FUNKTORY W GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ

Włodzimierz Mikulski (Kraków)

Skrypt do wykładu wygłoszonego w Instytucie Matematyki UMCS
w okresie 25.10.2013 - 29.11.2013 w ramach zadania 5 pkt. 14 projektu
Środowiskowe Studia Doktoranckie z Nauk Matematycznych.

Spis treści:

Wstęp

W całym wykładzie rozważamy jedynie rozmaitości skończenie wymiarowe, gładkie (tzn. klasy C^∞), Hausdorffa, o bazie przeliczalnej oraz bez brzegów. Zakładamy, że odwzorowania między rozmaitościami są klasy C^∞ (chyba, że będzie napisane inaczej).

Podstawowe informacje o rozmaitościach i inne potrzebne pojęcia znajdują się w Dodatku 2.

Wyjaśnijmy, że rozmaitość włóknista jest to dowolna suriektywna submersja $\pi : X \to \underline{X}$ między rozmaitościami. Rozmaitość X nazywa się przestrzenią totalną, rozmaitość $\underline{X}$ bazą, zaś odwzorowanie π projekcją danej rozmaitości włóknistej. Jeśli $x \in \underline{X}$, to $X_x = \pi^{-1}(x)$ jest podrozmaitością w X (bo X_x jest przeciwobrazem punktu przez submersję) i nazywa się włóknem nad punktem x danej rozmaitości włóknistej. Odwzorowaniem włóknistym z rozmaitości włóknistej $\pi : X \to \underline{X}$ w rozmaitość włóknistą $\pi_1 : X_1 \to \underline{X}_1$ nazywamy dowolną parę $(f, \underline{f})$ odwzorowań $f : X \to X_1$ oraz $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{X}_1$ (między rozmaitościami) taką, że $\pi_1 \circ f = \underline{f} \circ \pi$.

Dla danego punktu $x \in X$ mamy odwzorowanie $f_x : X_x \to (X_1)_{\underline{f}(x)}$ klasy C^∞ będące zawężeniem odwzorowania f do włókien. O ile nie będzie prowadziło to do nieporozumień, rozmaitość włóknistą $\pi : X \to \underline{X}$ będziemy oznaczali w skrócie przez X, zaś odwzorowanie włókniste $(f, \underline{f})$ przez f (i mówili, że $f : X \to X_1$ jest odwzorowaniem włóknistym z rozmaitości włóknistej X w rozmaitość włóknistą X_1 nakrywającym $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{X}_1$).

Niniejszy wykład poświęcony jest funktorom w geometrii różniczkowej jakimi są tzw. wiązki naturalne.

1. Wiązki naturalne, definicja, przykłady

Niech $\mathcal{M}f_m$ oznacza kategorię m-wymiarowych rozmaitości i ich lokalnie określonych immersji, zaś $\mathcal{FM}_m$ oznacza kategorię rozmaitości włóknistych o m-wymiarowych bazach i ich odwzorowań włóknistych nakrywających immersje. Niech $\mathcal{B}_m : \mathcal{FM}_m \to \mathcal{M}f_m$ będzie funktorem bazy (określonym przez $\mathcal{B}_m(X) = \underline{X}$ oraz $\mathcal{B}_m(f) = \underline{f}$).

Podstawowym pojęciem tego wykładu jest wiązka naturalna nad m-wymiarowymi rozmaitościami.

Definicja 1. Wiązka naturalna nad m-wymiarowymi rozmaitościami jest to dowolny funktor $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ spełniający następujące warunki (i)—(iii).

(i) (*Warunek podnoszenia*) $\mathcal{B}_m \circ F = id_{\mathcal{M}f_m}$, gdzie $id_{\mathcal{M}f_m}$ to identycznościowy funktor na $\mathcal{M}f_m$. Warunek ten oznacza, że FM jest rozmaitością włóknistą $\pi_{FM} : FM \to M$ (o bazie M) dla dowolnej m-wymiarowej rozmaitości M, oraz

$F\varphi : FM \to FM_1$ jest odwzorowaniem włóknistym nakrywającym φ dla dowolnej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami.

(ii) (*Warunek lokalności*) Dla dowolnej m-wymiarowej rozmaitości M oraz dowolnego otwartego podzbioru $U \subset M$ odwzorowanie inkluzji $i_U : U \to M$ indukuje dyfeomorfizm $Fi_U : FU \to \pi_{FM}^{-1}(U)$.

(iii) (*Warunek regularności*) F przekształca gładko sparametryzowane rodziny immersji w gładko sparametryzowane rodziny odwzorowań włóknistych. Warunek ten oznacza, że dla każdego odwzorowania $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M_1$ klasy C^∞ takiego, że odwzorowanie $\varphi_t : M \to M_1$ zdefiniowane przez $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ jest immersją dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, odwzorowanie $\tilde{F\varphi} : \mathbb{R}\times FM \to FM_1$ dane przez $\tilde{F\varphi}(t, y) = F\varphi_t(y)$ jest klasy C^∞.

Funktor $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ spełniający warunki (i) i (ii) (ale niekoniecznie (iii)) będziemy nazywali quasi wiązką naturalną.

Przykład 1. Funktor $T : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę styczną $\pi_{TM} : TM \to M$ a każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami jej odwzorowanie styczne $T\varphi : TM \to TM_1$ jest wiązką naturalną.

Przykład 2. Niech $r \in \mathbb{N}_+$. Funktor $T^r : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę r-styczną $T^rM = J_0^r(\mathbb{R}, M)$ (nad M) będącą przestrzenią r-żetów w $0 \in \mathbb{R}$ z odwzorowań $\mathbb{R} \to M$ z projekcją celu oraz każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami odwzorowanie r-styczne $T^r\varphi : T^rM \to T^rM_1$ dane wzorem $T^r\varphi(j_0^r\gamma) = j_0^r(\varphi \circ \gamma)$ jest wiązką naturalną.

Przykład 3. Niech $r, p \in \mathbb{N}_+$. Funktor $T_p^r : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę p^r-prędkości $T_p^rM = J_0^r(\mathbb{R}^p, M)$ (nad M) będącą przestrzenią r-żetów w $0 \in \mathbb{R}^p$ z odwzorowań $\mathbb{R}^p \to M$ z projekcją celu oraz każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami odwzorowanie $T_p^r\varphi : T_p^rM \to T_p^rM_1$ dane wzorem $T_p^r\varphi(j_0^r\gamma) = j_0^r(\varphi \circ \gamma)$ jest wiązką naturalną.

Przykład 4. Funktor $T^* : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę kostyczną $T^*M = (TM)^*$ oraz każdej immersji $\varphi : M \to$

M_1 między m-wymiarowymi rozmaitościami odwzorowanie $T^*\varphi : T^*M \to T^*M_1$ dane wzorem $T^*_x\varphi := ((T_x\varphi)^{-1})^* : T^*_xM \to T^*_{\varphi(x)}M_1$ dla $x \in M$ jest wiązką naturalną.

Przykład 5. Niech $r, s \in \mathbb{N}$. Funktor $T^{(r,s)} : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę $T^{(r,s)}M = TM \otimes \ldots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M$ (r razy TM i s razy T^*M) tensorów typu (r, s) oraz każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami odwzorowanie $T^{(r,s)}\varphi = T\varphi \otimes \ldots . \otimes T\varphi \otimes T^*\varphi \otimes \ldots \otimes T^*\varphi : T^{(r,s)}M \to T^{(r,s)}M_1$ jest wiązką naturalną.

Przykład 6. Niech $r \in \mathbb{N}_+$. Funktor $T^{r*} : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę r-kostyczną $T^{r*}M = J^r(M, \mathbb{R})_0$ (nad M) będącą wiązką (wektorową) r-żetów $M \to \mathbb{R}$ o celu $0 \in \mathbb{R}$ z projekcją źródła oraz każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami odwzorowanie $T^{r*}\varphi = J^r(\varphi, id_{\mathbb{R}})_0 : T^{r*}M \to T^{r*}M_1$ dane wzorem $T^{r*}\varphi(j^r_x\gamma) = j^r_{\varphi(x)}(\gamma \circ \varphi^{-1})$ jest wiązką naturalną.

Przykład 7. Niech $r \in \mathbb{N}_+$. Funktor $T^{(r)} : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę r-styczną wektorową $T^{(r)}M = (T^{r*}M)^*$ oraz każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami odwzorowanie $T^{(r)}\varphi : T^{(r)}M \to T^{(r)}M_1$ dane wzorem $T^{(r)}_x\varphi = ((T^{r*}_x\varphi)^{-1})^* : T^{(r)}_xM \to T^{(r)}_{\varphi(x)}M_1$ dla $x \in M$ jest wiązką naturalną.

Przykład 8. Funktor $L : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ przyporządkowujący każdej m-wymiarowej rozmaitości M jej wiązkę reperów liniowych LM (nad M) oraz każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami odwzorowanie $L\varphi : LM \to LM_1$ dane wzorem $L_x\varphi(v_1, \ldots, v_m) = (T_x\varphi(v_1), \ldots, T_x\varphi(v_m))$ dla baz $(v_1, \ldots, v_m)$ przestrzeni stycznej T_xM w punktach $x \in M$ jest wiązką naturalną.

Przykład 9. Niech $r \in \mathbb{N}_+$. Dla danej m-wymiarowej rozmaitości M mamy wiązkę $P^rM = invJ^r_0(\mathbb{R}^m, M)$ (nad M) będącą przestrzenią r-żetów w $0 \in \mathbb{R}^m$ z lokalnych immersji $\mathbb{R}^m \to M$ z projekcją celu. Wiadomo, że P^rM jest przestrzenią włóknistą główną i nazywa się wiązką reperów rzędu r.

Grupą standardową P^rM jest tzw. grupa różniczkowa $G^r_m = invJ^r_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ rzędu r (z mnożeniem danym przez składanie żetów). Grupa G^r_m jest grupą Liego i działa ona z prawej strony na P^rM przez składanie żetów. Dla każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami mamy odwzorowanie $P^r\varphi : P^rM \to P^rM_1$, $P^r\varphi(j^r_0\psi) = j^r_0(\varphi \circ \psi)$. Widać, że odwzorowanie $P^r\varphi$ jest homomorfizmem przestrzeni włóknistych głównych nakrywającym φ z $id_{G^r_m}$ jako odpowiadającym homomorfizmem grupy. Zdefiniowany w ten sposób funktor $P^r : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ jest wiązką naturalną.

Przykład 10. Niech $r \in \mathbb{N}_+$. Niech $\alpha : G^r_m \times S \to S$ będzie działaniem klasy C^∞ grupy różniczkowej $G^r_m = invJ^r_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ rzędu r na rozmaitości S. Dla danej m-wymiarowej rozmaitości M mamy wiązkę $P^rM[S, \alpha, G^r_m]$ (nad M) stowarzyszoną do P^rM z włóknem standardowym S. Dla danej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami mamy odwzorowanie włókniste $P^r\varphi[id_S] : P^rM[S, \alpha, G^r_m] \to P^rM_1[S, \alpha, G^r_m]$ dane wzorem $P^r\varphi[id_S]([g, s]) = [P^r\varphi(g), s]$. Zdefiniowany tak funktor $P^r[S, \alpha, G^r_m] : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ jest wiązką naturalną.

2. Rząd wiązki naturalnej, klasyfikacja (quasi) wiązek naturalnych skończonego rzędu o gładkich działaniach standardowym i translacji

Lemat 1. *Niech $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ będzie quasi wiązką naturalną. Wtedy F spełnia następujący warunek (zwany też warunkiem lokalności):dla dowolnych immersji $\varphi, \varphi_1 : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami oraz dowolnego otwartego podzbioru $U \subset M$ zachodzi implikacja*

$$\varphi_{|U} = \varphi_{1|U} \Rightarrow F\varphi_{|\pi^{-1}_{FM}(U)} = F\varphi_{1|\pi^{-1}_{FM}(U)} \ .$$

Dowód Oznaczając przez $i_U : U \to M$ odwzorowanie inkluzji, mamy $\varphi \circ i_U = \varphi_1 \circ i_U$. Zatem

$$F\varphi \circ Fi_U = F(\varphi \circ i_U) = F(\varphi_1 \circ i_U) = F\varphi_1 \circ Fi_U \ .$$

Ale na mocy warunku lokalności (ii) z definicji (quasi) wiązki naturalnej $Fi_U : FU \to \pi^{-1}_{FM}(U)$ jest dyfeomorfizmem. Zatem $F\varphi = F\varphi_1$ na $\pi^{-1}_{FM}(U)$.

□

Definicja 2. Niech r oznacza liczbę całkowitą nieujemną lub ∞. Mówimy, że (quasi) wiązka naturalna $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ jest rzędu co najwyżej r jeśli dla dowolnych (lokalnie określonych) immersji $\varphi, \varphi_1 : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami oraz dowolnego punktu $x \in M$ zachodzi implikacja

$$j^r_x\varphi = j^r_x\varphi_1 \Rightarrow F_x\varphi = F_x\varphi_1,$$

gdzie $F_x\varphi : F_xM \to F_{\varphi(x)}M_1$ oznacza restrykcję odwzorowania $F\varphi : FM \to FM_1$ do włókna $F_xM = \pi^{-1}_{FM}(x)$ nad x.

Najmniejsza liczba r taka, że F jest rzędu co najwyżej r nazywa się rzędem F i oznacza $ord(F)$.

Lemat 2. *(Quasi) wiązka naturalna $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ jest rzędu co najwyżej r jeśli dla dowolnej immersji $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zachodzi implikacja*

$$j^r_0\varphi = j^r_0 id_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow F_0\varphi = id_{F_0\mathbb{R}^m} \ .$$

Dowód Zakładamy, że F spełnia warunek lematu. Niech $\varphi, \varphi_1 : M \to M_1$ oznaczają immersje między m-wymiarowymi rozmaitościami. Niech $x \in M$. Załóżmy, że $j^r_x\varphi = j^r_x\varphi_1$. Niech ψ będzie mapą na M_1 taką, że $\psi(\varphi(x)) = 0$. Wtedy $\psi\circ\varphi\circ\varphi_1^{-1}\circ\psi^{-1}$ jest lokalnie określoną immersją w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$ oraz $j^r_0(\psi\circ\varphi\circ\varphi_1^{-1}\circ\psi^{-1}) = j^r_0(id_{\mathbb{R}^m})$. Zatem $F_0(\psi \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1} \circ \psi^{-1}) = F_0 id_{\mathbb{R}^m}$. Zatem $F_x\varphi = F_x\varphi_1$.

□

Przykład 11. Wszystkie wiązki naturalne z Przykładów 1—10 są skończonego rzędu. I tak T jest rzędu 1, T^r jest rzędu r, T^r_p jest rzędu r, T^* jest rzędu 1, $T^{(r,s)}$ jest rzędu co najwyżej 1 (jest rzędu zero wtw $(r,s) = (0,0)$), T^{r*} jest rzędu r, $T^{(r)}$ jest rzędu r, L jest rzędu 1, P^r jest rzędu r, $P^r[S,\alpha,G^r_m]$ jest rzędu co najwyżej r.

Definicja 3. Mówimy, że quasi wiązki naturalne $F, F_1 : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ są izomorficzne jeśli dla każdej m-wymiarowej rozmaitości M istnieje włóknisty dyfeomorfizm

$$I_M : FM \to F_1M$$

nakrywający odwzorowanie identycznościowe $id_M : M \to M$ przy czym spełniony jest warunek naturalności: Dla każdej immersji $\varphi : M \to M_1$ między m-wymiarowymi rozmaitościami mamy $F_1\varphi \circ I_M = I_{M_1} \circ F\varphi$.

Mamy następującą klasyfikację (quasi) wiązek naturalnych skończonego rzędu o gładkim działaniu standardowym i gładkim działaniu translacji.

Propozycja 1. Niech $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ będzie quasi wiązką naturalną skończonego rzędu r. Zatem mamy poprawnie określone działanie $\alpha_F^r : G_m^r \times F_o \to F_o$ grupy różniczkowej $G_m^r = invJ_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ rzędu r na włóknie standardowym $F_o = F_0\mathbb{R}^m$ wzorem

$$\alpha_F^r(g, v) = F\varphi(v) \ , \ g = j_0^r\varphi \ , \ v \in F_o \ .$$

Zakładamy, że działanie α_F^r jest klasy C^∞. Zatem możemy skonstruować wiązkę naturalną $F_1 = P^r[F_o, \alpha_F^r, G_m^r] : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$. Zakładamy ponadto, że działanie $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ dane przez podnoszenie translacji wzorem

$$F\tau(x, v) = F\tau_x(v), \ \tau_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \ , \ \tau_x(y) = x + y$$

jest klasy C^∞. Wtedy F oraz F_1 są izomorficzne.

Dowód Dla każdej m-wymiarowej rozmaitości M definiujemy odwzorowanie $I_M : F_1M \to FM$ przyjmując

$$I_M([g, v]) = F\varphi(v) \ , \ g = j_0^r\varphi \ , v \in F_o \ .$$

Udowodnimy, że $\{I_M\}$ jest izomorfizmem quasi wiązek naturalnych. W tym celu sprawdzimy, że:

(a) I_M jest poprawnie zdefiniowane

(b) $\pi_{F_1M} = \pi_{FM} \circ I_M$ (tzn. I_M nakrywa id_M)

(c) dla dowolnej lokalnie określonej immersji między m-wymiarowymi rozmaitościami M i M_1, a więc immersji $\varphi : U \to M_1$ z otwartego podzbioru $U \subset M$, zachodzi $I_{M_1} \circ F_1\varphi = F\varphi \circ I_M$ na $\pi_{F_1M}^{-1}(U)$.

(d) I_M jest dyfeomorfizmem.

To oczywiście wystarczy by zakończyć dowód.

Dowodzimy kolejno powyższe warunki (a)—(d).

ad (a) Niech $[g_1, v_1] = [g_2, v_2] \in F_1M$, $g_1 = j_0^r\varphi_1$, $g_2 = j_0^r\varphi_2$, $v_1, v_2 \in F_o$. Wtedy istnieje $\xi = j_0^r\eta \in G_m^r$ takie, że

$$g_2 = g_1.\xi \text{ oraz } v_1 = \xi.v_2 \ ,$$

tzn. $j_0^r\varphi_2 = j_0^r(\varphi_1 \circ \eta)$ oraz $v_1 = F\eta(v_2)$. Zatem

$$F\varphi_1(v_1) = F\varphi_1 \circ F\eta(v_2) = F(\varphi_1 \circ \eta)(v_2) = F\varphi_2(v_2) \ .$$

ad (b) Mamy

$$\pi_{FM} \circ I_M([j_0^r\varphi, v]) = \pi_{FM}(F\varphi(v)) = \varphi(0) = \pi_{F_1M}([j_0^r\varphi, v]) \ .$$

ad (c) Mamy

$$\begin{aligned} I_{M_1} \circ F_1\varphi([j_0^r\psi, v]) &= I_{M_1}([j_0^r(\varphi \circ \psi), v]) \\ = F(\varphi \circ \psi)(v) = F\varphi(F\psi(v)) &= F\varphi \circ I_M([j_0^r\psi, v]) \ . \end{aligned}$$

ad (d) Pozostało udowodnić, że I_M jest dyfeomorfizmem. Rozważając mapy oraz stosując udowodniony warunek (c) oraz (b) wystarczy udowodnić, że $I_{\mathbb{R}^m} : F_1\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ jest dyfeomorfizmem. Pokażemy, że $I_{\mathbb{R}^m}$ jest dyfeomorfizmem. Na mocy założenia o klasie działania $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$, odwzorowanie $T : \mathbb{R}^m \times F_o \to F\mathbb{R}^m$ dane wzorem

$$T(x, v) = F\tau_x(v) \ , \ x \in \mathbb{R}^m, \ v \in F_o$$

jest dyfeomorfizmem. Odwrotny dyfeomorfizm dany jest przez przyporządkowanie

$$w \to (\pi_{F\mathbb{R}^m}(w), F\tau(-\pi_{F\mathbb{R}^m}(w), w)) \ .$$

Oczywiście odwzorowanie $S : F_1\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times F_o$ dane wzorem

$$S([j_0^r\varphi, v]) = (\varphi(0), j_0^r(\tau_{-\varphi(0)} \circ \varphi).v)$$

jest dyfeomorfizmem. Odwrotne odwzorowanie dane jest przez $(x, v) \to F_1\tau_x(v)$. Wystarczy więc zauważyć, że $I_{\mathbb{R}^m} = T \circ S$. Otóż mamy

$$\begin{aligned} T \circ S([j_0^r\varphi, v]) &= T(\varphi(0), j_0^r(\tau_{-\varphi(0)} \circ \varphi).v) \\ &= T(\varphi(0), F(\tau_{-\varphi(0)} \circ \varphi)(v)) \\ &= F\tau_{\varphi(0)} \circ F(\tau_{-\varphi(0)} \circ \varphi)(v) = F\varphi(v) \\ &= I_{\mathbb{R}^m}([j_0^r\varphi, v]) \ . \end{aligned}$$

Propozycja 1 jest udowodniona.

□

3. Ciągłość działania standardowego o ile działanie translacji jest ciągłe

Propozycja 2. Niech $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ będzie quasi wiązką naturalną. Załóżmy, że działanie $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ dane przez podnoszenie translacji jest ciągłe. Wtedy dla dowolnego ciągu immersji $\varphi_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $(k = 1, 2, ...)$ określonych w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$ i zachowujących 0, dowolnego ciągu punktów $v_k \in F_o = F_0\mathbb{R}^m$ oraz punktu $v \in F_o$ zachodzi implikacja

$$j_0^\infty \varphi_k \to j_0^\infty id_{\mathbb{R}^m} \text{oraz } v_k \to v \ \Rightarrow F\varphi_k(v_k) \to v \ .$$

W szczególności (w przypadku ciągów stałych) wnosimy, że dla dowolnej immersji $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zachowującej zero oraz dowolnego punktu $v \in F_o$ zachodzi implikacja

$$j_0^\infty \varphi = j_0^\infty id_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow F\varphi(v) = v \ ,$$

tzn. F jest rzędu co najwyżej ∞.

Zatem dla dowolnej quasi wiązki naturalnej z ciągłym działaniem $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ odwzorowanie

$$\alpha_F : G_m^\infty \times F_o \to F_o \ , \ \alpha_F(g, v) = F\varphi(v) \ ,$$
$$v \in F_o, \ g = j_0^\infty \varphi$$

jest poprawnie określonym ciągłym działaniem grupy różniczkowej (topologicznej, nieskończenie wymiarowej) $G_m^\infty = inv J_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ rzędu ∞ (przypomnijmy, że mnożenie w G_m^∞ jest dane przez składanie żetów) na włóknie standardowym $F_o = F_0\mathbb{R}^m$.

Dowód Załóżmy więc, że $j_0^\infty \varphi_k \to j_0^\infty id_{\mathbb{R}^m}$ gdy $k \to \infty$ oraz $v_k \to v$ gdy $k \to \infty$. Pokażemy, że z każdego podciągu ciągu $F\varphi_k(v_k)$ da się wybrać podciąg zbieżny do v. To wystarczy by zakończyć dowód propozycji.

Wybierzmy zatem pewien podciąg ciągu $F\varphi_k(v_k)$, który dla uproszczenia oznaczeń oznaczmy również przez $F\varphi_k(v_k)$.

Wykorzystując założenie, że $j_0^\infty \varphi_k \to j_0^\infty id_{\mathbb{R}^m}$, możemy z ciągu $F\varphi_k(v_k)$ wybrać podciąg $F\varphi_{\nu_k}(v_{\nu_k})$, który dla uproszczenia oznaczeń będziemy oznaczać $F\varphi_k(v_k)$, taki, że dla każdego m-elementowego ciągu $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ liczb całkowitych nieujemnych spełniających nierówność

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_m \leqslant 2k \ ,$$

mamy

$$|D^\alpha(\varphi_k - id_{\mathbb{R}^m})(0)| < exp(-8k^2)\ .$$

Wybierzmy teraz ciąg liczb ϵ_k spełniający dwa warunki:

(i) $0 < \epsilon_k < exp(-2k^2)$

(ii) dla każdego $x \in K(0, 2\epsilon_{2k})$ (gdzie $K(x,r)$ oznacza kulę otwartą o środku w x i promieniu r) i każdego m-elementowego ciągu α liczb całkowitych nieujemnych spełniającego nierówność $|\alpha| \leqslant 2k$, zachodzi nierówność

$$|D^\alpha(\varphi_k - id_{\mathbb{R}^m})(x)| < exp(-8k^2)\ .$$

Niech $x_k = (\frac{1}{k}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$.

Zatem, na mocy Wniosku A z Dodatku 1, istnieje lokalna immersja $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ określona w pewnym otoczeniu 0 taka, że

$$\varphi_{|K(x_{2k+1}, \epsilon_{2k+1})} = id$$

$$\varphi_{|K(x_{2k}, \epsilon_{2k})} = \tau_{x_{2k}} \circ \varphi_k \circ \tau_{-x_{2k}}$$

dla dostatecznie dużych k.

Zatem stosując nasze założenie o ciągłości $F\tau$ uzyskujemy, że

$$F\varphi_k(v_k) = F\tau_{-x_{2k}} \circ F\varphi \circ F\tau_{x_{2k}}(v_k) \to F\varphi(v)$$

$$v = F\tau_{-x_{2k+1}} \circ F\varphi \circ F\tau_{x_{2k+1}}(v) \to F\varphi(v)$$

gdy $k \to \infty$. Ponieważ $F\mathbb{R}^m$ jest przestrzenią Hausdorffa (jest rozmaitością), więc

$$F\varphi_k(v_k) \to v$$

gdy $k \to \infty$. Dowód propozycji został zakończony.

$\square$

4. Punktowa skończoność rzędu o ile działanie translacji jest ciągłe

Propozycja 3. Niech $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ będzie quasi wiązką naturalną. Załóżmy, że działanie $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ dane przez podnoszenie translacji jest ciągłe. Wtedy dla każdego punktu $v \in F_o = F_0\mathbb{R}^m$ istnieje (skończona) liczba naturalna r (ewentualnie zależna od v) taka, że dla dowolnej immersji $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zachodzi implikacja

$$j^r_0\varphi = j^r_0 id_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow F\varphi(v) = v\ .$$

Innymi słowy, F jest punktowo skończonego rzędu.

Dowód Niech ρ będzie metryką pochodzącą od jakiegoś tensora riemannowskiego na $F\mathbb{R}^m$. Przypuśćmy, że propozycja nie jest prawdziwa. Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$ istnieje immersja $\varphi_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ oraz istnieje $v \in F_0\mathbb{R}^m$ taki, że

$$j_0^{k+1}\varphi_k = j_0^{k+1} id_{\mathbb{R}^m} \text{ oraz } F\varphi_k(v) \neq v \ .$$

Potrafimy więc wybrać ciąg punktów $v_k \in F\mathbb{R}^m$ taki, że

$$v_k \to v \ , \ \pi_{F\mathbb{R}^m}(v_k) := x_k \neq 0$$

oraz

$$\rho(F\varphi_k(v_k), v) \geqslant k\rho(v_k, v) \ .$$

Możemy oczywiście zażądać aby

$$|x_{k+1}| < \frac{1}{4}|x_k|$$

dla każdego k. W szczególności $|x_k|$ jest ciągiem silnie malejącym do zera. Ponieważ $j_0^{k+1}\varphi_k = j_0^{k+1} id_{\mathbb{R}^m}$, przybliżając odpowiednio x_k do 0, możemy dodatkowo zażądać aby

$$|D^\alpha(\varphi_k - id_{\mathbb{R}^m})(x_k)| \leqslant \frac{1}{k}\frac{1}{2^k}|x_k|^n$$

dla $|\alpha| + n \leqslant k$.

Wtedy (patrz Wniosek C w Dodatku 1) istnieje $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ takie, że

$$j_{x_k}^\infty(\varphi) = j_{x_k}^\infty(\varphi_k) \text{ oraz } j_0^\infty \varphi = j_0^\infty id_{\mathbb{R}^m}$$

dla dostatecznie dużych k (zatem φ jest immersją w otoczeniu 0). Ponieważ F jest rzędu co najwyżej ∞ (Propozycja 2), więc warunek $j_0^\infty \varphi = j_0^\infty id_{\mathbb{R}^m}$ daje $F\varphi(v) = v$ oraz $F\varphi(v_k) = F\varphi_k(v_k)$.

Wtedy

$$\begin{aligned} \rho(F\varphi(v_k), F\varphi(v)) &= \rho(F\varphi(v_k), v) \\ &= \rho(F\varphi_k(v_k), v) \geqslant k\rho(v_k, v) \ . \end{aligned}$$

Zatem $F\varphi$ nie jest lokalnie lipszicowska a więc nie jest też klasy C^∞. Doszliśmy więc do sprzeczności z tym, że $F\varphi$ jest C^∞.

$\square$

5. Skończoność rzędu o ile działanie translacji jest ciągłe

Propozycja 4. Niech $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ będzie quasi wiązką naturalną. Załóżmy, że działanie $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ dane przez podnoszenie translacji jest ciągłe. Niech $f = dim(F_o)$, gdzie $F_o = F_0\mathbb{R}^m$ jest włóknem standardowym. Wtedy dla każdej immersji $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ i każdego $v \in F_o$ zachodzi implikacja

$$j_0^{2(f^2+f)}\varphi = j_0^{2(f^2+f)} id_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow F\varphi(v) = v.$$

Innymi słowy, F jest skończonego rzędu co najwyżej $r_F = 2(f^2 + f)$.

Wobec powyższego, ciągłe działanie (rozważane w Propozycji 2) $\alpha_F : G_m^\infty \times F_o \to F_o$ faktoryzuje się przez ciągłe działanie

$$\alpha_F^{r_F} : G_m^{r_F} \times F_o \to F_o\ ,\ \alpha_F^{r_F}(g, v) = F\varphi(v),$$
$$v \in F_o,\ g = j_0^{r_F}\varphi \in G_m^{r_F}\ ,$$

gdzie $G_m^r = invJ_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ jest grupą różniczkową rzędu r (mnożenie jest dane przez składanie żetów) .

Dowód Niech $F_o^v \subset F_o$ oznacza orbitę v względem (ciągłego) działania $\alpha_F : G_m^\infty \times F_o \to F_o$. Zatem przez restrykcję mamy ciągłe działanie $\alpha_F^v : G_m^\infty \times F_o^v \to F_o^v$. Na podstawie Propozycji 3, istnieje liczba $r = r(v)$ taka, że α_F^v faktoryzuje się przez (ciągłe) działanie

$$\tilde{\alpha}_F^v : G_m^r \times F_o^v \to F_o^v\ .$$

Grupa G_m^r jest grupą Liego. Oczywiście możemy założyć, że $r > 2(f^2 + f)$.

Niech $S^v \subset G_m^r$ oznacza stabilizator v względem działania $\tilde{\alpha}_F^v$. Wtedy S^v jest domkniętą podgrupą grupy Liego G_m^r. Zatem na mocy znanych faktów z teorii grup i algebr Liego, S^v jest grupą Liego i mamy wiązkę główną lokalnie trywialną $G_m^r \to G_m^r/S^v$ z prawostronnym działaniem grupy S^v (na G_m^r). Tym samym mamy ciągłą iniekcję

$$i^v : G_m^r/S^v \to F_o\ ,\ i^v([g]) = \tilde{\alpha}_F^v(g, v)\ .$$

Zatem na mocy znanego twierdzenia z topologii algebraicznej mamy

$$dim(G_m^r/S^v) \leqslant f\ .$$

Dla $k \leqslant r$, niech $H_k^r = ker(G_m^r \to G_m^k)$ oznacza jądro oczywistej projekcji żetów.

Aby zakończyć dowód propozycji, wystarczy udowodnić inkluzję

$$H_{2(f^2+f)}^r \subset S^v\ .$$

Niech g^r_m, h^r_k, s^v oznaczają algebry Liego grup G^r_m, H^r_k oraz S^v odpowiednio. Ze względu na spójność grupy H^r_k wystarczy sprawdzić że

$$h^r_{2(f^2+f)} \subset s^v \ .$$

W tym celu wystarczy udowodnić następujący lemat.

□

Lemat 3. *Niech $g \subset g^r_m$ będzie podalgebrą Liego kowymiaru f, gdzie $2(f^2+f) < r$. Wtedy $h^r_{2(f^2+f)} \subset g$.*

Dowód Wiadomo, że

$$g^r_m = \{j^r_0 X \mid X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m) \ , \ X_{|0} = 0\}$$

z oczywistą strukturą indukowaną z (przestawionej) algebry Liego $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m)$. Innymi słowy

$$\begin{aligned} &j^r_0 X + j^r_0 Y = j^r_0(X+Y) \ , \ \lambda j^r_0 X = j^r_0(\lambda X) \ , \\ &[j^r_0 X, j^r_0 Y] = j^r_0[Y, X] \end{aligned}$$

(proszę zwrócić uwagę na przestawienie kolejności X i Y). Ponadto

$$h^r_k = \{j^r_0 X \in g^r_m \mid j^k_0 X = j^k_0 0\} \ .$$

Oznaczmy

$$g' = \{j^r_0 X \in g \mid [j^r_0 X, j^r_0 Y] \in g \text{ dla każdego } j^r_0 Y \in g^r_m\} \ .$$

Dla każdego $j^r_0 X \in g$, odwzorowanie

$$j^r_0 Y \rightarrowtail [j^r_0 X, j^r_0 Y]$$

indukuje liniowe odwzorowanie

$$T(j^r_0 X) : g^r_m / g \to g^r_m / g \ .$$

Ponieważ g' jest jądrem odwzorowania liniowego

$$g \ni j^r_0 X \rightarrowtail T(j^r_0 X) \in End(g^r_m / g) \ ,$$

wnosimy, że kowymiar g' w g^r_m jest co najwyżej równy f^2+f, czyli

$$codim(g') \text{ w } g^r_m \leqslant f^2+f \ .$$

Rozważmy $(b_1,...,b_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Niech

$$h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \ , \ h(x_1,...,x_m) = b_1x_1 + ... + b_mx_m \ .$$

Możemy wybrać pole wektorowe $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m)$ takie, że $Z(h) = 1$ w pewnym otoczeniu 0. Niech W będzie przestrzenią wielomianów $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachowujących 0 i połóżmy

$$W' = \{w \in W \mid j^r_0(h \cdot w(h) \cdot Z) \ , \ j^r_0(w(h) \cdot Z) \in g'\} \ .$$

Wtedy

$$codim(W') \text{ w } W \leqslant 2(f^2+f) \ ,$$

ponieważ W' jest jądrem odwzorowania liniowego

$$W \to (g^r_m/g') \oplus (g^r_m/g')$$

indukowanego przez odwzorowanie

$$w \rightarrowtail (j^r_0(w(h) \cdot Z), j^r_0(h \cdot w(h) \cdot Z)) \ .$$

Wobec powyższego możemy znaleźć nietrywialny wielomian $w \in W'$ taki, że $deg(w) \leqslant 2(f^2+f)$.

Dla każdego $j^r_0X \in g^r_m$ mamy

$$\begin{aligned} g &\ni [j^r_0(w(h) \cdot Z), j^r_0(h \cdot X)] \\ &= -j^r_0(h \cdot [w(h) \cdot Z, X]) - j^r_0(w(h) \cdot X) \ , \\ g &\ni [j^r_0(h \cdot w(h) \cdot Z), j^r_0X] \\ &= -j^r_0(h \cdot [w(h) \cdot Z, X]) + j^r_0(X(h) \cdot w(h) \cdot Z) \ , \end{aligned}$$

a więc

$$(1) \qquad j^r_0(w(h) \cdot X) + j^r_0(X(h) \cdot w(h) \cdot Z) \in g \ .$$

Wstawiając $j^r_0(X(h) \cdot Z)$ zamiast j^r_0X w (1), otrzymujemy

$$2j^r_0(X(h) \cdot w(h) \cdot Z) \in g \ ,$$

co w połączeniu z (1) daje

$$(2) \qquad j^r_0(w(h) \cdot X) \in g \ .$$

Niech $w(t) = t^q v(t)$, gdzie $q \leqslant D = 2(f^2 + f)$ zaś v jest wielomianem takim, że $v(0) \neq 0$. Wstawiając $j_0^r((v(h))^{-1} \cdot h^{D-q} \cdot X) \in g_m^r$ za $j_0^r X$ w (2), otrzymamy

$$j_0^r(h^D \cdot X) \in g \ .$$

Ponieważ każdy jednorodny wielomian $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stopnia D jest liniową kombinacją pewnych D potęg jednorodnych wielomianów stopnia 1 widzimy, że dla każdego jednorodnego wielomianu $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stopnia D i dla każdego $j_0^r X \in g_m^r$ zachodzi $j_0^r(V \cdot X) \in g$. Lemat jest udowodniony.

□

Dowód propozycji jest zakończony.

W przypadku wiązek naturalnych $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ działanie $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ dane przez podnoszenie translacji jest ciągłe. Istotnie, $\tau_{(x_1,\dots,x_m)} = \tau_{(x_1,0,\dots,0)} \circ \dots \circ \tau_{(0,\dots,0,x_m)}$. Zatem

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \ni (x,v) \rightarrowtail F\tau(x,v) \\ &= F\tau_{(x_1,0\dots,0)} \circ \dots \circ F\tau_{(0,\dots,x_m)}(v) \in F\mathbb{R}^m \end{aligned}$$

jest klasy C^∞ (a więc w szczególności ciągłe) na mocy warunku regularności (iii) z definicji wiązki naturalnej. Zatem mamy następujący wniosek z Propozycji 4.

Wniosek 1. Każda wiązka naturalna $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ ma skończony rząd

$$ord(F) \leqslant 2(f^2 + f) \ ,$$

gdzie $f = dim(F_o)$, $F_o = F_0\mathbb{R}^m$.

6. Ciągłość działania translacji

Propozycja 5. Niech $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ będzie quasi wiązką naturalną. Wtedy działanie $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ dane przez podniesienie translacji wzorem

$$F\tau(x,v) = F\tau_x(v) \ , \ \tau_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \ , \ \tau_x(y) = x + y$$

jest ciągłe.

Przez π będziemy oznaczali rzutowanie $\pi_{F\mathbb{R}^m} : F\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Rozpoczniemy od udowodnienia następującego technicznego lematu.

Lemat 4. *Niech* $w_i \in F\mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, ...,)$ *będzie takim ciągiem zbieżnym do* $w \in F\mathbb{R}^m$, *że* $|\pi(w_i) - \pi(w)|$ *dąży silnie monotonicznie do zera. Wtedy istnieje ciąg liczb rzeczywistych* $\epsilon_i > 0$ *taki, że dla dowolnego punktu* $a \in \mathbb{R}^m$ *i dowolnego otwartego otoczenia* W *punktu* $F\tau_a(w)$ *zachodzi inkluzja*

$$F\tau(K(a, \epsilon_i) \times \{w_i\}) \subset W$$

dla dostatecznie dużych i.

Dowód Niech $x_i = \pi(w_i) - \pi(w)$ oraz wybieramy liczby ϵ_i tak aby

$$0 < \epsilon_i < exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|})$$

dla $j = 1, ..., i$. Przypuśćmy, że dla tak wybranych liczb ϵ_i nie zachodzi teza naszego lematu, tzn. dla nieskończonej ilości wskaźników i mamy

$$F\tau(K(a, \epsilon_i) \times \{w_i\}) \not\subset W \ ,$$

tzn. istnieje silnie rosnący ciąg liczb naturalnych ν_i taki, że oznaczając $\overline{\epsilon}_i = \epsilon_{\nu_i}$, $\overline{w}_i = w_{\nu_i}$ mamy

$$F\tau(K(a, \overline{\epsilon}_i) \times \{\overline{w}_i\}) \not\subset W$$

dla wszystkich i.

Można więc wybrać ciąg $y_i \in \mathbb{R}^m$ tak aby

$$|y_i| < \overline{\epsilon}_i \text{ oraz } F\tau_{a+y_i}(\overline{w}_i) \notin W$$

dla wszystkich i. Niech u_i będzie ciągiem punktów $\mathbb{R}^m$ takim, że

$$u_{2i} = y_{2i} \ , \ u_{2i+1} = 0 \ .$$

Oznaczając $\overline{x}_i = x_{\nu_i}$, dzięki monotoniczności ciągu ν_i, mamy $\nu_{j+1} \geqslant \nu_j + 1$, więc

$$|\overline{x}_j| - |\overline{x}_{j+1}| = |x_{\nu_j}| - |x_{\nu_{j+1}}| \geqslant |x_{\nu_j}| - |x_{\nu_j+1}| \ ,$$

a więc dla $1 \leqslant j \leqslant i$ mamy

$$\overline{\epsilon}_i = \epsilon_{\nu_i} < exp(-\frac{1}{|x_{\nu_j}| - |x_{\nu_j+1}|}) \leqslant exp(-\frac{1}{|\overline{x}_j| - |\overline{x}_{j+1}|}) \ .$$

Zatem, na mocy Wniosku B z Dodatku 1, istnieje immersja f lokalnie określona w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$ taka, że $f_{|K(\overline{x}_i, \overline{\epsilon}_i)} = \tau_{u_i}$ dla dostatecznie dużych i. Korzystając z warunku lokalności i z faktu, że

$$F\tau_{-\pi(w)}(\overline{w}_i) \in \pi^{-1}(K(\overline{x}_i, \overline{\epsilon}_i))$$

otrzymujemy

$$Ff \circ F\tau_{-\pi(w)}(\overline{w}_{2i+1}) = F\tau_{-\pi(w)}(\overline{w}_{2i+1})$$

$$Ff \circ F\tau_{-\pi(w)}(\overline{w}_{2i}) = F\tau_{y_{2i}} \circ F\tau_{-\pi(w)}(\overline{w}_{2i})$$

dla dostatecznie dużych i.

Ponieważ przy ustalonym w odwzorowanie $Ff \circ F\tau_{-\pi(w)}$ jest ciągłe (nawet klasy C^∞), więc

$$Ff \circ F\tau_{-\pi(w)}(w_i) \to Ff \circ F\tau_{-\pi(w)}(w), \text{ gdy } i \to \infty \ .$$

Zatem na podstawie hausdorffowości przestrzeni $F\mathbb{R}^m$ poprzednie dwie równości oznaczają, że

$$F\tau_{y_{2i}} \circ F\tau_{-\pi(w)}(\overline{w}_{2i}) \to F\tau_{-\pi(w)}(w), \text{ gdy } i \to \infty \ ,$$

a więc

$$F\tau_{a+y_{2i}}(\overline{w}_{2i}) \to F\tau_a(w), \text{ gdy } i \to \infty \ .$$

Oznacza to, że dla dostatecznie dużych i,

$$F\tau_{a+y_{2i}}(\overline{w}_{2i}) \in W \ ,$$

co jest sprzeczne z wyborem punktów y_i. Otrzymana sprzeczność kończy dowód Lematu 4.

$\square$

W dowodzie propozycji oraz następnego lematu wykorzystamy następujący fakt.

Lemat 5. *Jeżeli $v_j \in F\mathbb{R}^m$ $(j = 1, 2, ...)$ jest ciągiem dążącym do $v \in F\mathbb{R}^m$, to istnieje ciąg $u_i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, ...)$ oraz taki podciąg v_{j_i} ciągu v_j, że $|u_i|$ dąży silnie monotonicznie do zera oraz $F\tau_{u_i}(v_{j_i})$ dąży do v, gdy i dąży do nieskończoności.*

Dowód Niech U_j $(j = 1, 2, ...)$ będzie bazą otwartych otoczeń punktu v, taką, że $U_{j+1} \subset U_j$. Przy ustalonym j, zbiory $F\tau_a(U_j)$, gdzie $a \in \mathbb{R}^m$, stanowią otwarte pokrycie zbioru

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}^m} F\tau_a(U_j) \subset F\mathbb{R}^m \ .$$

Korzystając z założenia, że $F\mathbb{R}^m$ ma bazę przeliczalną, możemy z pokrycia $\{F\tau_a(U_j) \mid a \in \mathbb{R}^m\}$ wybrać pokrycie przeliczalne.

Zatem dla dowolnej liczby naturalnej j istnieje taki ciąg punktów $a_k^j \in \mathbb{R}^m$ $(k = 1, 2, ...)$, że

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}^m} F\tau_a(U_j) = \bigcup_{k\geqslant 1} F\tau_{a_k^j}(U_j)\ .$$

Niech $b_j \in \mathbb{R}^m$ będzie ciągiem takim, że dla każdego k, $b_j \neq a_k^j$. Ewentualnie zastępując v_j przez podciąg możemy założyć, że $v_j \in U_j$ dla wszystkich j.

Wtedy

$$F\tau_{b_j}(v_j) \in \bigcup_{a\in\mathbb{R}^m} F\tau_a(U_j) = \bigcup_{k\geqslant 1} F\tau_{a_k^j}(U_j)\ .$$

Można więc wybrać ciąg liczb naturalnych k_j $(j = 1, 2, ...)$ taki, że

$$F\tau_{b_j}(v_j) \in F\tau_{a^j_{k_j}}(U_j)$$

dla wszystkich j.

Niech $c_j = b_j - a^j_{k_j}$. Wtedy $c_j \neq 0$ oraz

$$F\tau_{c_j}(v_j) \in U_j$$

dla wszystkich j. Tym samym $F\tau_{c_j}(v_j)$ dąży do v, W szczególności

$$c_j = \pi(F\tau_{c_j}(v_j)) - \pi(v_j)$$

dąży do zera. Dlatego istnieje podciąg (c_{j_i}, v_{j_i}) ciągu (c_j, v_j) taki, że $|c_{j_i}|$ dąży silnie monotonicznie do zera. Przyjmując $u_i = c_{j_i}$ stwierdzamy, że ciąg (u_i, v_{j_i}) spełnia tezę lematu.

□

Poprzednie dwa lematy pozwalają nam udowodnić następujący lemat.

Lemat 6. *Niech $w_i \in F\mathbb{R}^m$ będzie takim ciągiem zbieżnym do $w \in F\mathbb{R}^m$, że $|\pi(w_i) - \pi(w)|$ dąży silnie monotonicznie do zera. Niech W będzie otwartym otoczeniem punktu w. Wtedy istnieje taki punkt $z \in \mathbb{R}^m$ oraz taka liczba dodatnia ϵ, że*

$$F\tau(K(z,\epsilon) \times \{w\}) \subset W \text{ oraz } F\tau(K(z,\epsilon) \times \{w_i\}) \subset W$$

dla dostatecznie dużych i.

Dowód Stosując poprzedni lemat dla ciągu stałego $v_j = w$, znajdujemy taki ciąg punktów $u_i \in \mathbb{R}^m$, że $F\tau_{u_i}(w)$ dąży do w oraz $|u_i|$ dąży silnie monotonicznie do zera. Stosując Lemat 4 dla ciągu $w_i = F\tau_{u_i}(w)$ oraz stosując założenie, że W jest otwartym otoczeniem $w = F\tau_0(w)$ znajdujemy taki ciąg liczb rzeczywistych $\epsilon'_i > 0$, że

$$F\tau(K(0,\epsilon'_{i_o}) \times \{F\tau_{u_{i_o}}(w)\}) \subset W$$

dla pewnego i_o.

Niech $s = \epsilon'_{i_o}$, $y = u_{i_o}$. Wtedy

$$K(y,s) \subset \{a \in \mathbb{R}^m \mid F\tau_a(w) \in W\} \ . \tag{3}$$

Na mocy Lematu 4 wybieramy taki ciąg liczb rzeczywistych $\epsilon_i > 0$, że jeżeli $F\tau_a(w) \in W$, to

$$F\tau(K(a,\epsilon_i) \times \{w_i\}) \subset W$$

dla dostatecznie dużych i. Wtedy

$$K(y,s) \subset \bigcup_{k \geqslant 1} \bigcap_{i \geqslant k} \{a \in \mathbb{R}^m \mid F\tau(K(a,\epsilon_i) \times \{w_i\}) \subset W\} \ . \tag{4}$$

Dla liczby naturalnej k, oznaczmy

$$H_k = \bigcap_{i \geqslant k} \{a \in K(y,s) \mid F\tau(K(a,\epsilon_i) \times \{w_i\}) \subset W\} \ . \tag{5}$$

Wtedy na mocy (4),

$$\bigcup_{k \geqslant 1} H_k = K(y,s) \ .$$

Stosując twierdzenie Baire'a stwierdzamy, że istnieje k_o takie, że

$$int\overline{H}_{k_o} \cap K(y,s) \neq \emptyset \ .$$

Wybierzmy taki punkt $z \in \mathbb{R}^m$ oraz taką liczbę $\epsilon > 0$, że

$$K(z,\epsilon) \subset int\overline{H}_{k_o} \cap K(y,s) \ .$$

Pokażemy, że (z,ϵ) spełnia tezę dowodzonego lematu. W tym celu weźmy $x \in K(z,\epsilon)$ oraz liczbę naturalną $i \geqslant k_o$. Ponieważ $x \in int\overline{H}_{k_o}$, więc istnieje punkt $x' \in H_{k_o}$ taki, że $x \in K(x',\epsilon_i)$. Wtedy na mocy (5) uzyskujemy, że $F\tau_x(w_i) \in W$. Dlatego

$$F\tau(K(z,\epsilon) \times \{w_i\}) \subset W$$

dla $i \geqslant k_o$. Ponieważ również $x \in K(y,s)$, więc na mocy (3), $F\tau_x(w) \in W$. Dlatego

$$F\tau(K(z,\epsilon) \times \{w\}) \subset W \ .$$

Lemat 6 został udowodniony.

$\square$

Istotną trudnością w dowodzie Propozycji 5 jest następujący lemat.

Lemat 7. *Niech* $w_i \in F\mathbb{R}^m$ *będzie ciągiem zbieżnym do* $w \in F\mathbb{R}^m$ *takim, że* $|\pi(w_i) - \pi(w)|$ *dąży silnie monotonicznie do zera. Niech* $x_i \in \mathbb{R}^m$ *będzie ciągiem zbieżnym do zera. Wtedy* $F\tau_{x_i}(w_i)$ *dąży do* w*, gdy* i *dąży do nieskończoności.*

Dowód Niech V_p $(p = 1, 2, ...)$ będzie przeliczalną bazą topologiczną $F\mathbb{R}^m$. Dla każdej liczby naturalnej p, oznaczmy

$$L_p = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F\tau_{x+x_i}(w_i) \in V_p \text{ dla dostatecznie dużych } i\} \tag{6}$$

oraz

$$Q_p = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F\tau_x(w) \in V_p \text{ i } x \notin L_p\} \ . \tag{7}$$

Przypuśćmy, że $F\tau_{x_i}(w_i)$ nie dąży do w. Pokażemy, że prowadzi to do sprzeczności. W tym celu zauważmy, że wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$, $F\tau_{x+x_i}(w_i)$ nie dąży do $F\tau_x(w)$. Dlatego

$$\bigcup_{p \geqslant 1} Q_p = \mathbb{R}^m \ .$$

Korzystając z twierdzenia Baire'a, znajdujemy liczbę naturalną p taką, że

$$int\overline{Q}_p \neq \emptyset \ .$$

Wybierzmy punkt $a \in \mathbb{R}^m$ taki, że

$$a \in Q_p \cap int\overline{Q}_p \ .$$

Wtedy

$$w \in \pi^{-1}(\pi(w)) = \pi^{-1}(\tau_{\pi(w)-a}(a)) \subset \pi^{-1}(\tau_{\pi(w)-a}(int\overline{Q}_p))$$

oraz

$$w \in F\tau_{-a}(V_p) \ .$$

Zatem

$$W = \pi^{-1}(\tau_{\pi(w)-a}(int\overline{Q}_p)) \cap F\tau_{-a}(V_p)$$

jest otwartym otoczeniem w.

Stosując poprzedni lemat, znajdziemy taki punkt $z \in \mathbb{R}^m$ oraz taką liczbę $\epsilon > 0$, że

$$F\tau(K(z,\epsilon) \times \{w\}) \subset \pi^{-1}(\tau_{\pi(w)-a}(int\overline{Q}_p)) \tag{8}$$

oraz

$$F\tau(K(z,\epsilon) \times \{w_i\}) \subset F\tau_{-a}(V_p) \tag{9}$$

dla dostatecznie dużych i.

Stosując inkluzję (8) można wykazać, że

$$K(z+a,\epsilon) \subset int\overline{Q}_p \ . \tag{10}$$

Rzeczywiście, jeżeli $y \in K(z+a,\epsilon)$, to na mocy (8)

$$F\tau_{y-a}(w) \in \pi^{-1}(\tau_{\pi(w)-a}(int\overline{Q}_p)) \ ,$$

tzn.

$$y - a + \pi(w) \in \tau_{\pi(w)-a}(int\overline{Q}_p)$$

czyli

$$y \in int\overline{Q}_p \ ,$$

co dowodzi, że zachodzi inkluzja (10).

Wykorzystując inkluzję (9) oraz założenie, że $x_i \to 0$, gdy $i \to \infty$, można udowodnić, że

$$K(z+a,\epsilon) \subset L_p \ . \tag{11}$$

Istotnie, jeżeli $y \in K(z+a,\epsilon)$, to dla dostatecznie dużych i zachodzi

$$x_i + y \in K(z+a,\epsilon) \ ,$$

a zatem na mocy (9)

$$F\tau_{y+x_i}(w_i) \in V_p$$

dla dostatecznie dużych i, co z uwagi na (6) oznacza, że $y \in L_p$. Zatem inkluzja (11) jest udowodniona.

Stosując inkluzje (10) oraz (11) a także (7) otrzymujemy, że

$$K(z+a,\epsilon) \subset (\mathbb{R}^m \setminus Q_p) \cap int\overline{Q}_p \ .$$

Powyższa sprzeczność uzasadnia nasz lemat.

□

W oparciu o powyższe Lematy 4-7 udowodnimy Propozycję 5.

Dowód Niech $x_i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, ...)$ dąży do $x \in \mathbb{R}^m$ oraz niech $w_i \in F\mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, ...)$ dąży do $w \in F\mathbb{R}^m$. Należy udowodnić, że $F\tau_{x_i}(w_i)$ dąży do $F\tau_x(w)$. Zamieniając x_i przez $x_i - x$, zaś w_i przez $F\tau_{-x}(w_i)$ możemy założyć, że $x = 0$.

W celu udowodnienia, że $F\tau_{x_i}(w_i) \to w$ wystarczy udowodnić, że każdy podciąg ciągu $F\tau_{x_i}(w_i)$ zawiera podciąg zbieżny do w.

Rozważmy więc podciąg ciągu $F\tau_{x_i}(w_i)$ i dla uproszczenia oznaczeń oznaczmy go również przez $F\tau_{x_i}(w_i)$. Ponieważ $\pi(w_i) - \pi(w) \to 0$, więc istnieją dwie możliwości:

(i) Z ciągu $F\tau_{x_i}(w_i)$ można wybrać podciąg $F\tau_{x_{\nu_i}}(w_{\nu_i})$ taki, że $|\pi(w_{\nu_i}) - \pi(w)| \to 0$ silnie monotonicznie, lub

(ii) istnieje i_o, że dla wszystkich $i \geqslant i_o$ mamy $\pi(w_i) = \pi(w)$.

W przypadku (i) na mocy Lematu 7, $F\tau_{x_{\nu_i}}(w_{\nu_i}) \to w$ co kończy nasz dowód.

W przypadku (ii), odrzucając skończoną ilość wyrazów możemy założyć, że $\pi(w_i) = \pi(w)$ dla wszystkich i. Ewentualnie zastępując $F\tau_{x_i}(w_i)$ przez podciąg, na mocy Lematu 5 możemy założyć, że istnieje taki ciąg $u_i \in \mathbb{R}^m$, że $F\tau_{u_i}(w_i)$ dąży do w oraz $|u_i|$ dąży silnie monotonicznie do zera.

Stosując ponownie Lemat 7 tym razem podstawiając $F\tau_{u_i}(w_i)$ w miejsce w_i oraz $x_i - u_i$ w miejsce x_i uzyskujemy, że

$$F\tau_{x_i - u_i}(F\tau_{u_i}(w_i)) \to w \ .$$

Dlatego $F\tau_{x_i}(w_i) \to w$, jak chcieliśmy.

Propozycja 5 jest udowodniona.

□

7. Klasyfikacja quasi wiązek naturalnych

Niech $F\colon \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ będzie quasi wiązką naturalną.

Włókno standardowe $F_o = F_0\mathbb{R}^m$ jest podrozmaitością w $F\mathbb{R}^m$. Zatem ciągłe działanie $\alpha_F^{r_F} : G_m^{r_F} \times F_o \to F_o$ z Propozycji 4 ma następującą własność: Dla każdego $g = j_0^r\varphi \in G_m^{r_F}$ odwzorowanie

$$(\alpha_F^{r_F})_g : F_o \to F_o \ , \ (\alpha_F^{r_F})_g(v) := \alpha_F^{r_F}(g, v) = F_0\varphi(v)$$

jest dyfeomorfizmem.

Innymi słowy działanie $\alpha_F^{r_F}$ jest działaniem grupy Liego $G_m^{r_F}$ na rozmaitości F_o przez dyfeomorfizmy. Zatem działanie $\alpha_F^{r_F} : G_m^{r_F} \times F_o \to F_o$ jest klasy C^∞ na mocy słynnego rezultatu Montgomery i Zippina, które mówi, że ciągłe działanie $\beta : G \times N \to N$ dowolnej grupy Liego G na rozmaitości N przez dyfeomorfizmy jest klasy C^∞.

Podobnie działanie $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ jest ciągłym (na mocy Propozycji 5) działaniem grupy Liego $(\mathbb{R}^m, +)$ na rozmaitości $F\mathbb{R}^m$ przez dyfeomorfizmy. Zatem, $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ jest również klasy C^∞.

Dla dowolnej immersji $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ oraz punktu $v \in F\mathbb{R}^m$, korzystając z funktorialności F, możemy napisać

$$F\varphi(v) = F\tau_{\varphi(\pi(v))} \circ F(\tau_{-\varphi(\pi(v))} \circ \varphi \circ \tau_{\pi(v)}) \circ F\tau_{-\pi(v)}(v) \ .$$

Oczywiście $F_{-\pi(v)}(v) \in F_o = F_0\mathbb{R}^m$ oraz $\tau_{-\varphi(\pi(v))} \circ \varphi \circ \tau_{\pi(v)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest immersją zachowującą zero.

Więc $j_0^{r_F}(\tau_{-\varphi(\pi(v))} \circ \varphi \circ \tau_{\pi(v)}) \in G_m^{r_F}$. Zatem

$$\begin{aligned} F\varphi(v) = F\tau(\varphi(\pi(v)), \alpha_F^{r_F}(j_0^{r_F}(\tau_{-\varphi(\pi(v))} \circ \varphi \circ \tau_{\pi(v)}), \\ F\tau(-\pi(v), v))) \ . \end{aligned}$$

Innymi słowy

$$F\varphi = F\tau \circ (\varphi \circ \pi, \alpha_F^{r_F} \circ (\tilde{\varphi}, F\tau \circ (-\pi, id_{F\mathbb{R}^m}))) \ ,$$

gdzie $\tilde{\varphi} : F\mathbb{R}^m \to G_m^{r_F}$, $\tilde{\varphi}(v) := j_0^{r_F}(\tau_{-\varphi(\pi(v))} \circ \varphi \circ \tau_{\pi(v)})$.

Niech $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ będzie gładko sparametryzowaną rodziną immersji. Jest widoczne, że wtedy odwzorowanie

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to G_m^{r_F} \ , \ \tilde{\varphi}(t, v)(v) := \tilde{\varphi}_t(v)$$

jest klasy C^∞. Zatem odwzorowanie

$$\tilde{F}\varphi : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m \ , \ \tilde{F}\varphi(t, v) = F\varphi_t(v)$$

jest też klasy C^∞. Używając map, własność tą możemy przenieść na dowolne gładko sparametryzowane rodziny immersji $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M_1$. Innymi słowy, dowolna quasi wiązka naturalna $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ spełnia warunek regularności (iii) z Definicji 1.

Podsumujmy wszystko co do tej pory udowodniliśmy w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Niech* $F : \mathcal{M}f_m \to \mathcal{FM}_m$ *będzie quasi wiązką naturalną. Wtedy* F *jest wiązką naturalną skończonego rzędu co najwyżej równego* $r_F := 2(f^2 + f)$, *gdzie* $f = dim(F_0\mathbb{R}^m)$. *Działanie standardowe* $\alpha_F^{r_F} : G^{r_F} \times F_o \to F_o$ *dane przez* $\alpha_F^{r_F}(j_0^r\psi, v) = F_0\psi(v)$ *jest klasy* C^∞ *oraz odwzorowanie* $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ *dane przez podnoszenie translacji wzorem* $F\tau(x, w) = F\tau_x(w)$ *jest też klasy* C^∞ *oraz* F *jest izomorficzna z wiązką naturalną* $F_1 = P^r[F_o, \alpha_F^{r_F}, G_m^{r_F}]$.

Uwaga 1. Zaprezentowana definicja wiązek naturalnych została zaproponowana po raz pierwszy przez A. Nijenhuisa [Nij].

Po raz pierwszy twierdzenie o skończoności rzędu wiązek naturalnych zostało udowodnione przez Palais'a i Terng w pracy [PaTe]. Uzyskali oni słabsze oszacowanie rzędu pokazując, że $ord(F) \leqslant 2^f + 1$.

W pracy [EpThu], Epstein i Thurston uzyskali lepsze oszacowanie rzędu wiązki naturalnej dowodząc, że $ord(F) \leqslant 2f + 1$. W przypadku $m = 1$, pokazali, że to oszacowanie jest ostrym górnym oszacowaniem.

Ostre górne oszacowanie rzędu wiązki naturalnej w przypadku $m \geqslant 2$ zostało podane przez Zajtza w pracy [Za]. Mianowicie, Zajtz pokazał, że gdy $m \geqslant 2$, to

$$ord(F) \leqslant max(\frac{f}{m-1}, \frac{f}{m} + 1)$$

i to oszacowanie jest ostre.

Dowód Propozycji 3 o punktowej skończoności rzędu jest modyfikacją fragmentu dowodu nieliniowego twierdzenia Peetry udowodnionego przez Slováka [Slo].

Zaprezentowany wyżej Lemat 3, służący do oszacowania rzędu wiązki naturalnej przez $2(f^2 + f)$ jest wzorowany na pewnych fragmentach pracy Masudy [Ma] poświęconej homomorfizmom algebr Liego pól wektorowych.

Ciągłość działania $F\tau : \mathbb{R}^m \times F\mathbb{R}^m \to F\mathbb{R}^m$ została po raz pierwszy udowodniona przez Epsteina i Thurstona w pracy [EpThu]. Zaprezentowany dowód Propozycji 5 jest na podstawie mojej pracy doktorskiej opublikowanej w [Mik].

Zaprezentowany wykład można poszerzyć czytając fundamentalną monografię I. Kolara, P.W. Michora i J. Slovaka [KolMicSlo], a także opracowanie I. Kolara [Kol].

Materiał dotyczący rozmaitości można poszerzyć czytając fundamentalną książkę S. Kobayashi i K. Nomizu [KobNom].

Dodatek 1. Konstrukcje pewnych odwzorowań gładkich

Korzystając z twierdzenia Whitney'a o rozszerzaniu udowodnimy, że istnieją funkcje klasy C^∞, które były wykorzystywane w zasadniczej części tego wykładu.

Przypomnijmy treść znanego twierdzenia Whitney'a o rozszerzaniu.

Twierdzenie A._(Twierdzenie Whitney'a) Niech_ $K \subset \mathbb{R}^m$ _będzie zbiorem zwartym. Niech_ (F^k) _będzie rodziną funkcji ciągłych określonych na_ K _o wartościach w_ $\mathbb{R}$ _indeksowaną zbiorem m-elementowych ciągów nieujemnych liczb całkowitych_ $k = (k_1, ..., k_m)$. _Jeżeli dla każdego takiego ciągu_ $k = (k_1, .., k_m)$ _i każdej liczby całkowitej nieujemnej_ q

$$F^k(y) - \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!} F^{k+l}(x)(y-x)^l = o(|x-y|^q) \ , \tag{12}$$

gdy $x, y \in K$ _i_ $|x-y| \to 0$, _to istnieje funkcja_ $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ _klasy_ C^∞ _taka, że_ $h_{|K} = F^{(0)}$ _(a nawet_ $D^k h_{|K} = F^k$ _dla każdego_ k _jak wyżej)._

Stosując twierdzenie Whitney'a udowodnimy najpierw następującą propozycję.

Propozycja A. Niech $x_i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, ...)$ będzie ciągiem punktów takich, że $|x_i|$ dąży silnie monotonicznie do zera oraz niech ϵ_i będzie ciągiem liczb takich, że

$$0 < \epsilon_i < min_{j \leqslant i} exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|}) \ . \tag{13}$$

Jeżeli $f : K(0, 2\epsilon_i) \to \mathbb{R}^s$ jest ciągiem funkcji klasy C^∞ takich, że dla każdego i oraz każdego ciągu $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ liczb całkowitych nieujemnych spełniających nierówność $|\alpha| \leqslant i$ a także dla każdego $x \in K(0, 2\epsilon_i) \subset \mathbb{R}^m$ zachodzi nierówność

$$|D^\alpha f_i(x)| < min_{j \leqslant i} exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|}) \ , \tag{14}$$

to istnieje funkcja $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ klasy C^∞ taka, że

$$h_{|K(x_i, \epsilon_i)} = f_i \circ \tau_{-x_i} \tag{15}$$

dla dostatecznie dużych i.

Lemat A. _Jeżeli_ $x_i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, ...)$ _jest ciągiem punktów takich, że_ $|x_i|$ _dąży silnie monotonicznie do zera oraz_ ϵ_i _jest ciągiem liczb spełniających nierówności (13), to istnieje taka liczba naturalna_ L, _że dla wszystkich liczb naturalnych_ i, j

takich, że $i \neq j$, $i, j \geqslant L$ oraz dla wszystkich punktów $x \in K(x_i, 2\epsilon_i)$ i $y \in K(x_j, 2\epsilon_j)$ zachodzą nierówności

$$|x - y| \leqslant 1 \tag{16}$$

$$|x - y| \geqslant \frac{1}{2}||x_i| - |x_j|| > 0 \tag{17}$$

$$\frac{3}{2}|x_i| \geqslant |x| \geqslant \frac{1}{2}|x_i| > 0 \ . \tag{18}$$

W szczególności kule $K(x_i, 2\epsilon_i)$ dla $i = L, L+1, ...$ są parami rozłączne, nie zawierają zera oraz zbiór $\bigcup_{i \geqslant L} \overline{K}(x_i, \epsilon_i) \cup \{0\}$ (kule domknięte) jest zwarty.

Dowód Ponieważ $t^{-1}exp(-t^{-1}) \to 0$, gdy $t \to 0^+$ oraz $|x_i| - |x_{i+1}| \to 0^+$, gdy $i \to \infty$, więc istnieje liczba naturalna L' taka, że

$$|x_i| - |x_{i+1}| \geqslant 8exp(-\frac{1}{|x_i| - |x_{i+1}|}) \ ,$$

gdy $i \geqslant L'$.

Wybierzmy liczby naturalne i, j takie, że $j > i \geqslant L'$ oraz punkty $x \in K(x_i, 2\epsilon_i)$ i $y \in K(x_j, 2\epsilon_j)$.

Wtedy korzystając z nierówności (13) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
\epsilon_i + \epsilon_j &\leqslant 2 \sum_{k=0}^{j-i-1} exp(-\frac{1}{|x_{i+k}| - |x_{i+k+1}|}) \\
&\leqslant \frac{2}{8} \sum_{k=0}^{j-i-1} (|x_{i+k}| - |x_{i+k+1}|) \\
&= \frac{1}{4}(|x_i| - |x_j|) \ ,
\end{aligned}$$

a ponieważ

$$|x_i| + 2\epsilon_i \geqslant |x| \geqslant |x_i| - 2\epsilon_i$$

oraz

$$|x_j| + 2\epsilon_j \geqslant |y| \geqslant |x_j| - 2\epsilon_j \ ,$$

więc

$$|x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant |x_i| + 2\epsilon_i + |x_j| + 2\epsilon_j \leqslant |x_i| + |x_j| + \frac{1}{2}(|x_i| - |x_j|) \ ,$$

$$|x-y| \geqslant |x|-|y| \geqslant (|x_i|-2\epsilon_i)-(|x_j|+2\epsilon_j) \geqslant \frac{1}{2}(|x_i|-|x_j|) \ ,$$

$$|x| \geqslant |x_i|-2\epsilon_i-2\epsilon_j \geqslant |x_i|-\frac{1}{2}(|x_i|-|x_j|)$$

oraz

$$|x| \leqslant |x_i|+2\epsilon_i+2\epsilon_j \leqslant |x_i|+\frac{1}{2}(|x_i|-|x_j|) \leqslant \frac{3}{2}|x_i| \ .$$

Ponieważ $|x_i| \to 0$, gdy $i \to \infty$, oraz $|x_j| \to 0$, gdy $j \to \infty$, więc zwiększając ewentualnie L' uzyskamy nierówności (16), (17) i (18). Lemat został udowodniony.

□

Niech (x_i, ϵ_i, f_i) będzie ciągiem spełniającym założenia propozycji dla $s = 1$ oraz niech L będzie liczbą naturalną dobraną do ciągu (x_i, ϵ_i) tak aby zachodziła teza poprzedniego lematu. Dla każdego ciągu liczb całkowitych nieujemnych $k = (k_1, ..., k_m)$ definiujemy funkcję

$$F^k : \bigcup_{i \geqslant L} K(x_i, 2\epsilon_i) \cup \{0\} \to \mathbb{R}$$

przyjmując, że

$$F^k_{|K(x_i,2\epsilon_i)} = D^k(f_i \circ \tau_{-x_i}) \tag{19}$$

$$F^k(0) = 0 \ . \tag{20}$$

Lemat B. *Niech k będzie m-elementowym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych. Wtedy F^k jest funkcją ciągłą. Jeżeli q jest liczbą całkowitą nieujemną, to dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych dwóch punktów*

$$x, y \in \bigcup_{i \geqslant L} \overline{K}(x_i, \epsilon_i) \cup \{0\} \tag{21}$$

(kule domknięte) spełniających nierówność $|x-y| < \delta$ zachodzi nierówność

$$|F^k(y) - \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!} F^{k+l}(y)(x-y)^l| \leqslant \epsilon |x-y|^q \ . \tag{22}$$

Dowód Funkcja F^k jest ciągła poza zerem. Udowodnimy, że F^k jest ciągła w zerze. W tym celu zdefiniujmy funkcję

$$z : \bigcup_{i \geqslant I} K(x_i, 2\epsilon_i) \to \mathbb{N}$$

przyjmując, że $z_{|K(x_i,2\epsilon_i)} = i$. Jeżeli $z(x) = i$, to na mocy równości (18) wnosimy, że $|x| \geqslant \frac{1}{2}|x_i|$. Zatem $z(x) \to \infty$, gdy $x \to 0$.

Jeżeli x jest punktem dziedziny funkcji z oraz $|z(x)| > |k|$, to na mocy określenia (19) oraz odpowiedniego założenia propozycji otrzymujemy, że

$$|F^k(x)| = |D^k(f_{z(x)} \circ \tau_{-x_{z(x)}})(x)| \leqslant exp(-\frac{1}{|x_{z(x)}| - |x_{z(x)+1}|}) \ .$$

Jeżeli $x \to 0$, to $z(x) \to \infty$, więc $|x_{z(x)}| - |x_{z(x)+1}| \to 0^+$, a więc

$$exp(-\frac{1}{|x_{z(x)}| - |x_{z(x)+1}|}) \to 0 \ ,$$

a zatem $F^k(x) \to 0$. Część pierwsza naszego lematu jest udowodniona.

Niech $\epsilon \geqslant 0$. Wiadomo, że dla wszystkich $a \geqslant 0$, $t^{-a}exp(-t^{-1}) \to 0$, gdy $t \to 0^+$. Ponieważ $|x_i| - |x_{i+1}| \to 0^+$, gdy $i \to \infty$, więc istnieje liczba naturalna

$$L_1 \geqslant max(L, q + |k|) \tag{23}$$

taka, że

$$2 \sum_{|l|=q} \frac{1}{l!} exp(-\frac{1}{|x_i| - |x_{i+1}|}) \leqslant \epsilon \tag{24}$$

oraz

$$2^{q+1} \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!} exp(-\frac{1}{|x_i| - |x_{i+1}|}) \leqslant \epsilon(|x_i| - |x_{i+1}|)^q \tag{25}$$

dla wszystkich liczb naturalnych i takich, że $i \geqslant L_1$.

Ponadto z odpowiedniego założenia propozycji uzyskujemy, że jeżeli $i \geqslant L_1$, to

$$|F^{k+l}(x)| = |D^{k+l}(f_i \circ \tau_{-x_i})(x)| < min_{j \leqslant i} exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|}) \tag{26}$$

dla wszystkich punktów $x \in K(x_i, 2\epsilon_i)$ oraz wszystkich m-elementowych ciągów l liczb całkowitych nieujemnych takich, że $|l| \leqslant q$.

Zbiór

$$\bigcup_{L_1 \geqslant i \geqslant L} \overline{K}(x_i, \epsilon_i) \tag{27}$$

jest zwarty. Wobec tego na mocy twierdzenia Taylora zastosowanego do funkcji

$$F^k_{|\bigcup_{i\geqslant L} K(x_i,2\epsilon_i)} \ ,$$

która jest klasy C^∞, istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że nierówność (22) zachodzi dla wszystkich punktów x, y zbioru (27) takich, że $|x-y| \leqslant \delta$.

Ewentualnie zmniejszając liczbę δ, możemy założyć, że odległość zbioru (27) od zbioru (zwartego)

$$\bigcup_{i>L_1} \overline{K}(x_i,\epsilon_i) \cup \{0\}$$

jest większa niż δ.

Niech i, j będą liczbami naturalnymi takimi, że $i, j \geqslant L_1$ oraz niech x, y będą punktami takimi, że $x \in \overline{K}(x_i,\epsilon_i)$ i $y \in \overline{K}(x_j,\epsilon_j)$. Jeżeli $i = j$, to kolejno na mocy nierówności trójkąta, twierdzenia Taylora zastosowanego do funkcji $F^k_{|K(x_i,2\epsilon_i)}$ i zastosowaniu nierówności (26) a następnie (24) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
&|F^k(x) - \sum_{|l|\leqslant q} \frac{1}{l!} F^{k+l}(y)(x-y)^l| \leqslant \\
&\quad \leqslant |F^k(x) - \sum_{|l|\leqslant q-1} \frac{1}{l!} F^{k+l}(y)(x-y)^l| + \\
&\quad +|\sum_{|l|=q} \frac{1}{l!} F^{k+l}(y)(x-y)^l| \leqslant \\
&\quad \leqslant 2 \sum_{|l|=q} \frac{1}{l!} exp(-\frac{1}{|x_i|-|x_{i+1}|})|x-y|^q \leqslant \epsilon |x-y|^q
\end{aligned}$$

zaś, jeżeli $i > j$, to na mocy nierówności trójkąta i nierówności (16), nierówności (26), nierówności (25), nierówności $|x_{j+1}| \geqslant |x_i|$ a także nierówności (17) uzyskujemy, że

$$\begin{aligned}
&|F^k(x) - \sum_{|l|\leqslant q} \frac{1}{l!} F^{k+l}(y)(x-y)^l| \leqslant \\
&\quad \leqslant |F^k(x)| + \sum_{|l|\leqslant q} |F^{k+l}(y)| \frac{1}{l!} \leqslant \\
&\quad exp(-\frac{1}{|x_j|-|x_{j+1}|}) + \sum_{|l|\leqslant q} \frac{1}{l!} exp(-\frac{1}{|x_j|-|x_{j+1}|}) \leqslant \\
&\quad \leqslant 2 \sum_{|l|\leqslant q} \frac{1}{l!} exp(-\frac{1}{|x_j|-|x_{j+1}|}) \leqslant \\
&\quad \leqslant \epsilon \frac{1}{2^q} (|x_j|-|x_{j+1}|)^q \leqslant \\
&\quad \leqslant \epsilon \frac{1}{2^q} (|x_j|-|x_i|)^q \leqslant \epsilon |x-y|^q \ .
\end{aligned}$$

Podobnie dowodzimy tę nierówność, gdy $j > i$. Wobec tego nierówność (22) zachodzi dla wszystkich punktów

$$x, y \in \bigcup_{i \geqslant L} \overline{K}(x_i, \epsilon_i)$$

takich, że $|x - y| \leqslant \delta$. Ponieważ obie strony nierówności (22) są (na mocy części naszego lematu) funkcjami ciągłymi, więc nierówność (22) zachodzi, gdy $x = 0$ lub $y = 0$, co kończy dowód Lematu B.

□

Dowód (Dowód Propozycji A) Przedstawiając każdą z funkcji f_i w postaci zestawienia $(f_i^1, ..., f_i^s)$ widzimy, że wystarczy udowodnić propozycję przy założeniu $s = 1$.

Niech $s = 1$, Korzystając z Lematu B widzimy, że rodzina funkcji (F^k) zdefiniowana na zbiorze zwartym

$$\bigcup_{i \geqslant L} \overline{K}(x_i, \epsilon_i) \cup \{0\}$$

wzorami (19) i (20) spełnia założenie twierdzenia Whitney'a o rozszerzaniu.

Istnieje więc funkcja $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ klasy C^∞, taka, że

$$h_{|K(x_i, \epsilon_i)} = F^{(0)} = f_i \circ \tau_{-x_i}$$

dla wszystkich liczb naturalnych i takich, że $i \geqslant L$, co kończy dowód propozycji.

□

Wniosek A. Niech ϵ_k $(k = 1, 2, ...)$ będzie ciągiem liczb takich, że

$$0 < \epsilon_k < \exp(-2k^2) \ .$$

Niech $x_k = (\frac{1}{k}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$ $(k = 1, 2, ...,)$.

Jeżeli $\varphi_k : \mathbb{R}^m \supset K(0, 2\epsilon_k) \to \mathbb{R}^m$ $(k = 1, 2, ...)$ jest ciągiem immersji klasy C^∞ takim, że dla dowolnego ciągu $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ liczb całkowitych nieujemnych spełniającego warunek $|\alpha| \leqslant 2k$ i dla każdego $x \in K(0, 2\epsilon_{2k})$ zachodzi nierówność

$$|D^\alpha(\varphi_k - id_{\mathbb{R}^m})(x)| < exp(-8k^2) = exp(-2(2k)^2) \ ,$$

to istnieje określona w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$ immersja φ klasy C^∞ taka, że

$$\varphi_{|K(x_{2k+1}, \epsilon_{2k+1})} = id \text{ oraz } \varphi_{|K(x_{2k}, \epsilon_{2k})} = \tau_{x_{2k}} \circ \varphi_k \circ \tau_{-x_{2k}}$$

dla dostatecznie dużych k.

Dowód Niech $(x_k, \epsilon_k, \varphi_k)$ będzie ciągiem spełniającym założenia Wniosku A. Oznaczając $f_{2k} = \varphi_k - id$ oraz $f_{2k+1} = 0$ stwierdzamy, że ciąg (x_k, ϵ_k, f_k) spełnia założenia Propozycji A dla k spełniającego rolę i.

Rzeczywiście, ponieważ $|x_k| = \frac{1}{k}$, więc

$$exp(-2k^2) \leqslant min_{j \leqslant k} exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|}) \ ,$$

a więc

$$\epsilon_k < min_{j \leqslant k} exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|}) \ .$$

Dla każdego ciągu $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ liczb całkowitych nieujemnych spełniającego nierówność $|\alpha| \leqslant 2k$ i dla każdego $x \in K(0, 2\epsilon_{2k})$ zachodzi nierówność

$$|D^\alpha f_{2k}(x)| < exp(-2(2k)^2) \leqslant min_{j \leqslant 2k} exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|}) \ .$$

Pozostałe założenia są proste do sprawdzenia (bo $f_{2k+1} = 0$).

Na mocy Propozycji A, istnieje więc funkcja $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ klasy C^∞ taka, że dla dostatecznie dużych k

$$h_{|K(x_{2k}, \epsilon_{2k})} = f_{2k} \circ \tau_{-x_{2k}} \ , \ h_{|K(x_{2k+1}, \epsilon_{2k+1})} = 0 \ .$$

Funkcja $\varphi = h + id$ w zacieśnieniu do odpowiednio małego otoczenia zera spełnia tezę Wniosku A.

$\square$

Wniosek B. Niech $x_i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2, ...)$ będzie ciągiem punktów takich, że $|x_i|$ dąży silnie monotonicznie do zera, oraz niech ϵ_i będzie ciągiem liczb takich, że

$$0 < \epsilon_i < min_{j \leqslant i} exp(-\frac{1}{|x_j| - |x_{j+1}|}) \ .$$

Jeżeli $u_i \in \mathbb{R}^m$ jest ciągiem takim, że $|u_i| < \epsilon_i$, to istnieje lokalnie określona immersja f w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$ taka, że $f = \tau_{u_i}$ na $K(x_i, \epsilon_i)$ dla dostatecznie dużych i.

Dowód Niech (x_i, ϵ_i, u_i) będzie ciągiem spełniającym założenia Wniosku B. Oznaczając $f_i = u_i$ stwierdzamy, że ciąg (x_i, ϵ_i, f_i) spełnia założenia Propozycji A. Istnieje więc $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ klasy C^∞ takie, że $h_{|K(x_i,\epsilon_i)} = u_i$ dla dostatecznie dużych i. Funkcja $f = h + id$ określona w pewnym otoczeniu zera spełnia tezę Wniosku B.

□

Propozycja B. Niech $x_i \in \mathbb{R}^m$ będzie ciągiem punktów takich, że

$$|x_{i+1}| < \frac{1}{4}|x_i| \text{ dla } i = 1, 2, ...$$

(ostra nierówność). Niech $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ $(i = 1, 2, ...)$ będzie ciągiem funkcji klasy C^∞ takim, że przy dowolnym ustalonym $i \in \mathbb{N}_+$ mamy

$$|D^k f_i(x_i)| \leqslant \frac{1}{i}\frac{1}{2^i}|x_i|^q$$

dla każdego ciągu $k = (k_1, ..., k_m)$ liczb całkowitych nieujemnych oraz każdej liczby całkowitej nieujemnej q takich, że $|k| + q \leqslant i$. Wtedy istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ klasy C^∞ taka, że $j^\infty_{x_i} f = j^\infty_{x_i} f_i$ oraz $j^\infty_0 f = j^\infty_0 0$.

Dowód Widzimy, że ciąg $|x_i|$ jest ciągiem silnie malejącym do 0 oraz $|x_{i+j}| < \frac{1}{4^j}|x_i|$ dla $j \in \mathbb{N}_+$. A więc

$$|x_i - x_{i+j}| \geqslant |x_i| - |x_{i+j}| > |x_i| - \frac{1}{4^j}|x_i| > \frac{1}{2}|x_i|$$

dla $j \in \mathbb{N}_+$. Zatem, $|x_i| < 2|x_i - x_j|$ dla każdych $i, j \in \mathbb{N}_+$ z warunkiem $i < j$. Oczywiście wtedy $|x_j| < |x_i| < 2|x_i - x_j|$ (bo ciąg $|x_i|$ jest malejący). Reasumując

$$|x_i| < 2|x_i - x_j| \tag{28}$$

dla każdych $i, j \in \mathbb{N}_+$ z warunkiem $i \neq j$.

Możemy oczywiście założyć, że $s = 1$. Zdefiniujmy ciąg funkcji $F^k : K = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_+}\{x_i\} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ przyjmując

$$F^k(x_i) = D^k f_i(x_i) \text{ oraz } F^k(0) = 0 \tag{29}$$

dla każdego m-elementowego ciągu $k = (k_1, ..., k_m)$ liczb całkowitych nieujemnych oraz każdego $i = 1, 2, ...$ Oczywiście zbiór K jest zwarty oraz F^k są ciągłe.

Ustalmy dowolny ciąg $k = (k_1, ..., k_m)$ oraz liczbę całkowitą nieujemną q. Pokażemy, że

$$F^k(x) - \sum_{|l|\leqslant q} \frac{1}{l!}F^{k+l}(x)(y - x)^l = o(|y - x|^q)$$

gdy $x, y \in K$ oraz $|y - x| \to 0$.

Weźmy w tym celu $i_o \in \mathbb{N}_+$ takie, że

$$i_o \geqslant |k| + q \tag{30}$$

oraz

$$\frac{1}{i_o}(1 + \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!}) \leqslant \epsilon \ . \tag{31}$$

Przyjmijmy $\delta = \frac{1}{2}|x_{i_o}|$.

Niech $x, y \in K = \bigcup_{i \geqslant 1}\{x_i\} \cup \{0\}$ będą takie, że $|y - x| \leqslant \delta$. Pokażemy, że

$$|F^k(x) - \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!} F^{k+l}(x)(y-x)^l| \leqslant \epsilon |y - x|^q \ .$$

Oczywiście możemy założyć, że $x \neq y$ (bo w przeciwnym przypadku obie strony nierówności są zerowe) oraz że $x \neq 0$ (bo w przeciwnym przypadku $F^k(x) = 0$ i $F^{k+l}(x) = 0$, a więc lewa strona nierówności jest zerowa).

Niech więc $x = x_i$. Wtedy

$$|x_i| \leqslant 2|x - y| \leqslant 2\delta = |x_{i_o}| \ .$$

(Pierwsza z powyższych nierówności zachodzi, gdy $y = x_j$ i $i \neq j$ na mocy (28), a także gdy $y = 0$.) Zatem

$$i \geqslant i_o \geqslant |k| + q \tag{32}$$

(pierwsza z nierówności zachodzi bo ciąg $|x_i|$ jest silnie malejący).

Wtedy na mocy założenia o funkcjach f_i i (32) a następnie (28) mamy

$$|F^{k+l}(x)| \leqslant \frac{1}{i}\frac{1}{2^i}|x_i|^{q-|l|} \leqslant \frac{1}{i}|x - y|^{q-|l|} \text{ dla } |l| \leqslant q \ .$$

Wtedy na mocy nierówności trójkąta i (31) oraz (32) dostajemy

$$\begin{aligned} &|F^k(x) - \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!} F^{k+l}(x)(y-x)^l| \\ &\leqslant |F^k(x_i)| + \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!} |F^{k+l}(x_i)||y - x_i|^{|l|} \\ &\leqslant \frac{1}{i}(1 + \sum_{|l| \leqslant q} \frac{1}{l!})|y - x_i|^q \leqslant \epsilon |x - y|^q \ . \end{aligned}$$

Zatem na mocy twierdzenia Whitney'a istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ klasy C^∞ taka, że $D^k f(x_i) = F^k(x_i) = D^k f_i(x_i)$ oraz $D^k f(0) = 0$.

$\square$

Wniosek C. Niech $x_i \in \mathbb{R}^m$ będzie ciągiem takim, że

$$|x_{i+1}| < \frac{1}{4}|x_i| \text{ dla } i = 1, 2, ...$$

(ostra nierówność). Niech $\varphi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ będzie ciągiem immersji takim, że przy dowolnym ustalonym $i \in \mathbb{N}_+$ mamy

$$D^k(\varphi_i - id_{\mathbb{R}^m})(x_i)| \leqslant \frac{1}{i}\frac{1}{2^i}|x_i|^q$$

dla każdego ciągu $k = (k_1, ..., k_m)$ liczb całkowitych nieujemnych oraz każdej liczby całkowitej nieujemnej takiej, że $|k| + q \leqslant i$. Wtedy istnieje immersja $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ określona w pewnym otoczeniu 0 taka, że $j^\infty_{x_i}\varphi = j^\infty_{x_i}\varphi_i$ oraz $j^\infty_0\varphi = j^\infty_0 id_{\mathbb{R}^m}$ dla dostatecznie dużych i.

Dowód Ciąg $(x_i, f_i = \varphi_i - id_{\mathbb{R}^m})$ spełnia założenia Propozycji B dla $s = m$. Istnieje więc stosowne $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Wtedy $\varphi = f + id_{\mathbb{R}^m}$ spełnia tezę naszego wniosku.

□

Dodatek 2. O rozmaitościach

Definicja A. Rozmaitość gładka (klasy C^∞) wymiaru m jest to przestrzeń topologiczna (zwykle) Hausdorffa M taka, że istnieje rodzina

$$atl(M) = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$$

(zwana atlasem zaś elementy jej zwane mapami) spełniająca warunki:

$$\begin{aligned}
&\{U_i\}_{i\in I} \text{ jest otwartym pokryciem } M\ ,\\
&\forall_{i\in I}\ \ \varphi_i : U_i \to V_i \text{ jest homeomorfizmem}\\
&\qquad\qquad \text{na otwarty podzbiór } V_i \subset \mathbb{R}^m\\
&\forall_{i_1,i_2\in I}\ \ \varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1} \text{ jest klasy } C^\infty
\end{aligned}$$

(w sensie analizy jako odwzorowanie z otwartego podzbioru w $\mathbb{R}^m$ na otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^m$).

Przykład A. Przestrzeń $\mathbb{R}^m$ wraz z atlasem $atl(\mathbb{R}^m) = \{(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})\}$ jest gładką m-wymiarową rozmaitością.

Przykład B. Sfera jednostkowa m-wymiarowa

$$S^m = \{x = (x^0, x^1.., x^m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x^0)^2 + (x^1)^2 + ... + (x^m)^2 = 1\}$$

wraz z atlasem $atl(S^m) = \{(U^+, \varphi^+), (U^-, \varphi^-)\}$, gdzie

$$\varphi^+ : U^+ = S^m \setminus \{(1, 0, ..., 0)\} \to \mathbb{R}^m$$

jest rzutem stereograficznym z bieguna $(1, 0, ..., 0)$ zaś

$$\varphi^- : U^- = S^m \setminus \{(-1, 0, ..., 0)\} \to \mathbb{R}^m$$

jest rzutem stereograficznym z bieguna $(-1, 0, ..., 0)$, jest gładką m-wymiarową rozmaitością.

Przykład C. Rzeczywista przestrzeń rzutowa m-wymiarowa

$$\mathbf{P}^m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}/ \cong$$

($x \cong y$ wtw $\exists_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ x=\lambda y$) wraz z atlasem $atl(\mathbf{P}^m(\mathbb{R}) = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,1,\dots,m}$, gdzie

$$\varphi_i : U_i = \{[x] = [(x^0, ..., x^m)] \in \mathbf{P}^m(\mathbb{R}) \mid x^i \neq 0\} \to \mathbb{R}^m \ ,$$

$$\varphi_i([x]) = (x^0/x^i, ..., x^{i-1}/x^i, x^{i+1}/x^i, ..., x^m/x^i) \ ,$$

jest gładką m-wymiarową rozmaitością.

Przykład D. Niech M będzie gładką m-wymiarową rozmaitością z atlasem $atl(M) = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$. Wtedy otwarty podzbiór $U \subset M$ jest gładką m-wymiarową rozmaitością z atlasem

$$atl(U) = \{(U_i \cap U, \varphi_i | U_i \cap U)\}_{i\in I} \ .$$

Przykład E. Niech M_a będzie gładką m_a-wymiarową rozmaitością z atlasem $atl(M_a)$, $a = 1, 2$. Wtedy przestrzeń topologiczna

$$M_1 \times M_2$$

(z topologią Tichonowa) jest $(m_1 + m_2)$-wymiarową gładką rozmaitością z atlasem

$$atl(M_1 \times M_2) = \{(U^1 \times U^2, \varphi^1 \times \varphi^2) \mid (U^a, \varphi^a) \in atl(M_a) \ , \quad a = 1, 2\} \ .$$

Definicja B. Niech M_a będzie gładką m_a-wymiarową rozmaitością , $a = 1, 2$. Ciągłe odwzorowanie $f : M_1 \to M_2$ nazywa się odwzorowaniem gładkim, jeśli

$$\forall_{(U^1,\varphi^1)\in atl(M_1)} \forall_{(U^2,\varphi^2)\in atl(M_2)}\ \varphi^2 \circ f \circ (\varphi^1)^{-1} \text{ jest klasy } C^\infty$$

(w sensie analizy jako odwzorowanie z otwartego podzbioru w $\mathbb{R}^{m_1}$ do $\mathbb{R}^{m_2}$).

Odwzorowanie gładkie $f : M_1 \to M_2$ będące bijekcją takie, że $f^{-1} : M_2 \to M_1$ jest odwzorowaniem gładkim, nazywamy dyfeomorfizmem.

Przykład F. Niech M będzie rozmaitością gładką. Odwzorowanie identycznościowe $id_M : M \to M$ jest gładkie (jest dyfeomorfizmem).

Przykład G. Odwzorowanie antypodalne $a = -id : S^m \to S^m$ jest gładkie (jest dyfeomorfizmem).

Przykład H. Złożenie dwóch odwzorowań gładkich jest gładkie.

Przykład I. Restrykcja odwzorowania gładkiego do podzbioru otwartego jest odwzorowaniem gładkim.

Przykład J. Iloczyn kartezjański dwóch odwzorowań gładkich jest odwzorowaniem gładkim.

Uwaga A. Przykład H wraz z Przykładem F implikuje, że klasa wszystkich rozmaitości gładkich i ich odwzorowań gładkich tworzy kategorię, którą oznacza się zwykle przez $\mathcal{M}f$. Dodatkowo Przykład E wraz z Przykładem J pokazuje, że $\mathcal{M}f$ jest kategorią z produktem.

Definicja C. Odwzorowanie gładkie $f : M_1 \to M_2$ nazywa się immersją (submersją), jeśli

$$\forall_{(U^1,\varphi^1)\in atl(M_1)}\forall_{(U^2,\varphi^2)\in atl(M_2)} \quad \varphi^2 \circ f \circ (\varphi^1)^{-1} \text{ jest immersją (submersją)}$$

(tzn. $\varphi^2 \circ f \circ (\varphi^1)^{-1}$ ma w każdym punkcie injektywną (surjektywną) różniczkę(w sensie analizy)).

Uwaga B. Odwzorowanie identycznościowe id_M jest immersją oraz złożenie dwóch immersji jest immersją. Zatem klasa m-wymiarowych rozmaitości i ich immersji (m ustalone) tworzy kategorię, którą zwykle oznacza się przez $\mathcal{M}f_m$.

Definicja D. Niech M oraz S będą gładkimi rozmaitościami. Mówimy, że S jest regularną podrozmaitością w M, jeśli $S \subset M$, S ma topologię śladową z M oraz odwzorowanie inkluzji $i : S \to M$ jest immersją.

Ćwiczenie A. Niech $f : M \to N$ będzie submersją oraz $x_o \in im(f)$. Pokazać, że $S := f^{-1}(x_o)$ jest regularną podrozmaitością w M. (**Wskazówka**: Zastosować znane z analizy twierdzenie o rzędzie.)

Przykład K. Niech M będzie m-wymiarową rozmaitością gładką. Odwzorowanie gładkie $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ nazywamy krzywą gładką w M. Niech $x_o \in M$. Oznaczmy przez $K(M, x_o)$ zbiór krzywych gładkich $\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M$ takich że $\gamma(0) = x_o$. Określamy relację równoważnościową $\cong_{x_o}$ na zbiorze $K(M, x_o)$ przyjmując

$$\gamma_1 \cong_{x_o} \gamma_2 \text{ wtw } \forall_{(U,\varphi)\in atl(M) \text{ z } x_o \in U} \ (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \ .$$

Przestrzeń ilorazową

$$T_{x_o}M := K(M, x_o)/ \cong_{x_o}$$

nazywa się przestrzenią styczną do M w punkcie x_o zaś elementy przestrzeni $T_{x_o}M$ nazywa się wektorami stycznymi do M w punkcie x_o. Dla dowolnej mapy $(U, \varphi) \in atl(M)$ takiej, że $x_o \in U$ mamy odwzorowanie bijektywne

$$\tilde{\varphi}_{x_o} : T_{x_o}M \to \mathbb{R}^m \ , \ \ \tilde{\varphi}_{x_o}([\gamma]) := (\varphi \circ \gamma)'(0) \ .$$

Na $T_{x_o}M$ mamy strukturę przestrzeni wektorowej taką, że $\tilde{\varphi}_{x_o}$ jest izomorfizmem liniowym. Biorąc inną mapę $(V, \phi) \in atl(M)$ taką, że $x_o \in V$, widzimy, że $\tilde{\phi}_{x_o} \circ (\tilde{\varphi}_{x_o})^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest izomorfizmem liniowym.

Zatem wprowadzona na $T_{x_o}M$ struktura przestrzeni wektorowej nie zależy od wyboru mapy. Na zbiorze

$$TM := \bigsqcup_{x\in M} T_xM \text{ (suma rozłączna)}$$

mamy strukturę gładkiej $2m$-wymiarowej rozmaitości. Otóż dowolna mapa $(U, \varphi) \in atl(M)$ indukuje mapę

$$\tilde{\varphi} : \bigsqcup_{x\in U} T_xM \to U \times \mathbb{R}^m \ , \ \tilde{\varphi}(v) := (x, \tilde{\varphi}_x(v)) \ , \ v \in T_xM \ .$$

Rozmaitość TM zwykle nazywa się wiązką styczną rozmaitości M.

Można łatwo zauważyć, że odwzorowanie

$$\pi_{TM} : TM \to M \ , \ \pi_{TM}(T_xM) := \{x\}$$

jest surjektywną submersją. Dowolne odwzorowanie gładkie $f : M \to M_1$ indukuje odwzorowanie (zwane odwzorowaniem stycznym)

$$Tf : TM \to TM_1 \ , \ Tf(v) = [f \circ \gamma] \ ,$$
$$v = [\gamma] \in T_x M \ , \ x \in M \ .$$

Okazuje się, że $Tf : TM \to TM_1$ jest odwzorowaniem gładkim. Zachodzi równość

$$\pi_{TM_1} \circ Tf = f \circ \pi_{TM}$$

oraz dla dowolnych gładkich odwzorowań $f : M \to M_1$ oraz $f_1 : M_1 \to M_2$ zachodzi

$$T(f_1 \circ f) = Tf_1 \circ Tf$$

oraz dla dowolnej rozmaitości gładkiej M zachodzi

$$Tid_M = id_{TM} \ .$$

Przykład L. Niech M oraz N będą gładkimi rozmaitościami m oraz n-wymiarowymi (odpowiednio). Niech $x_o \in M$, $y_o \in N$. Niech $C^\infty(M, x_o, N, y_o)$ oznacza zbiór odwzorowań gładkich $\rho : M \to N$ określonych na otwartym otoczeniu x_o takich, że $\rho(x_o) = y_o$. Na zbiorze $C^\infty(M, x_o, N, y_o)$ określamy relację

$$\rho_1 \sim_r \rho_2 \quad \text{wtw} \quad D^\alpha(\phi \circ \rho_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_o)) =$$
$$= D^\alpha(\phi \circ \rho_2 \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_o))$$

$\forall_{(U,\varphi) \in atl(M) \ z \ x_o \in U} \forall_{(V,\phi) \in atl(N) z \ y_o \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{N}^m \ z \ 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Przestrzeń ilorazowa

$$J^r_{x_o}(M, N)_{y_o} := C^\infty(M, x_o, N, y_o)/ \sim_r$$

nazywa się przestrzenią r-żetów o źródle x_o i celu y_o. Element $[\rho]_{\sim_r} \in J^r_{x_o}(M, N)_{y_o}$ nazywamy r-żetem w x_o z odwzorowania gładkiego $\rho : M \to N$ i oznaczamy $j^r_{x_o}\rho$.

Na zbiorze

$$J^r(M, N) := \bigsqcup_{x \in M} \bigsqcup_{y \in N} J^r_x(M, N)_y$$

mamy strukturę gładkiej rozmaitości. Otóż dla dowolnych map $(U, \varphi) \in atl(M)$ oraz $(V, \phi) \in atl(N)$ mamy indukowaną mapę przyporządkującą elementom

$$j^r_x\rho \in \bigsqcup_{x \in U} \bigsqcup_{y \in V} J^r_x(M, N)_y$$

ciąg
$$(\varphi(x), \phi(y), D^{\alpha}(\phi \circ \rho \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))) \ .$$

Można łatwo zauważyć że (oczywiste) odwzorowanie źródła $J^r(M,N) \to M$ oraz (oczywiste) odwzorowanie celu $J^r(M,N) \to N$ są surjektywnymi submersjami. Zatem
$$J^r_x(M,N) = \bigsqcup_{y \in N} J^r_x(M,N)_y$$
oraz
$$J^r(M,N)_y = \bigsqcup_{x \in M} J^r_x(M,N)_y$$
są gładkimi podrozmaitościami w $J^r(M,N)$ (jako przeciwobrazy punktów x oraz y przez surjektywne submersje).

Definicja E. Grupa Liego jest to grupa $(G, \cdot)$ taka że G jest rozmaitością gładką oraz
$$\cdot : G \times G \to G$$
jest odwzorowaniem gładkim (wtedy można pokazać, że odwzorowanie $G \ni g \to g^{-1} \in G$ też jest gładkie).

Przykład M. Grupa $GL(m, \mathbb{R})$ macierzy odwracalnych $m \times m$ o wyrazach będących liczbami rzeczywistymi ze względu na składanie macierzy traktowana jako rozmaitość będąca otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^{m^2}$ jest grupą Liego.

Przykład N. Grupa $G^r_m = inv J^r_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ złożona z r-żetów w 0 z (lokalnie określonych) dyfeomorfizmów $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ przekształcających 0 w 0 ze względu na składanie żetów (dane wzorem $j^r_0\rho_1 \circ j^r_0\rho_2 := j^r_0(\rho_1 \circ \rho_2)$) traktowana jako rozmaitość będąca otwartym podzbiorem $J^r_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_0$ jest grupą Liego (zwaną grupą różniczkową rzędu r).

Definicja F. Działanie (lewostronne) grupy Liego G na rozmaitości gładkiej M jest to odwzorowanie gładkie $\alpha : G \times M \to M$ takie że
$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \text{ oraz } e_G \cdot x = x$$

dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ oraz $x \in M$, gdzie $g \cdot x := \alpha(g, x)$. (Podobnie, działanie prawostronne G na M jest to odwzorowanie gładkie $\beta : M \times G \to M$ takie że $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$ oraz $x \cdot e_G = x$, $x \cdot g := \beta(x, g)$.)

Przykład O. Niech G będzie grupą Liego. Odwzorowanie $\alpha : G \times G \to G$ $\alpha(g, \eta) = g\eta$ jest zarówno lewostronnym jak i prawostronnym działaniem G na $M = G$.

Przykład P. Niech $G = G^r_m$ (z Przykładu N) zaś $M = J^r_0(\mathbb{R}^m, N)$ (z Przykładu L). Odwzorowanie $\alpha : M \times G \to M$ dane przez składanie żetów wzorem

$$\alpha(j^r_0 \varphi, j^r_0 \rho) = j^r_0(\varphi \circ \rho)$$

jest prawostronnym działaniem grupy $G = G^r_m$ na $M = J^r_0(\mathbb{R}^m, N)$.

Przez restrykcję mamy prawostronne działanie G^r_m na $P^r M := inv J^r_0(\mathbb{R}^m, M)$ (traktowanym jako otwarty podzbiór w $J^r_0(\mathbb{R}^m, M)$).

Definicja G. Pole wektorowe na rozmaitości gładkiej M jest to gładka sekcja X wiązki stycznej TM (czyli gładkie odwzorowanie $X : M \to TM$ takie, że $\pi_{TM} \circ X = id_M$). Przestrzeń pól wektorowych na M będziemy oznaczali przez $\mathcal{X}(M)$. (Zauważmy, że $\mathcal{X}(M)$ jest $C^\infty(M)$-modułem, gdzie $C^\infty(M)$ jest pierścieniem (algebrą) gładkich odwzorowań $M \to \mathbb{R}$.)

Definicja H. Niech $\psi : M \to N$ będzie dyfeomorfizmem. Dla pola wektorowego X na M określamy jego obraz

$$\psi_* X = T\psi \circ X \circ \psi^{-1} \ .$$

Mamy zatem odwzorowanie $\psi_* : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ (będące izomorfizmem modułów nad homomorfizmem pierścieni (algebr) $\psi_* : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$, $\psi_*(f) = f \circ \psi^{-1}$.)

Definicja I. Lokalna 1-parametrowa grupa transformacji (przepływ) na gładkiej rozmaitości M określona na pewnym otoczeniu otwartym U punktu $x \in M$ jest to odwzorowanie gładkie $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ takie, że

$$\varphi_{t_1 + t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} \ , \ \varphi_0 = id_U \ ,$$

gdzie $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$.

Przykład Q. Niech $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ będzie lokalną 1-parametrową grupą transformacji. Wtedy mamy pole wektorowe X określone na U wzorem

$$X(x) := [\varphi_t(x)] \ .$$

Mówimy, że φ generuje pole wektorowe X.

Ćwiczenie B. Niech X będzie polem wektorowym na M oraz $x \in M$. Wtedy istnieje otwarte otoczenie U punktu x oraz $\epsilon > 0$ oraz jedyna lokalna 1-parametrowa grupa transformacji $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ generująca pole wektorowe $X_{|U}$.

(**Wskazówka:** Wybierając mapę (ψ, V) taką, że $x \in V$, mamy $\psi_* X = X^i \partial_i$ dla pewnych jednoznacznie określonych odwzorowań gładkich $X_i : \psi(U) \to \mathbb{R}$, gdzie ∂_i jest polem wektorowym (tzw. i-tym kanonicznym polem wektorowym) na $\mathbb{R}^m$ takim, że $\partial_i(x) = [x + te_i]$, $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ (1 na i-tym miejscu). Wtedy $y(t) := \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(z)$ musi spełniać

$$\frac{dy}{dt} = (X^i(y)) \ , \ y(0) = z \ .$$

Zatem nasz rezultat jest konsekwencją znanych twierdzeń z teorii równań różniczkowych zwyczajnych.)

Ćwiczenie C. Niech $X \in \mathcal{X}(M)$, Pokazać, że odwzorowanie $\partial_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dane wzorem

$$\partial_X(f)(x) = \frac{df(\varphi_t(x))}{dt}_{|t=0} \ ,$$

gdzie $\{\varphi_t\}$ jest lokalną 1-parametrową grupą transformacji pola X, jest różniczkowaniem algebry $C^\infty(M)$.

W literaturze matematycznej $\partial_X(f)$ jest zwykle oznaczany przez $\partial_X f$ lub $X(f)$ lub Xf.

Ćwiczenie D. Niech ∂ będzie różniczkowaniem algebry $C^\infty(M)$. Pokazać, że istnieje dokładnie jedno pole wektorowe $X \in \mathcal{X}(M)$ takie, że $\partial = \partial_X$. (**Wskazówka:** $X_{|V} = \sum_i \partial(\psi^i) \cdot \psi_*^{-1} \partial_i$, gdzie $(\psi = (\psi^i), V)$ jest mapą na M zaś ∂_i jest jak w ćwiczeniu B.)

Definicja J. Algebra Liego jest to przestrzeń wektorowa L wraz z odwzorowaniem dwuliniowym skośnie symetrycznym $[-,-] : L \times L \to L$ (tzw. nawiasem) spełniającym tożsamość Jacobiego

$$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0 \ .$$

Przykład R. Przestrzeń wektorowa macierzy $gl(m,\mathbb{R})$ wymiaru $m \times m$ z nawiasem $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ jest algebrą Liego.

Przykład S. Przestrzeń wektorowa $\mathcal{X}(M)$ pól wektorowych na M z nawiasem $[X,Y]$ danym wzorem

$$\partial_{[X,Y]} = \partial_X \circ \partial_Y - \partial_Y \circ \partial_X$$

jest algebrą Liego.

Ćwiczenie E. Niech $\varphi : M \to N$ będzie dyfeomorfizmem. Pokazać, że $\varphi_* : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ jest izomorfizmem algebr Liego.

Ćwiczenie F. Niech $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ oraz $f \in C^\infty(M)$. Sprawdzić, że

$$[X, f \cdot Y] = f \cdot [X,Y] + X(f) \cdot Y \ .$$

Przykład T. Przestrzeń wektorowa $g^r_m = \{j^r_0 X \mid X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m) \ , \ X(0) = 0\}$ z nawiasem

$$[j^r_0 X, j^r_0 Y] = j^r_0([Y,X])$$

jest algebrą Liego.

Definicja K. Pole wektorowe X na grupie Liego G nazywa się lewo niezmienniczym jeśli

$$\forall_{g \in G} (L_g)_* X = X \ ,$$

gdzie $L_g : G \to G$ jest lewą translacją wyznaczoną przez g, $L_g(\xi) := g\xi$.

Definicja L. Niech G będzie grupą Liego. Podalgebra Liego $\mathcal{L}ie(G)$ wszystkich lewo niezmienniczych pól wektorowych na G nazywa się algebrą Liego grupy Liego G.

Ćwiczenie G. Pokazać, że istnieje izomorfizm $i_G : \mathcal{L}ie(G) \to T_{e_G}G$, $i_G(X) := X(e_G)$.

Definicja M. Niech $X \in \mathcal{L}ie(G)$ oraz niech $\{\varphi_t^X\}$ będzie (globalnym) przepływem pola X. Jednoparametrowa podgrupa $\{a_t^X\}$ taka, że $a_t^X = \varphi_t(e_G)$ nazywa się 1-parametrową podgrupą odpowiadającą X.

Ćwiczenie H. Odwzorowanie $X \to \{a_t^X\}$ jest bijekcją między algebrą Liego $\mathcal{L}ie(G)$ a jednoparametrowymi podgrupami grupy Liego G.

Definicja N. Odwzorowanie $exp^G : \mathcal{L}ie(G) \to G$ dane wzorem

$$exp^G(X) = a_1^X$$

nazywa się odwzorowaniem wykładniczym.

Ćwiczenie I. Pokazać, że odwzorowanie exp^G przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie punktu $0 \in \mathcal{L}ie(G)$ na pewne otoczenie punktu e_G.

Ćwiczenie J. Pokazać, że przyporządkowanie

$$G \longmapsto \mathcal{L}ie(G)\ ,\ \varphi \longmapsto \mathcal{L}(\varphi) := i_H^{-1} \circ T_{e_G}h \circ i_G$$

jest kowariantnym funktorem z kategorii grup Liego i ich homomorfizmów w kategorię algebr Liego ich homomorfizmów. Zachodzi $\varphi \circ exp^G = exp^H \circ \mathcal{L}(\varphi)$.

Uwaga C. Można udowodnić (ale jest to skomplikowane), że $\mathcal{L}ie(G_m^r) = g_m^r$.

Definicja O. Klasyczną koneksją liniową na M nazywamy odwzorowanie ∇ : $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ takie, że

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \ , \ \ \nabla_X (fY) = (\partial_X f) Y + f \nabla_X Y$$

dla dowolnych pól wektorowych $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ oraz dowolnego odwzorowania gładkiego $f : M \to \mathbb{R}$.

Definicja P. Wiązka lokalnie trywialna o włóknie standardowym S jest to surjektywna submersja $\pi : E \to M$ taka, że dla każdego punktu $x \in M$ istnieje otoczenie U punktu x oraz dyfeomorfizm (zwany lokalną trywializacją) $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times S$ taki, że

$$pr_1 \circ \psi = \pi_{|\pi^{-1}(U)} \ .$$

Rozmaitość E nazywa się przestrzenią totalną, M bazą, π rzutowaniem, zaś $E_x = \pi^{-1}(x)$ włóknem nad x.

Jeżeli dodatkowo, $S = W$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, włókna E_x są przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{R}$ oraz restrykcje

$$\psi_y : E_y \to \{y\} \times S$$

lokalnych trywializacji $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times S$ są izomorfizmami liniowymi to $\pi : E \to M$ nazywa się wiązką wektorową lokalnie trywialną o włóknie standardowym W.

Zaś jeżeli dodatkowo istnieje prawostronne działanie grupy Liego $G = S$ na $E = P$ oraz lokalne trywializacje $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ takie, że

$$\psi(p \cdot g) = \psi(p) \cdot g$$

(gdzie na $U \times G$ mamy prawostronne działanie G dane przez $(y, \eta) \cdot g) = (y, \eta g))$ to $\pi : P \to M$ nazywa się wiązką główną lokalnie trywialną o grupie strukturalnej G.

Przykład U. W związku z Przykładem K, wiązka styczna $\pi_{TM} : TM \to M$ jest wiązką wektorową lokalnie trywialną o włóknie standardowym $\mathbb{R}^m$.

Ćwiczenie K. Niech $\pi : E \to M$ będzie wiązką wektorową o włóknie standardowym W. Pokazać, że

$$\pi^{<*>} : E^* = \bigsqcup_{x \in M} E_x^* \to M$$

jest wiązką wektorową lokalnie trywialną o włóknie standardowym W^*. (**Wskazówka:** Dla lokalnej trywializacji $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times W$ zdefiniować lokalną trywializację $\psi^{<*>} : (\pi^{<*>})^{-1}(U) \to U \times W^*$ przyjmując $\psi_y^{<*>} = (\psi_y^*)^{-1}$.)

Ćwiczenie L. Niech $\pi^1 : E^1 \to M$ oraz $\pi^2 : E^2 \to M$ będą wiązkami wektorowymi o włóknach standardowych W^1 oraz W^2, odpowiednio. Pokazać, że

$$\pi^{\otimes} : \bigsqcup_{x \in M} E_x^1 \otimes E_x^2 \to M$$

jest wiązką wektorową o włóknie standardowym $W^1 \otimes W^2$. (**Wskazówka:** Dla lokalnych trywializacji $\psi^1 : (\pi^1)^{-1}(U) \to U \times W^1$ oraz $\psi^2 : (\pi^2)^{-1}(U) \to U \times W^2$ zdefiniować lokalną trywializację $\psi^{\otimes} : (\pi^{\otimes})^{-1}(U) \to U \times W^1 \otimes W^2$ przyjmując $\psi_y^{\otimes} = \psi_y^1 \otimes \psi_y^2$.)

Przykład W. W związku z ćwiczeniami K i L zastosowanymi do TM otrzymujemy wiązkę kostyczną

$$T^*M = (TM)^*$$

nad M oraz wiązki

$$T^{(r,s)}M = TM \otimes ... \otimes TM \otimes T^*M \otimes ... \otimes T^*M$$

(s razy T^*M oraz r razy TM) tensorów typu (r, s) nad M. Są to przykłady wiązek wektorowych lokalnie trywialnych.

Przykład Y. W związku z Przykładem P mamy wiązkę włóknistą główną $\pi : P^rM \to M$ ($\pi(j_0^r\varphi) = \varphi(0)$) o grupie strukturalnej G_m^r. Nazywa się ją przestrzenią reperów rzędu r. W przypadku $r = 1$ otrzymujemy przestrzeń reperów liniowych P^1M o grupie strukturalnej $GL(m) \tilde{=} G_m^1$.

Ćwiczenie M. Niech $\pi : P \to M$ będzie wiązką główną lokalnie trywialną o grupie strukturalnej G. Niech $\alpha : G \times S \to S$ będzie lewostronnym działaniem G na rozmaitości gładkiej S. Na zbiorze $P \times S$ definiujemy relację równoważności

$$(p_1, s_1) \sim (p_2, s_2) \text{ wtw } \exists_{g \in G}\ p_2 = p_1 \cdot g \text{ i } s_1 = g \cdot s_2\ .$$

Niech $P[S, \alpha, G] := (P \times S)/\sim$. Pokazać, że

$$q : P[S, \alpha, G] \to M\ ,\ q([p, s]) := \pi(p)$$

jest wiązką lokalnie trywialną.

(**Wskazówka:** Dla lokalnej trywializacji $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ (takiej, że $\psi(p \cdot g) = \psi(p) \cdot g$) definiujemy lokalną trywializację $\tilde{\psi} : q^{-1}(U) \to U \times S$ przyjmując

$$\tilde{\psi}([p, s]) = (\pi(p), (pr^2 \circ \psi(p)) \cdot s) \ ,$$

gdzie $pr^2 : U \times G \to G$ jest oczywistą projekcją.)

Definicja Q. Wiązkę lokalnie trywialną $P[S, \alpha, G]$ z ćwiczenia M nazywamy wiązką stowarzyszoną do P z włóknem standardowym S.

Bibliografia

[EpThu] D.B.A. Epstein, W.P. Thurston, Transformation groups and natural bundles, Proc. London Math. Soc. 38(1979), 219-236.

[KobNom] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundation Of Differential Geometry, Interscience Publishers, New York, 1963.

[Kol] I. Kolář, Weil bundles and generalized jet spaces, in: Handbook of Global Analysis, D. Krupka and D. Saunders (eds.), Elsevier, Amsterdam, 2008, 625-664.

[KolMicSlo] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák, Natural Operations i Differential Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Ma] K. Masuda, Homomorphisms of the Lie algebras of vector fields, J. Math. Soc. Japan 28(1976), 506-528.

[Mik] W.M. Mikulski, Locally determined associated spaces, J. London Math. Soc. 32(1985), 357-364.

[Nij] A. Nijenhuis, Natural bundles and their general properties, in: Differential Geometry, in Honor of Kentaro Yano, Kinokuniya, Tokio, 1992, 317-334.

[PaTe] R. Palais, C.L. Terng, Natural bundles have finite order, Topology 16 (1977), 271-277.

[Slo] J. Slovák, Peetre theorem for nonlinear operators, Ann. Global Anal. Geom. 6 (1988), 273-283.

[Za] A. Zajtz, The sharp upper bound on the order of natural bundles of given dimensions, Bull. Soc. Math. Belg. Sér B 39(1987), 347-357.

Pragnę złożyć podziękowania dla Pana Prof. Tadeusza Kuczumowa, dyrektora Instytutu Matematyki UMCS oraz Pana Prof. Stanisława Prusa, kierownika Studiów Doktoranckich Matematyki za zaproszenie do wygłoszenia wykładu w Instytucie Matematyki UMCS w Lublinie w okresie 25.10.2013-29.11.2013 w ramach zadania 5 pkt. 14 projektu Środowiskowe Studia Doktoranckie z Nauk Matematycznych.

Pragnę również złożyć podziękowanie dla Pana Prof. Jana Kurka za inicjatywę przeprowadzenia wykładu oraz opiekę w czasie wykładu.

Ponadto pragnę złożyć podziękowania dla Pani mgr Anny Bednarskiej za pomoc techniczną w przygotowaniu tekstu wykładu oraz dla Pana mgr Mariusza Plaszczyka za pomoc techniczną w przeprowadzeniu wykładu.

W.M.Mikulski
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. S. Łojasiewicza 6
Kraków
e-mail: Wlodzimierz.Mikulski@im.uj.edu.pl