Leftrightarrow \; \forall n, m \in \mathbb{N}\Big((n, m) \in x \;\Rightarrow (f(n), f(m)) \in y\Big),$$

$$(f, x, y) \in D \Leftrightarrow f \in E \wedge \forall n \exists m (n, f(m)) \in y.$$

Następnie definiujemy:

$$x <^*_\varphi y \;\Leftrightarrow\; \Big(x \in WO \wedge \forall f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} (f, y, x) \notin E\Big),$$

oraz

$$x \leqslant^*_\varphi y \;\Leftrightarrow\; \Big(x <^*_\varphi y \quad\vee\quad \big(x, y \in WO \wedge \forall f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}((f, x, y) \in E \Rightarrow (f, x, y) \in D)$$
$$\wedge \forall f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}((f, y, x) \in E \Rightarrow (f, y, x) \in D)\big)\Big).$$

□

Twierdzenie 4.16.

- *(Kuratowski; uogólniona własność redukcji zbiorów koanalitycznych) Jeśli (C_n) jest ciągiem koanalitycznych podzbiorów przestrzeni polskiej X, to istnieje ciąg (C^*_n) parami rozłącznych koanalitycznych podzbiorów przestrzeni X taki, że $C^*_n \subseteq C_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C^*_n$.*
- *(Twierdzenie Nowikowa o oddzielaniu) Jeśli (C_n) jest ciągiem koanalitycznych podzbiorów przestrzeni polskiej X takim, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$, to istnieje ciąg (B_n) (parami rozłącznych) borelowskich podzbiorów przestrzeni X taki, że $B_n \subseteq C_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X$.*

5. Wykłady 9/10

Definicja 5.1. Uniformizacją zbioru $P \subseteq X \times Y$ nazywamy dowolny zbiór $P^* \subseteq P$, który jest wykresem funkcji o dziedzinie $proj_X[P]$ (tzn., wykresem pewnej funkcji wyboru rodziny $(P_x : x \in proj_X[P])$ niepustych przekrojów pionowych zbioru P).

Twierdzenie 5.2 (Uniformizacja liczbowa zbiorów koanalitycznych)**.** *Niech X będzie dowolną przestrzenią polską. Każdy koanalityczny podzbiór przestrzeni $X \times \mathbb{N}$ ma uniformizację koanalityczną.*

Dowód. To jest przeformułowanie uogólnionej własności redukcji zbiorów koanalitycznych. □

- **Problem**: Kiedy borelowski podzbiór produktu $X \times Y$ przestrzeni polskich ma borelowską uniformizację?

Twierdzenie 5.3 (Luzin, Suslin)**.** *Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi, $B \in \mathcal{B}(X)$ oraz niech $f : X \to Y$ będzie funkcją borelowską. Jeśli funkcja $f|B$ jest różnowartościowa, to $f[B] \in \mathcal{B}(Y)$.*

Wniosek 5.4. *Jeśli zbiór borelowski $B \subseteq X \times Y$ ma borelowską uniformizację, to jego rzut prostopadły na oś X jest borelowskim podzbiorem przestrzeni X.*

Wniosek 5.5. *Istnieje zbiór domknięty bez borelowskiej uniformizacji.*

Dowód. Przykładem jest każdy domknięty podzbiór przestrzeni $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, którego rzut jest analityczny, ale nie borelowski. $\square$

Definicja 5.6. Borelowską przestrzenią Effrosa, związaną z daną przestrzenią topologiczną X, nazywamy rodzinę $F(X)$ wszystkich podzbiorów domkniętych przestrzeni X wraz z σ-ciałem podzbiorów rodziny $F(X)$, generowanym przez podzbiory postaci $\{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$, gdzie U jest otwartym podzbiorem przestrzeni X.

Twierdzenie 5.7. *Jeśli X jest nieprzeliczalną przestrzenią polską, to związana z nią borelowska przestrzeń Effrosa jest generowana przez pewną topologię polską na zbiorze $F(X)$ (w tym sensie, że wyróżnione w definicji σ-ciało jest σ-ciałem wszystkich zbiorów borelowskich w tej topologii).*

Twierdzenie 5.8 (Kuratowski, Ryll–Nardzewski; o borelowskiej selekcji dla $F(X)$)**.** *Jeśli X jest przestrzenią polską, to dla rodziny niepustych domkniętych podzbiorów przestrzeni X istnieje borelowska funkcja wyboru, tzn. taka funkcja borelowska $f : F(X) \to X$, że $f(F) \in F$ dla każdego niepustego zbioru $F \in F(X)$.*

Wniosek 5.9. *Jeśli wszystkie przekroje pionowe P_x zbioru $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$ są domknięte w Y oraz odwzorowanie $x \mapsto P_x$ jest borelowską funkcją z X w $F(Y)$, to zbiór P ma borelowską uniformizację.*

Lemat 5.10 (Parametryzacja zbioru borelowskiego w produkcie za pomocą zbioru domkniętego)**.** *Niech $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Wtedy istnieje przestrzeń polska Z, zbiór domknięty $F \subseteq X \times Z$ oraz ciągła bijekcja $\varphi : F \overset{na}{\to} P$ taka, że*

$$\forall x \in X \ \varphi[\{x\} \times F_x] = \{x\} \times P_x.$$

Twierdzenie 5.11 (Borelowska uniformizacja zbiorów o „dużych" przekrojach)**.** *Załóżmy, że z każdym $x \in X$ związany jest σ-ideał I_x w $\mathcal{B}(Y)$ w taki sposób, że przekształcenie $x \mapsto I_x$ ma następującą własność:*

$$\forall A \in \mathcal{B}(X \times Y) \quad \{x \in X : A_x \notin I_x\} \in \mathcal{B}(X).$$

Niech $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Jeśli $P_x \notin I_x$ dla każdego $x \in proj_X[P]$, to zbiór P ma borelowską uniformizację. W szczególności:

- *Jeśli μ jest ustaloną σ-skończoną miarą borelowską na Y oraz $\mu(P_x) > 0$ dla każdego $x \in proj_X[P]$, to zbiór P ma borelowską uniformizację.*
- *Jeśli przekrój P_x jest II kategorii Baire'a dla każdego $x \in proj_X[P]$, to zbiór P ma borelowską uniformizację.*

Dowód. Najpierw sprowadzamy dowód do sytuacji, w której dla każdego $x \in X$ przekrój P_x jest domknięty w Y oraz wszystkie jego (relatywnie) otwarte niepuste podzbiory są poza σ-ideałem I_x . Następnie pokazujemy, że wówczas odwzorowanie $x \mapsto P_x$ (z X w $F(Y)$) jest borelowskie. $\square$

Twierdzenie 5.12 (Kunugui, Nowikow)**.**

- *Niech (V_n) będzie dowolną przeliczalną bazą topologii przestrzeni Y i niech $A \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Jeżeli przekrój A_x jest otwarty dla każdego $x \in X$, to $A = \bigcup_n (B_n \times V_n)$ dla pewnego ciągu zbiorów borelowskich (B_n).*
- *Jeśli wszystkie przekroje pionowe P_x zbioru $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$ są domknięte w Y, to wyjściową topologię przestrzeni X można rozszerzyć do topologii polskiej τ w taki sposób, że zbiór P jest domkniety w produkcie $(X, \tau) \times Y$.*

Twierdzenie 5.13 (Jankov, von Neumann)**.** *Niech $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$ (wystarczy nawet: $P \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times Y)$). Wówczas zbiór P ma uniformizację, która jest mierzalna względem σ-ciała generowanego przez zbiory analityczne.*

Dowód. Najpierw sprowadzamy dowód do sytuacji, w której dla każdego $x \in X$ przekrój P_x jest domknięty w Y. Następnie pokazujemy, że wówczas odwzorowanie $x \mapsto P_x$ jest mierzalne względem σ-ciała generowanego przez zbiory analityczne. $\square$

Twierdzenie 5.14 (Borelowska uniformizacja zbiorów o zwartych przekrojach)**.** *Niech $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Jeżeli przekrój P_x jest zwarty dla każdego $x \in X$, to zbiór P ma borelowską uniformizację.*

Dowód. Pokazujemy, że odwzorowanie $x \mapsto P_x$ jest borelowskie. $\square$

Twierdzenie 5.15 (Luzin)**.** *Jeśli $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$, to zbiór $\{x \in X : |P_x| = 1\}$ jest koanalitycznym podzbiorem przestrzeni X.*

Twierdzenie 5.16 (Luzin, Nowikow; o borelowskiej uniformizacji zbiorów o przeliczalnych przekrojach)**.** *Niech $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Jeżeli przekrój P_x jest (co najwyżej) przeliczalny dla każdego $x \in X$, to zbiór P ma borelowską uniformizację.*

Dowód. Najpierw sprowadzamy dowód do sytuacji, w której wszystkie przekroje P_x są domknięte w X. Następnie pokazujemy, że wówczas odwzorowanie $x \mapsto P_x$ jest borelowskie. $\square$

Twierdzenie 5.17 (Arsenin, Kunugui)**.** *Niech* $P \in \mathcal{B}(X \times Y)$. *Jeśli przekrój* P_x *jest zbiorem* σ*-zwartym dla każdego* $x \in X$, *to zbiór* P *ma borelowską uniformizację.*

Uwaga 5.18. Istnieje domknięty podzbiór P przestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, którego każdy przekrój P_x, $x \in X$, jest nieprzeliczalny, bez borelowskiej uniformizacji.

Literatura

[ke] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Math. 156, Springer-Verlag, 1995.

[mi] A. W. Miller, *Infinite Ramsey theory*, notatki do wykładu Math 873, 1996, `http://www.math.wisc.edu/~miller/old/m873-00/ramsey.pdf`.

[ros] Ch. Rosendal, *Coanalytic ranks and the reflection theorems*, notatki do wykładu Descriptive Set Theory, Math 511, 2012, `http://homepages.math.uic.edu/~rosendal/WebpagesMathCourses/MATH511-2012.html`.

[sri] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets*, Springer-Verlag, 1998.

Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa

E-mail address: `piotrzak@mimuw.edu.pl`